Grafico di un quoziente di polinomi

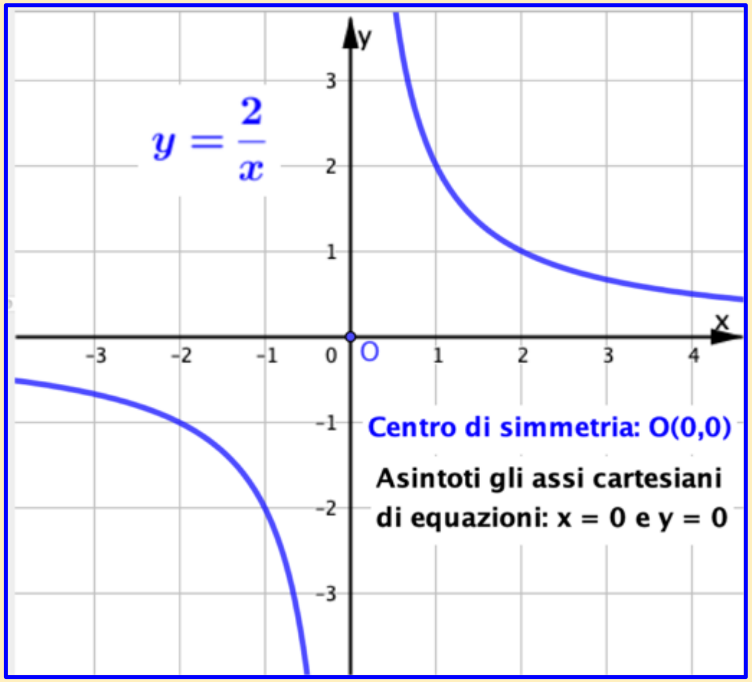
Un quoziente di polinomi prende anche il nome di *funzione razionale fratta*

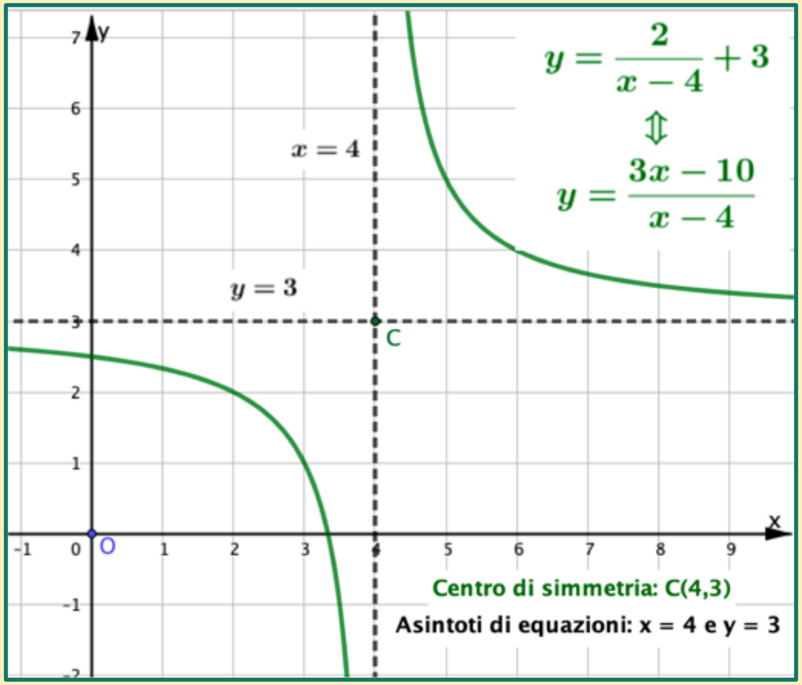
Quoziente di polinomi

PRIMI ESEMPI

$$y = \frac{2}{x} \qquad y = \frac{3x-10}{x-4}$$

Per ogni funzione otteniamo **un'iperbole equilatera: gli asintoti sono perpendicolari**





Caratteristiche di un quoziente di polinomi

Funzione che può essere scritta con una formula del tipo

$$y = \frac{N}{D}$$

o anche

$$y = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

dove N e D sono due polinomi

Dominio

- **è l'insieme dei numeri reali, escluse solo le radici del denominatore D (per cui risulta D = 0)**
- **è illimitato.**

Asintoti

Puoi trovare asintoti verticali, obliqui, orizzontali.

Un quoziente di polinomi scritto in altra forma

Esempi

$$y = -\frac{3}{x} \Rightarrow xy = -3$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{xy + 3 = 0}$$

Polinomio di 2^0 grado nelle variabili *x* e *y* uguagliato a 0

$$y = \frac{4}{3x^2} \Rightarrow 3x^2y = 4$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{3x^2y - 4 = 0}$$

Polinomio di 3^0 grado nelle variabili *x* e *y* uguagliato a 0

FUNZIONI ALGEBRICHE

Funzioni che si possono scrivere nella forma di un polinomio nelle variabili x, y uguagliato a zero.
Il grado del polinomio è il grado della funzione.

Stefano Volpe e Daniela Valenti, 2023

Il grafico di un quoziente di polinomi

Per studiare con carta e penna il grafico di una di queste funzioni puoi basarti sul procedimento già seguito per il grafico dei polinomi.

Ma comincerai con:

- **la ricerca del dominio;**
- **il calcolo di eventuali asintoti verticali, orizzontali oppure obliqui.**

E continuerai con:

- **la ricerca di elementi di simmetria;**
- **lo studio del segno della funzione f(x) e delle sue derivate f'(x) e f''(x).**

