Asintoti. Esercizi

Asintoti d'equazione y = mx + q

Una funzione $y = f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y = mx + q$ solo se sono verificate le seguenti due condizioni:

A. Il dominio è illimitato.

B. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$

con m e q numeri reali, che possono anche essere 0.

Esercizio guidato

Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti, a partire dalla funzione assegnata nell'esercizio 1:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina l'equazione del suo asintoto obliquo.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_0x+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\dots+b_p\,x^p} = \begin{cases} \infty & \text{se } n>p \\ 0 & \text{se } n<p \\ \dfrac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p \end{cases}$$

1. $y = \frac{x^2+2}{x-2}$

A. Denominatore …………= 0 per ……………

il dominio è R, escluso … ed è illimitato.

B. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{\dots} = \cdots\cdots \Rightarrow m = \cdots$

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] =$ …………………..………… $\Rightarrow q = \cdots$

L'asintoto obliquo ha equazione ……….

A partire da ogni funzione data negli esercizi da 2 a 10 risolvi i seguenti quesiti:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina l'equazione del suo asintoto obliquo.*

2. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ $\qquad y = \frac{4x^2-1}{2x+3}$

3. $y = \frac{x^2+x-4}{x-1}$ $\qquad y = \frac{4x^2+3x}{2x-1}$

4. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $\qquad y = \frac{x^3-1}{x^2+x}$

5. $y = \frac{2x^3+3x^2}{x^2+1}$ $\qquad y = \frac{x^3+1}{x^2-x}$

6. $y = \frac{x^4+2x}{x^3-2}$ $\qquad y = \frac{x^4-1}{x^3+x}$

7. $y = 2x + \frac{1}{x}$ $\qquad y = \frac{1}{x} - 2x$

8. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$ $\qquad y = \frac{1}{x^2} - \frac{x}{2}$

9. $y = 2x - 3 + \frac{1}{x}$ $\qquad y = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

10. $y = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ $\qquad y = 3x + 2 + \frac{4}{x^2}$

11. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno l'asintoto obliquo d'equazione $y = x$.
[*Gli esercizi 7 -10 suggeriscono varie risposte. Un primo esempio è* $y = x + \frac{1}{x}$]

12. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno l'asintoto d'equazione $y = 3x - 4$.

13. Dimostra che è vera la seguente affermazione: «una funzione $f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y = mx + q$, se sono verificate le seguenti condizioni:
- è possibile scrivere la funzione nella forma $y = mx + q + g(x)$;
- risulta $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$»

14. Dimostra che è vera la seguente affermazione: «una funzione $f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y = mx + q$, se sono verificate le seguenti condizioni:
A. il dominio è illimitato;
B'. risulta $\lim_{x\to\infty} f'(x) = m$ e $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$ »
[*Applica il teorema di de l'Hôpital alla condizione* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$]

Esercizi guidati

Completa il procedimento per spiegare perché ***non*** *hanno asintoti obliqui le funzioni date negli esercizi 15 e 16.*

15. a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ **b.** $f(x) = \frac{x^3+4x^2-5x+1}{2x-3}$

a. *Il dominio è ……………………*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{\dots .} = \cdots\cdots$$

Non è verificata la condizione …..

b. *Il dominio è ……………………*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 1}{\dots\dots\dots\dots..} = \cdots\cdots$$

Non è verificata la condizione …..

16. a. $f(x) = \text{arcsen}(x)$ **b.** $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ (Figure 1 e 2)

a. *Il dominio è ……………………*

Non è verificata la condizione …..

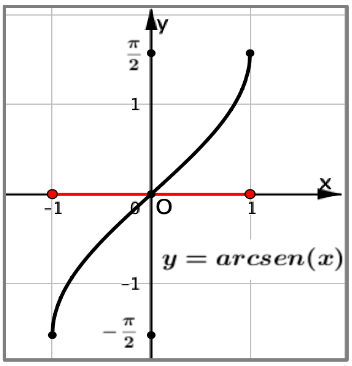
b. *Determino il dominio: deve essere* $4x - x^2 \geq 0$

………………………………………………………

Perciò il dominio è ………

Non è verificata la condizione……

Fig. 1



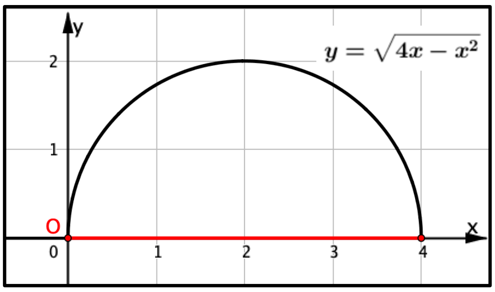


Fig. 2

*Spiega perché **non** hanno asintoti obliqui le funzioni date negli esercizi da 17 a 21*

