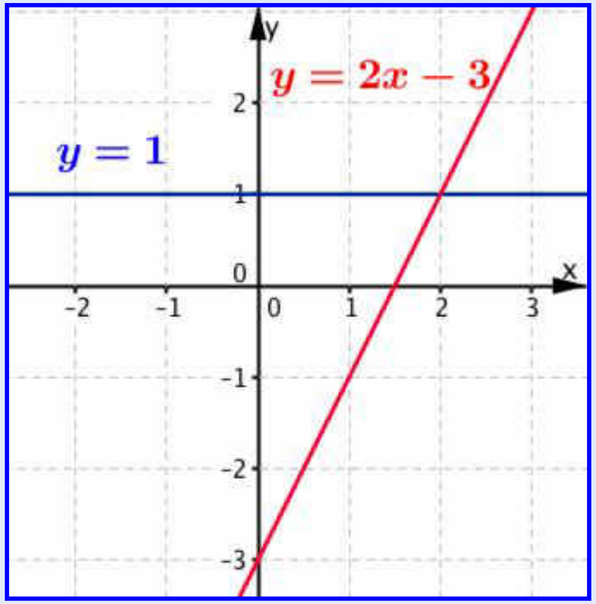
Studiare il grafico di funzioni polinomiali

Le funzioni polinomiali

PRIMI ESEMPI

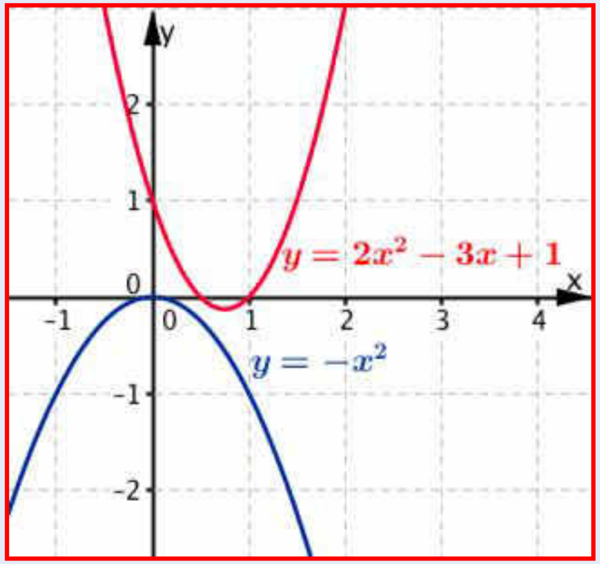
$y = 1 \qquad y = 2x - 3$

Conosciamo il procedimento per tracciare il grafico. Otteniamo **rette.**



$y = -x^2 \qquad y = 2x^2 - 3x + 1$

Conosciamo il procedimento per tracciare il grafico. Otteniamo **parabole.**



Le funzioni polinomiali

IN GENERALE

Funzioni del tipo

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

Sono definite e derivabili su tutto l'insieme R dei numeri reali.

Grafico di funzioni polinomiali

Grafico di funzioni del tipo

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

Questa lezione presenta un procedimento per disegnare con carta e penna il grafico delle funzioni polinomiali.
Il procedimento è basato su una *'cassetta di strumenti matematici'*.

