Asintoti
Risposte e commenti all’attività

Quesiti 1 e 2a

I. A partire dalla funzione $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ risolvi i quesiti 1, 2 e 3.

1. Determino il dominio della funzione.

Denominatore $= x^2 - 4 = 0$ per $x = 2$ e $x = -2$

Il dominio è l'insieme dei numeri reali, esclusi –2 e 2

2. Equazioni degli eventuali asintoti

a. *Ricerca di asintoti verticali*

$\lim_{x\to -2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ Asintoto di equazione $x=-2$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ Asintoto di equazione $x=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 \to 8}{x^2-4 \to 0}=\infty$$

Quesito 2b

b. *Ricerca l'asintoto obliquo d'equazione* $y = mx + q$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1\Rightarrow\ m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+4x}{x^2-4}=0\Rightarrow\ q=0$$

In conclusione, gli asintoti della curva hanno equazioni:

$x = -2, x = 2$ e $y = x.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_p\ x^p}=\begin{cases}\infty & \text{se } n>p\\ 0 & \text{se } n<p\\ \dfrac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p\end{cases}$$

Quesito 3

3. Traccia in figura 1 il grafico degli asintoti calcolati.

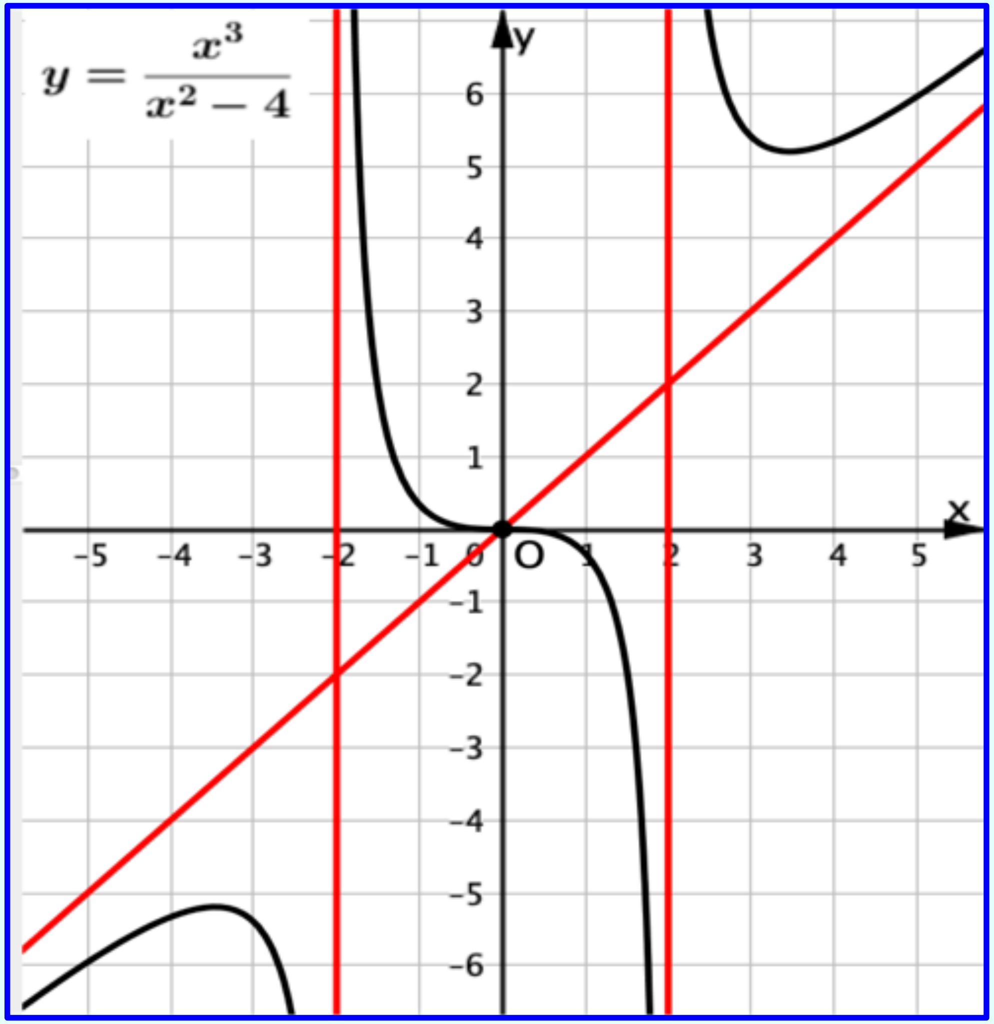


Fig.1

Quesiti 4 e 5

4. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto d'equazione $x = a$ **V**

Perché: Esempio, figura 1

5. Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto d'equazione $x = a$ **F**