17. $y = 2x^3 - 3x^2 + 4$ $\qquad$ $y = x^4 + 2x^3 - 5x$

18. $y = \frac{x^3+1}{2x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{x^4+5}{4x^2-3}$

19. $y = \sqrt{9x - x^2}$ $\qquad$ $y = \sqrt{9 - x^2}$

20. $y = \text{arcsen}(x)$ $\qquad$ $y = \arccos(x)$

21. Scrivi due funzioni che sono quozienti di polinomi e **non** hanno asintoti d'equazione $y = mx + q$.

Asintoti d'equazione y = q

Una funzione $y = f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y = q$ solo se sono verificate le seguenti due condizioni:

A. Il dominio è illimitato.

B. $\lim_{x\to\infty} f(x) = q$

con q numero reale, che può anche essere 0.

Esercizio guidato

Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti, a partire dalla funzione assegnata nell'esercizio 22:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina l'equazione del suo asintoto orizzontale.*

22. $y = \frac{2x+3}{x-4}$

A. *Denominatore ………….= 0 per ………*

il dominio è R, escluso … ed è ……………..

B. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\dots\dots} = \cdots \Rightarrow q = \cdots$

L'asintoto orizzontale ha equazione ……….

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_p\,x^p} = \begin{cases} \infty & \text{se } n>p \\ 0 & \text{se } n<p \\ \frac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p \end{cases}$$

A partire da ogni funzione data negli esercizi da 23 a 31 risolvi i seguenti quesiti:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina l'equazione del suo asintoto orizzontale.*

23. $y = \frac{3x+1}{x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{4x-1}{2x+5}$

24. $y = \frac{x-1}{4x^2-1}$ $\qquad$ $y = \frac{x+2}{3x^2-6x}$

25. $y = \frac{2x^2}{x^2-3x}$ $\qquad$ $y = \frac{4x^2-1}{2x^2+x}$

26. $y = \frac{2x^2+3x-1}{x^3-1}$ $\qquad$ $y = \frac{x^2+2x+1}{x^3-4x^2}$

27. $y = \frac{x^3+2x}{x^3-8}$ $\qquad$ $y = \frac{3x^4-1}{x^4+x^3}$

28. $y = 2 + \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x} - 2$

29. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$

30. $y=3+\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y=1-\frac{2}{x-1}$

31. $y=-4+\frac{2}{x+1}$ $\qquad$ $y=\frac{2}{3}+\frac{4}{x^2}$

32. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno l'asintoto d'equazione $y = 3$.
[*Gli esercizi 28 -31 suggeriscono varie risposte. Un primo esempio è* $y=3+\frac{1}{x}$]

33. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno l'asintoto d'equazione $y = -5$

34. Dimostra che per le funzioni del tipo $y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_px^p}$
trovi i seguenti risultati:

A. Se $n < p$ il grafico ha come asintoto l'asse delle x, di equazione $y = 0$.

B. Se $n = p$, il grafico ha come asintoto la retta di equazione $y=\frac{a_n}{b_p}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_p\,x^p}=\begin{cases}\infty & \text{se } n>p\\ 0 & \text{se } n<p\\ \frac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p\end{cases}$$

C. Se $n = p + 1$, il grafico ha un asintoto obliquo con pendenza $m=\frac{a_n}{b_p}$

D. Se $n > p + 1$, il grafico **non ha** un asintoto obliquo d'equazione $y = mx + q$

Asintoti d'equazione x = a

Una funzione $y = f(x)$ ha un asintoto d'equazione $x = a$ solo se sono verificate le seguenti due condizioni:

A. Il numero a è escluso da dominio.

B. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti, a partire dalle funzioni assegnate nell'esercizio 35:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina le equazioni degli eventuali asintoti verticali.*

35.a. $y=\frac{x^2+3}{x^2-2x-3}$

A. *Denominatore ………… .= 0 equazione di 2⁰ grado completa.*

Calcolo $\Delta=(-2)^2-\cdots\cdots=\cdots$ *e quindi* $x=\frac{2\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ =……………………….

Risulta Denominatore = 0 per $x=$ ……. *e* $x=$ …..

Il dominio è R esclusi ……………………………

B. $\lim_{x\to\cdots}\frac{x^2+3}{x^2-x-1}=\cdots$ *e* $\lim_{x\to\cdots}\frac{x^2+3}{x^2-x-1}=\cdots$

La funzione data ha gli asintoti verticali di equazione ……………………………….

35b. $y=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

A. *Denominatore ………… .= 0 equazione di 2⁰ grado completa.*

Calcolo $\Delta=(-2)^2-\cdots\cdots=\cdots$ *e quindi* $x=\frac{2\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ =……………………..

