Infinitesimi e infiniti

A) Infinitesimi

Il teorema di de l'Hôpital permette di esaminare dettagliatamente un gran numero di situazioni, in cui sono date due funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$ per cui risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

e si deve calcolare

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Valendosi dunque del teorema di de l'Hôpital si è trovato che si possono verificare le seguenti quattro situazioni:

$$I)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0, \qquad\qquad II)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

$$III)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,\ \text{con } \ell\neq 0 \text{ e finito}, \qquad IV)\quad \text{non esiste } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Spesso si descrivono tali situazioni introducendo il termine ***infinitesimo*** *con il seguente significato:*

una funzione $y=f(x)$ è un infinitesimo per $x\to a$, se risulta $\lim_{x\to a} f(x)=0$

Così si dice, relativamente ai vari casi elencati prima:

I) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$,
II) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$,
III) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi dello stesso ordine,
IV) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi non confrontabili.

Si possono anche interpretare questi risultati da un punto di vista grafico-intuitivo, dicendo che

I) per $x\to a$, $f(x)$ tende a 0 "più rapidamente" di $g(x)$,
II) per $x\to a$, $f(x)$ tende a 0 "più lentamente" di $g(x)$,
III) per $x\to a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 "con la stessa rapidità".

Ecco un esempio di applicazione di queste considerazioni. Dato che risulta:

$$I)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0, \qquad II)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty, \qquad III)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}=1$$

si può dire che:
I) x^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x (fig.1),
II) $\sqrt[3]{x}$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto ad x (fig.2),
III) sen x è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto ad x (fig.3).

Due osservazioni:

- *con il termine infinitesimo si indica una funzione che tende a 0, non un numero fisso molto piccolo;*
- *dalla parola infinitesimo proviene l'aggettivo infinitesimale, che accompagna il termine analisi per indicare i rami della matematica basati sullo studio di funzioni in varie circostanze.*

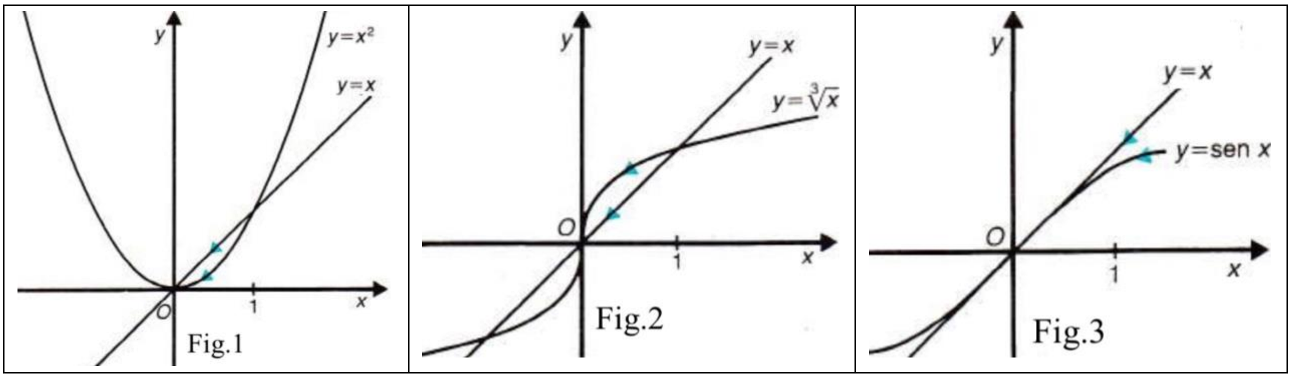

Fig.1 Fig.2 Fig.3

B) Infiniti

Considerazioni analoghe a quelle precedenti si possono ripetere, a partire da due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, per cui risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

quando si calcola

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Anche ora si hanno i seguenti casi possibili

$$I)\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=0, \qquad II)\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

$$III)\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell, \text{ con } \ell\neq 0 \text{ e finito}, \qquad IV)\text{ non esiste } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si descrivono tali situazioni introducendo il termine ***infinito*** *con il seguente significato:*

una funzione $y=f(x)$ è un infinito per $x\to a$, se risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

Così si dice, relativamente ai vari casi elencati prima:

I) $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$,
II) $f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$,
III) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti dello stesso ordine,
IV) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti non confrontabili.

