Scomporre polinomi in fattori

Metodi per scomporre polinomi in fattori

Questa presentazione richiama due gruppi di metodi per scomporre in fattori un polinomio:

A. **metodi legati al calcolo letterale;**
B. **metodi legati alle soluzioni di equazioni polinomiali.**

A. Metodi legati al calcolo letterale

1. Raccogliere un fattore comune

Il metodo è legato alla proprietà distributiva:

$$\boxed{ax + by = a(x + y)}$$

ESEMPI

$$x^4 - 12\,x^3 + 6x^2 - 8x = x(x^3 - 12\,x^2 + 6x - 8)$$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 5)$$

2. Applicare prodotti notevoli

Differenza di due quadrati

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)}$$

ESEMPI

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = x^2 \Rightarrow a = x \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array}}$$

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = x^4 \Rightarrow a = x^2 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array}}$$

2. Applicare i prodotti notevoli

Quadrato di un binomio

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

ESEMPI

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = x^2 \Rightarrow a = x \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array}}$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = x^4 \Rightarrow a = x^2 \\ b^2 = 16 \Rightarrow b = -4 \end{array}}$$

2. Applicare i prodotti notevoli

Somma di due cubi

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)}$$

ESEMPI

$$x^3 + 8 = (x+2)\,(x^2 - 2x + 4)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = 8 \Rightarrow b = 2 \end{array}}$$

$$x^3 - 1 = (x-1)\,(x^2 + x + 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = -1 \Rightarrow b = -1 \end{array}}$$

2. Applicare i prodotti notevoli

Cubo di un binomio

$$\boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3}$$

ESEMPI

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = 8 \Rightarrow b = 2 \end{array}}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = -1 \Rightarrow b = -1 \end{array}}$$

Vocabolario matematico

Equazioni e identità

Tante uguaglianze scritte in algebra.
Ecco alcuni esempi per riflettere

$$\text{A. } (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Quadrato del binomio

Identità, cioè uguaglianza vera per qualunque numero reale *x*.

$$\text{B. } (x-3)^2 = 0$$

Equazione, cioè uguaglianza vera solo per alcuni numeri reali *x* da determinare.

Equazioni equivalenti

$$\text{C. } x^2 - 6x + 9 = 0$$

B. Metodi legati alle soluzioni di equazioni polinomiali

Richiamo, a partire da esempi, alcune conoscenze adatte per proseguire:

- **vocabolario matematico;**
- **teoremi di algebra su polinomi ed equazioni polinomiali.**

Vocabolario matematico

Polinomio di 3^0 grado

$$2x^3 - 9x^2 + 10\,x - 3$$

$2, -9, 10, -3$

coefficienti

Equazione polinomiale

$$2x^3 - 9x^2 + 10\,x - 3 = 0$$

x *incognita*

Funzione polinomiale

$$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10\,x - 3$$

x *variabile*

$$2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 3 = 0$$

1 *è una soluzione dell'equazione*

$$p(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 3 = 0$$

1 *è una radice (o uno zero) del polinomio*

Teorema di algebra sulle equazioni polinomiali

Sulle soluzioni di un'equazione polinomiale

Ha *al massimo* 3 soluzioni reali l'equazione polinomiale di 3^0 grado $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$

In generale

Un'equazione polinomiale di grado *n* con coefficienti reali ha *al massimo* *n* soluzioni reali.

Equazioni e polinomi di 2^0 grado

Risolvo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e trovo 2 soluzioni reali x_1 e x_2.

1. Scompongo in fattori il polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ e scrivo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2. Trovo che risulta:

$$c = a \cdot x_1 \cdot x_2$$

ESEMPI

Risolvo $x^2 - 5x + 6 = 0$

e ottengo: $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

1. Scrivo:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

2. Trovo: $6 = 2 \cdot 3$

Risolvo $x^2 - 8x + 16 = 0$

e ottengo: $x_1 = x_2 = 4$

1. Scrivo:

$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$

2. Trovo: $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$

Equazioni e polinomi di biquadratici

Un'applicazione della scomposizione del polinomio di 2^0 grado

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(x - 3)$$

Ho l'equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
Osservo che $x^4 = (x^2)^2$, perciò scelgo l'incognita ausiliaria $t = x^2$
e ritrovo l'equazione $t^2 - 5t + 6 = 0$ che ha le soluzioni reali

$$t_1 = 2 \text{ e } t_2 = 3$$

Così scrivo $t^2 - 5t + 6 = (t - 2)\,(t - 3)$
E trovo quindi

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\,(x^2 - 3)$$

Il polinomio di 4^0 grado $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ è del tipo $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$ e prende il nome di *polinomio biquadratico*