Risulta Denominatore = 0 per $x=$ …….

Il dominio è R escluso …………………………

B. $\lim_{x\to\cdots}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ *forma indeterminata del tipo* …….

Applico il teorema di ……………… *e ottengo* $\lim_{x\to\cdots}\frac{2x}{\cdots\cdots}=\cdots$

La funzione data non ha ……………………..

A partire da ogni funzione data negli esercizi da 36 a 43 risolvi i seguenti quesiti:

A. *Determina il dominio della funzione.*

B. *Determina l'equazione dei suoi asintoti verticali.*

36. $y=\frac{1}{x}$ $\qquad y=\frac{2}{x^2}$

37. $y=\frac{2}{x-1}$ $\qquad y=\frac{4}{(x-1)^2}$

38. $y=\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ $\qquad y=\frac{2x}{(x+1)^2}$

39. $y=\frac{x^2+2x}{1-x^2}$ $\qquad y=\frac{1-x^2}{x^2+x}$

40. $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$ $\qquad y=\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}$

41. $y=\frac{2x-1}{4x^3-x}$ $\qquad y=\frac{x+3}{x^3-4x}$

42. $y=\frac{x^3-1}{(x-1)^2}$ $\qquad y=\frac{x^2+1}{1-x^4}$

43. $y=\frac{x^3-2x}{x^3-8}$ $\qquad y=\frac{3x^4-1}{x^4+x^3}$

Spiega perché ***non*** *hanno asintoti verticali le funzioni date negli esercizi da 44 a 47.*

44. $y=x^4-2x^3$ $\qquad y=2x^3+5x^2-8$

45. $y=\frac{x^2-x}{x}$ $\qquad y=\frac{x^4-1}{x^2-1}$

46. $y=\frac{x}{x^2+1}$ $\qquad y=\frac{2x-1}{x^2+x+3}$

47. $y=\frac{x-3}{x^4+1}$ $\qquad y=\frac{x}{x^4+3x^2+2}$

48. Scrivi due quozienti di polinomi che **non** hanno asintoti verticali.

49. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno l'asse delle *y* come asintoto verticale.

50. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno come asintoti verticali le rette d'equazione $x=1$ e $x=2$.

[*Gli esercizi 36 -38 suggeriscono varie risposte. Un esempio è* $y=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$]

Esercizi riassuntivi sugli asintoti

Esercizio guidato

Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti, a partire dalla funzione assegnata nell'esercizio 51.

- ***A.*** *Determina il dominio della funzione*
- ***B.*** *Determina gli eventuali asintoti d'equazione x = a.*
- ***C.*** *Determina gli eventuali asintoti d'equazione y = mx + q (anche con m = 0)*

51. $y = \frac{2x^3+3x^2-4}{x^2-4x}$

A. *Denominatore = ……………………………………. = 0 per x = ……. e x = …….*

Il dominio è R esclusi …………………………, che è illimitato

B. $\lim_{x\to\cdots} \frac{2x^3+3x^2-4}{\dots\dots\dots} = \cdots$ *e* $\lim_{x\to\cdots} \frac{2x^3+3x^2-4}{\dots\dots\dots} = \cdots$

La funzione data ha gli asintoti verticali di equazione ………………………………….

C. $\lim_{x\to\cdots} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-4}{\dots\dots\dots\dots} = \cdots\cdots \Rightarrow m = \cdots$

$\lim_{x\to\cdots} [f(x) - mx] = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \Rightarrow q = \cdots$

L'asintoto è obliquo e ha equazione …………….

A partire da ogni funzione data negli esercizi da 52 a 60 risolvi i seguenti quesiti:

- ***A.*** *Determina il dominio della funzione*
- ***B.*** *Determina gli eventuali asintoti d'equazione x = a.*
- ***C.*** *Determina gli eventuali asintoti d'equazione y = mx + q (anche con m = 0)*

52. $y = \frac{x+1}{x-1}$ $\qquad y = \frac{2x-1}{x+3}$

53. $y = \frac{x}{x^2-1}$ $\qquad y = \frac{x^2+4}{x^4-1}$

54. $y = \frac{3-2x^2}{x^2-4x+4}$ $\qquad y = \frac{2x^2-3}{4x^2+4x+1}$

55. $y = \frac{x^2-x+1}{x-3}$ $\qquad y = \frac{x^2-x+3}{x+4}$

56. $y = \frac{x^2+2x}{x+4}$ $\qquad y = \frac{x^2}{x+1}$

57. $y = \frac{x^3-x^2+x}{1-x^2}$ $\qquad y = \frac{-2x^3-5x^2+3}{x^2+4x}$

58. $y = \frac{(x+2)^3}{(2-x)^2}$ $\qquad y = \frac{x^3+3x^2-9x}{(x+3)^2}$

59. $y = x^3 - 3x^2 + 4x$ $\qquad y = x^4 + 2x^3 - 5$

60. $y = \frac{x^4}{x^2+1}$ $\qquad y = \frac{x^5+2x^2}{x^2+x+3}$

61. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno gli asintoti di equazioni $x = 1$ e $y = 2$.

