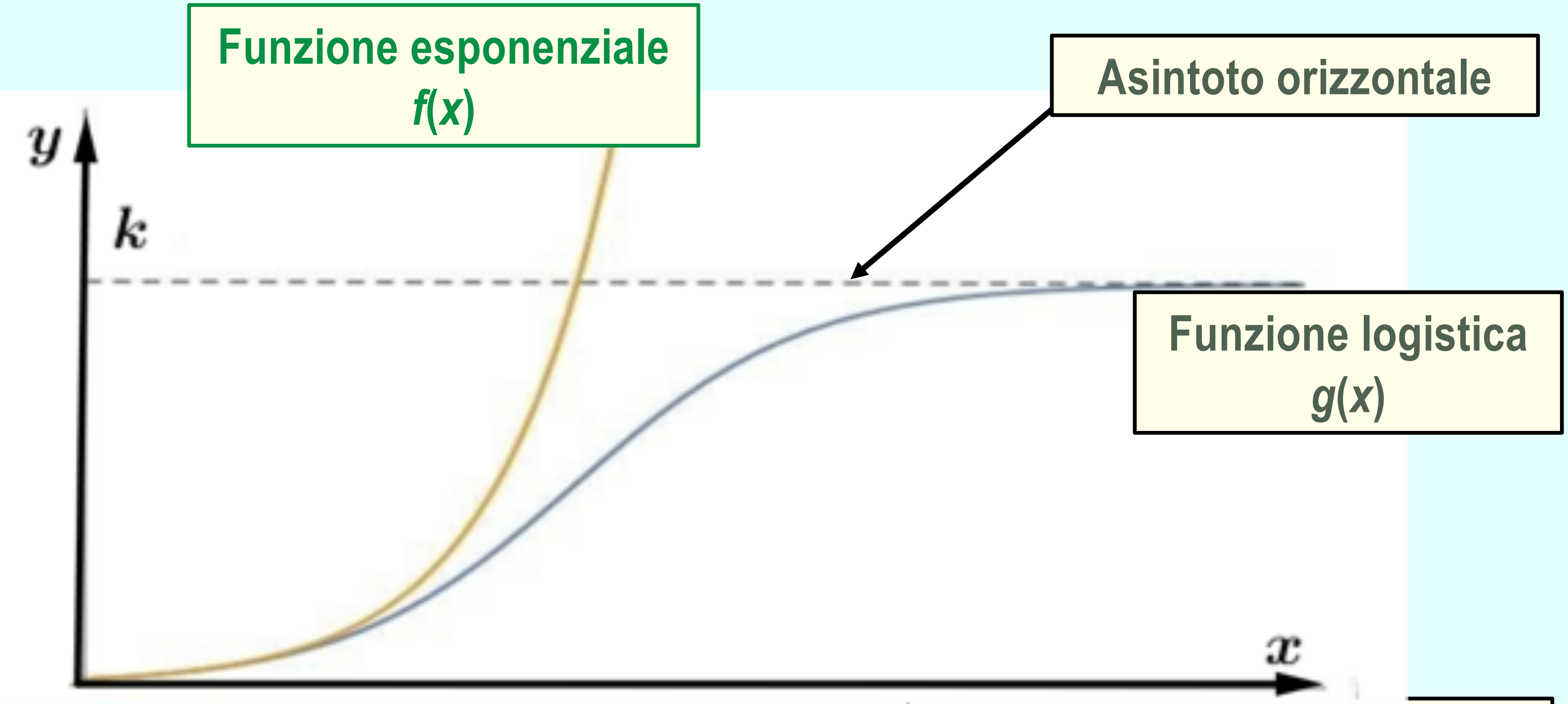
Asintoti

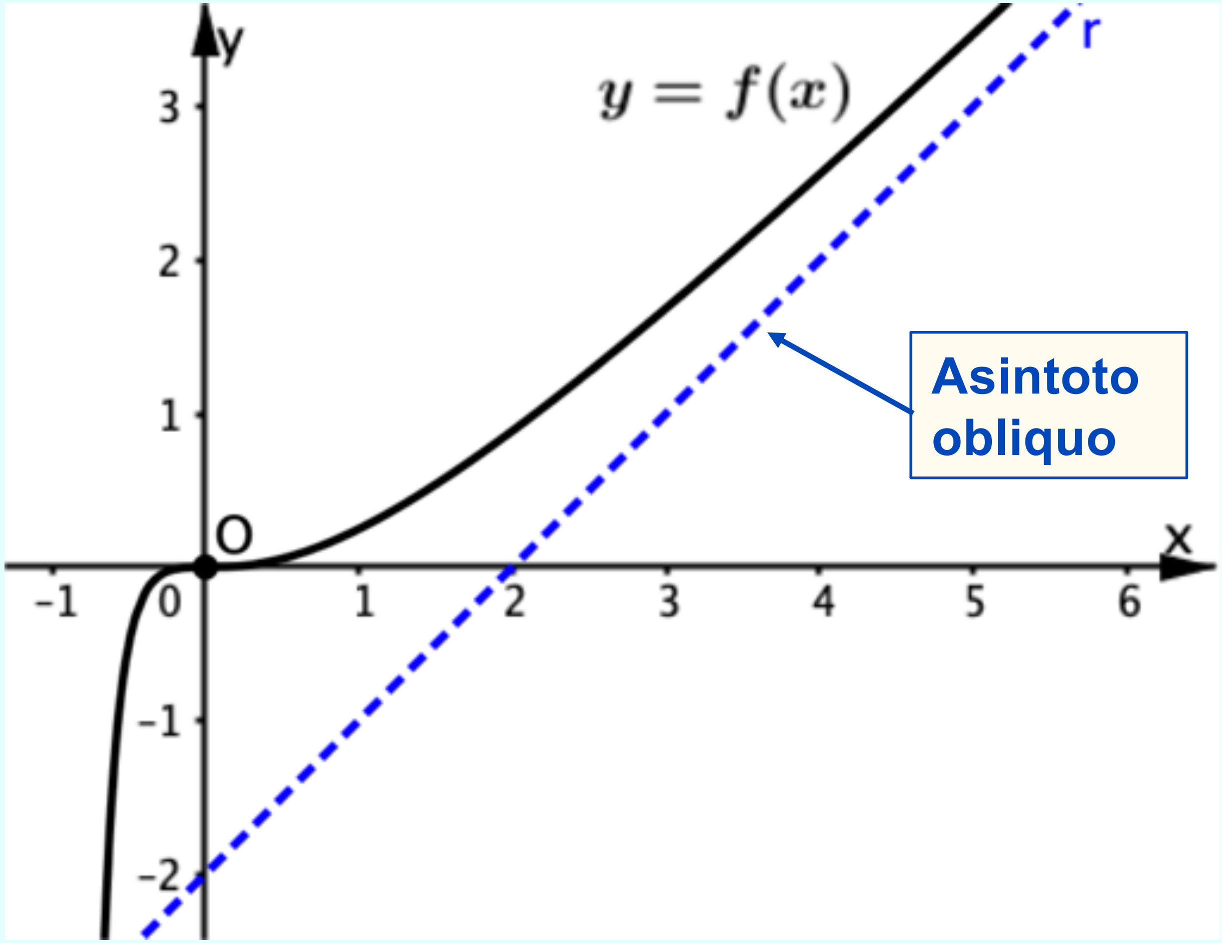
Grafici di funzioni per studiare la crescita di popolazioni, di contagi in un'epidemia, …



Funzione esponenziale $f(x)$
Crescita illimitata
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Funzione logistica $g(x)$
Crescita limitata
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = k$$

Un nuovo modello di crescita



Crescita illimitata

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ma la crescita 'è frenata' dalla retta r e tende a diventare una crescita lineare

Asintoti obliqui

Un esempio per cominciare lo studio

Analizzo la funzione

$$y = 2x + 3 + \frac{1}{x^2}$$

Il suo insieme di definizione coincide con l'insieme R dei numeri reali escluso il numero 0, che rende nullo il denominatore x^2 della frazione.
La funzione ha dunque un dominio illimitato, perciò è possibile calcolare il seguente limite.

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x + 3 + \frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

Concludo che la funzione non ha asintoto orizzontale.

