

Grafico di funzioni polinomiali. Esercizi

Grafici di funzioni polinomiali di 3° grado

Esercizio guidato

1. Completa il procedimento per tracciare il grafico di $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a. Prime caratteristiche del grafico

- Qual è l'insieme di definizione della funzione? _____
- La funzione è pari o dispari? _____

b. Studia il segno della funzione e riassumi i risultati nello schema a fianco.

- Scrivi la funzione come prodotto di due funzioni.

$$y = \dots(x-3)^2$$

- Studia il segno dei fattori $F_1 = \dots$ $F_2 = (x-3)^2$
- Per ricavare il segno del prodotto y tengo presente che:
 - $y = 0$ se almeno un fattore è zero;
 - $y < 0$ solo se i fattori hanno segno discorde.

c. Calcola la derivata $y' = f'(x)$, studiane il segno e inserisci i risultati nello schema a fianco.

$$y' = \dots = 3(\dots)$$

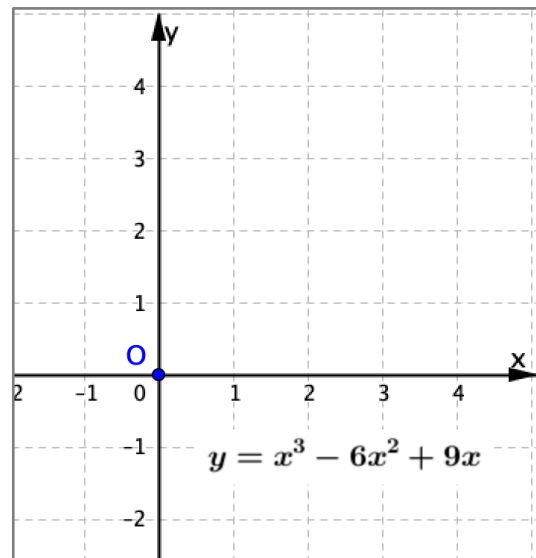
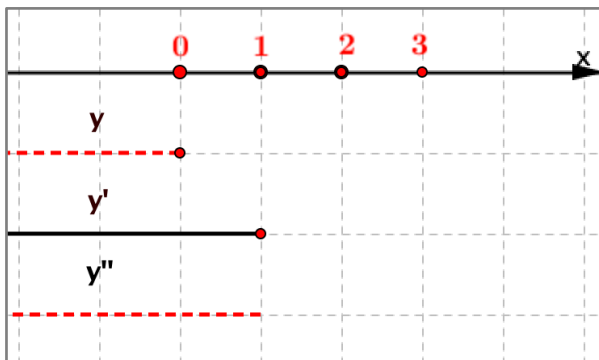
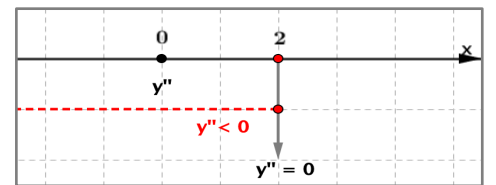
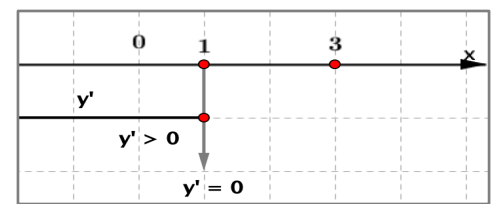
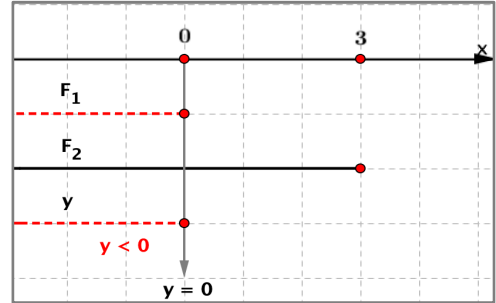
d. Calcola la derivata $y'' = f''(x)$, studiane il segno e inserisci i risultati nello schema a fianco.