[*Gli esempi più facili sono le funzioni del tipo* $y = 2 + \frac{k}{x-1}$]

62. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno gli asintoti di equazioni $x = 1$, $x = -1$ e $y = x$.

[*Gli esempi più facili sono le funzioni del tipo* $y = x + \frac{k}{(x-1)(x+1)}$]

63. Scrivi due quozienti di polinomi che hanno gli asintoti di equazioni $x = 2$, $x = 3$ e $y = 2x - 1$.

[*Gli esempi più facili sono le funzioni del tipo* $y = 2x - 1 + \frac{k}{(x-2)(x-3)}$]

64. Determina la curva che ha per asintoti le rette di equazioni $x = 1$ e $y = 2$ fra i grafici delle funzioni $y = \frac{ax}{x+b}$.

65. Determina la curva che ha per asintoto le retta di equazione $y = 5x + 1$ fra i grafici delle funzioni $y = \frac{2kx^3+x^2}{x^2+3k}$

66. Determina la curva che ha per asintoto le retta di equazione $y = 2x + 2$ fra i grafici delle funzioni $y = \frac{ax^2}{x+b}$

67. Determina la curva che ha per asintoto le retta di equazione $y = 3x - 1$ fra i grafici delle funzioni $y = \frac{ax^3+bx^2+1}{x^2}$.

68. Fra le seguenti affermazioni scegli quelle vere (**V**) e quelle false (**F**)

A. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto d'equazione $x = a$ **V F**

B. Un quoziente di polinomi ha un asintoto verticale in corrispondenza di ogni valore di x che annulla il denominatore. **V F**

C. Un quoziente di polinomi ha un asintoto verticale in corrispondenza di ogni valore di x che annulla il denominatore e il numeratore. **V F**

D. Un quoziente di polinomi ha un asintoto verticale in corrispondenza di ogni valore di x che annulla il denominatore, ma non il numeratore. **V F**

E. Posso scrivere un quoziente di polinomi che non ha asintoti. **V F**

Scegli la risposta corretta ai quesiti da 69 a 75.

69. È data $f(x) = \frac{2x^2+4x}{x^2+2}$. È vero che, per il grafico di $f(x)$:

A. La retta $x = 0$ è asintoto verticale **B.** La retta $y = 2x$ è asintoto obliquo

C. La retta $y = 2$ è asintoto orizzontale **D**. La retta $x = -2$ è asintoto verticale

70. Il grafico di una delle le seguenti funzioni ha come asintoto l'asse delle x. Qual è la funzione?

A	B	C	D
$y = \frac{3x^2-1}{2x^2+1}$	$y = \frac{3x-1}{2x^2+x}$	$y = \frac{3x-1}{3}$	$y = \frac{3x^3-1}{2x^2+x}$

71. Il grafico di una delle seguenti funzioni ha un asintoto obliquo. Qual è la funzione?

A	B	C	D
$y = \frac{3x^2-1}{2x^2+1}$	$y = \frac{3x-1}{2x^2+x}$	$y = \frac{3x-1}{3}$	$y = \frac{3x^3-1}{2x^2+x}$

72. Il grafico di una delle seguenti funzioni ha due asintoti verticali. Qual è la funzione?

A	B	C	D
$y=\frac{3x-1}{2x^2+x}$	$y=\frac{3x^2-1}{2x^2+1}$	$y=\frac{3x-1}{3}$	$y=\frac{3x^3-x}{2x^2+x}$

73. Il grafico di una delle seguenti funzioni ha gli asintoti di equazioni $x = 0$ e $y = 2$. Qual è la funzione?

A	B	C	D
$y=\frac{x-2}{x^2-2x}$	$y=\frac{4x-2}{2x+3}$	$y=\frac{4x-2}{2x}$	$y=\frac{3x^3-x}{2x^2+x}$

74. Quali asintoti ha il grafico della funzione $y=\frac{x^3+2x^2}{x^2-4x}$?

A. $x = 0$, $x = 4$, $y = x - 6$

B. $x = 4$, $y = x - 6$

C. $x = 4$, $y = x + 6$

D. $x = 0$, $y = x - 6$

75. Quali asintoti ha il grafico della funzione $y=\frac{3x^4+5x}{x^2+4}$?

A. $x = 2$, $x = -2$, $y = 3$

B. $x = 2$, $x = -2$, $y = 3x$

C. $x = 2$, $y = 3x - 7$

D. Nessun asintoto