Perché il numero *a* è escluso dal dominio della funzione

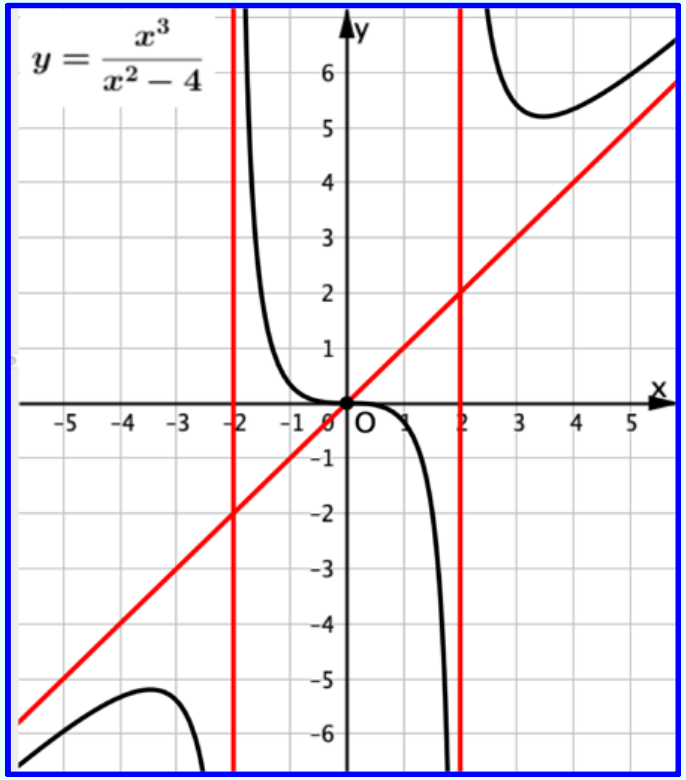


Fig.1

Stefano Volpe e Daniela Valenti, 2023

Quesiti 6 e 7

6. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto obliquo **F**

Perché una curva con più di un asintoto obliquo non può essere il grafico di una funzione. Esempio: figura 2

7. Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto obliquo **V**

Perché: Esempio, figura 1

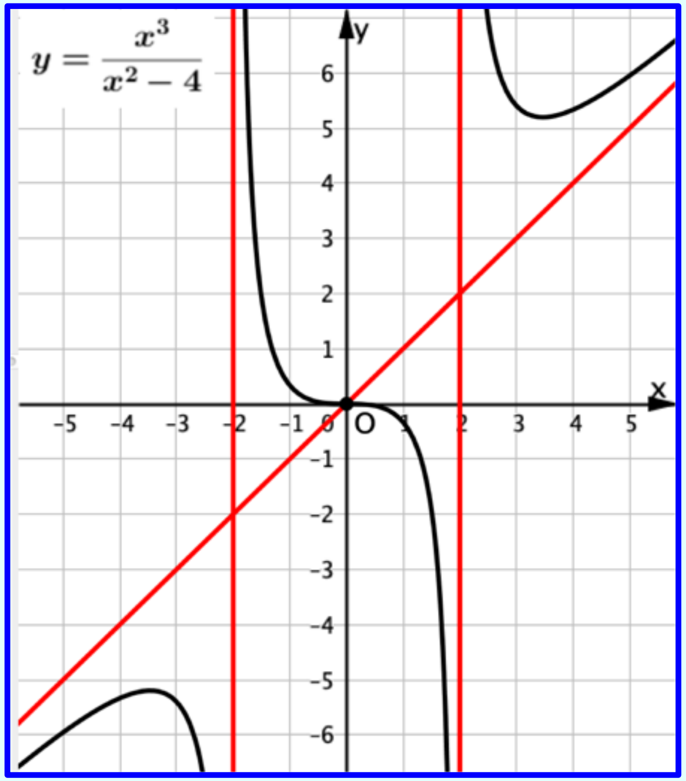
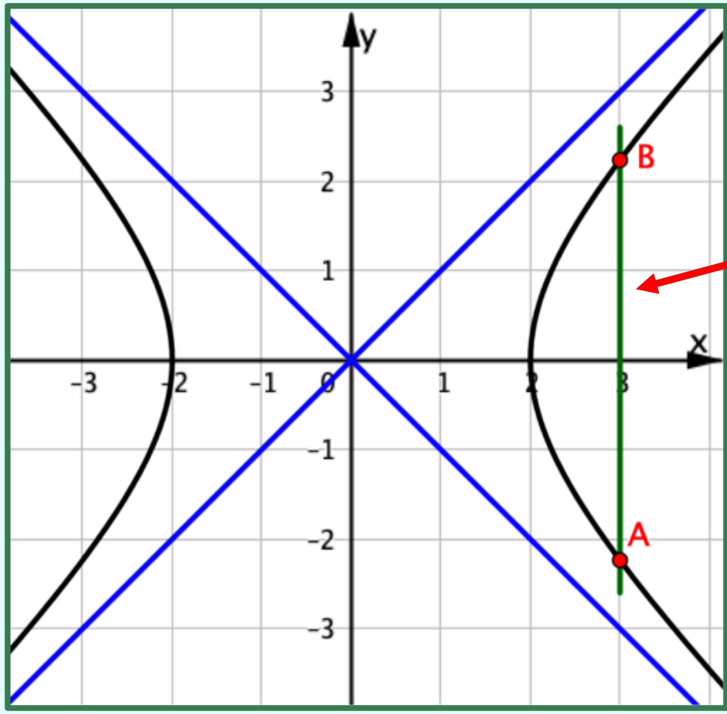


