

Scomporre polinomi in fattori. Esercizi

I. Fattorizzare un polinomio col procedimento basato sul calcolo letterale

Esercizi guidati

Completa il procedimento per fattorizzare i polinomi assegnati negli esercizi da 1 a 4 applicando i prodotti notevoli richiamati qui sotto.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

- $x^4 - 16 = (x^2 - \dots)(x^2 + \dots)$ $(9x^4 - 4) = (3x^2 - \dots)(3x^2 + \dots)$
- $x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + \dots)^2$ $9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - \dots)^2$
- $x^3 + 12x^2 + 6x + 8 = (x + \dots)^3$ $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - \dots)^3$
- $x^3 + 27 = (x + \dots)(\dots\dots\dots)$ $8x^3 - 1 = (2x - \dots)(\dots\dots\dots)$

Completa il procedimento per fattorizzare i polinomi assegnati negli esercizi da 5 a 8 raccogliendo anche un fattore comune

- $9x^4 - 4x^2 = x^2(\dots\dots\dots)$
- $4x^3 + 4x^2 + x = x(\dots\dots\dots) = x(\dots\dots\dots)^2$
- $8x^4 - x = x(\dots\dots\dots) = x(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$
- $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(\dots\dots\dots) = x^2(\dots\dots\dots)^2$

Scomponi in fattori i polinomi assegnati negli esercizi da 9 a 12.

- $x^4 - 25$ $4x^4 - 25$
- $x^4 - 81$ $16x^4 - 81$
- $x^3 - 27$ $8x^3 + 27$
- $27x^3 + 1$ $27x^3 - 8$

13. Esamina le seguenti uguaglianze:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) \qquad x^4 - 4 = (x + 2)(x - 2) \qquad x^8 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Spiega perché le uguaglianze non sono identità;
- Correggi le uguaglianze in modo da trasformarle in identità.

14. Esamina le seguenti uguaglianze:

$$x^4 + 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3) \qquad x^4 - 9 = (x + 3)(x - 3) \qquad x^{16} - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Spiega perché le uguaglianze non sono identità;
- Correggi le uguaglianze in modo da trasformarle in identità.

Scomponi in fattori i polinomi assegnati negli esercizi da 15 a 19

- $x^4 + 10x^2 + 25$ $x^4 + 18x^2 + 81$ $4x^4 + 4x^2 + 1$
- $9x^4 + 6x^2 + 1$ $9x^4 + 12x^2 + 4$ $4x^4 + 12x^2 + 9$
- $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
- $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$ $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

II. Fattorizzare un polinomio biquadratico

Esercizio guidato

Completa il procedimento per fattorizzare il polinomio biquadratico assegnato nell'esercizio 20.

20. Scomponi in fattori il polinomio $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

- Osservo che $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4$
- Perciò scelgo la variabile ausiliaria $t = x^2 \Rightarrow t^2 = x^4$
- Risolvo l'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$

- Calcolo $\Delta = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ e $t = \frac{5 \pm \sqrt{\dots}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{5 - \dots}{2} = \dots \\ t_2 = \frac{5 + \dots}{2} = \dots \end{array} \right.$

- Scompongo in fattori $t^2 - 5t + 4 = (t - \dots)(t - \dots)$
- Scompongo in fattori $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - \dots)(x^2 - \dots)$.

21. Completa la seguente tabella, come indicato nelle prime righe.

Polinomio biquadratico	Trinomio di 2° grado	Radici reali del trinomio	Trinomio scomposto	Polinomio scomposto
$3x^4 + x^2 + 2$	$3z^2 + z + 2$	nessuna	no	no
$3x^4 + 12x^2 + 12$	$3z^2 + 12z + 12$	$z_1 = z_2 = 2$	$3(z+2)^2$	$3(x^2+2)^2$
$2x^4 - 3x^2 + 5$		$z_1 = -1 \quad z_2 = \frac{5}{2}$	$2(z+1)\left(z - \frac{5}{2}\right)$	$2(x^2+1)\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)$
$-2x^4 + 3x^2 + 5$				
$-2x^4 + 3x^2 - 5$				
$-2x^4 + 8x^2 - 8$				

Scomponi in fattori i polinomi biquadratici assegnati negli esercizi da 22 a 29

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|--|
| 22. $4x^4 - 3x^2 - 1$ | 4x^4 - 4x^2 + 1 | 4x^4 - 4x^2 + 3 |
| 23. $2x^4 + 7x^2 + 3$ | $2x^4 + 8x^2 + 8$ | $2x^4 + 7x^2 + 8$ |
| 24. $9x^4 - 6x^2 + 1$ | $4x^4 - 6x^2 - 4$ | $9x^4 - 6x^2 + 2$ |
| 25. $4x^4 + 20x^2 + 27$ | $4x^4 + 20x^2 + 25$ | $4x^4 + 20x^2 + 9$ |
| 26. $2x^4 + 5x^2 - 3$ | $4x^4 + 10x^2 - 6$ | $-2x^4 - 5x^2 + 3$ |
| 27. $16x^4 - 8x^2 + 1$ | $2x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$ | $-x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}$ |
| 28. $12x^4 - 25x^2 + 12$ | $-12x^4 + 25x^2 - 12$ | $-6x^4 + 2,5x^2 - 6$ |
| 29. $x^4 + 20x^2 + 100$ | $100x^4 + 20x^2 + 1$ | $10x^4 + 2x^2 + 0,1$ |

III. Fattorizzare un polinomio col procedimento basato sulla divisione dei polinomi

Esercizio guidato

Completa il procedimento per fattorizzare il polinomio assegnato nell'esercizio 30.