$$y'' = \dots = 6(\dots)$$

e. Riassumi in un solo schema il segno della funzione e delle sue derivate, nella figura qui sotto, a sinistra

f. Elenca i punti notevoli (intersezioni con asse x o con asse y , massimi o minimi relativi, flessi) e determinane le ordinate qui sotto. Scrivi l'elenco dei punti notevoli sotto lo schema riassuntivo del segno.

g. Disegna il grafico della funzione assegnata a partire da tutte le informazioni che hai ottenuto, nel piano cartesiano qui sotto a destra

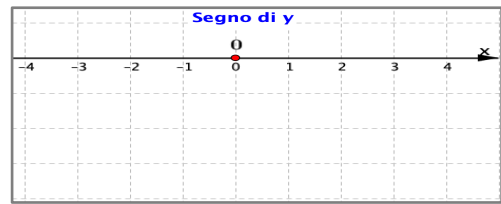


Esercizio guidato

2. Completa il procedimento per tracciare il grafico di $y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

a. *Prime caratteristiche del grafico*

- Qual è l'insieme di definizione della funzione? _____
- La funzione è pari o dispari? _____

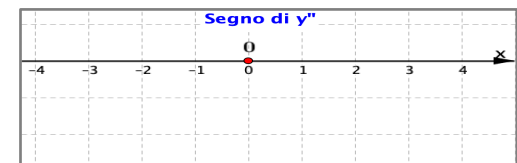


b. *Studia il segno della funzione e riassumi i risultati nello schema a fianco.*



c. *Calcola la derivata $y' = f'(x)$, studiane il segno e inserisci i risultati nello schema a fianco.*

$y' = \dots\dots\dots$



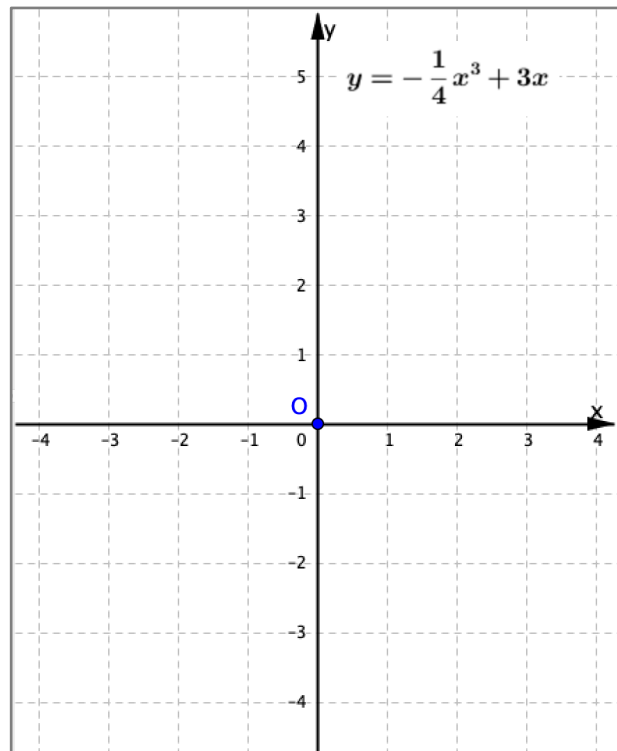
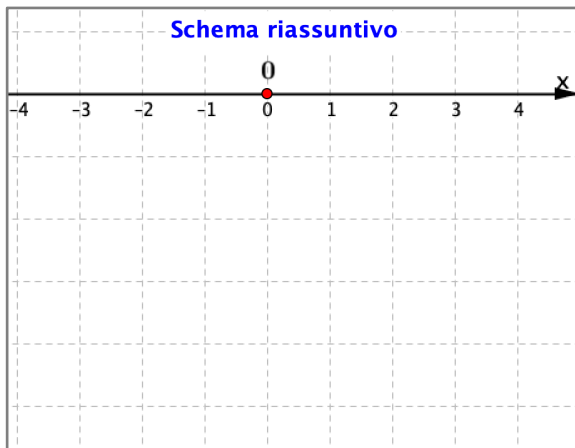
d. *Calcola la derivata $y'' = f''(x)$, studiane il segno e inserisci i risultati nello schema a fianco.*

$y'' = \dots\dots\dots$

e. *Riassumi in un solo schema il segno della funzione e delle sue derivate, nella figura qui sotto, a sinistra,*

f. *Elenca qui sotto i punti notevoli (intersezioni con asse x o con asse y, massimi o minimi relativi, flessi) e determinane le ordinate qui sotto. Scrivi l'elenco dei punti notevoli sotto lo schema riassuntivo.*

g. Nel piano cartesiano a destra disegna infine il grafico della funzione assegnata a partire da tutte le informazioni che hai ottenuto.