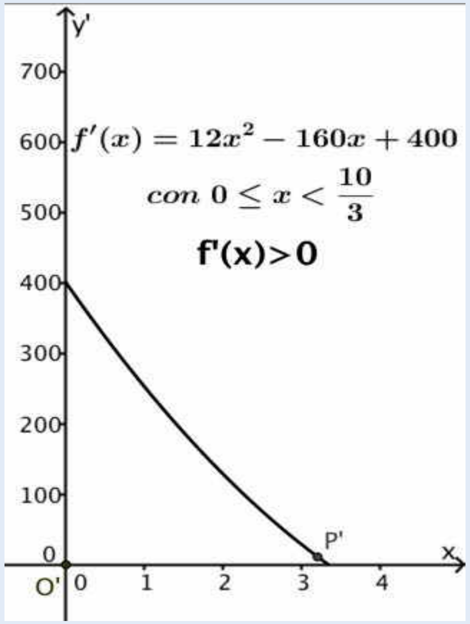
Derivate e grafico di un funzione

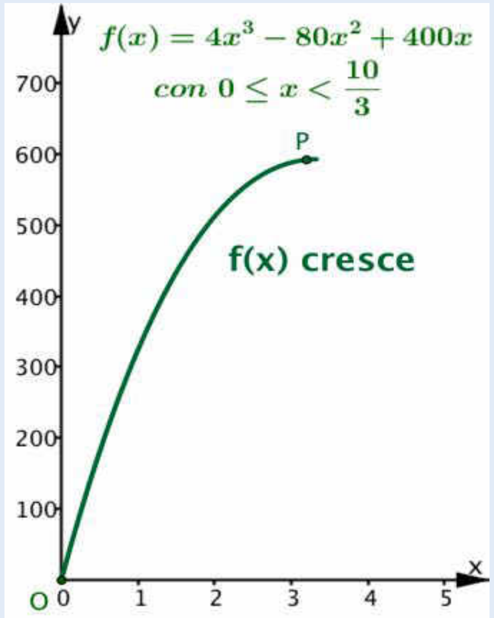
Nelle lezioni precedenti sulle derivate hai scoperto:

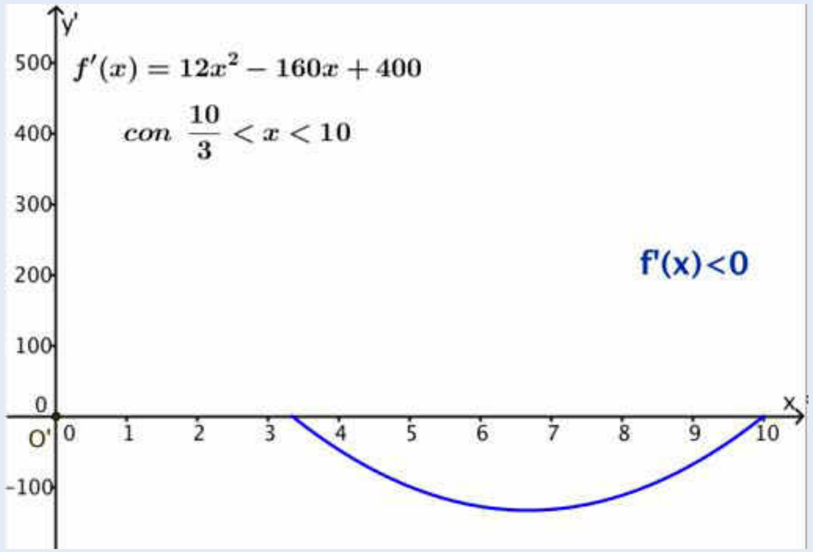
- **una relazione fra il segno della derivata f'(x) di una funzione f(x) e l'andamento crescente o decrescente del grafico di f(x);**
- **una relazione fra il segno della derivata seconda f''(x) e la concavità verso l'alto o verso il basso del grafico di f(x).**

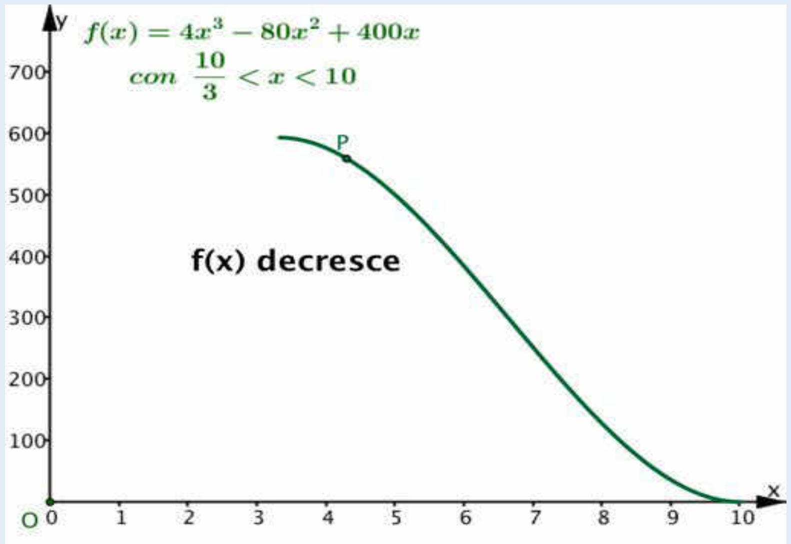
Ecco una sintesi grafica di queste relazioni.

