Classificare funzioni

Daniela Valenti, 2023

Funzioni polinomiali

Sono tutte scritte con formule del tipo seguente:

$$\boxed{y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

dove

$a_n , a_{n-1} , \ldots , a_2 , a_1 , a_0$ **sono numeri reali detti** ***coefficienti.***
n **è un numero naturale detto** ***grado del polinomio.***

Un'osservazione

Posso sempre eseguire addizione e moltiplicazione fra numeri reali, perciò

Il dominio delle funzioni polinomiali è l'insieme R dei numeri reali

Daniela Valenti, 2023

Esempi di funzioni polinomiali

$$\boxed{y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

Grado: $n = 3$

Coefficienti:

$a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 1$, $a_0 = -2$

$$y = 3x - 2$$

Funzione lineare

Grado: $n = 1$

Coefficienti: $a_1 = 3$, $a_0 = -2$

$$y = x^2 + 3x - 2$$

Funzione quadratica

Grado: $n = 2$

Coefficienti: $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = -2$

Quozienti di polinomi

Sono funzioni scritte con formule del tipo seguente:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

dove

$a_{\mathrm{n}}\ ,\ a_{\mathrm{n}-1}\ ,\ \ldots\ ,\ a_2\ \ ,\ a_1\ ,\ a_0$ **e** $b_{\mathrm{m}}\ ,\ a_{\mathrm{m}-1}\ ,\ \ldots\ ,\ b_2\ \ ,\ b_1\ ,\ b_0$

sono numeri reali detti *coefficienti.*

I quozienti di polinomi prendono anche il nome di *funzioni razionali fratte*

Esempi di funzioni razionali fratte

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$$y = \frac{4x^2 - 2x + 5}{x^3 - 9x}$$

$$a_2 = 4\,,\; a_1 = -2 \quad,\; a_0 = 5$$
$$b_3 = 1\,,\; b_2 = 0\,,\; b_1 = -9 \quad,\; b_0 = 0$$

$$y = \frac{x^3 + 3x - 1}{2x - 4}$$

$$a_3 = 1\,,\, a_2 = 0\,,\, a_1 = 3 \;\;,\, a_0 = -1$$
$$b_1 = 2 \;\;,\; b_0 = -4$$

$$y = -\frac{3}{x}$$

$$a_0 = -\,3$$
$$b_1 = 1\,,\quad b_0 = 0$$

$$y = \frac{4}{3x^2}$$

$$a_0 = 4$$
$$b_2 = 3\,,\quad b_1 = b_0 = 0$$

Un'altra forma per scrivere funzioni razionali fratte

Esempi

$$y = -\frac{3}{x} \Rightarrow xy = -3$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{xy + 3 = 0}$$

Polinomio di 2° grado nelle variabili *x* e *y* uguagliato a 0

$$y = \frac{4}{3x^2} \Rightarrow 3x^2 y = 4$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{3x^2 y - 4 = 0}$$

Polinomio di 3° grado nelle variabili *x* e *y* uguagliato a 0

FUNZIONI ALGEBRICHE

Funzioni che si possono scrivere nella forma di un polinomio nelle variabili x, y uguagliato a zero

Richiamo:
monomi, polinomi e loro grado

		Grado
Lettera	$x = x^1$ $x^2 = x^1 \cdot x^1$ $y^3 = y^2 \cdot y^1$	1 $2 = 1 + 1$ $3 = 2 + 1$
Monomio	$3x^2 = 3x^1 \cdot x^1$ $4xy = 4\, x^1 \cdot y^1$ $-5x^2y = -5\, x^2 \cdot y^1$ $\frac{2}{3}xyz = \frac{2}{3}x^1y^1z^1$	$1 + 1 = 2$ $1 + 1 = 2$ $1 + 2 = 3$ $1 + 1 + 1 = 3$