Studia il grafico delle funzioni polinomiali assegnate negli esercizi da 3 a 14.

3. $y = 1 - \frac{1}{2}x^3$

4. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

5. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x$

6. $y = -x^3 + 3x^2$

7. $y = -x^3 + 3x$

8. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

[Si ottiene $y = -(x-2)^2(x+1)$, $y' = 3x(2-x)$, $y'' = 6(1-x)$]

9. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

[Si ottiene $y = (x+1)^3$, $y' = 3(x+1)^2$, $y'' = 6(x+1)$]

10. $y = 4x^3 - 3x - 1$

[Si ottiene $y = (x-1)(2x+1)^2$, ...]

11. $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

[Si ottiene $y = (x+1)(x^2 + 2x + 2)$, ...]

12. $y = x^3 - 3x + 2$

[Si ottiene $y = (x-1)^2(x+2)$, ...]

13. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

[Si ottiene $y = \frac{1}{8}(x+1)(x^2 - 4x - 20)$, ...]

14. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$

[Si ottiene $y = \frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2$, ...]

15. Dimostra che ha sempre un punto di massimo o minimo relativo una parabola, grafico di una funzione di 2° grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

[Calcola derivata e stabilisci se puoi sempre trovare un numero reale x per cui risulta $y' = 0$...]

16. Dimostra che non può avere flessi una parabola, grafico di una funzione di 2° grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

17. Stabilisci quali casi si possono presentare per i punti stazionari del grafico di una funzione di 3° grado del tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

18. Dimostra che tutte le curve d'equazione $y = x^3 + ax$ hanno un solo punto di flesso in $O(0, 0)$, rispetto al quale sono simmetriche.

Grafici di funzioni polinomiali di 4° grado

Esercizio svolto

Studio il grafico di $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

1. Prime caratteristiche del grafico

- L'insieme \mathbf{R} dei numeri reali è l'insieme di definizione della funzione
- La funzione è pari perché trovo

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \quad f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 = f(x)$$

2. Segno della funzione.

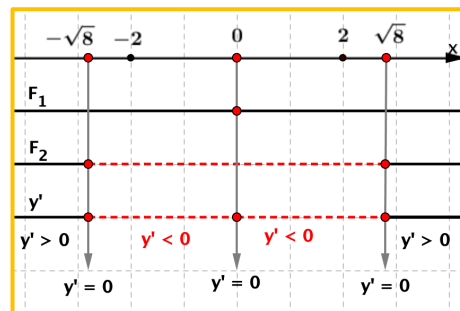
- Scrivo la funzione come prodotto di due funzioni di 2° grado.

$$y = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 8)$$

- Studio il segno dei fattori $F_1 = \frac{1}{4}x^2$ $F_2 = x^2 - 8$

- Per ricavare il segno del prodotto y ricordo che:

- $y = 0$ se almeno un fattore è zero;
- $y < 0$ solo se i due fattori hanno segno discorde.



3. Segno della derivata $y' = f'(x)$.

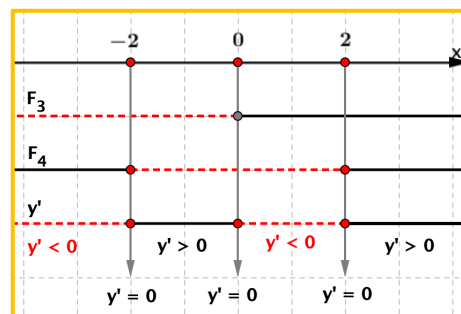
$$y' = x^3 - 4x$$

- Scrivo la derivata come prodotto di due funzioni.

$$y' = x(x^2 - 4)$$

- Studio il segno dei fattori $F_3 = x$ $F_4 = x^2 - 4$

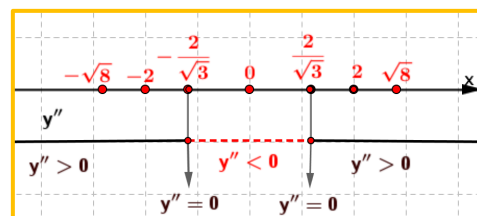
- Ricavo il segno del prodotto y' .