Segno di f’(x) e crescita o decrescita di f(x)

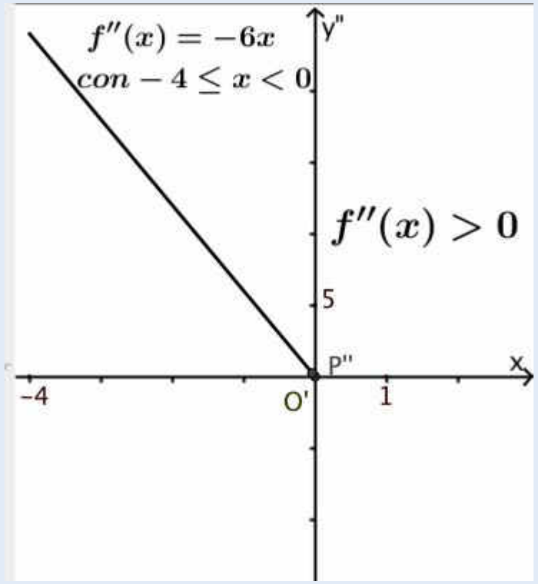


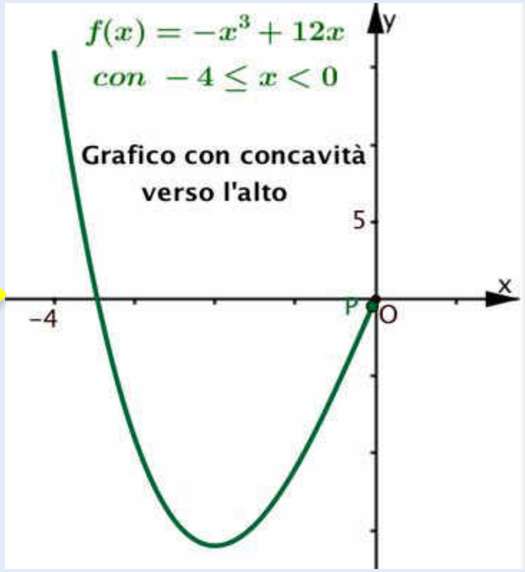


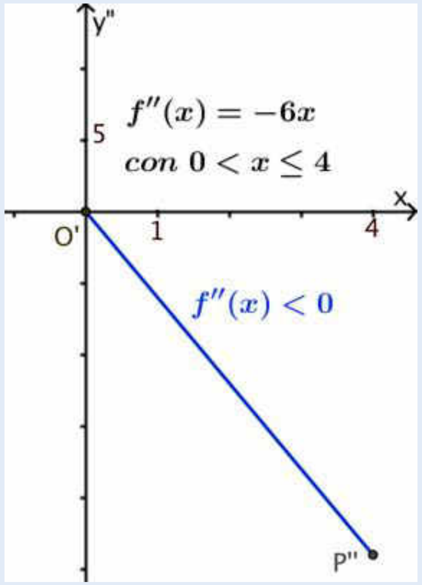


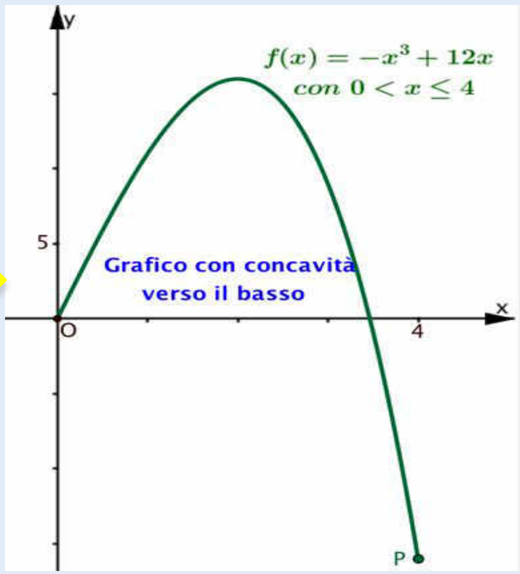


Segno di f"(x) e concavità del grafico di f(x)









Segno di un polinomio

Studiare il segno di un polinomio

Studiare il segno del polinomio, ad esempio $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$, significa