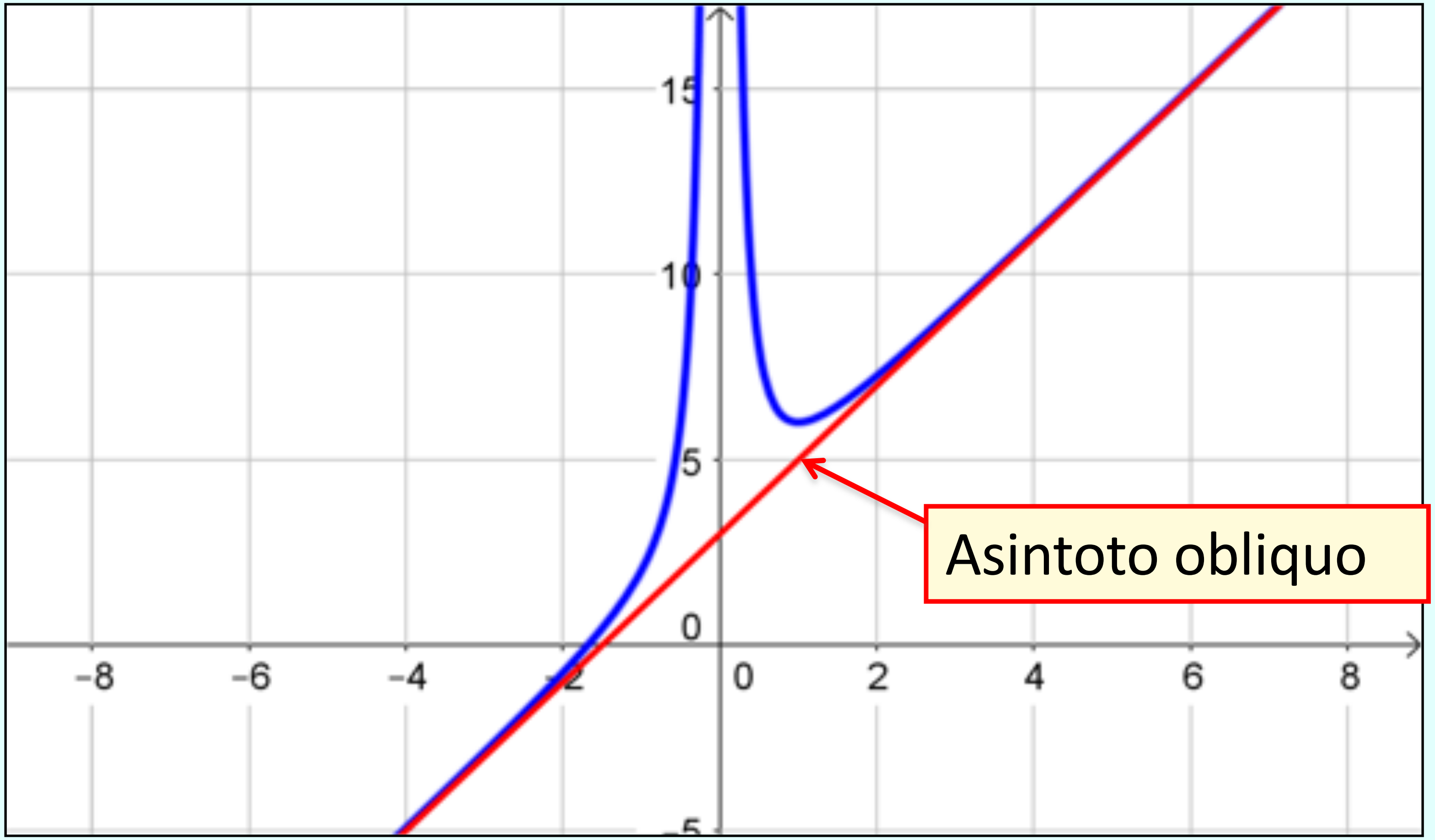
Osservo il limite

$$\lim_{x \to \infty}\left(2x + 3 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right) = \infty$$

Un'intuizione: al crescere della x in valore assoluto, il grafico della funzione si avvicina sempre più alla retta di equazione y = 2x + 3.

Cerco conferma a questa intuizione con un software, che disegna il grafico della retta e della curva.