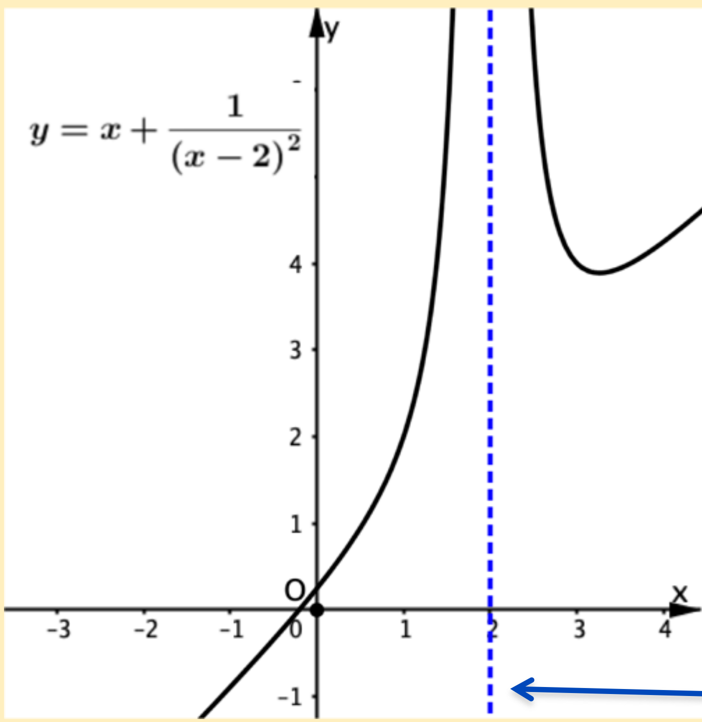
Ricordo come determinare gli asintoti del grafico una funzione $y = f(x)$

Come determinare un asintoto verticale

Una curva d'equazione $y = f(x)$ ammette un asintoto d'equazione $x = a$, se si verificano le seguenti condizioni:

1. Il numero a è escluso dal dominio di $f(x)$;
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

ESEMPIO



DOMINIO

Numeri reali escluso 2

$$\lim_{x \to 2} \left[x + \frac{1}{(x-2)^2} \right] = \infty$$

$$\Downarrow$$

Asintoto verticale d'equazione

$\boldsymbol{x = 2}$

Come determinare l'asintoto obliquo

Ecco come calcolare i coefficienti *m* e *q* in modo che la retta d'equazione $y = mx + q$ sia asintoto per il grafico di $y = f(x)$.

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]}$$

Se non trovo entrambi i limiti finiti, la curva non ha un asintoto obliquo.
Se trovo m = 0, la curva ha un asintoto orizzontale

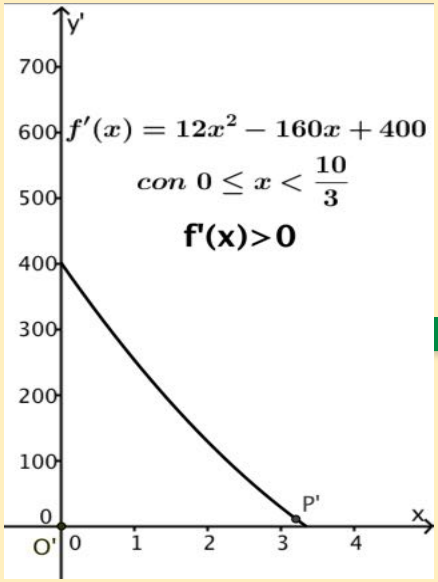
Ricordo il ruolo del segno delle derivate nello studio del grafico di una funzione

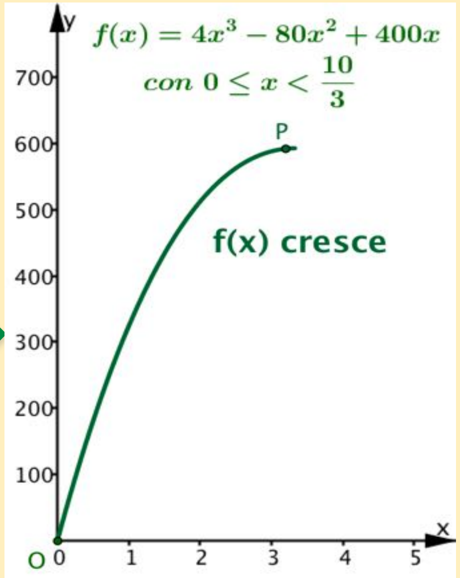
Lo studio del grafico di una funzione è basato su:

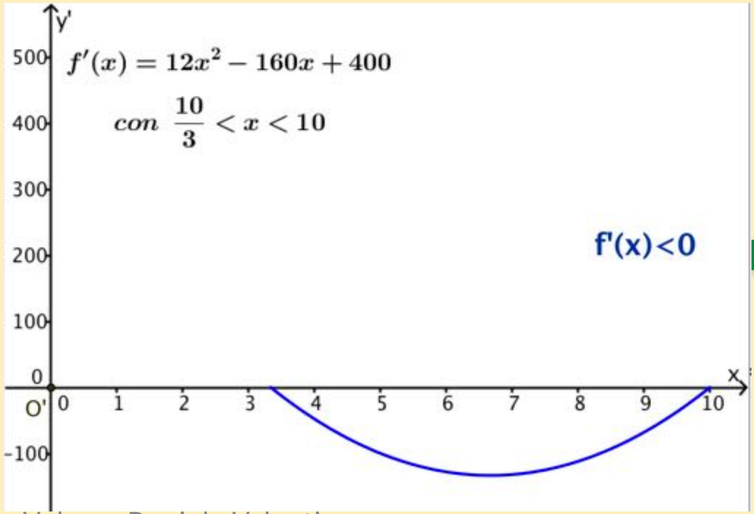
- **una relazione fra il segno della derivata f'(x) di una funzione f(x) e l'andamento crescente o decrescente del grafico di f(x);**
- **una relazione fra il segno della derivata seconda f''(x) e la concavità verso l'alto o verso il basso del grafico di f(x).**

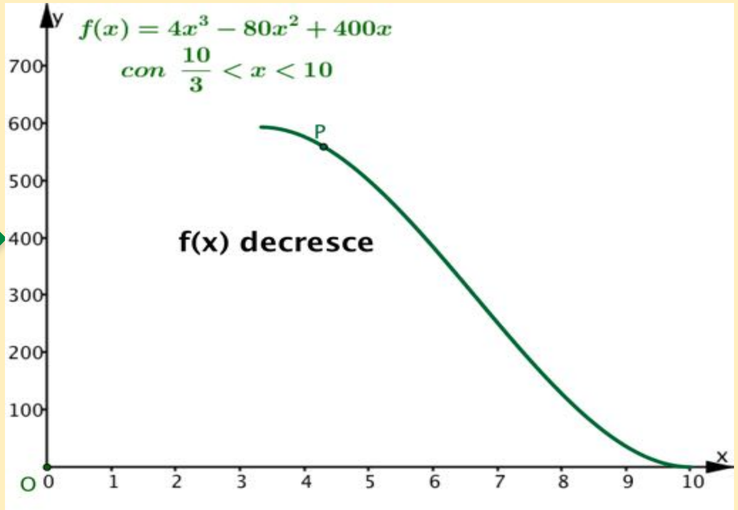
Ecco una sintesi grafica di queste relazioni.