Grado di un polinomio

Grado: $3 + 2 = 5$

Grado: $2 + 1 = 3$ Grado: $1 + 1 = 2$

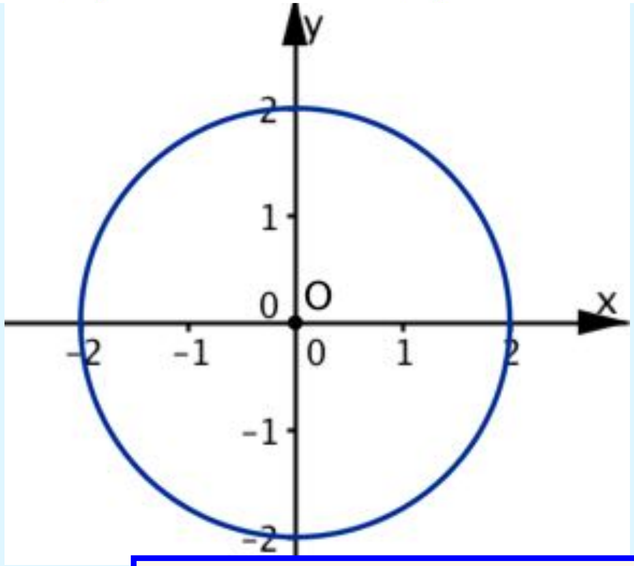
$$-3x^2y + 4x^3y^2 - 3xy$$

Monomi

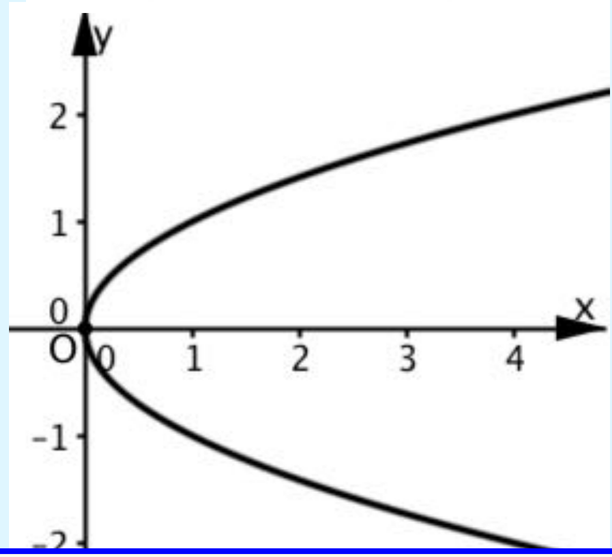
Curve algebriche

Osserviamo le formule ottenute ‘con occhio matematico’: ci ricordano analoghi polinomi già incontrati per descrivere curve. Ecco qualche esempio.

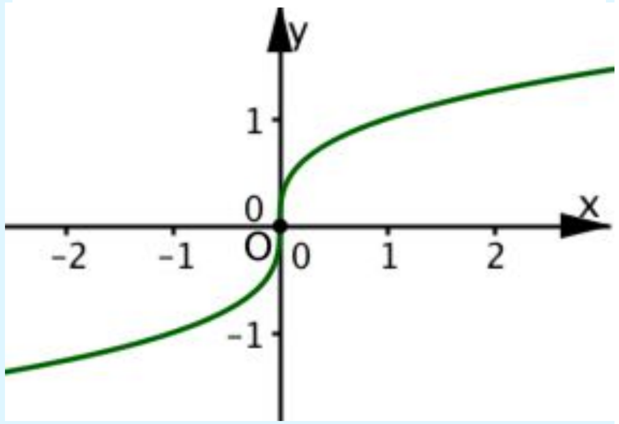
$x^2+y^2=4 \iff x^2+y^2-4=0$



$x=y^2 \iff x-y^2=0$



$x=y^3 \iff x-y^3=0$



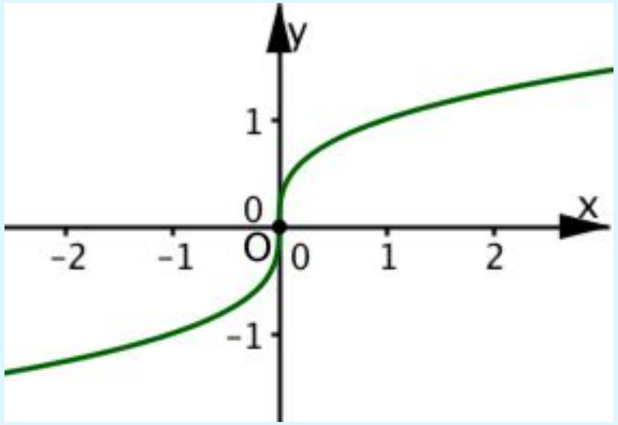
CURVE ALGEBRICHE

Curve che hanno come equazione un polinomio nelle variabili *x* e y uguagliato a 0.

