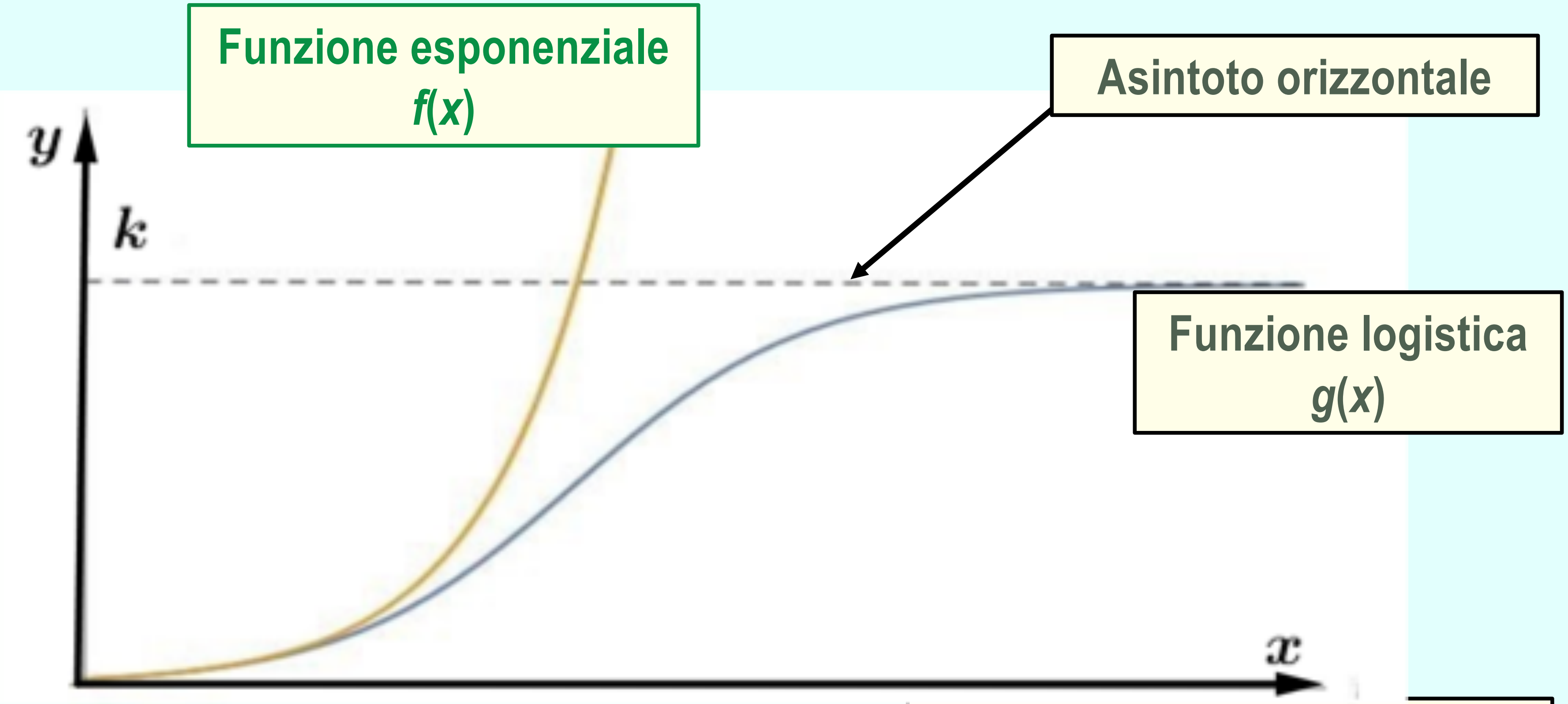
Asintoti

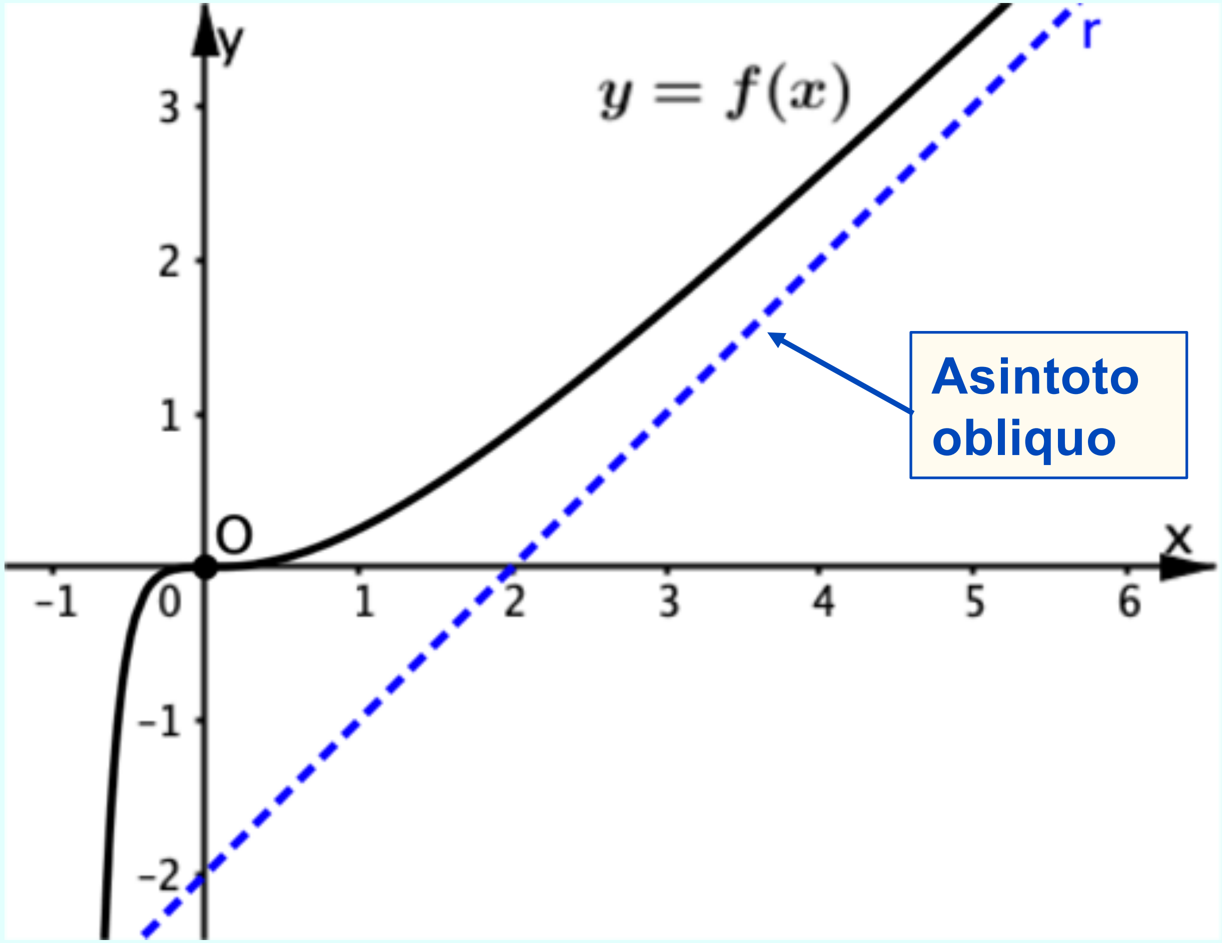
Grafici di funzioni per studiare la crescita di popolazioni, di contagi in un’epidemia, …



Funzione esponenziale $f(x)$
Crescita illimitata
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Funzione logistica $g(x)$
Crescita limitata
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = k$$

Un nuovo modello di crescita



Crescita illimitata

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ma la crescita 'è frenata' dalla retta r e tende a diventare una crescita lineare

Asintoti obliqui

Un esempio per cominciare lo studio

Analizzo la funzione

$$y = 2x + 3 + \frac{1}{x^2}$$

Il suo insieme di definizione coincide con l'insieme R dei numeri reali escluso il numero 0, che rende nullo il denominatore x^2 della frazione.
La funzione ha dunque un dominio illimitato, perciò è possibile calcolare il seguente limite.

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x + 3 + \frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

Concludo che la funzione non ha asintoto orizzontale.