Segno di f’(x) e crescita o decrescita di f(x)

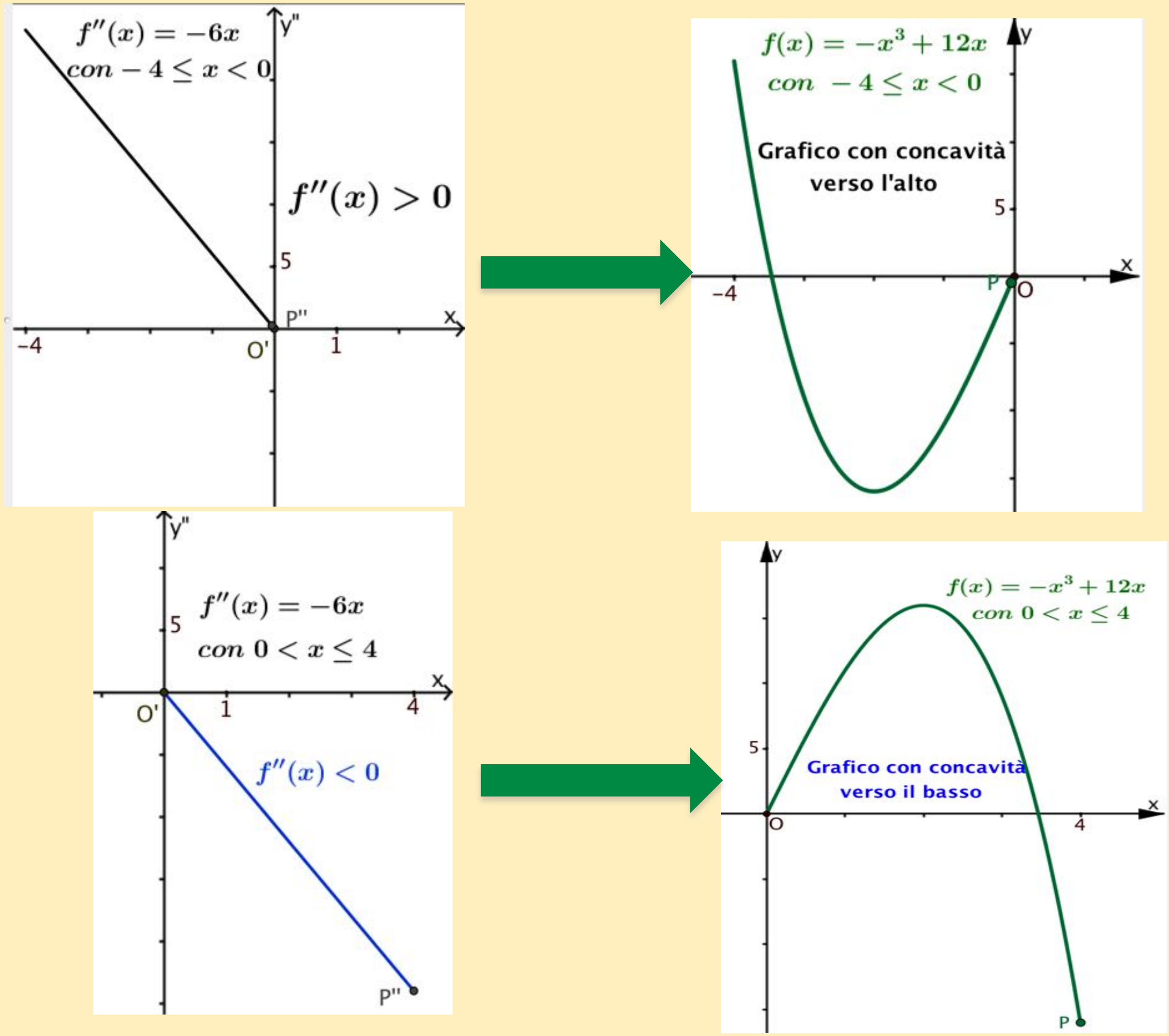








Segno di f"(x) e concavità del grafico di f(x)



Studiare il grafico di un quoziente di polinomi

Un primo esempio

Studiare il grafico della funzione

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

1. Prime caratteristiche della funzione

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

- **Determino il dominio della funzione**

  Denominatore = $x - 2 = 0$ per $x = 2$

  Il dominio è l'insieme R escluso 2

- **Determino il grado della funzione**

$$y(x-2) = x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - xy + 2y = 0$$

Funzione algebrica di 2^0 grado

Il grafico è un'iperbole

2. Asintoti

Asintoto verticale

Il numero escluso dal dominio è 2

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Asintoto verticale di equazione: $x = 2$

Asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$

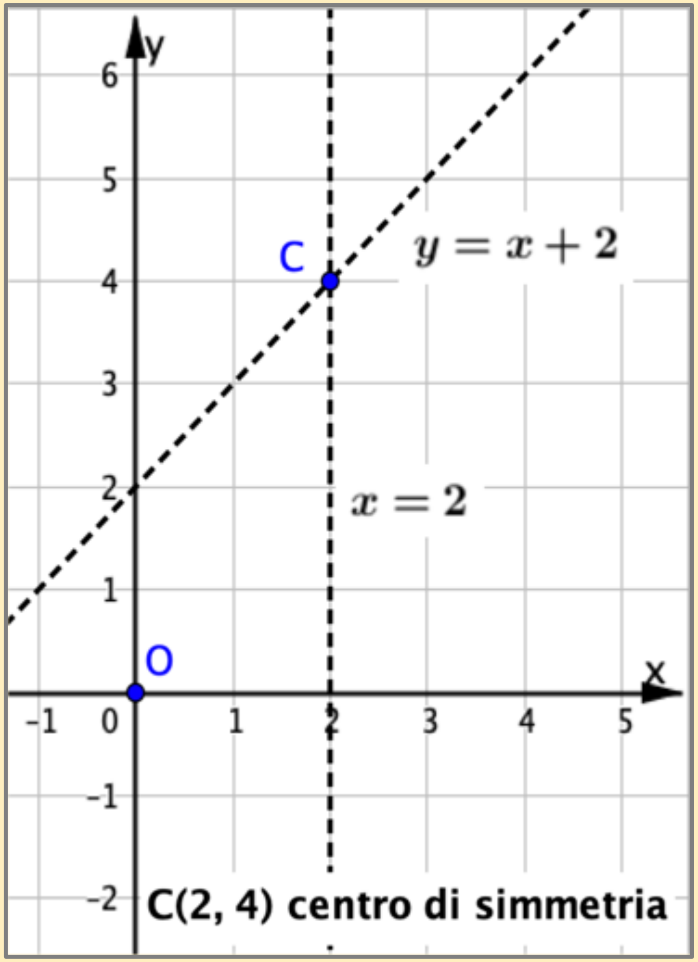
Dominio illimitato

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} - x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = 2 \Rightarrow q = 2$$

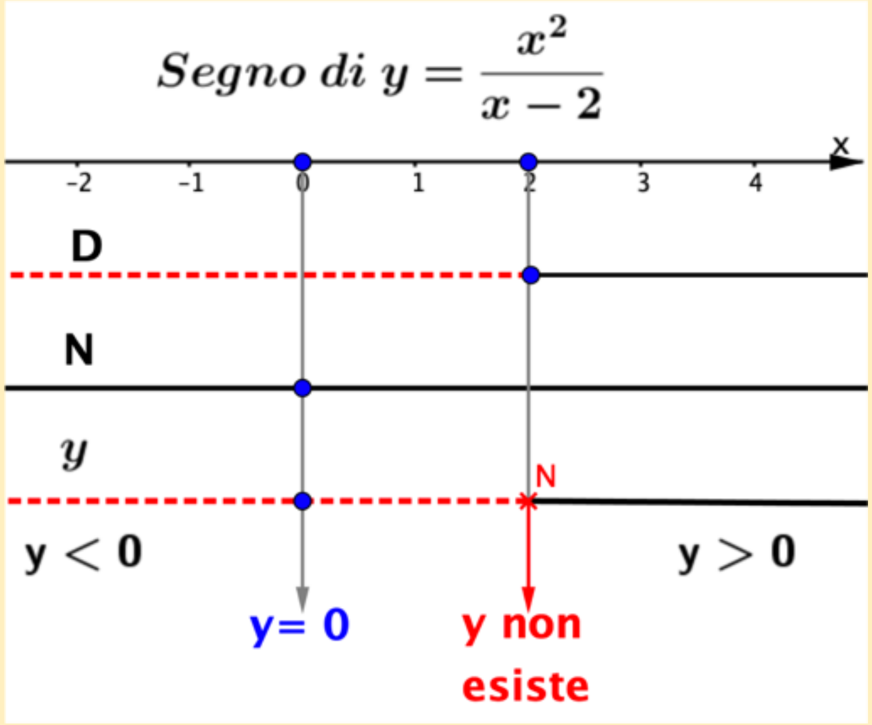
Asintoto obliquo di equazione: $y = x + 2$

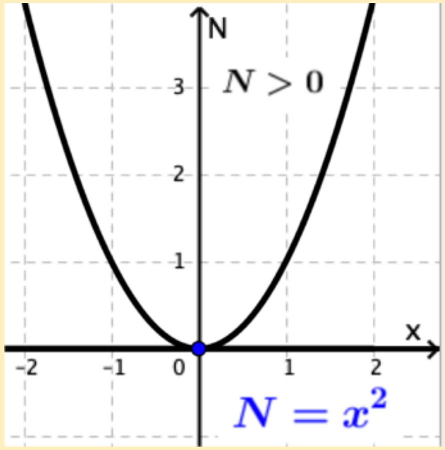


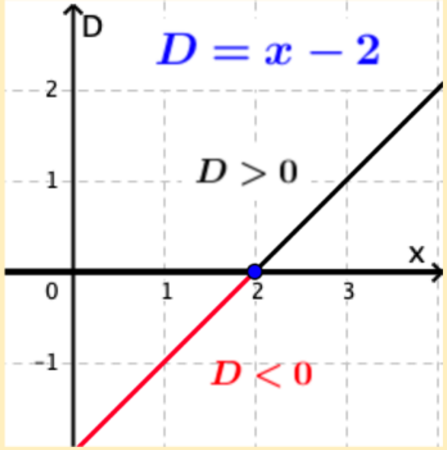
Gli asintoti non sono perpendicolari, perciò l'iperbole non è equilatera

3. Segno di $y = \frac{x^2}{x-2}$

a. Studio il segno del numeratore $N = x^2$
b. Studio il segno del denominatore $D = x - 2$
c. Determino il segno del quoziente y.