Daniela Valenti, 2023

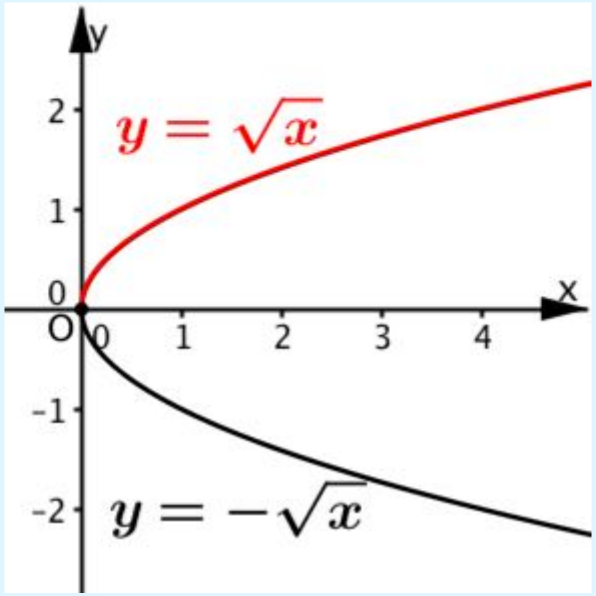
Curve algebriche e funzioni

Tutte le curve algebriche sono il grafico di una sola funzione? Rivediamo gli esempi per trovare la risposta.



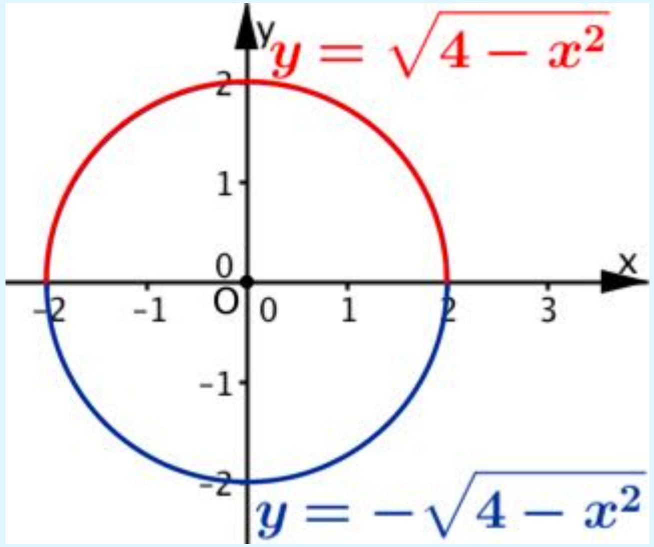
$$x - y^3 = 0 \Rightarrow y^3 = x$$
$$\Downarrow$$
$$y = \sqrt[3]{x}$$

Una funzione



$$x - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x$$
$$\Downarrow$$
$$y = -\sqrt{x} \qquad y = \sqrt{x}$$