determinare per quali valori di x trovo:

$$y = 0$$
$$y < 0$$
$$y > 0$$

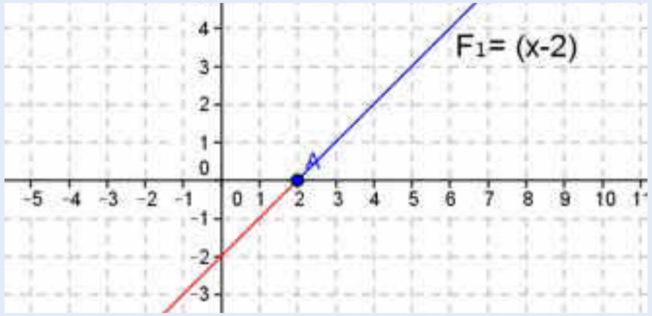
Procedimento per studiare il segno di un polinomio

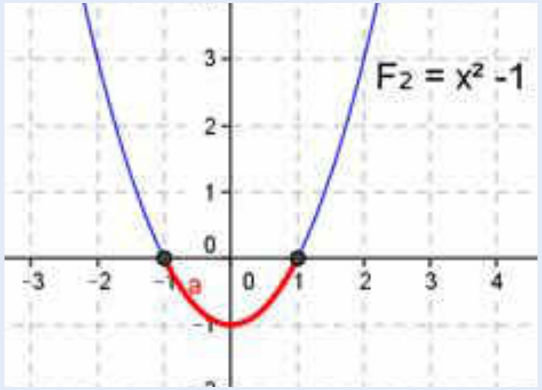
1. **Scompongo il polinomio in fattori e ottengo:**

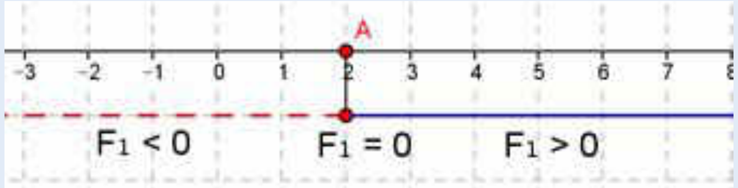
$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \iff y = (x-2)(x^2-1)$$