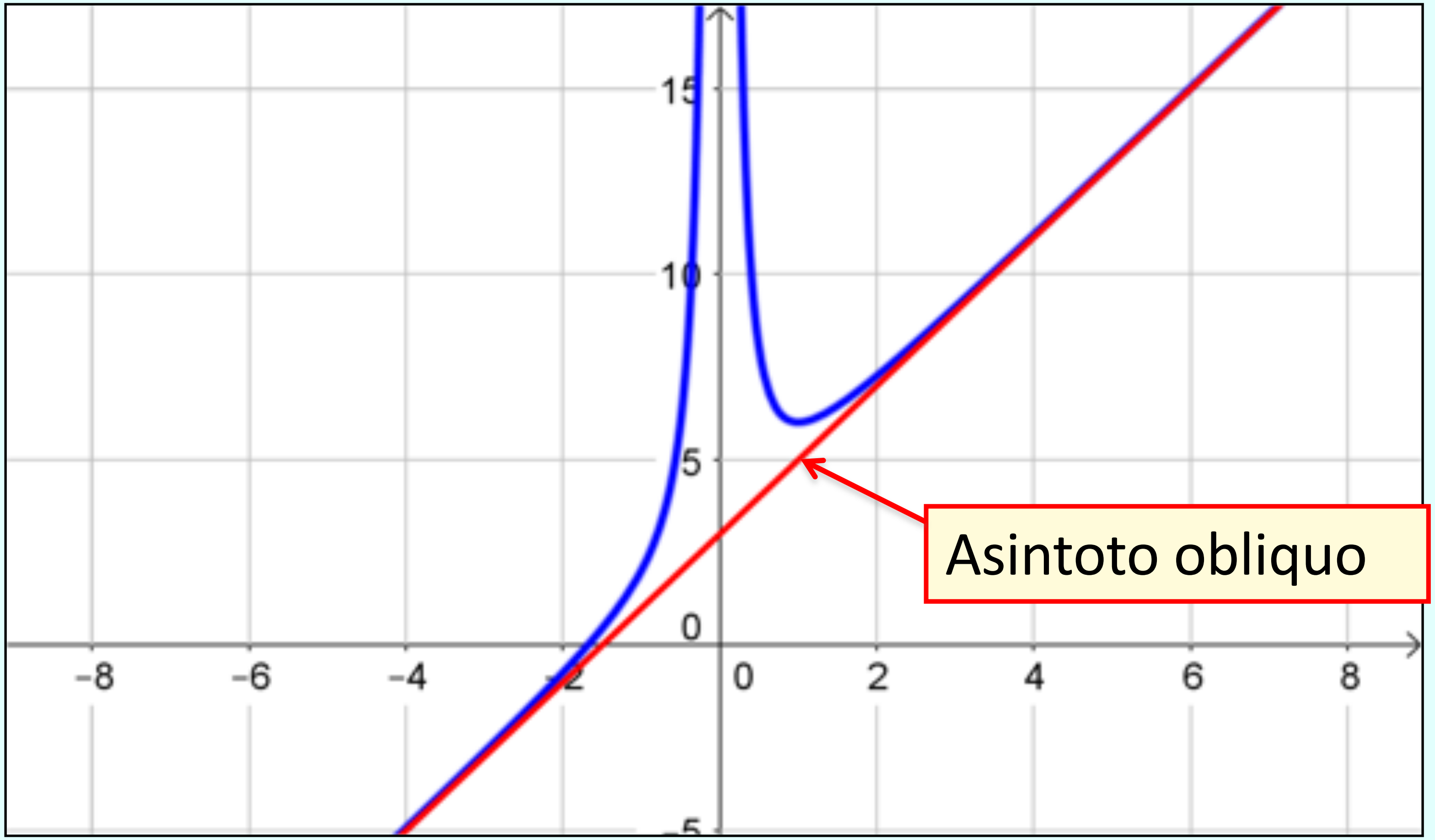
Osservo il limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x+3+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)=\infty$$

Un'intuizione: al crescere della x in valore assoluto, il grafico della funzione si avvicina sempre più alla retta di equazione y = 2x + 3.

Cerco conferma a questa intuizione con un software, che disegna il grafico della retta e della curva.