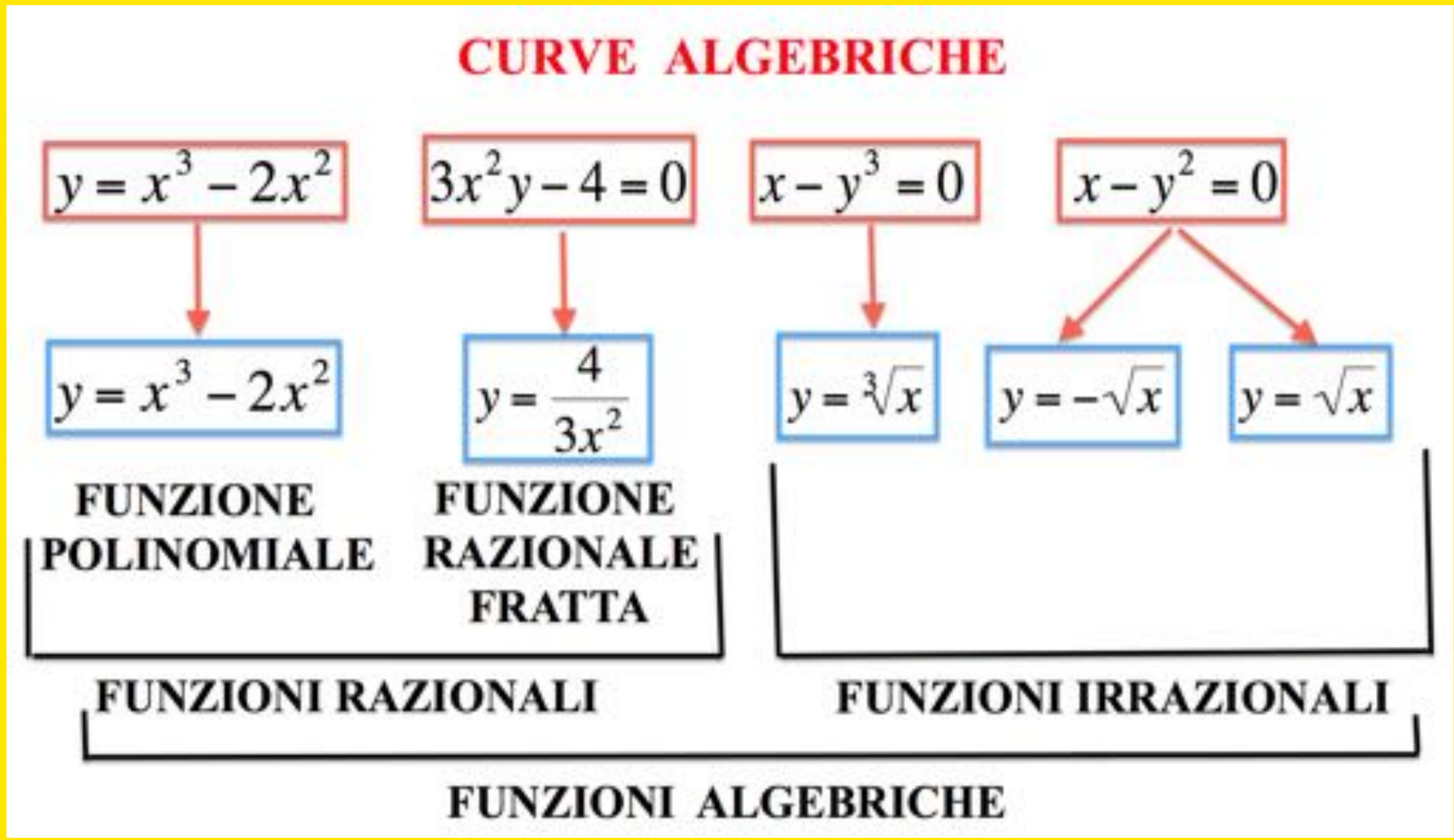
Due funzioni



$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$y = -\sqrt{4 - x^2} \qquad y = \sqrt{4 - x^2}$$

Due funzioni

Classificare curve e funzioni algebriche



Grado di una funzione

È importante ricordare che posso valutare il grado solo di un polinomio. Perciò, posso determinare il grado di una funzione algebrica solo se la scrivo sotto forma di un polinomio uguagliato a 0.

ESEMPI

Funzione algebrica	Scritta in forma di polinomio = 0	Grado
$y = x^3 + 2x^4 - 3x$	$2x^4 + x^3 - 3x + y = 0$	4
$y = \dfrac{3x^2 + 2}{x^3}$ con $x \neq 0$	$x^3 y - 3x^2 - 2 = 0$	4
$y = \sqrt[3]{x+1}$	$y^3 - x - 1 = 0$	3
$y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x}}$	$xy^3 - x^2 - 1 = 0$	4

Funzioni algebriche o trascendenti

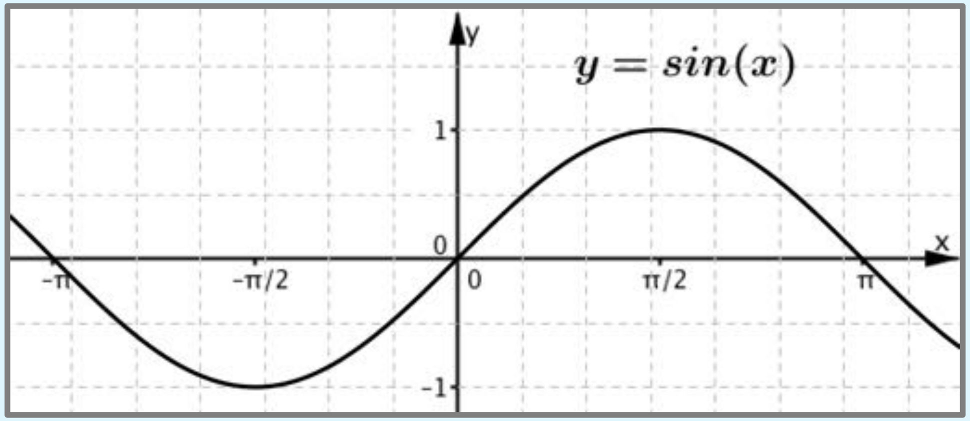
Osservo la scrittura delle funzioni algebriche