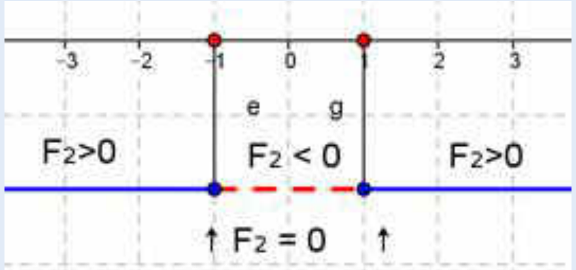
2. **Studio il segno dei due fattori:**

$$F_1 = x - 2 \qquad \text{e} \qquad F_2 = x^2 - 1$$





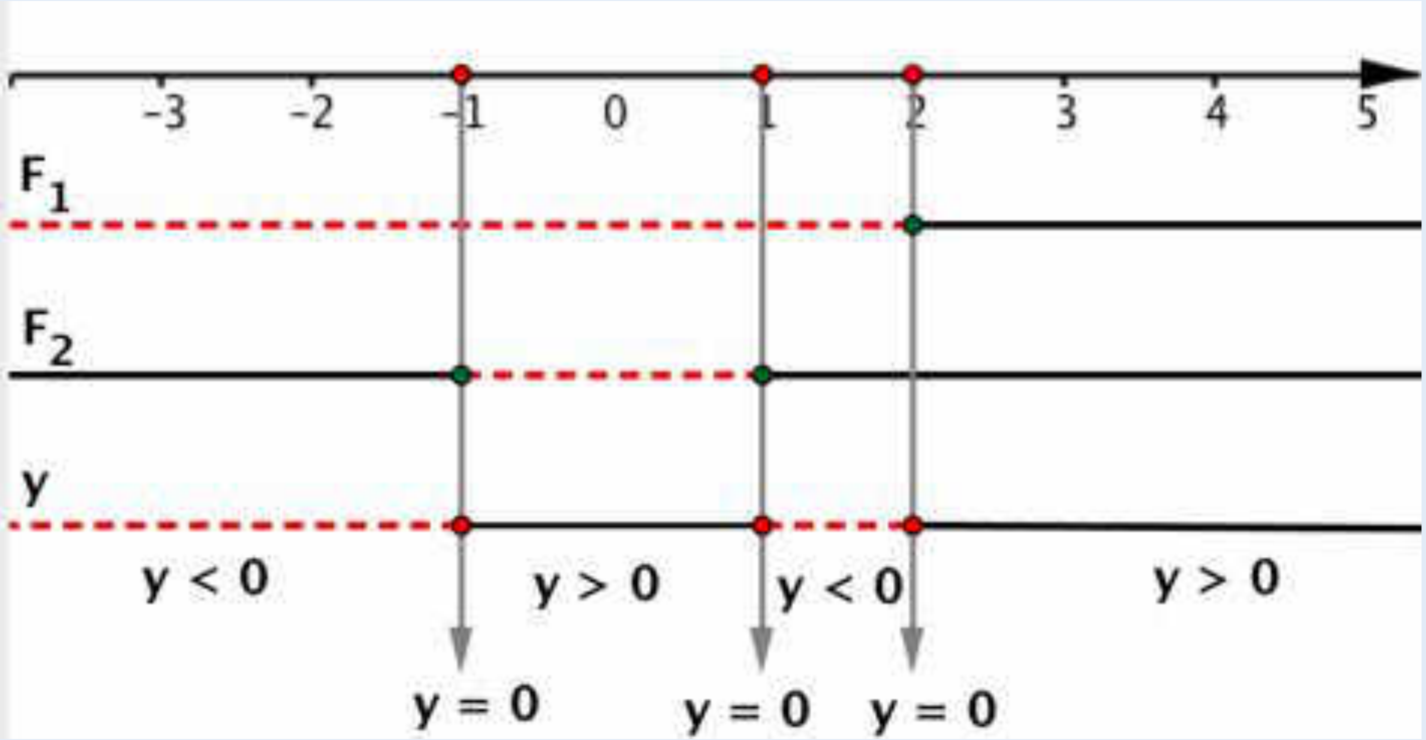




Procedimento per studiare il segno di un polinomio

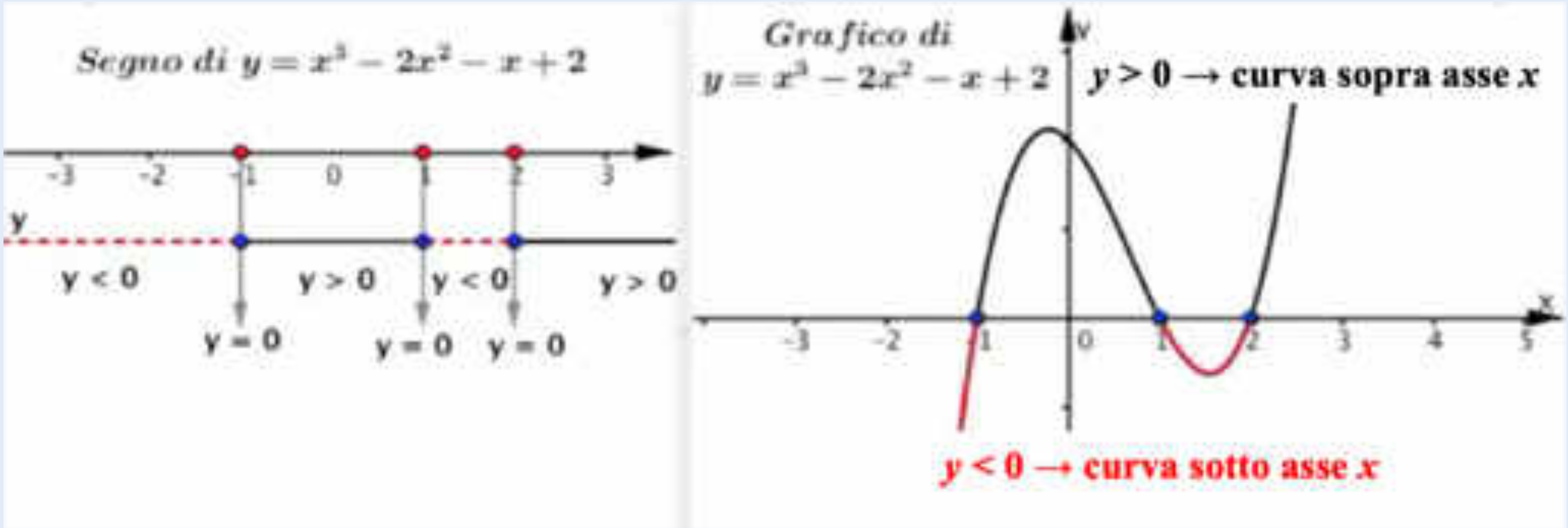
3. Riunisco i risultati in un unico schema e valuto il segno del prodotto y.