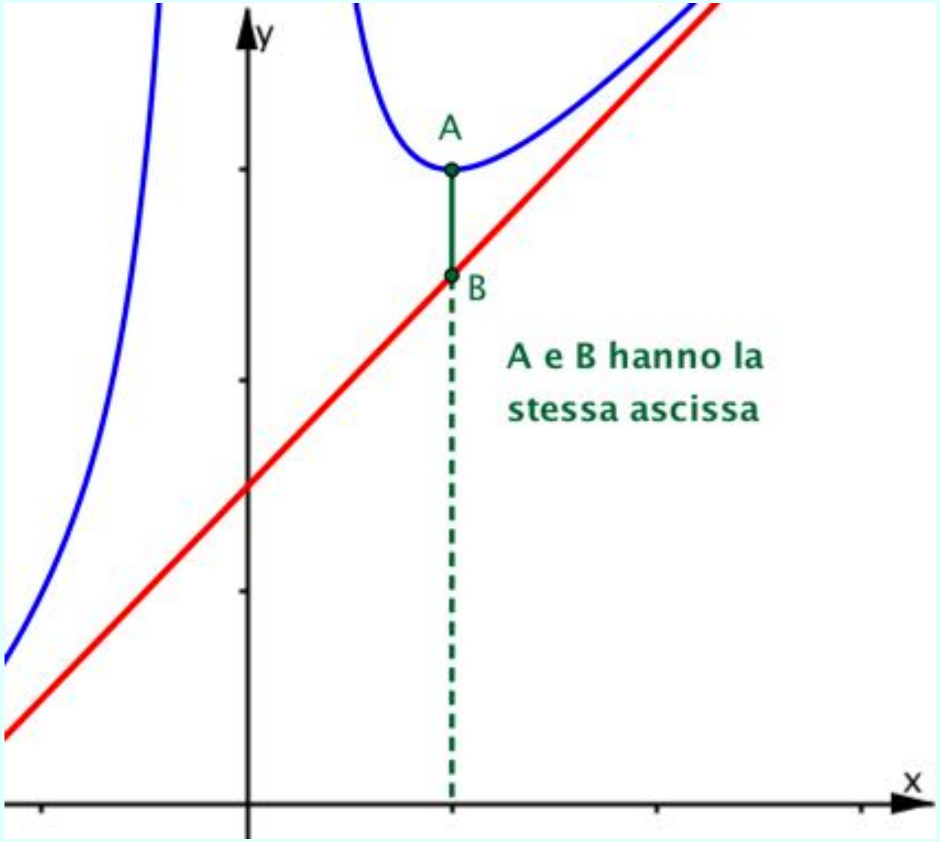
Asintoto obliquo



Asintoto obliquo: asintoto con equazione del tipo

$$y = mx + q$$

Osservo una caratteristica della figura



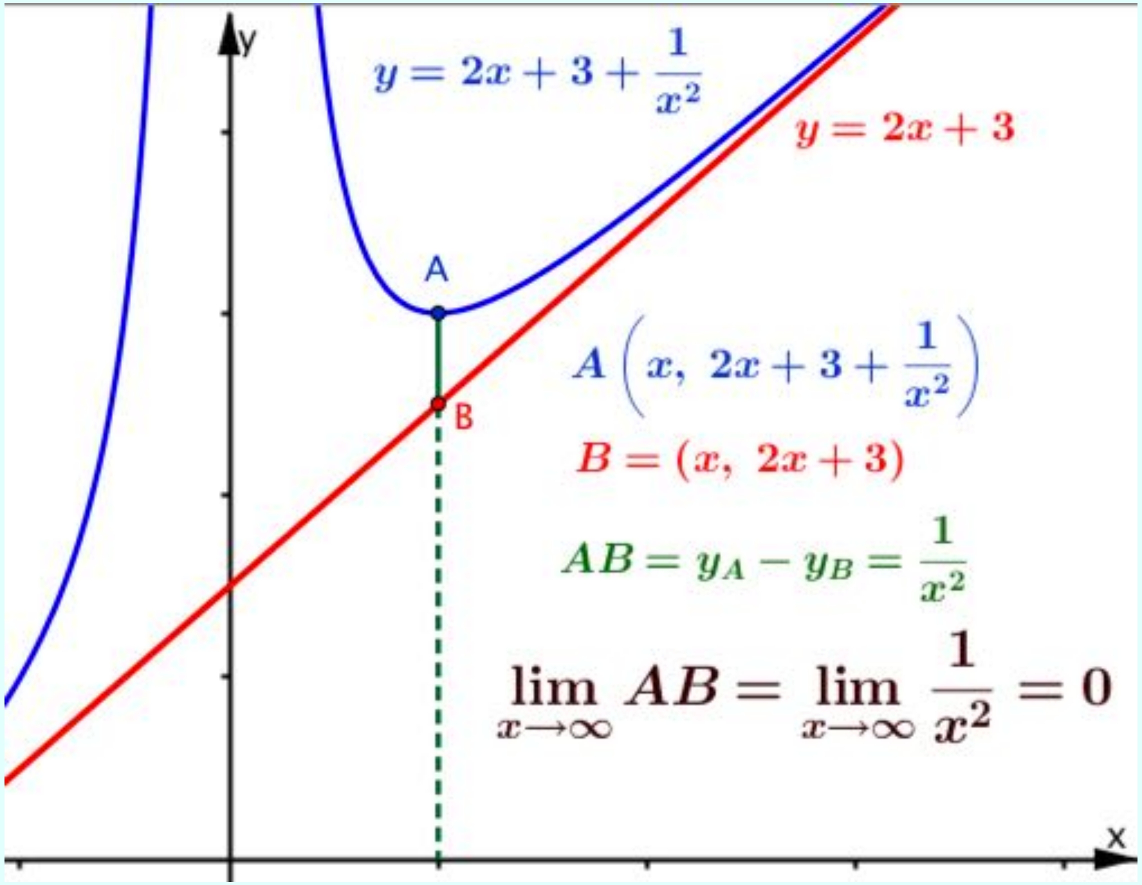
Invece di dire 'la curva si avvicina alla retta', dico che 'la distanza AB tende a 0 al crescere di x in valore assoluto'.
In simboli scrivo