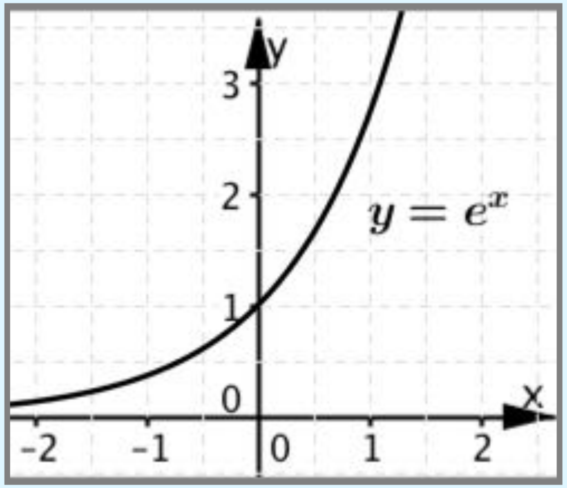
$$\boxed{y = x^3 - 2x^2} \qquad \boxed{y = \frac{4}{3x^2}} \qquad \boxed{y = \sqrt[3]{x}} \qquad \boxed{y = -\sqrt{x}}$$

In tutte le funzioni *algebriche* trovo lo stesso procedimento per ottenere y a partire da x.
Opero su *x* solo con le *operazioni algebriche* e cioè: addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevazione a potenza ed estrazione di radice

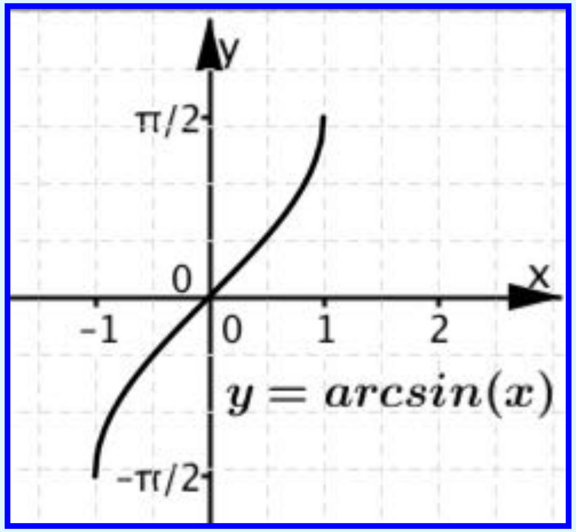
Funzione *trascendente* è una funzione NON algebrica: per ottenere y opero su x con un procedimento che 'trascende' (cioè va oltre) le operazioni algebriche.
Curva *trascendente* è una curva NON algebrica.

Funzioni trascendenti elementari

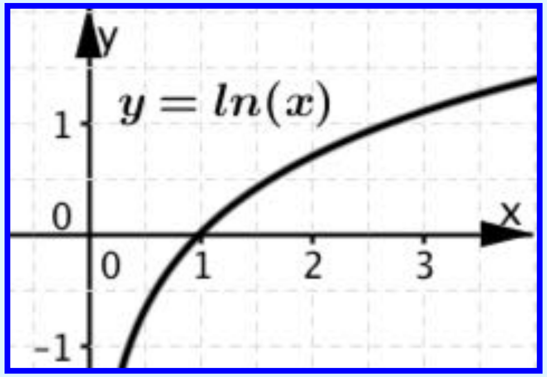




E la sua inversa



E la sua inversa



E tutte le funzioni che si ottengono da queste con le operazioni algebriche o la composizione di funzioni

Uno sguardo alla storia: curve 'famose'

Nella storia della matematica compaiono curve da almeno 2600 anni: la retta, il cerchio, le coniche e poi altre curve dalle proprietà così sorprendenti da legare il proprio nome al matematico che le aveva più studiate.

