Selezionare le radici razionali di un polinomio

Un criterio per selezionare le radici razionali di un polinomio

Ricordo il criterio per selezionare le radici intere di un polinomio: posso trovare le radici intere di un polinomio solo fra i divisori del termine noto.
Ecco ora un criterio più generale per selezionare le radici di un polinomio nel più ampio insieme dei numeri razionali:

Posso trovare le radici razionali di un polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ solo tra le frazioni che hanno come numeratore un divisore del termine noto a_0 e come denominatore un divisore del coefficiente del monomio di grado massimo a_n.

Un'applicazione del criterio

Per afferrare meglio il criterio, che ha un enunciato piuttosto complicato, conviene vederne subito un'applicazione al polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

Si ha che:

- il termine noto è –6 e i divisori di –6 sono:

  $1 \qquad -1 \qquad 2 \qquad -2 \qquad 3 \qquad -3 \qquad 6 \qquad -6$

- il monomio di grado massimo è $2x^3$, con coefficiente 2, e i divisori di 2 sono:

  $1 \qquad -1 \qquad 2 \qquad -2$

- le frazioni che possono essere le radici razionali del polinomio sono dunque le seguenti (fig. 1):

  $\pm 1 \qquad \pm\frac{1}{2} \qquad \pm 2 \qquad \pm 3 \qquad \pm\frac{3}{2} \qquad \pm 6$

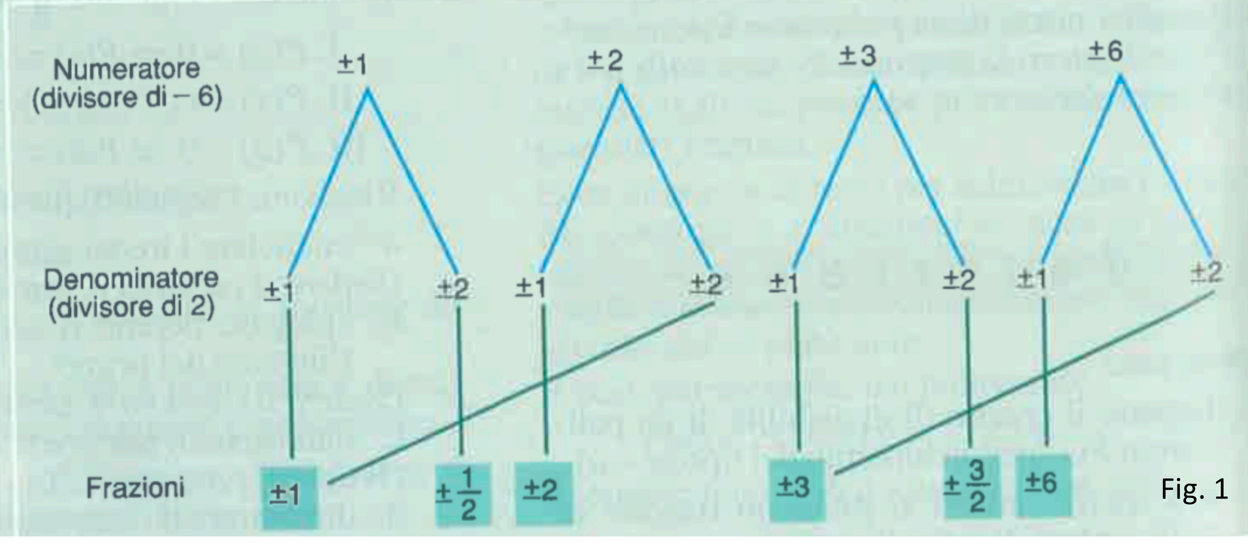

Fig. 1

Si tratta dunque di soli 12 numeri razionali.

Provando a calcolare il valore che assume il polinomio in corrispondenza di questi numeri, si trova:

$$P(2) = 0 \qquad P(3) = 0$$

e si trova anche:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Così si trova che il polinomio ha le tre radici razionali:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$$

L'esempio ora esaminato conduce a esporre il criterio nel modo seguente:

- si scrivono i numeri razionali nella forma di frazioni $\frac{n}{d}$ ridotte ai minimi termini, cioè con n e d che sono due interi senza fattori comuni;
- si considera l'insieme F formato dalle frazioni $\frac{n}{d}$ che hanno n divisore del termine noto e d divisore del coefficiente del monomio di grado massimo;
- si scrive il criterio nella forma:

$$P\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{n}{d}\right) \in \mathrm{F}$$

Così si osserva subito che *non è vero il teorema inverso* e cioè *non è vero* che:

$$\frac{n}{d} \in \mathrm{F} \Rightarrow P\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

perché non è detto affatto che tutti i numeri dell'insieme F siano radici del polinomio. Nel polinomio esaminato prima si aveva, per esempio,

$$1 \in \mathrm{F}, \quad \text{ma} \quad \mathrm{P}(1) = 2$$

Un caso particolare del nuovo criterio

Il criterio per selezionare le radici intere di un polinomio diventa un caso particolare del nuovo criterio: gli interi divisori del termine noto sono le frazioni che hanno come denominatore 1 o –1.

Esercizi

Per ogni polinomio assegnato negli esercizi da 1 a 20 risolvi i seguenti quesiti:
A. *Determina le radici razionali del polinomio;*
B. *Elenca i polinomi divisori del polinomio;*
C. *Dividi il polinomio per il divisore più opportuno;*
D. *Scrivi il polinomio scomposto in fattori.*

1. $P(x)=6x^3-17x^2+16x-6$
2. $P(x)=4x^3-13x^2-13x+4$
3. $P(x)=6x^3+7x^2-7x-6$
4. $P(x)=16x^4-1$
5. $P(x)=81x^4-16$
6. $P(x)=9x^4+8x^2-1$
7. $P(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$
8. $P(x)=2x^4+5x^3-5x-2$
9. $P(x)=3x^4-10x^3+10x-3$
10. $P(x)=4x^6-x^4+4x^2-1$
11. $P(x)=2x^3+7x^2+7x+2$
12. $P(x)=3x^3-7x^2-7x+3$
13. $P(x)=6x^3-x^2-20x+12$
14. $P(x)=81x^4-1$
15. $P(x)=16x^4-81$
16. $P(x)=9x^4+8x^2-1$
17. $P(x)=4x^4-5x^2+1$
18. $P(x)=6x^4-13x^3+13x-6$
19. $P(x)=2x^6-5x^5+2x^4-2x^2+5x-2$
20. $P(x)=4x^6-9x^4+4x^2-9$

Teoria ed esercizi sono tratti dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti: *Matematica oggi vol. II*