$$\lim_{x \to \infty} AB = 0$$

Riconoscere un asintoto obliquo

Una retta è asintoto obliquo per una curva se, presi due punti di uguale ascissa, A sulla curva e B sulla retta, trovo:

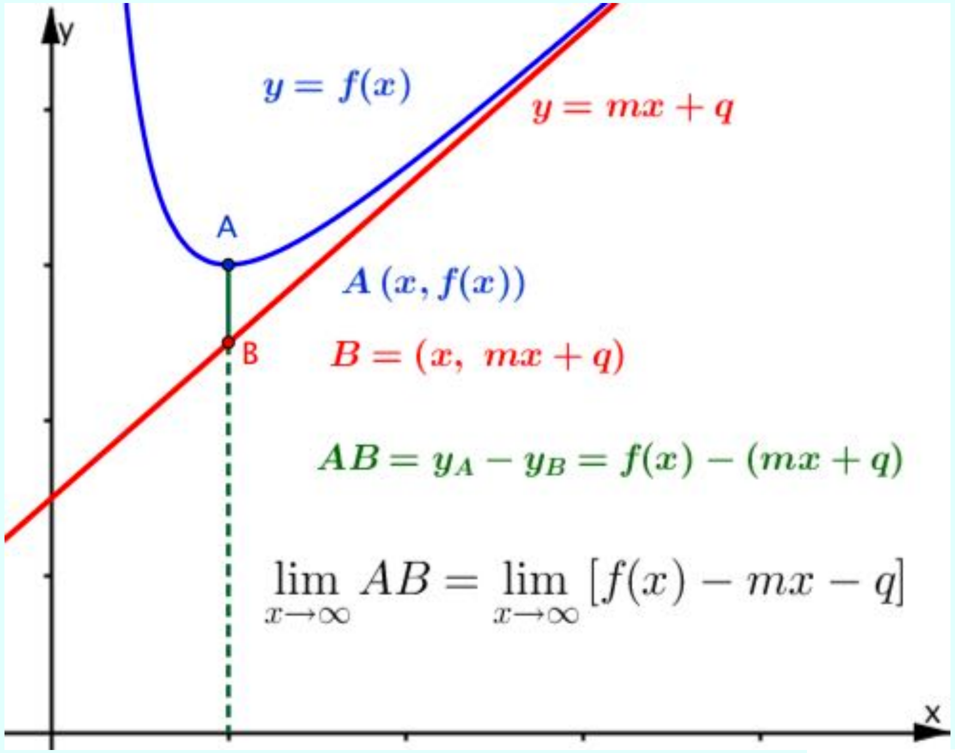
$$\lim_{x \to \infty} AB = 0$$



Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo

Come determino l'equazione dell'asintoto obliquo, se l'espressione analitica della funzione non è semplice come quella appena studiata?