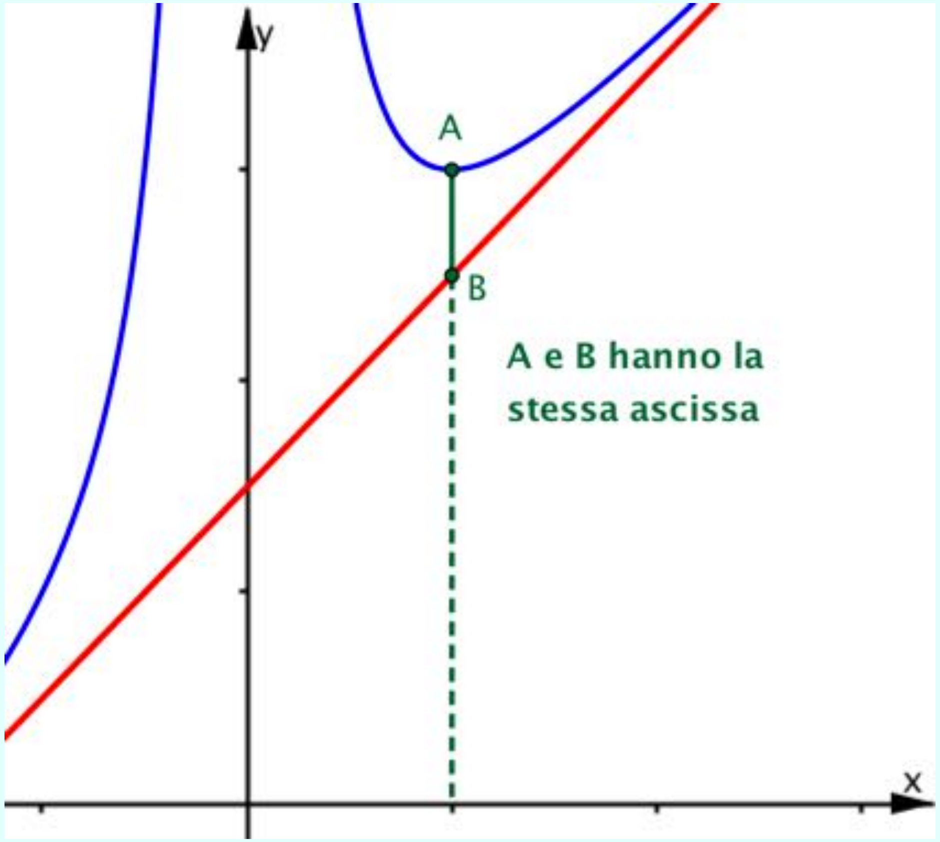
Asintoto obliquo



Asintoto obliquo: asintoto con equazione del tipo

$y = mx + q$

Osservo una caratteristica della figura



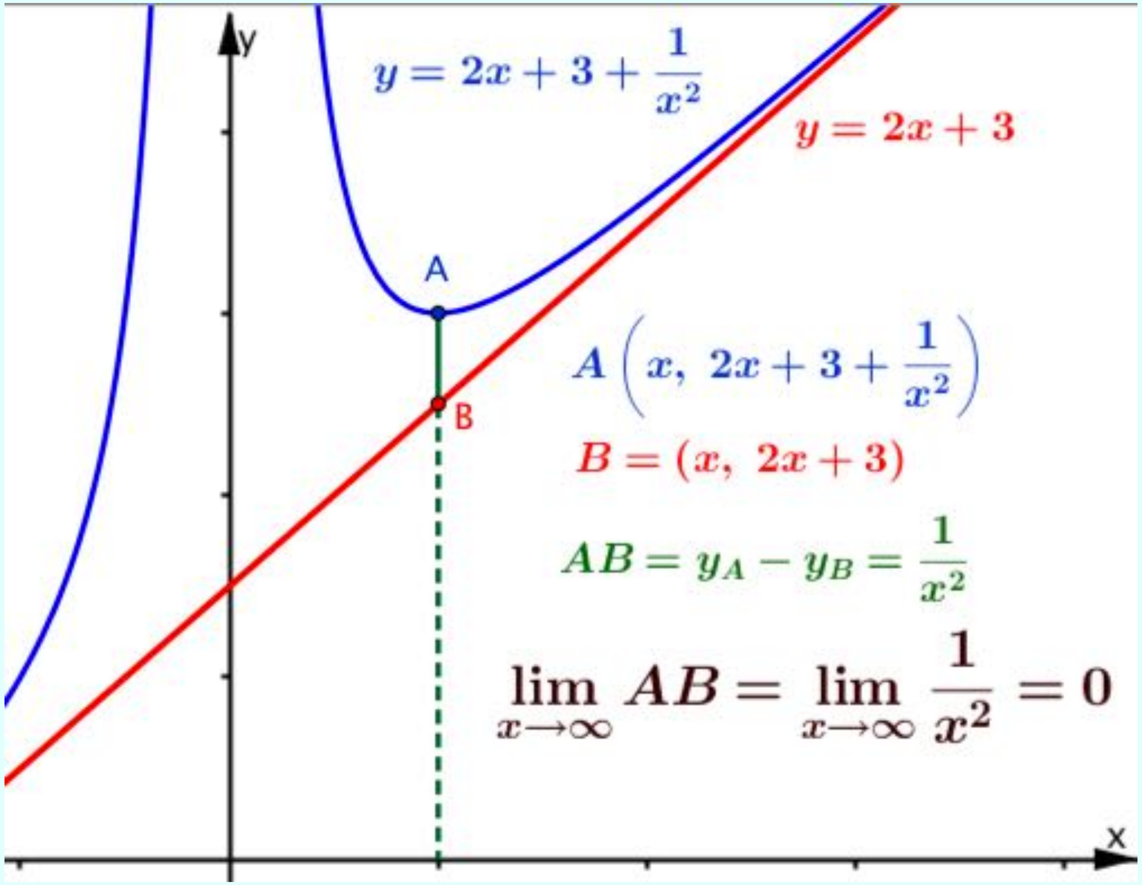
Invece di dire ‘la curva si avvicina alla retta’, dico che ‘la distanza AB tende a 0 al crescere di x in valore assoluto’.
In simboli scrivo

$$\lim_{x \to \infty} AB = 0$$

Riconoscere un asintoto obliquo

Una retta è asintoto obliquo per una curva se, presi due punti di uguale ascissa, A sulla curva e B sulla retta, trovo:

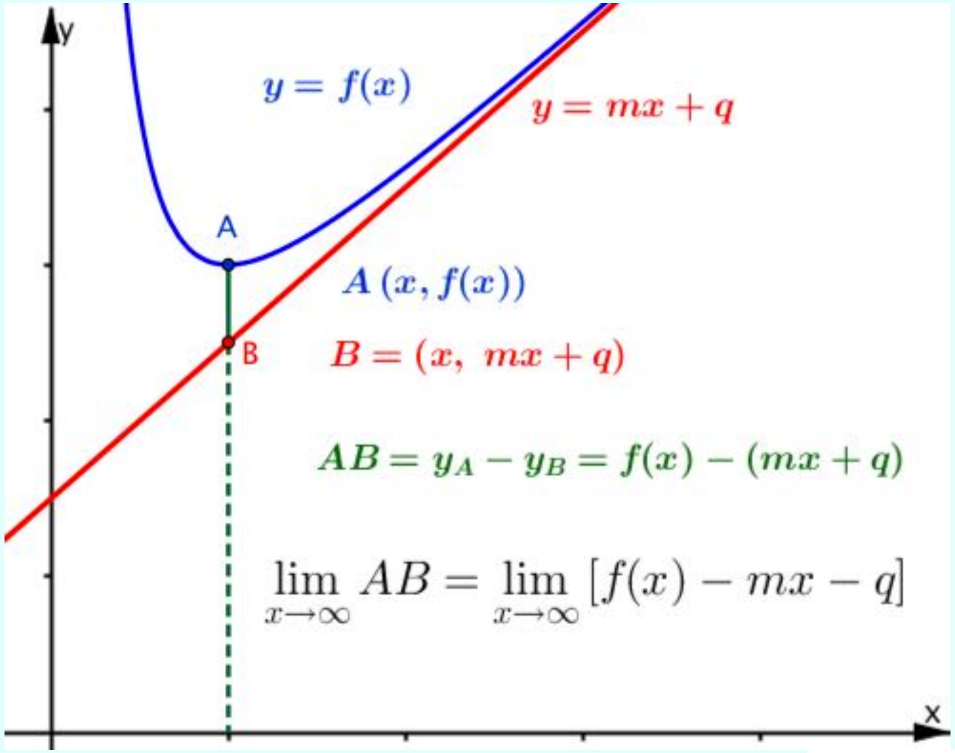
$$\lim_{x \to \infty} AB = 0$$



Determinare l’equazione dell’asintoto obliquo

Come determino l’equazione dell’asintoto obliquo, se l’espressione analitica della funzione non è semplice come quella appena studiata?

Un procedimento generale



La retta è asintoto per la curva, se risulta:

$$\lim_{x\to\infty} AB = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - q) = 0$$

Da cui ricavo

$$q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

E come procedo per determinare il coefficiente m?

Un procedimento generale per calcolare m

Riprendo la condizione

$$\lim_{x\to\infty} AB = 0$$

E osservo che, se è vera

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx - q\right) = 0$$

Deve anche essere vera

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x) - mx - q}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\frac{q}{x}}_{0}\right]$$

E così ricavo

$$m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

Come determinare l'asintoto obliquo

Ecco come calcolare i coefficienti *m* e *q* in modo che la retta d'equazione *y* = *mx* + *q* sia asintoto per il grafico di *y* = *f* (*x*).

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]}$$

Se non trovo entrambi i limiti finiti, la curva non ha un asintoto obliquo.

Osservazioni

1. L'asintoto orizzontale diventa un caso particolare di asintoto obliquo (con m = 0).

2. Per determinare gli asintoti obliqui debbo calcolare limiti di forme indeterminate del tipo ∞/∞.
Posso applicare il teorema di de l'Hopital, ma nel caso di limiti di quozienti di polinomi, conviene ricordare che:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_0 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_p\, x^p} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < p \\ \infty & \text{se } n > p \\ \dfrac{a_n}{b_p} & \text{se } n = p \end{cases}$$

Richiamo gli asintoti verticali

Per completare lo studio degli asintoti ricordo che il grafico di una funzione può avere anche uno o più asintoti verticali.
Come determino gli asintoti verticali?

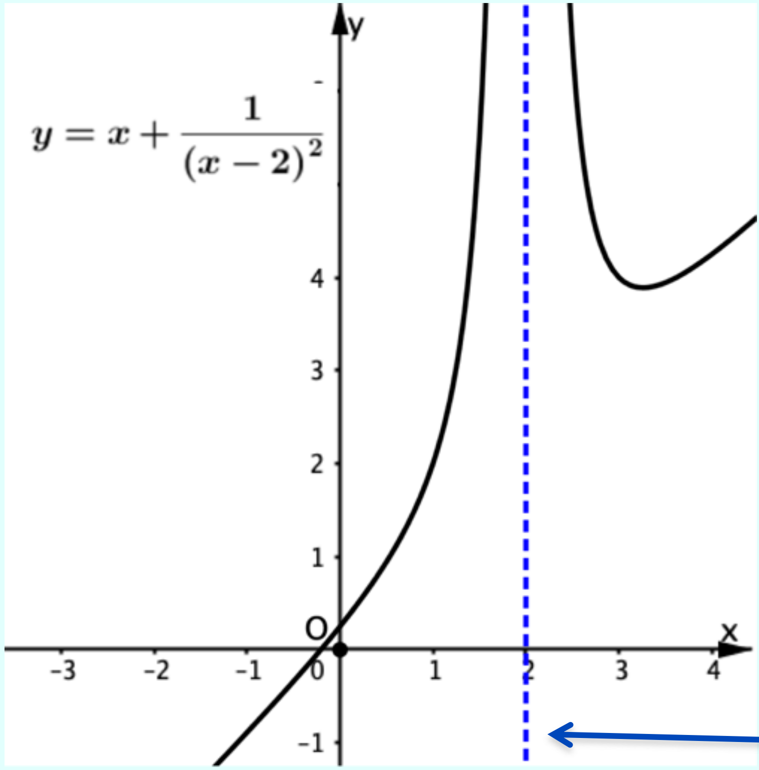
Asintoto verticale

Una curva d'equazione $y = f(x)$ ammette un asintoto d'equazione $x = a$, se si verificano le seguenti condizioni:

1. Il numero a è escluso dal dominio di $f(x)$;

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

ESEMPIO



DOMINIO

Numeri reali escluso 2

$$\lim_{x \to 2} \left[x + \frac{1}{(x-2)^2} \right] = \infty$$

$$\Downarrow$$

Asintoto verticale d'equazione

$\boldsymbol{x = 2}$

Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere sugli asintoti del grafico di una funzione.