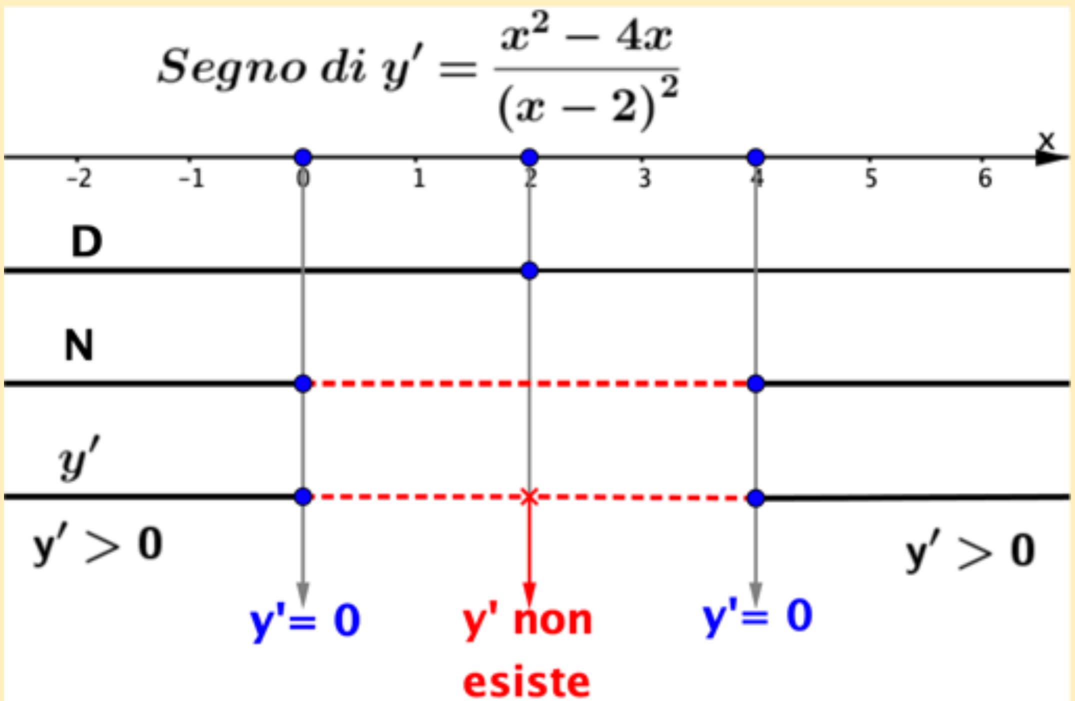


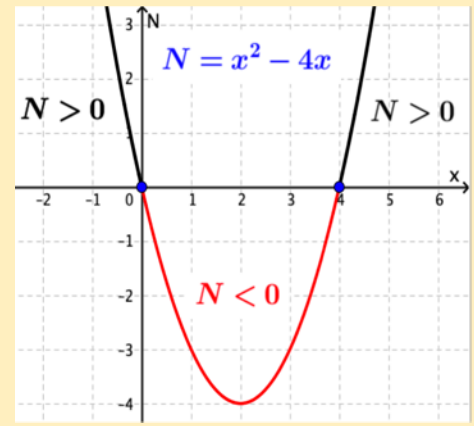


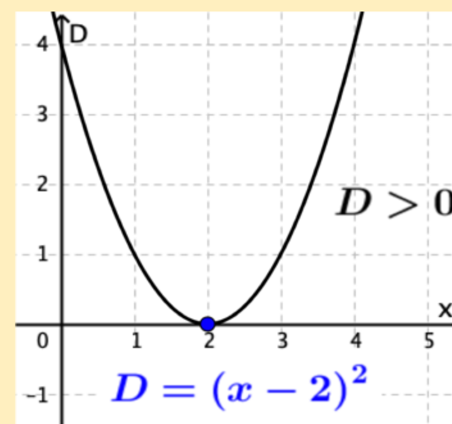


4. Segno di $y' = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

a. Studio il segno del numeratore $N = x^2 - 4x$
b. Studio il segno del denominatore $D = (x-2)^2$
c. Determino il segno del quoziente y'.

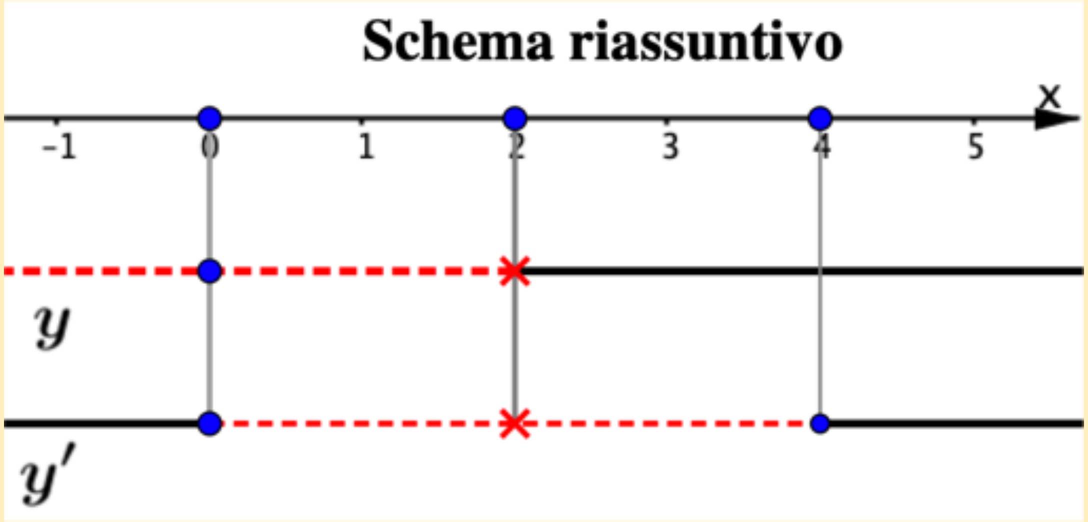






5. Riassumo tutte le informazioni

Il grafico della funzione è un'iperbole, che non ha flessi, perciò non studio il segno di y''.
Riassumo in un unico schema il segno di y e y'.



Equazioni degli asintoti: $x = 2$ **e** $y = x + 2$
Centro di simmetria: $C(2, 4)$

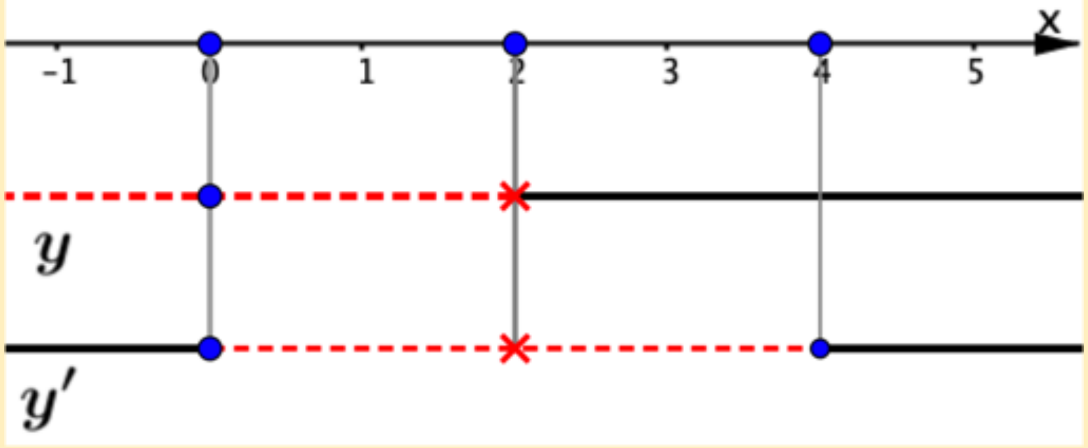
6. Calcolo le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero $f(x)$ o $f'(x)$