Un procedimento generale



La retta è asintoto per la curva, se risulta:

$$\lim_{x\to\infty} AB = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx - q\right) = 0$$

Da cui ricavo

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$$

E come procedo per determinare il coefficiente m?

Un procedimento generale per calcolare m

Riprendo la condizione

$$\lim_{x\to\infty} AB = 0$$

E osservo che, se è vera

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx-q\right)=0$$

Deve anche essere vera

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)-mx-q}{x}\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\underbrace{\frac{q}{x}}_{0}\right]$$

E così ricavo

$$m=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

Come determinare l'asintoto obliquo

Ecco come calcolare i coefficienti *m* e *q* in modo che la retta d'equazione *y* = *mx* + *q* sia asintoto per il grafico di *y* = *f* (*x*).

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] \quad \text{e} \quad q = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]}$$

Se non trovo entrambi i limiti finiti, la curva non ha un asintoto obliquo.

Osservazioni

1. L'asintoto orizzontale diventa un caso particolare di asintoto obliquo (con m = 0).

2. Per determinare gli asintoti obliqui debbo calcolare limiti di forme indeterminate del tipo ∞/∞.
Posso applicare il teorema di de l'Hopital, ma nel caso di limiti di quozienti di polinomi, conviene ricordare che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_p\,x^p} = \begin{cases} 0 & \text{se } n<p \\ \infty & \text{se } n>p \\ \dfrac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p \end{cases}$$

Richiamo gli asintoti verticali

Per completare lo studio degli asintoti ricordo che il grafico di una funzione può avere anche uno o più asintoti verticali.
Come determino gli asintoti verticali?

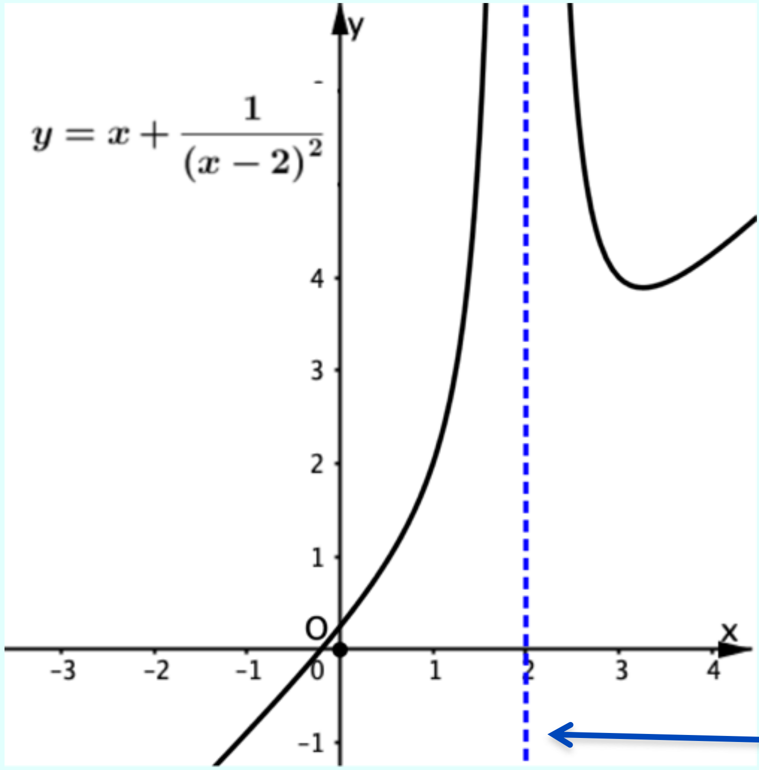
Asintoto verticale

Una curva d'equazione $y = f(x)$ ammette un asintoto d'equazione $x = a$, se si verificano le seguenti condizioni:

1. Il numero a è escluso dal dominio di $f(x)$;

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

ESEMPIO



DOMINIO

Numeri reali escluso 2

$$\lim_{x \to 2}\left[x + \frac{1}{(x-2)^2}\right] = \infty$$

$$\Downarrow$$

Asintoto verticale d'equazione

$\boldsymbol{x = 2}$