Revisione dell’attività

Quesiti 1 e 2a

I. A partire dalla funzione $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ risolvi i quesiti 1, 2 e 3.

1. Determino il dominio della funzione.

Denominatore $= x^2-4=0$ per $x=2$ e $x=-2$

Il dominio è l'insieme dei numeri reali, esclusi –2 e 2

2. Equazioni degli eventuali asintoti

a. *Ricerca di asintoti verticali*

$\lim_{x\to -2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ Asintoto di equazione $x=-2$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ Asintoto di equazione $x=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

8

0

Quesito 2b

b. *Ricerca l'asintoto obliquo d'equazione $y = mx + q$*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1\Rightarrow\ m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+4x}{x^2-4}=0\Rightarrow\ q=0$$

In conclusione, gli asintoti della curva hanno equazioni:

$$x=-2,\ x=2 \text{ e } y=x.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_p\,x^p}=\begin{cases}\infty & \text{se } n>p\\ 0 & \text{se } n<p\\ \dfrac{a_n}{b_p} & \text{se } n=p\end{cases}$$

Quesito 3

3. Traccia in figura 1 il grafico degli asintoti calcolati.

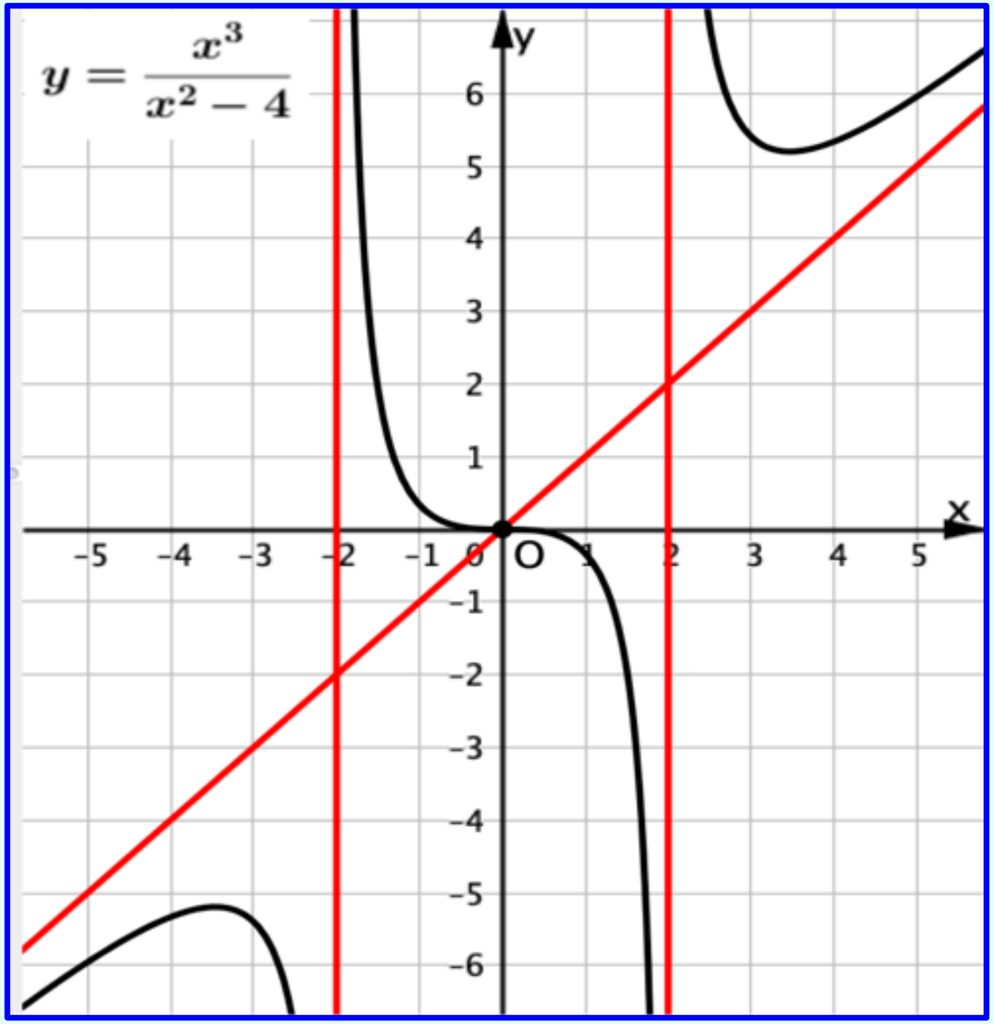


Fig.1

Quesiti 4 e 5

4. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto d'equazione $x = a$ **V**

Perché: Esempio, figura 1

5. Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto d'equazione $x = a$ **F**