Fig.1



Ad una *x* corrispondono due *y*

Fig. 2

Quesito 8

8. Il grafico di funzione $y=\frac{x^2+x}{x^2-x}$ ha l'asintoto verticale d'equazione $x=0$ **F**

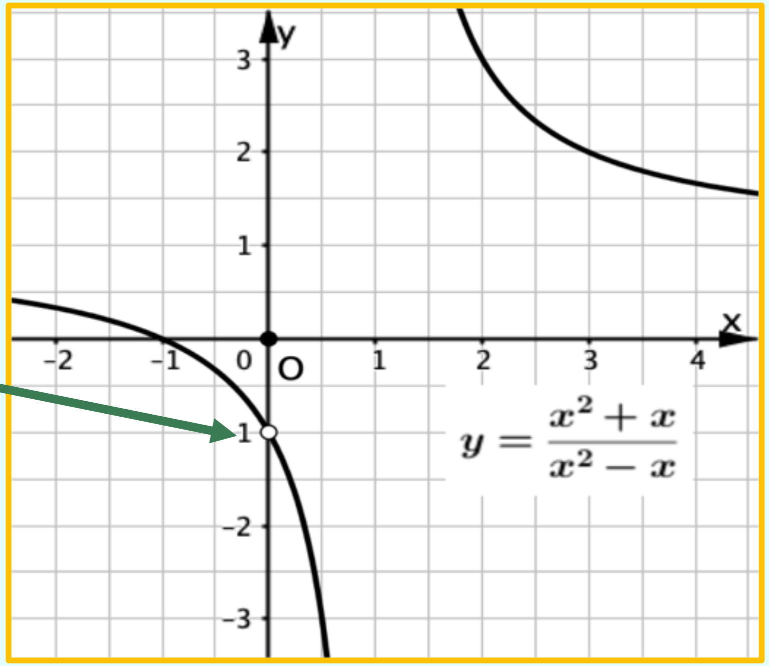
Perché 0 è escluso dal dominio della funzione, ma trovo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2x-1}=-1$$

Forma indeterminata del tipo 0/0

Applico il teorema di de l'Hopital

Discontinuità in corrispondenza di $x = 0$: non c'è il punto $(0, -1)$.



Quesito 9

9. Il grafico di $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$ ha un asintoto verticale e un asintoto obliquo **F**

Perché: il dominio è R e $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+4x^2-3}{x} = \infty$

Posso ripetere questo ragionamento a partire da qualunque funzione polinomiale *f*(*x*) di grado *n* > 1.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- **Nessun numero reale è escluso dal dominio, perciò *f*(*x*) non può avere asintoti verticali.**
- **Per tutte le funzioni polinomiali *f*(*x*) di grado *n* >1, trovo:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

Perciò *f*(*x*) non può avere un asintoto obliquo.

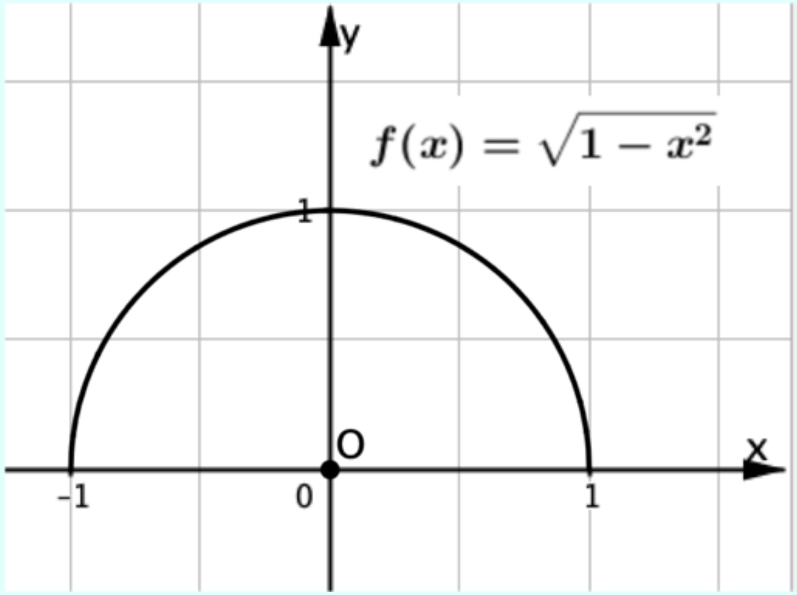
Le funzioni polinomiali non hanno asintoti

Quesito 10

10. Il grafico di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ha un asintoto obliquo. **F**

Perché il dominio è l'intervallo $[-1, 1]$, perciò non posso calcolare

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$



Condizione necessaria per trovare un asintoto obliquo:
il dominio della funzione deve essere illimitato.