Teorema di de l'Hôpital. Esercizi

Sul teorema di de l'Hôpital per calcolare limiti in forma indeterminata del tipo 0/0.

Teorema di de l'Hôpital

Se due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:

1. in un intorno di a, escluso al più a, sono derivabili e risulta $g'(x) \neq 0$;
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ [dove a è un numero o il simbolo ∞]
3. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ [dove ℓ è un numero o il simbolo ∞]

Allora risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per spiegare perché ***non*** *puoi applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare i limiti assegnati nell'esercizio 1.*

1. a. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x-1}$ **b.** $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x}}{x+2}$ **c.** $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x-3}$

a. $f(x) = x^2 + x$ e $\lim_{x\to 1}(x^2 + x) = \cdots$

$g(x) = x - 1$ e $\lim_{x\to 1}(x - 1) = \cdots$

Non è verificata l'ipotesi .....

b. $f(x) = \sqrt{x}$ e *non posso calcolare* $\lim_{x\to -2} \sqrt{x}$ *perché* ....

Perciò non è verificata l'ipotesi .....

c. $f(x) = cox - 1$ e $\lim_{x\to 0}(cosx - 1) = \cdots$

$g(x) = x - 3$ e $\lim_{x\to 0}(x - 3) = \cdots$

Non è verificata l'ipotesi .....

Spiega perché ***non*** *puoi applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare i limiti assegnati negli esercizi 2 e 3*

2. a. $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x}{\sqrt{x-1}}$ **b.** $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3+8}$ **c.** $\lim_{x\to 0} \frac{senx-1}{cosx}$

3. a. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2}$ **b.** $\lim_{x\to -1} \frac{lnx}{x^2-1}$ **c.** $\lim_{x\to \pi} \frac{tanx}{x}$

4. Risolvi i seguenti quesiti:

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

a. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-2x}$	**b.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+8}{x^2-2x}$	**c.** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x-2)}{x}$	**d.** $\lim_{x\to \pi} \frac{senx}{x}$
Frase	Frase	Frase	Frase ....

A. Il limite **non** rispetta tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.
B. Il limite rispetta tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno.

5. Risolvi i seguenti quesiti:

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

a. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3-9x}{x^2-3x}$	**b.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+9}{x^2+3x}$	**c.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}$	**d.** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{senx}$
Frase ….	Frase ….	Frase ….	Frase ….

A. Il limite **non** rispetta tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

B. Il limite rispetta tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno.

A partire da ogni limite proposto negli esercizi da 6 a 10 risolvi i seguenti quesiti:

a*. Applica il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite;*

b. *Scomponi in fattori i polinomi per calcolare il limite;*

c. *Confronta i due procedimenti e indica quale procedimento preferisci.*

6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$, $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$

9. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

10. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$

Applica il teorema di de l'Hôpital per calcolare i limiti proposti negli esercizi da 11 a 15.

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^x-3}{4x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2e^x}{x}$

13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{sen}^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{sen } x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{sen } x}{x^3}$

15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x+\text{sen } x}$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per calcolare il limite proposto nell'esercizio 16.

16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}$

Applico il teorema di de l'Hôpital e ottengo $\lim\limits_{x\to0}$ … … … … . ..

Il limite è ancora una forma indeterminata del tipo … … *che rispetta le ipotesi del teorema di de l'Hôpital, perciò applico di nuovo il teorema e ottengo:* $\lim\limits_{x\to0}$ … … . . $=\frac{1}{2}$.

Concludo che risulta: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}=\cdots\cdots$.

Applica anche più volte il teorema di de l'Hôpital per calcolare i limiti proposti negli esercizi da 17 a 19.

17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^3}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^2}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^3}$

19. $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^3}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{xcosx-senx}{x^3}$

20. Applica il teorema di de l'Hôpital per verificare che, per qualunque numero reale *k*, sono vere le seguenti uguaglianze.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x}=k, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } kx}{x}=k$$

21. Applica il teorema di de l'Hôpital per verificare che, per qualunque coppia di numeri reali *a* e *b*, sono vere le seguenti uguaglianze.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}=\frac{a}{b}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } ax}{\text{tg } bx}=\frac{a}{b}$$

22. Applica il teorema di de l'Hôpital per verificare che, per qualunque numero reale β, sono vere le seguenti uguaglianze.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }(x+\beta)-\text{sen }\beta}{x}=\cos\beta, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+\beta)-\cos\beta}{x}=-\text{sen }\beta$$

23. Applica il teorema di de l'Hôpital per verificare che, per qualunque numero reale β sono vere le seguenti uguaglianze.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x-\text{sen }\beta}{x-\beta}=\cos\beta, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos\beta}{x-\beta}=-\text{sen }\beta$$

Sul teorema di de l'Hôpital per calcolare limiti in forma indeterminata del tipo ∞/∞.

Teorema di de l'Hôpital

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:

1. in un intorno di a, escluso al più a, sono derivabili e risulta $g'(x)\neq 0$;
2. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ [dove a è un numero o il simbolo ∞]
3. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ [dove ℓ è un numero o il simbolo ∞]

Allora risulta

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A partire da ogni limite proposto negli esercizi da 24 a 26 risolvi i seguenti quesiti:

***a**. Applica anche più volte il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite;*

***b.** Applica il procedimento algebrico richiamato qui sotto per calcolare il limite;*

***c.** Confronta i due procedimenti e indica quale procedimento preferisci.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}=\begin{cases}0 & \text{se } n<m\\ \infty & \text{se } n>m\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m\end{cases}$$

24. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x+1}$

25. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2}{5x-3}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^3+x^2}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+3}$

26. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$

Applica il teorema di de l'Hôpital per calcolare i limiti proposti negli esercizi da 27 a 30

27. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$

28. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$, $\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$

29. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

30. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}$, $\quad\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per verificare che è inutile applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite assegnato nell'esercizio 31.

31. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$

Se applico il teorema di de l'Hôpital, calcolo il rapporto delle derivate e ottengo:

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}$ *che è ancora una forma indeterminata del tipo* ∞/∞.

E, se calcolo di nuovo il rapporto delle derivate, ottengo …………………… , che è una forma indeterminata analoga a quella di partenza.

32. Verifica che è inutile applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare i seguenti limiti.

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+8}}$, $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^4+2}}$

Esercizio guidato

*Completa il procedimento per verificare che **non** puoi applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite assegnato nell'esercizio 33.*

33. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+senx}{x}$

Non esiste $\lim_{x\to\infty} senx$, *perciò* ……….

34. Verifica che **non** puoi applicare il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+cosx}{2x-cosx}$$

Sul teorema di de l'Hôpital per calcolare limiti in forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$.

Quando si deve calcolare

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) \qquad \text{con} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

si ha una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$; ma basta tenere presente che

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \qquad \text{oppure} \qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

per ricondurre il limite assegnato ad una forma del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, forme che si possono trattare con i teoremi di de l'Hôpital.

Esercizio guidato

Completa il procedimento per calcolare il limite assegnato nell'esercizio 35.

35. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x$

Scrivo $x\cdot e^x=\frac{x}{e^{-x}}$ *e applico il teorema di de l'Hôpital per calcolare:*

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$ *che è una forma indeterminata del tipo ∞/∞.*

Calcolo il limite del rapporto delle derivate e ottengo: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\cdots\cdots$

Concludo che risulta: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x=\cdots\cdots$

Calcola i limiti assegnati negli esercizi da 36 a 38

36. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

37. $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\cdot lnx$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\cdot lnx^2$

38. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tg(x)\right]$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot tg(x)\right]$

Sul teorema di de l'Hôpital per calcolare limiti in forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$.

Esercizio guidato

Completa il procedimento per calcolare il limite assegnato nell'esercizio 39.

39. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$

Ho una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$; eseguo la sottrazione e ottengo:

$$\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{senx-x}^{\to0}}{\underbrace{xsenx}_{\to0}}$$ *che è una forma indeterminata del tipo ……..*

Applico il teorema de l'Hôpital e calcolo il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{cosx-1}^{\to0}}{\underbrace{senx+xcosx}_{\to0}}$$ *è ancora una forma indeterminata del tipo ……..*

Applico una seconda volta il teorema di de l'Hôpital e ottengo:

$$\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{-senx}^{\to0}}{\underbrace{cosx+cosx-xsenx}_{\to2}}=\ .....$$

Concludo che risulta: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=\cdots.$

A partire da ogni limite assegnato negli esercizi da 40 a 44, risolvi i seguenti quesiti:
 ***a**. scrivi il limite in modo da poter applicare il teorema di de l'Hôpital;*
 ***b.** calcola il risultato del limite.*

40. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$

41. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

42. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{cosx}-tgx\right)$

43. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{x}{2lnx}\right)$

44. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

In generale

Quando si deve calcolare

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$$

oppure

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a}f(x)=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to a}g(x)=-\infty$$

si ha una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$; *ma basta scrivere*

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

per ricondurre ad una forma del tipo $\frac{0}{0}$, *forma che si può trattare con il teorema di de l'Hôpital.*

Sul teorema di de l'Hôpital per calcolare limiti nelle forme indeterminate del tipo 0/0, ∞/∞, 0· ∞, ∞ − ∞

45. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}$$

A. Il limite **non** si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

B. Il risultato del limite è 1.

C. Il risultato del limite è $\frac{2x-4}{2x-8}$

D. Il risultato del limite è ∞.

46. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}$$

A. Il limite **non** si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

B. Il risultato del limite è 1.

C. Il risultato del limite è $\frac{2x-4}{2x-8}$

D. Il risultato del limite è ∞.

47. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 8x}$$

A. Il limite si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

B. Il risultato del limite è 0.

C. Il risultato del limite è ∞.

D. Il risultato del limite è $\frac{2x-4}{2x-8}$.

48. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x}{e^{x+3}}$$

A. Il limite **non** si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

B. Il risultato del limite è 0.

C. Il risultato del limite è +∞.

D. Il risultato del limite è $\frac{2x-4}{e^{x+3}}$

49. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x}{e^{x+3}}$$

A. Il limite si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

B. Il risultato del limite è 0.

C. Il risultato del limite è +∞.

D. Il risultato del limite è $\frac{2x-4}{e^{x+3}}$

50. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln{(x-1)}}{x^2 - 2x}$$

A. Il risultato del limite è 0.

B. Il risultato del limite è $\frac{1}{2}$.

C. Il risultato del limite è $\frac{0}{0}$

D. Il limite **non** si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

51. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln{(x-1)}}{x^2 - 2x}$$

A. Il risultato del limite è 0.

B. Il risultato del limite è $\frac{1}{2}$.

C. Il risultato del limite è +∞

D. Il limite **non** si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

52. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

A. Il limite **non** è una forma indeterminata.

B. Il risultato del limite è $+\infty$

C. Il risultato del limite è $-\frac{1}{2}$.

D. Per calcolare il limite non posso applicare il teorema di de l'Hôpital.

53. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\cdot tgx$$

A. Il limite **non** è una forma indeterminata.

B. Il risultato del limite è ∞

C. Il risultato del limite è -1.

D. Il risultato del limite è -2.

54. Scegli l'unica affermazione vera sul seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-lnx)$$

A. Non posso calcolare il limite.

B. Il risultato del limite è $-\infty$.

C. Per calcolare il limite posso applicare il teorema di de l'Hôpital

D. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$.