Dimostrare il teorema di de l'Hôpital

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite in uno stesso insieme, soddisfano le seguenti condizioni:

I) **all'interno dell'insieme sono derivabili e risulta $g'(x)\neq 0$,**

II) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, **(dove a è un numero o il simbolo ∞),**

III) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, **(dove ℓ è un numero o il simbolo ∞),**

allora, risulta anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Per dimostrare il teorema conviene scrivere:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

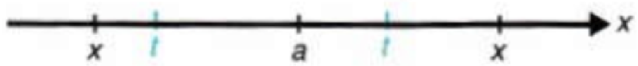
Così, applicando il teorema di Cauchy, si può ottenere

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

dove x indica un numero che si trova in un intorno destro o sinistro di a, perciò dovrà essere:

$a < t < x$ oppure $x < a < t$

La figura qui sotto illustra la situazione.



Osserviamo ora che, quando $x\to a$, anche $t\to a$, e, siccome risulta per ipotesi

$$\lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}=\ell$$

si avrà anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\ell$$

e, in conclusione,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Teorema di Cauchy

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite nello stesso intervallo $[a, b]$, presentano le seguenti caratteristiche:

- **sono derivabili nell'intervallo $[a, b]$,**
- **risulta $g'(x)\neq 0$ per ogni valore di x interno all'intervallo $[a, b]$;**

allora si verifica che:

I) $g(a)\neq g(b)$,

II) **si può trovare almeno un punto c, all'interno dell'intervallo $[a, b]$ per cui risulta**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Documento tratto dal testo fuori catalogo:
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Elementi di analisi matematica