Un primo esempio di 'curva algebrica famosa'.

La cissoide di Diocle (2° secolo a. C.)

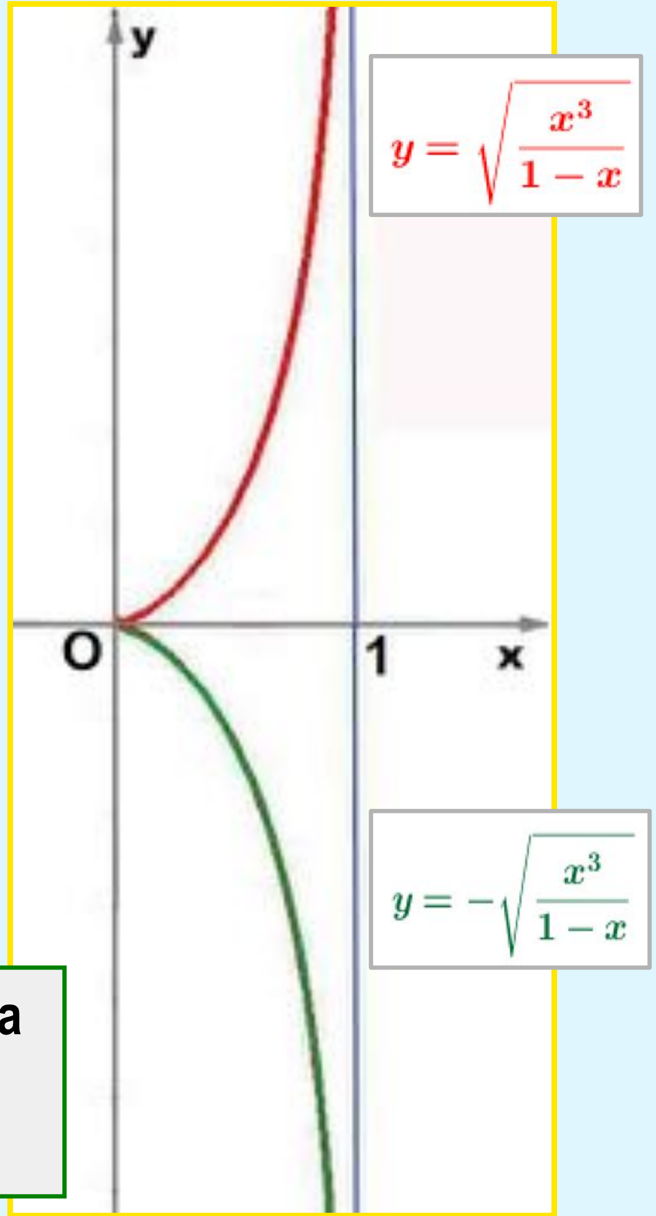
Equazione cartesiana (3° grado):

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0$$

da cui le due funzioni:

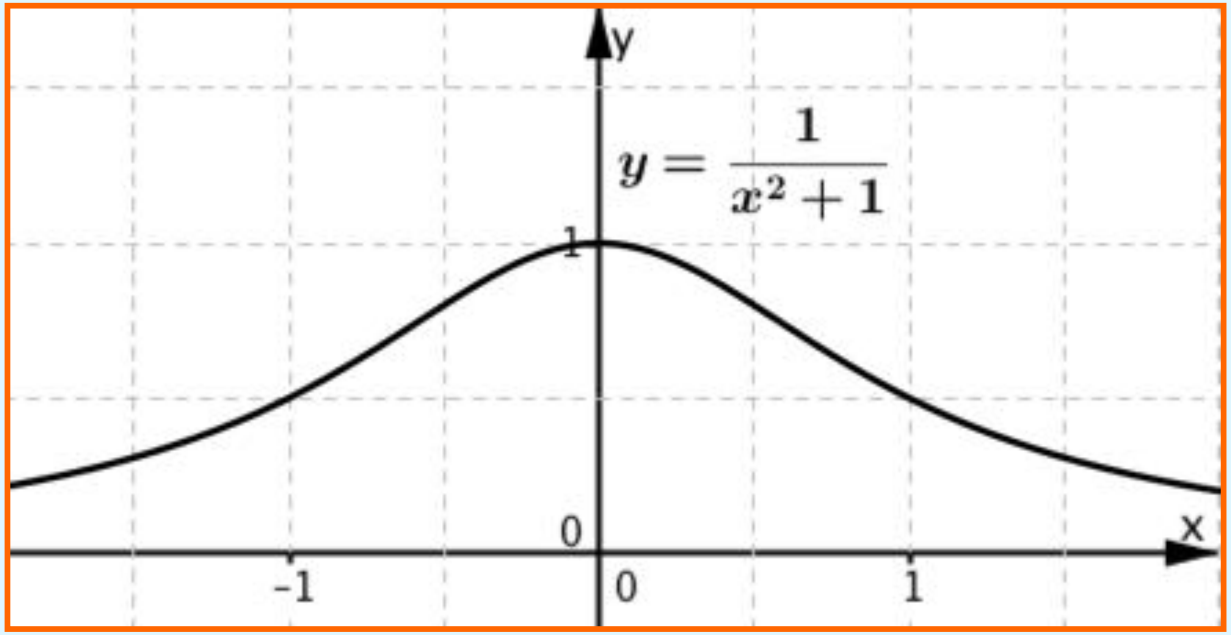
$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \qquad y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