Equazioni degli asintoti: $x = 2$ e $y = x + 2$

Centro di simmetria: $C(2, 4)$

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

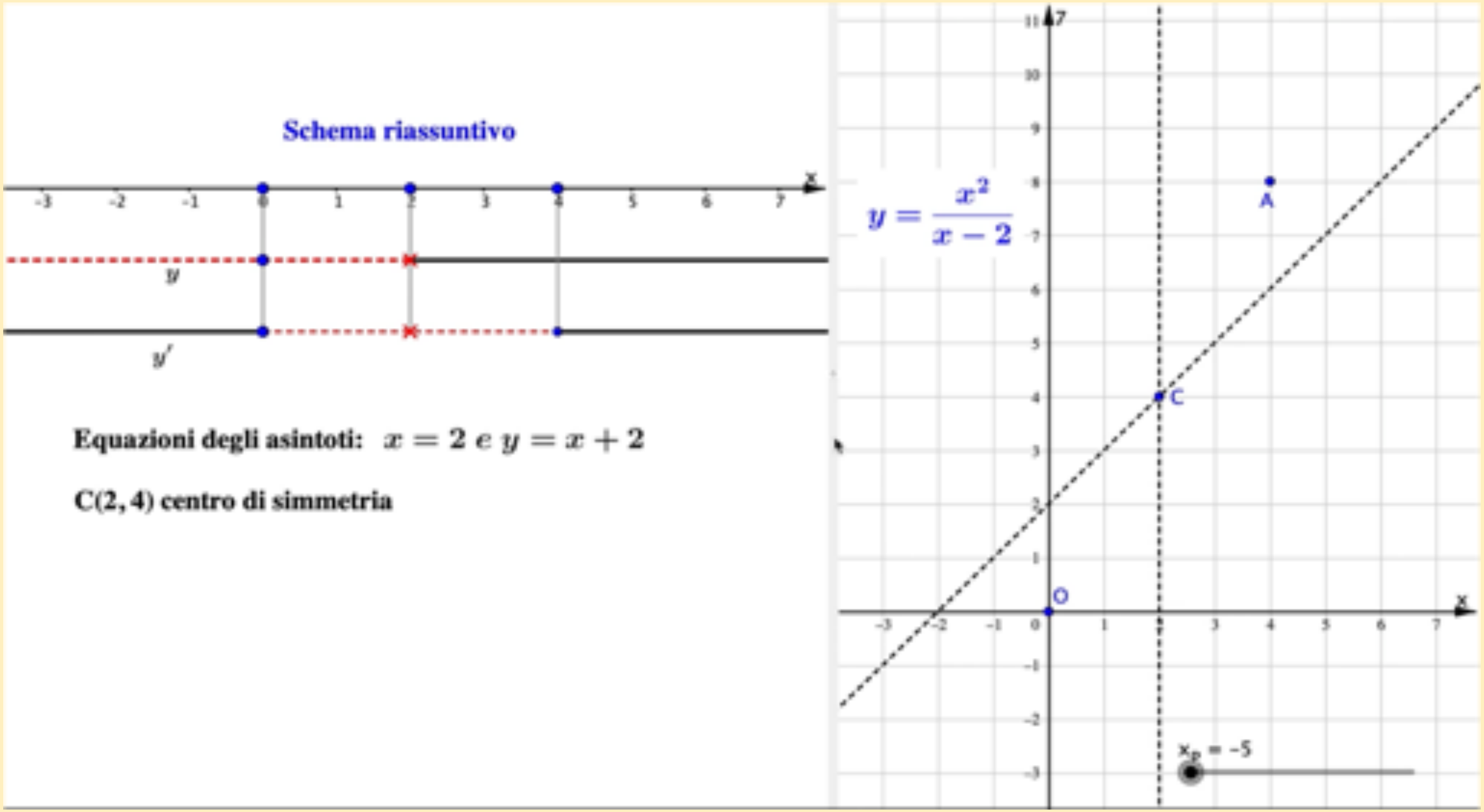
Schema riassuntivo



$O(0; 0) \quad x_O = 0 \;, \; y_O = \frac{0^2}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0$