Si possono anche interpretare questi risultati da un punto di vista grafico-intuitivo, dicendo che

I) per $x\to a$, $f(x)$ tende a ∞ "più lentamente" di $g(x)$,
II) per $x\to a$, $f(x)$ tende a ∞ "più rapidamente" di $g(x)$,
III) per $x\to a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendono a ∞ "con la stessa rapidità".

Ecco un esempio di applicazione di queste considerazioni:
Dato che risulta

$$I)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0, \qquad II)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty, \qquad III)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}=1$$

si può dire che:

I) $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto ad x (fig.4),
II) e^x è un infinito di ordine superiore rispetto ad x (fig.5),
III) $x+1$ è un infinito dello stesso ordine rispetto ad x (fig.6).

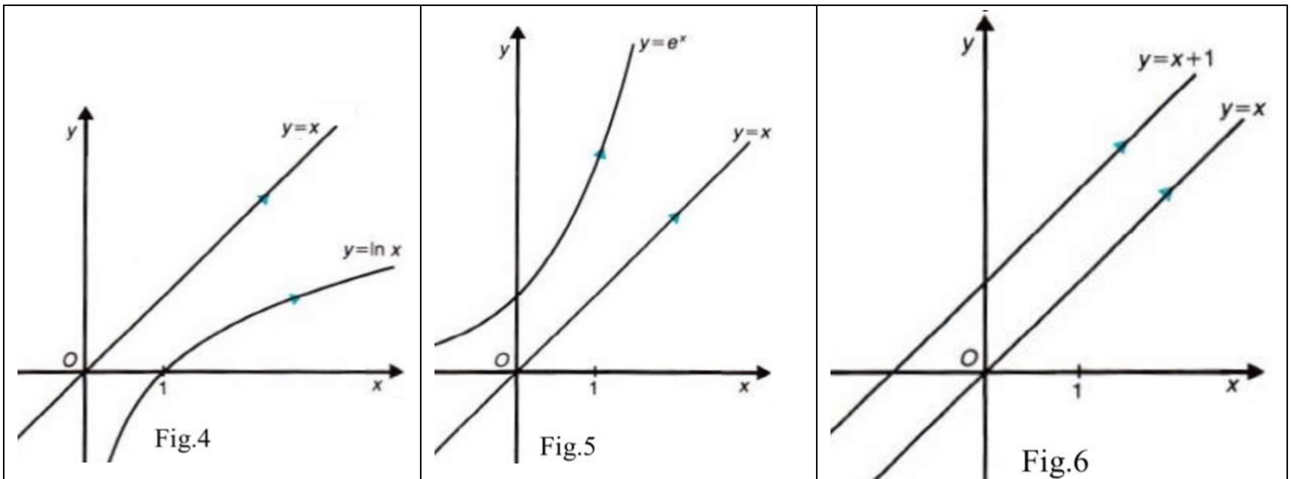

Fig.4 Fig.5 Fig.6

ESERCIZI

1. Dimostrare che, per $x \to +\infty$, e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^n (con n intero positivo). Interpretare questo risultato da un punto di vista grafico-intuitivo.

2. Dimostrare che, per $x \to +\infty$, $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x^n (con n intero positivo). Interpretare questo risultato da un punto di vista grafico-intuitivo.

3. Dimostrare che nel calcolo di un quoziente fra somme di infinitesimi si possono trascurare tanto al numeratore che al denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

   (Si deve calcolare

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)+m(x)}$$

   sapendo che risulta

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} m(x) = 0$$

   e inoltre

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to a} \frac{m(x)}{h(x)} = 0$$

   Si può anche scrivere

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)+m(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{1+\dfrac{g(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{m(x)}{h(x)}} = \ldots)$$

4. Dimostrare che nel calcolo di un quoziente fra somme di infiniti si possono trascurare tanto al numeratore che al denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

   (Seguire un procedimento analogo a quello suggerito nell'esercizio precedente).

Documento tratto dal testo fuori catalogo:
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Elementi di analisi matematica