Scheda storica

L'insieme dei razionali come ampliamento dei naturali

I numeri naturali

Risalgono alla preistoria le prime tracce dei numeri naturali: ossa di animali che portano incise delle intaccature, probabilmente usate per tenere il conto degli animali: ad ogni animale corrispondeva un'incisione e ogni giorno si controllava che non restassero incisioni senza un animale corrispondente.

Ancora oggi molti popoli primitivi tengono il conto delle pecore allo stesso modo: un'incisione su un tronco corrisponde ad un animale.

Ma questo non significa avere il concetto di numero; questo concetto si sviluppa successivamente ed è suggerito da alcune analogie ricorrenti:

- gli occhi, le orecchie, le braccia, etc. possono essere messi tutti in corrispondenza con le ali di un uccello e queste possono simbolizzare il numero 2;
- le zampe di un cavallo, di un bisonte, etc. possono essere messe in corrispondenza con le zampe di un cane e queste possono simbolizzare il numero 4;
- le dita di una mano possono simbolizzare il numero 5 e così via.

Il numero naturale così generato si basa dunque sul procedimento di mettere in corrispondenza due insiemi; non richiede ancora di *contare*.

È stata fatta l'ipotesi che l'arte del contare sia sorta insieme ai riti religiosi primitivi: per rappresentare i miti della creazione era necessario chiamare i partecipanti secondo un ordine particolare, e forse il contare fu inventato per rispondere a questa esigenza.

Questa ipotesi si accorda con la divisione dei numeri naturali in pari e dispari, i primi considerati femminili e i secondi maschili: simili distinzioni si trovano in molte civiltà sparse su tutta la Terra.

Le frazioni e i numeri decimali

Sembra che le tribù primitive non avessero bisogno delle frazioni: per le necessità pratiche si potevano scegliere unità piccole, che non dovevano essere suddivise.

È nelle grandi civiltà che si trovano le prime tracce delle frazioni. «Inventate» nell'antico Egitto, le frazioni dovettero aspettare ben 35 secoli per vedere definitivamente affermato il loro uso e la loro «traduzione» in numeri decimali: vedi «Le frazioni e i numeri decimali nella storia», p. 62.

I numeri negativi

L'introduzione dei numeri negativi non sembra legata strettamente ad immediati bisogni sociali: che senso può avere infatti togliere 5 «cose» da 3 «cose»?

Sembra perciò che l'introduzione dei numeri negativi sia dovuta all'interesse per indagini matematiche di tipo astratto. Tuttavia questo interesse nasce in epoche molto lontane: si trovano infatti cenni sui numeri col segno e sulle operazioni con questi numeri in tavolette babilonesi del XIX secolo a.C.

Ma i numeri negativi erano tanto lontani dall'uso abituale che, ancora nel Cinquecento, erano chiamati dal matematico italiano Raffaele Bombelli *numeri surdi*, cioè *numeri assurdi*: in effetti – dice Bombelli – è assurdo introdurre dei numeri più piccoli di niente!

Proprio per questo Bombelli nella sua *Algebra* cerca di rendere concreti questi strani numeri, appoggiandosi ad un esempio ancora oggi usato per introdurre i numeri negativi: «Se io mi trovassi con 15 scudi e fossi in debito di 20, una volta che avessi dato i 15, resterei debitore solo di 5, cioè avrei meno 5».

Operazioni impossibili e successivi ampliamenti dei naturali

Questa storia dei numeri a grandi tappe arriva dunque alla fine del Cinquecento con i numeri naturali, le frazioni, i numeri decimali ed i numeri negativi che compaiono nelle opere dei matematici o nei calcoli commerciali.

Tuttavia, i matematici dell'epoca continuavano a distinguere le operazioni in due categorie:

- *le operazioni dirette* (addizione e moltiplicazione), che erano *sempre possibili*, nel senso che la somma o il prodotto di due numeri naturali è sempre un numero naturale;
- *le operazioni inverse* (sottrazione e divisione) che erano *possibili solo sotto certe condizioni.*

Così si diceva che, per esempio, erano possibili solo operazioni come le seguenti:

$$5-3 \qquad 12:6 \qquad 0:4$$

che avevano come risultato dei numeri naturali.

Ma, a partire dal Seicento, comincia un'indagine approfondita sul concetto di numero; questa indagine, dopo più di due secoli, arriva alle conclusioni seguenti.

I. L'operazione di sottrazione può essere sempre possibile: basta considerare, oltre ai numeri naturali, i numeri negativi; si ottiene così l'insieme dei numeri interi.

II. Anche l'operazione di divisione può essere quasi sempre possibile: basta considerare, oltre ai numeri interi, anche le frazioni; cioè bisogna lavorare nell'insieme dei numeri razionali. Rimane però impossibile la divisione per 0.