$A(4; 8) \quad x_A = 2 \;, \; y_A = \frac{4^2}{4-2} = \frac{16}{2} = 8$

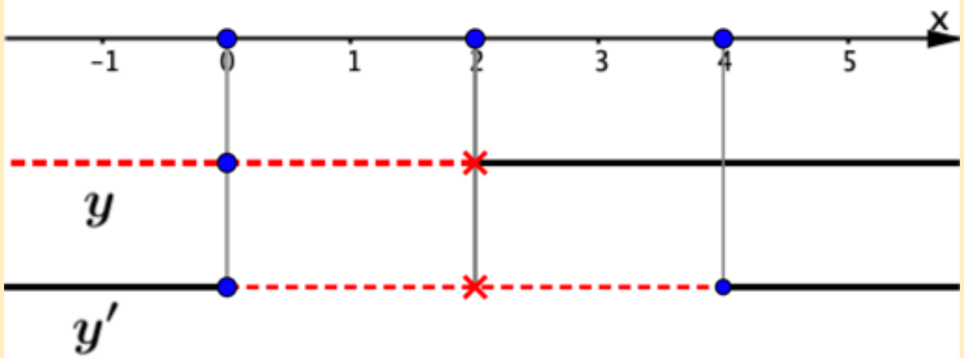
7. Traccio il grafico della funzione



VIDEO

Il grafico è completo

Schema riassuntivo

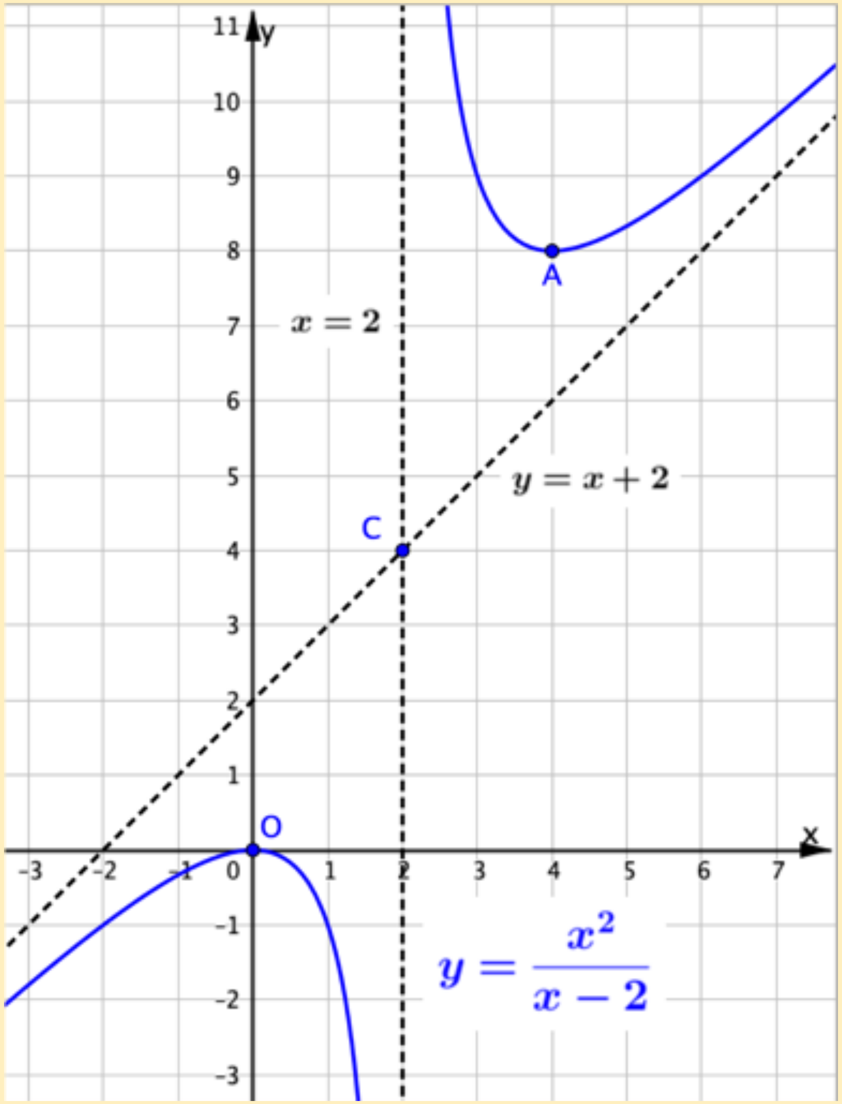


O(0, 0) punto di massimo relativo

A(4, 8) punto di minimo relativo

Equazioni degli asintoti: $x = 2$ e $y = x + 2$

C(2, 4) centro di simmetria



Stefano Volpe e Daniela Valenti, 2023

Attività

Completa la scheda di lavoro per tracciare il grafico di un altro quoziente di polinomi

Revisione dell’attività svolta

Quesito 1

Completa il procedimento per tracciare il grafico di

$$y=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. Prime caratteristiche del grafico

Qual è il dominio della funzione?

Insieme dei numeri reali escluso 1

– Qual è il grado della funzione? 3°

$$y=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Rightarrow x^3-x^2y+2xy-y=0$$

– La funzione è pari o dispari?

La funzione non è né pari né dispari

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} \qquad -f(x)=\frac{-x^3}{(x-1)^2}$$

Quesito 2

2. Determina le equazioni degli eventuali asintoti

Ricerca di asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\infty \Rightarrow \text{asintoto d'equazione } x=1$$

Ricerca di asintoto obliquo d'equazione $y = mx + q$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=1\Rightarrow\ m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-2x+1}=2\Rightarrow\ q=2$$

Gli asintoti della curva hanno equazioni:

$$x=1 \quad \text{e} \quad y=x+2$$

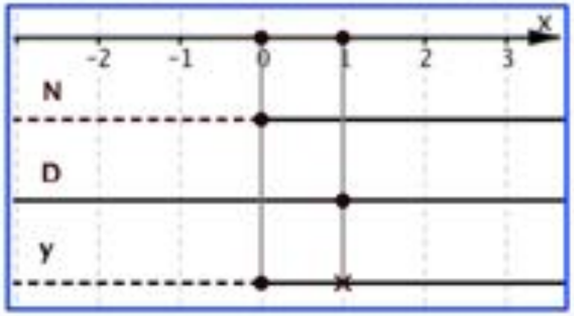
Quesiti 3, 4, 5

3. Completa lo studio del segno di y, anche nello schema a fianco.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$$

N ha il segno di x

$\mathrm{D} = (x-1)^2$ è positivo per $x \neq 1$



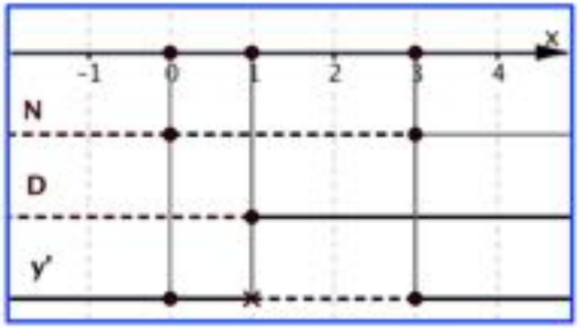
4. Calcola $y' = f'(x)$ e riassumi il segno nello schema a fianco

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

N ha il segno di $(x - 3)$

e vale 0 per per $x = 3$ o $x = 0$

D ha il segno di $(x - 1)$



5. Calcola la derivata $y'' = f''(x)$

$$y'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

y'' ha il segno di x.