Equazioni e polinomi di grado n > 2

ESEMPIO

So che l'equazione $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ ha le 3 soluzioni intere

$$x_1 = -2\ ,\ x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 4$$

1. Trovo che le soluzioni sono numeri interi divisori del termine noto 8.
2. Scompongo in fattori il polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ e scrivo:

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = [x - (-2)]\,(x - 1)\,(x - 4)$$

IN GENERALE

Ho un'equazione polinomiale $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$
con i coefficienti tutti interi e $a_n = 1$

1. Trovo soluzioni intere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ solo fra i divisori di a_0.
2. Scompongo il polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ e scrivo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Risolvere equazioni ‘per tentativi’

Un altro esempio di equazione polinomiale di 3° grado:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Coefficienti tutti interi: $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = -1$, $a_0 = 3$.

Cerco possibili soluzioni intere fra i divisori di 3, che sono:

$$\mathbf{1, -1, 3, -3}$$

- **Sostituisco 1 ad x; ottengo 1 – 3 – 1 + 3 = 0 e trovo** $x_1 = 1$
- **Sostituisco – 1 ad x; ottengo –1 – 3 + 1 + 3 = 0 e trovo** $x_2 = -1$
- **Sostituisco 3 ad x; ottengo 27 – 27 – 3 + 3 = 0 e trovo** $x_3 = 3$.

L’equazione di 3° grado e non può avere più di 3 soluzioni reali; così ho trovato le 3 soluzioni e scompongo il polinomio

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

Non sempre i tentativi sono fortunati

Ancora un esempio di equazione polinomiale di 3° grado:

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

Coefficienti tutti interi: $a_3 = 1,\ a_2 = -1,\ a_1 = -3,\ a_0 = 3$

Cerco possibili soluzioni intere fra i divisori di 3, che sono:

1, – 1, 3, – 3

- Sostituisco 1 ad x; ottengo 1 – 1 – 3 + 3 = 0 e trovo $x_1 = 1$

- Sostituisco – 1 ad x; ottengo –1 – 1 – 3 + 3 = – 2;

- Sostituisco 3 ad x; ottengo 27 – 9 – 9 + 3 = 12;

- Sostituisco -3 ad x; ottengo –27 – 9 + 9 + 3 = –24.

Così ho trovato una sola soluzione intera. Le altre due soluzioni non possono essere intere.

Come procedo per cercare le altre due soluzioni?

La divisione di due polinomi

So che posso scrivere

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Come ottenere il polinomio da scrivere nella parentesi?

Ricordo una scrittura analoga con i numeri interi:

$$6 = 2 \times \ldots$$

Ottengo il numero da scrivere sui puntini con la divisione

$$6 : 2 = 3$$

E così, per avere il polinomio da scrivere nella parentesi, dovrò eseguire la divisione

$$(x^3 - x^2 - 3x + 3) : (x - 1)$$

Come si dividono due polinomi?

Procedimento per dividere due polinomi

$$\begin{array}{r|l} \boxed{x^3} - x^2 - 3x + 3 & x - 1 \\ \hline -(x^3 + x^2) & x^2 - 3 \\ \hline \boxed{-3x} + 3 & \\ -(-3x + 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

a. Divisione $\boxed{x^3} : x = x^2$

b. Moltiplicazione

$x^2 (x - 1) = x^3 - x^2$

c. Sottrazione

$x^3 - x^2 - 3x + 3$

$-(x^3 - x^2) = -3x + 3$

Ripeto i tre passi

a_1. $\boxed{-3x} : x = -3$

b_1. $-3(x - 1) = -3x + 3$

c_1. $-3x + 3 - (-3x + 3) = 0$

$$\boxed{x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x^2 - 3)}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione

Ora posso anche trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Equazione data:

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

Soluzione trovata per tentativi:

$$x_1 = 1$$

Con la divisione di polinomi ho trovato:

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (\boldsymbol{x} - 1)(\boldsymbol{x^2 - 3})$$

Invece dell'equazione data, risolvo l'equazione seguente:

$$(x-1)(x^2-3)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x-1=0 \Rightarrow x_1=1 \\ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_2=-\sqrt{3} \\ x_3=\sqrt{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Scomporre polinomi in fattori