Si arriva allora ad un'importante conclusione: *il termine «possibile» o «impossibile» non caratterizza una data operazione, ma è legato all'insieme di numeri in cui l'operazione agisce.*

In particolare, lavorando nell'insieme dei razionali, sono sempre possibili le quattro operazioni – addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione – con un'unica eccezione: la divisione per 0.

Il principio di conservazione delle proprietà formali

È solo alla fine del secolo scorso che lo studio sui fondamenti della matematica diventa più approfondito e sistematico; così si riflette anche sugli insiemi numerici. In particolare, si stabilisce che:

- gli interi e i razionali possono essere introdotti ampliando l'insieme dei numeri naturali;
- un insieme di numeri ottenuto ampliando i naturali deve rispettare alcune fondamentali condizioni.

Fra le condizioni da rispettare per ampliare correttamente i naturali si segnalano le seguenti:

1. nel nuovo insieme numerico è contenuto l'insieme dei naturali;
2. nel nuovo insieme si possono eseguire sempre l'addizione e la moltiplicazione e queste operazioni godono di tutte le proprietà valide per i naturali.

Queste condizioni, esposte in modo rigoroso nel 1867 dal matematico tedesco Hermann Hankel, sono note con il nome di «principio di conservazione delle proprietà formali».

Come si applica il principio di conservazione delle proprietà formali

Ecco un esempio che permette di capire come si applica questo principio: come si stabiliscono le regole della moltiplicazione fra interi, cioè perché si arriva alla regola dei segni, richiamata qui sotto.

I. $(+5)\cdot(+3)=+15$
II. $(+5)\cdot(-3)=-15$
III. $(-5)\cdot(+3)=-15$
IV. $(-5)\cdot(-3)=+15$

Per arrivare alla regola, si ragiona nel modo seguente:

I. *Se i due numeri sono positivi*, si applicano le regole valide per i naturali.

II. *Se il primo numero è positivo e il secondo è negativo*, si deve stabilire una regola che conservi tutte le proprietà delle operazioni valide per i naturali.
Così, per esempio, per calcolare:

$$5\cdot(-3)$$

si considera l'espressione:

$$5\cdot(3-3)$$

e si trova:

$$5\cdot(3-3)=5\cdot[3+(-3)]= \begin{cases} \nearrow\; 5\cdot 0=0 & \text{annullamento del prodotto} \\ \searrow\; 5\cdot 3+5\cdot(-3) & \text{proprietà distributiva} \end{cases}$$

Per mantenere le due proprietà, deve risultare:

$$5\cdot 3+5\cdot(-3)=0$$

da cui:

$$5\cdot(-3)=-5\cdot 3$$

III. *Se il primo numero è negativo ed il secondo è positivo*, si stabilisce di nuovo una regola che mantenga le proprietà valide per i naturali.
Per esempio, quando si calcola:

$$(-3)\cdot 5$$

deve risultare:

$$(-3)\cdot 5=5\cdot(-3) \qquad \text{proprietà commutativa}$$

Per mantenere la proprietà commutativa, deve allora risultare:

$$5\cdot(-3)=(-3)\cdot 5=-5\cdot 3$$

IV. *Se ambedue i numeri sono negativi*, si ripete il procedimento seguito per la regola II.
Per esempio, per calcolare:

$$(-5)\cdot(-3)$$

si considera l'espressione:

$$-5\cdot[3+(-3)]$$

e si trova:

$$-5\cdot[3+(-3)]= \begin{cases} \nearrow\; -5\cdot 0=0 & \text{annullamento del prodotto} \\ \searrow\; -5\cdot 3+(-5)\cdot(-3) & \text{proprietà distributiva} \end{cases}$$

Per mantenere le due proprietà , deve essere:

$$-5\cdot 3+(-5)\cdot(-3)=0$$

da cui:

$$(-5)\cdot(-3)=5\cdot 3$$

La regola dei segni, dunque, permette di ampliare i naturali con gli interi negativi, mantenendo però tutte le proprietà valide per i naturali.

Ragionamenti analoghi permettono di ampliare l'insieme degli interi, fino ad ottenere l'insieme dei razionali (fig. 1).

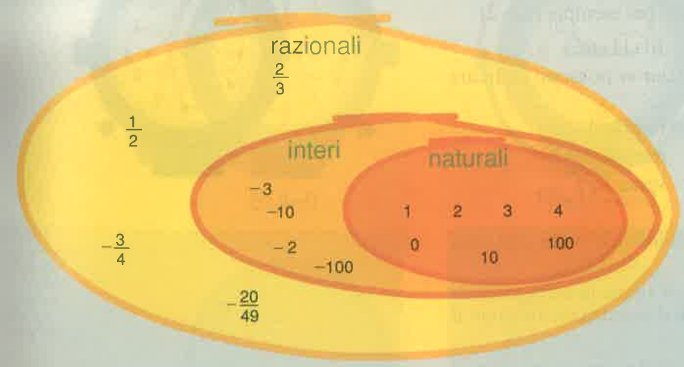

Figura 1
L'insieme dei razionali