Quesiti 6, 7, 8

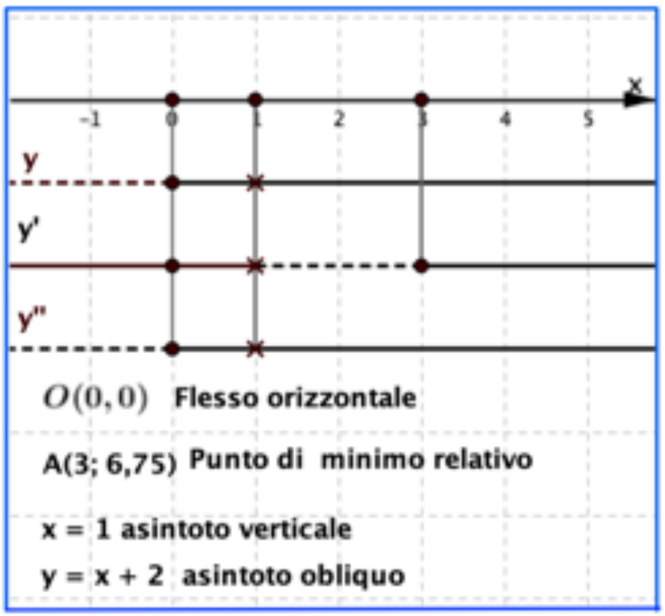
6. Riassumi in un unico schema (sotto a sinistra) il segno della funzione e delle sue derivate.

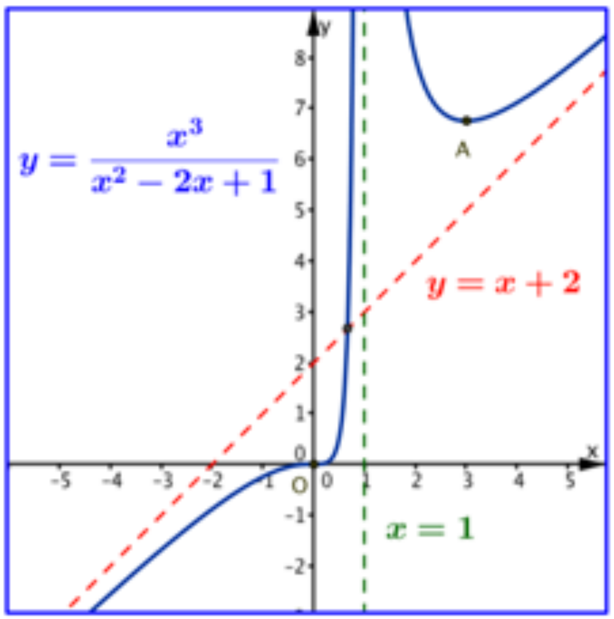
7. Elenca qui sotto i punti notevoli; determinane le ordinate e scrivi l'elenco dei punti sotto lo schema riassuntivo.

O(0; 0) A(3; 6,75) $y_A = \dfrac{3^3}{(3-1)^2} = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$

8. Nel piano cartesiano traccia il grafico della funzione e dei suoi asintoti, a partire da tutte le informazioni ottenute.

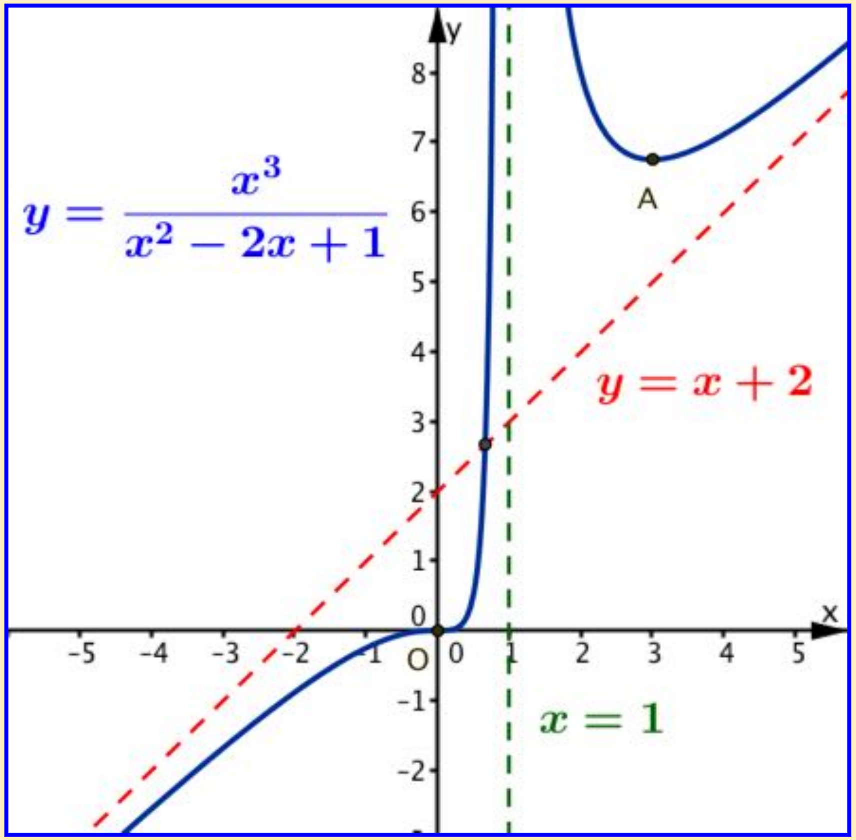
***O* flesso**
con
***y'*(0) = 0**





Un’osservazione

La curva attraversa il suo asintoto obliquo, mentre non può attraversare il suo asintoto verticale, perché il numero 1 non fa parte del dominio della funzione.



Studiare il grafico di una funzione

Il procedimento completo qui seguito si può applicare per studiare il grafico di qualunque altra funzione.
Un'avvertenza: per calcolare gli asintoti obliqui, la funzione assegnata deve avere insieme di definizione illimitato. Questo si verifica sempre per i quozienti di polinomi, mentre ci sono altre funzioni che hanno un insieme di definizione limitato.
Qui sotto richiamo due esempi.