***‘Scomporre un polinomio in fattori’ o ‘fattorizzare un polinomio’* significa *‘scrivere un polinomio come prodotto di polinomi’* . Il procedimento seguito finora presenta molte analogie con la scomposizione in fattori di un numero naturale.**

Numeri naturali	Polinomi
Numero scomposto in fattori $6 = 2 \times 3$	Polinomio scomposto in fattori $x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x^2 - 3)$
6 è divisibile per 2	$x^3 - x^2 - 3x + 3$ è divisibile per $(x - 1)$
$30 = 2 \times 3 \times 5$ è divisibile per 2 e per 3, perciò è divisibile per $2 \times 3 = 6$	$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ è divisibile per $(x - 1)$ e per $(x + 1)$, perciò è divisibile per $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

Equazioni e formule risolutive

Conosco la formula risolutiva per le equazioni di 2^0 grado

Equazione di 2° grado	Formula risolutiva
$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ con $\Delta = b^2 - 4ac$
ESEMPIO	
$x^2 - 3x - 4 = 0$ $a = 1 \;,\; b = -3 \;,\; c = -4$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \end{array} \right.$

Posso trovare una formula risolutiva anche per tutte le equazioni di grado superiore al 2^0?

Uno sguardo alla storia

Matematici italiani a metà del 1500 trovano formule risolutive per equazioni di 3^0 e 4^0 grado.
Non si studiano queste formule nelle scuole secondarie.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Libro pubblicato da
Gerolamo Cardano nel 1545

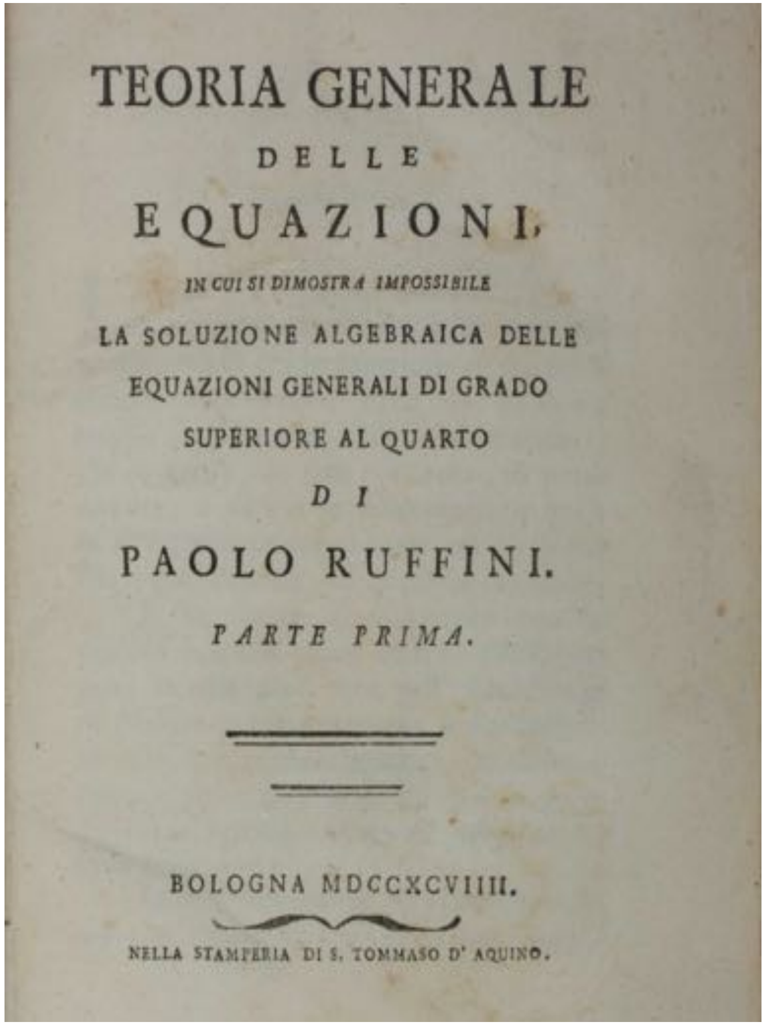
Uno sguardo alla storia

Secoli di tentativi dei matematici per trovare le formule risolutive di tutte le equazioni di quinto, sesto, … grado.

Fine 1700 – Inizio 1800

Teorema, pubblicato da Ruffini, con dimostrazione più generale di Abel:

È impossibile trovare la formula risolutiva per equazioni di grado superiore al 4°


TEORIA GENERALE

DELLE

EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE EQUAZIONI GENERALI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.

NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.