Perché il numero a è escluso dal dominio della funzione

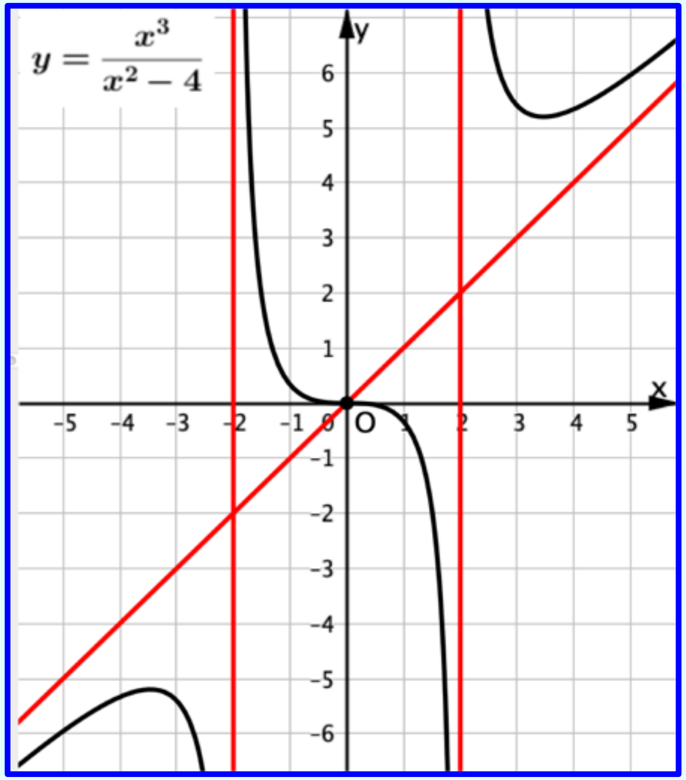


Fig.1

Quesiti 6 e 7

6. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto obliquo **F**

Perché una curva con più di un asintoto obliquo non può essere il grafico di una funzione. Esempio: figura 2

7. Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto obliquo **V**

Perché: Esempio, figura 1

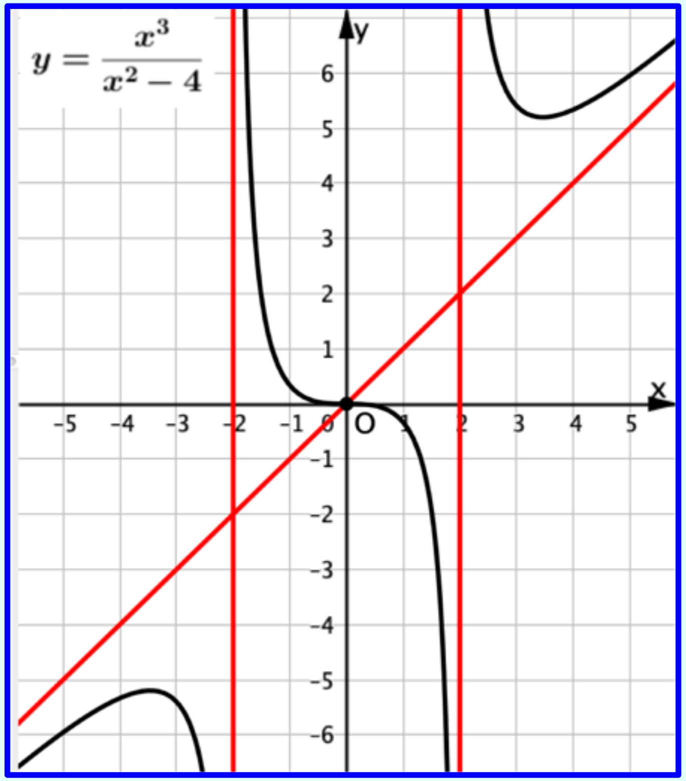
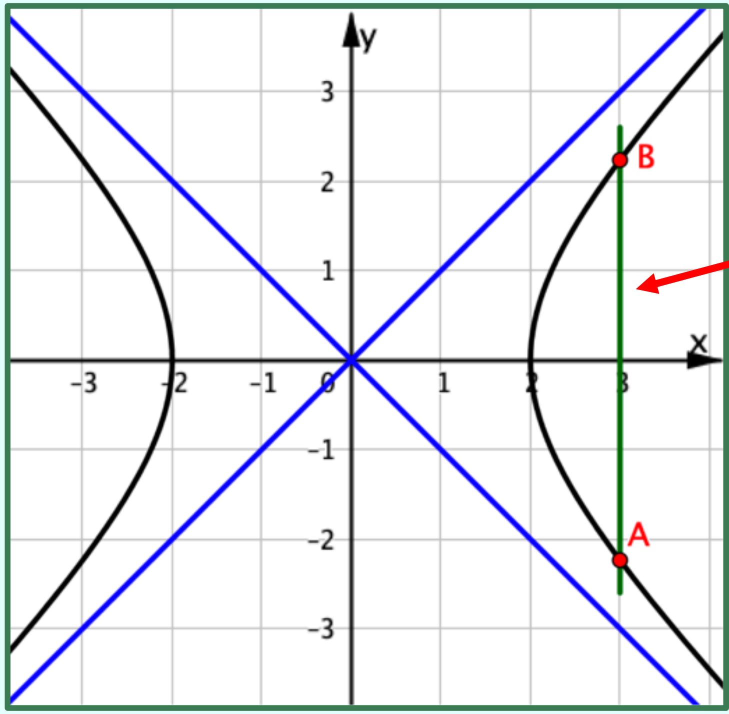