Studiata anche da Fermat e Newton nel XVII secolo.



Altro esempio di ‘curve famose’

La versiera di Agnesi



Gaetana Agnesi
1718 - 1799


INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell'Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.
IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Libro di testo famoso in Europa

Equazione cartesiana (3° grado):

$$x^2y + y - 1 = 0$$

da cui la funzione: $$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Daniela Valenti, 2020

Una curva trascendente ‘famosa’: la catenaria

La catenaria

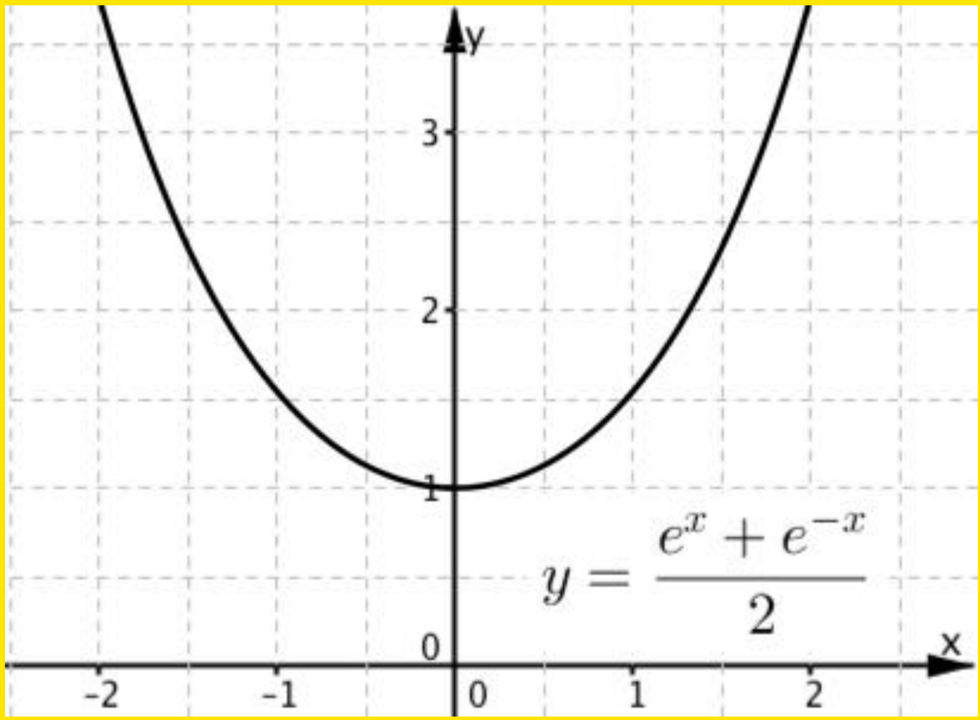


Grafico della funzione trascendente

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Una catena appesa agli estremi si dispone lungo una catenaria

Non è una parabola, ma anche Galileo nel 1638 si è sbagliato!
Nel 1691 i Bernoulli, Leibniz e Huygens trovarono l’equazione della curva e Huygens scelse il nome.