4. Segno della derivata seconda $y'' = f''(x)$

$$y'' = 3x^2 - 4$$

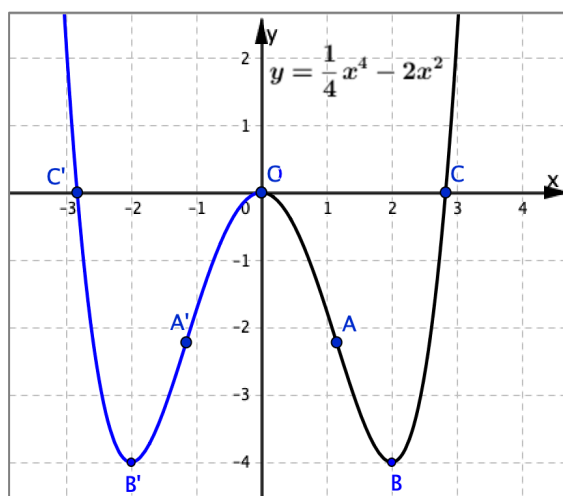
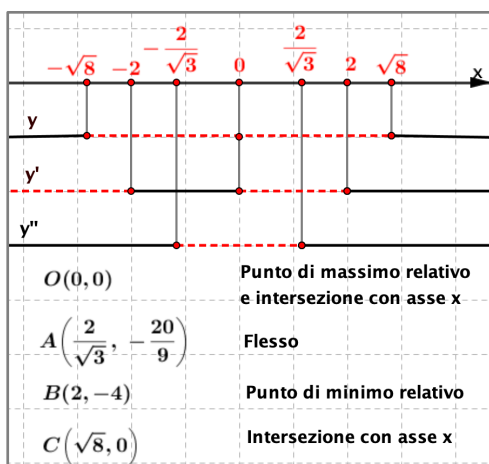
y'' è una funzione di 2° grado.



5. Riassumo qui sotto in un unico schema (a sinistra) il segno della funzione e delle sue derivate.

6. Elenco i punti notevoli (intersezioni con asse x o con asse y, massimi o minimi relativi, flessi) e ne calcolo le ordinate.

7. Nel piano cartesiano a destra disegno il grafico della funzione assegnata a partire da tutte le informazioni ottenute.



$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1,1$$

$$\sqrt{8} \cong 2,8$$

Osservazione. La funzione è pari: A' , B' , C' sono i punti simmetrici di ABC rispetto all'asse delle y.

Studia il grafico delle funzioni polinomiali assegnate negli esercizi da 19 a 32.

19. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

20. $y = 2x^4 - 4x^3$

21. $y = x^4 - 4x$

22. $y = x^4 - 6x^3 + 9x^2$

23. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

[Si ottiene $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, ...]

24. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}$

[Si ottiene $y = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x^2 - 9)$, ...]

25. $y = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 + \frac{9}{8}$

[Si ottiene $y = -\frac{1}{8}(x^2 + 1)(x^2 - 9)$, ...]

26. $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

[Si ottiene $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 + 4)$, ...]

27. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$

[Si ottiene $y = (x + 1)^2(3x^2 - 2x + 1)$, ...]

28. $y = 2x(x - 2)^3$

29. $y = 32x(x - 1)^3$

30. $y = 16x^3(2 - 3x)$

31. $y = x^2(x - 2)^2$

32. $y = (x + 2)^2(x - 1)^2$

Grafici di funzioni polinomiali di grado superiore al 4°

Studia il grafico delle funzioni polinomiali assegnate negli esercizi da 33 a 38

33. $y = x^5 - 5x$

34. $y = 3x^5 - 5x^3$

35. $y = \frac{8}{5}x^5 - 2x^4$

36. $y = (x^2 - 1)^3$

37. $y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x$

38. $y = \frac{1}{4}x^5 - 2x^3 + 4x$