Fig.1



Ad una x corrispondono due y

Fig. 2

Quesito 8

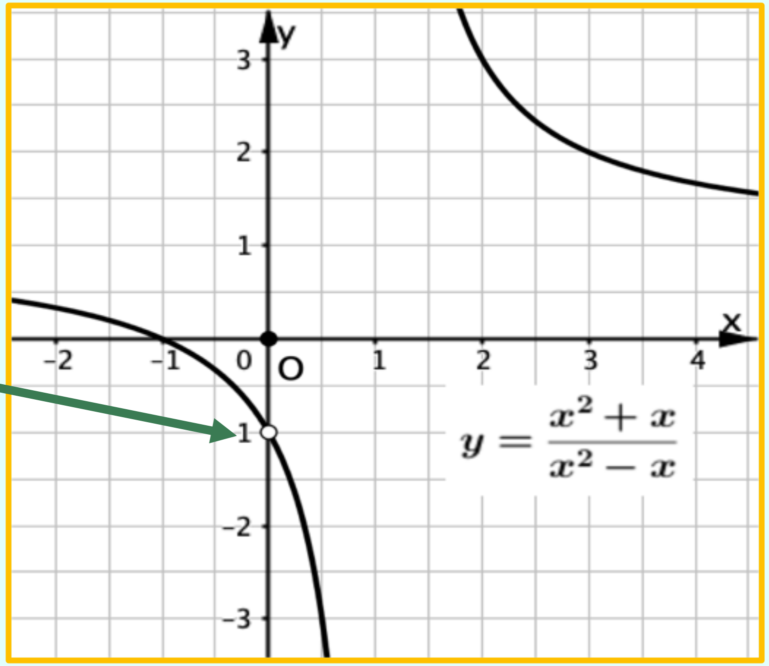
8. Il grafico di funzione $y=\frac{x^2+x}{x^2-x}$ ha l'asintoto verticale d'equazione $x=0$ **F**

Perché 0 è escluso dal dominio della funzione, ma trovo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2x-1}=-1$$

Forma indeterminata del tipo 0/0

Applico il teorema di de l'Hopital



Discontinuità in corrispondenza di $x = 0$: non c'è il punto (0, –1).

Quesito 9

9. Il grafico di $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$ ha un asintoto verticale e un asintoto obliquo **F**

Perché: il dominio è R e $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2-3}{x} = \infty$

Posso ripetere questo ragionamento a partire da qualunque funzione polinomiale *f*(*x*) di grado *n* > 1.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- **Nessun numero reale è escluso dal dominio, perciò *f*(*x*) non può avere asintoti verticali.**
- **Per tutte le funzioni polinomiali *f*(*x*) di grado *n* >1, trovo:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

Perciò *f*(*x*) non può avere un asintoto obliquo.

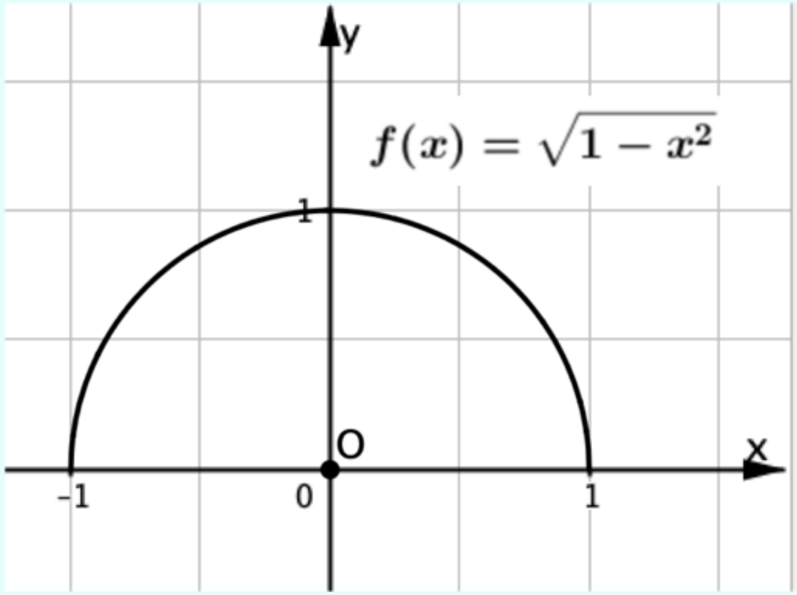
Le funzioni polinomiali non hanno asintoti

Quesito 10

10. Il grafico di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ha un asintoto obliquo. **F**

Perché il dominio è l'intervallo [–1, 1], perciò non posso calcolare

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$



Condizione necessaria per trovare un asintoto obliquo:
il dominio della funzione deve essere illimitato.