Teorema di de l’Hôpital

Risposte e commenti all’attività

Stefano Volpe, 2023

Limite 1, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	**Quesito II**
Limite 1: $\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x-3}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-3x}_{\to 0}}$ $f(x) = x - 3 \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$ Le funzioni sono due polinomi, perciò sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x) \neq 0$ per $x \neq 1{,}5$.	Per applicare il teorema di de l'Hôpital calcolo $\lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{3}$ Così trovo $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3x} = \frac{1}{3}$

B. Le due funzioni rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

Limite 4, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	Quesito II
Limite 4: $\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{2\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}$ $f(x)=2\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}$ $g(x)=x-1 \Rightarrow g'(x)=1$ $f(x)$ è definito nell'insieme dei reali positivi e ivi derivabile. $g(x)$ è un binomio con $g'(x)\neq 0$ per qualunque x.	Per applicare il teorema di de l'Hôpital calcolo $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x}}{1}=2$ Così trovo $\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1}=2$

B. Le due funzioni rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

Limite 2, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	Quesito II
Limite 2: $\lim_{x \to 3} \frac{\overbrace{x-3}^{\to 0}}{\underbrace{x^2+3x}_{\to 18}} = 0$ **NON è una forma indeterminata** $f(x) = x - 3 \quad \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = x^2 + 3x \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$ $\lim_{x \to 3}(x-3) = 0$ ma $\lim_{x \to 3}(x^2+3x) = 18$ **Manca l'ipotesi 2; non posso applicare il teorema di de l'Hôpital.**	**Che cosa succede se 'mi distraggo' e applico il teorema di de l'Hôpital?** Calcolo $\lim_{x \to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{9}$ E ottengo $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{1}{9}$ **Così perdo tempo per svolgere calcoli inutili E ottengo il risultato sbagliato.**

B. Le due funzioni NON rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

Limite 3, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	**Quesito II**
Limite 3: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \infty$ **NON è una forma indeterminata** $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$ $g(x) = x \quad \Rightarrow g'(x) = 1$ $\lim_{x\to 0} x = 0$ ma $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ **Manca l'ipotesi 2; non posso applicare il teorema di de l'Hôpital.**	**Che cosa succede se 'mi distraggo' e applico il teorema di de l'Hôpital?** Calcolo $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{1} = 0$ E ottengo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ **Così perdo tempo per svolgere calcoli inutili E ottengo il risultato sbagliato.**
B. Le due funzioni NON rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.	

III quesito, parti *a* e *b*

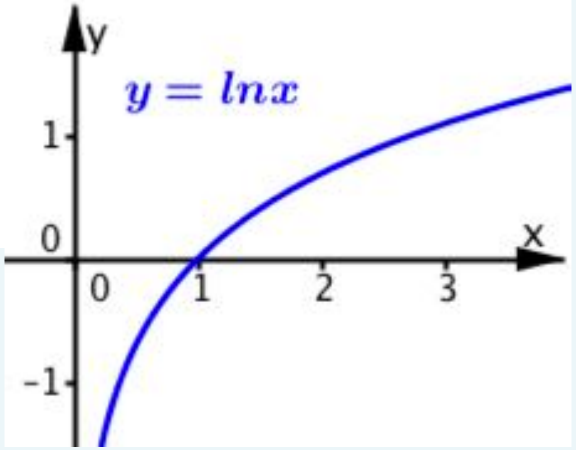
III. Calcola, se è possibile, i seguenti limiti con il procedimento che ritieni più opportuno

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{5x^4+x^3-2}^{\to\infty}}{\underbrace{2x^4-3x^2+x}_{\to\infty}} = \frac{5}{2}$ quoziente di polinomi di uguale grado

Potrei applicare il teorema di de l'Hôpital, ma dovrei applicare più volte il teorema e quindi svolgere calcoli molto più lunghi.

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln x}{x}$

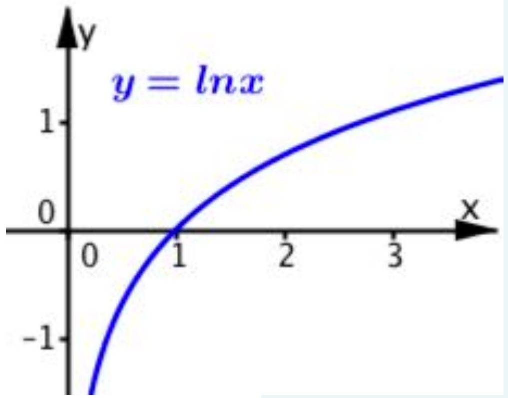
Limite che non posso calcolare, perché $y = \ln x$ è definito nell'insieme dei reali positivi, perciò non ne posso calcolare il limite per $x\to-\infty$.



III quesito, parte *c*

III. Calcola, se è possibile, i seguenti limiti con il procedimento che ritieni più opportuno

c. $\lim_{x \to 0^+} \frac{[\ln x]^{\to -\infty}}{\left[\frac{1}{x}\right]^{\to +\infty}} = 0$ Applico il teorema di de l'Hôpital



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{1}{x} \to g'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

IV quesito

IV. Il teorema di de l'Hôpital si può applicare anche per risolvere altre forme indeterminate riconducibili con opportuni calcoli ad una delle forme 0/0 oppure ∞/∞. Ecco due esempi.

- A partire da $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ rispondi ai seguenti quesiti:
  - In quale forma indeterminata si presenta il limite? Del tipo $0 \cdot \infty$
  - Puoi indicare un procedimento per ricondurre il limite ad uno dei limiti del quesito **III**?

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

- A partire da $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ rispondi ai seguenti quesiti:
  - In quale forma indeterminata si presenta il limite? Del tipo $\infty - \infty$.
  - Puoi indicare un procedimento per ricondurre il limite ad uno dei limiti trattati a lezione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$