30. Scomponi in fattori il polinomio

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

Il polinomio $P(x)$ è di ... grado perciò può avere al massimo radici reali.

A. Cerco per tentativi le radici intere: il termine noto 1 ha come divisori 1 e -1.

- Sostituisco 1 ad x e ottengo: $P(1) = \dots\dots\dots = 0 \Rightarrow 1$ è una radice;
- Sostituisco -1 ad x e ottengo: $P(-1) = \dots\dots\dots = 0 \Rightarrow -1$ è una radice.

B. Scrivo i polinomi divisori di $P(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \text{ è soluzione dell'equazione } \Leftrightarrow P \text{ è divisibile per } (x+1) \\ 1 \text{ è soluzione dell'equazione } \Leftrightarrow P \text{ è divisibile per } (x-1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow P \text{ è divisibile per } (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

C. Eseguo la divisione $(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & x^2 - 1 \\ - (\dots\dots\dots) & \hline \hline - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 & 2x^2 - 2x - 1 \\ - (\dots\dots\dots) & \\ \hline - x^2 + 1 & \\ - (\dots\dots\dots) & \\ \hline \dots\dots & \end{array}$$

Passi da seguire

a. Divisione $2x^4 : x^2 = 2x^2$

b. Moltiplicazione $2x^2(x^2 - 1) = \dots\dots\dots$

c. Sottrazione
 $2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 - (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

Ripeti i primi 3 passi

a₁. $-2x^3 : x^2 = -2x$

b₁. $-2x(x^2 - 1) = \dots\dots\dots$

c₁. $-2x^3 - x^2 + 2x + 1 - (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

Ripeti i primi 3 passi

a₂. $-x^2 : x^2 = -1$

b₂. $-1(x^2 - 1) = \dots\dots\dots$

c₂. $-x^2 + 1 - (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

D. Scrivo il polinomio scomposto in fattori:

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 1)(2x^2 - 2x - 1)$$

31. Il primo passo della divisione di polinomi chiede di dividere il monomio di grado massimo del polinomio dividendo ($2x^4$) per il monomio di grado massimo del divisore (x^2). Questa divisione è agevole se entrambi i polinomi sono scritti ordinati secondo le potenze decrescenti di x . Spiega perché anche le due seguenti divisioni conducono alla stessa divisione eseguita nell'esercizio 30.

$$(2x + 1 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2) : (-1 + x^2) \quad (-2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 + 2x^4) : (-1 + x^2)$$

32. Il primo passo della divisione fra due polinomi chiede di eseguire la divisione fra due monomi. Esegui le divisioni qui sotto.

$$x^4 : x = \dots \quad (6x^5) : (2x^3) = \dots \quad (3x^4) : (2x^3) = \dots \quad (ax^n) : (bx^m) = \dots \quad (\text{con } n \geq m, a \text{ e } b \text{ interi})$$

33. L'ultimo passo della divisione fra due polinomi chiede di eseguire la sottrazione fra due polinomi. Esegui le sottrazioni qui sotto. Esegui le sottrazioni qui sotto.

$$3x^4 + 4x^2 + 1 - (2x^3 - x^2) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$3x^5 - x^3 + 3x - (2x^3 - x^2 + 3x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Per ogni polinomio assegnato negli esercizi da 34 a 47 risolvi i seguenti quesiti:

A. Determina le radici intere del polinomio;

B. Elenca i polinomi divisori del polinomio;

C. Dividi il polinomio per il divisore più opportuno;

D. Scrivi il polinomio scomposto in fattori.

34. $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

35. $P(x)=x^3-5x^2-4x+20$

36. $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$

37. $P(x)=3x^3+2x^2-4x-3$

38. $P(x)=3x^3-4x^2+6x-5$

39. $P(x)=6x^3-6x^2+4x-32$

40. $P(x)=3x^3-5x^2+7x-5$

41. $P(x)=3x^3-4x^2+5x-4$

42. $P(x)=x^4+2x^2-3$

43. $P(x)=4x^4-13x^2+9$

44. $P(x)=4x^4-5x^2+1$

45. $P(x)=x^4-5x^2+4$

46. $P(x)=x^4-10x^2+9$

47. $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

IV. Fattorizzare un polinomio col procedimento più agevole

Scomponi in fattori i polinomi assegnati negli esercizi da 48 a 55 con il procedimento che ritieni più agevole

48. $P(x) = x^4 - 18x^2 + 81$

49. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 25$

50. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

51. $P(x) = x^4 - 9x^2 + 8$

52. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

53. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

54. $P(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

55. $P(x) = x^5 - 2x^3 - x^2 + 2$