Ricordo che un prodotto è negativo solo se presenta un numero dispari di fattori negativi.



Segno e grafico di un polinomio

Una figura per ricordare la relazione fra segno e grafico di un polinomio

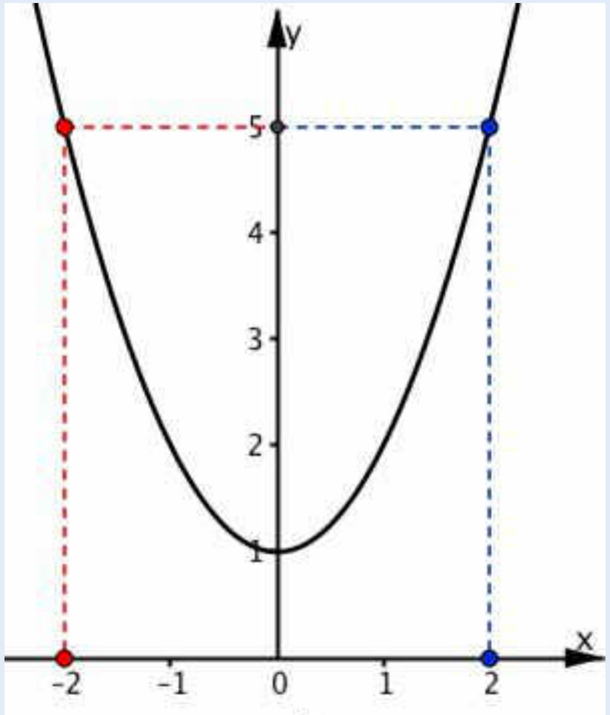


SIMMETRIE

Simmetria rispetto all'asse y

Come riconosco una funzione che ha grafico simmetrico rispetto all'asse y ?

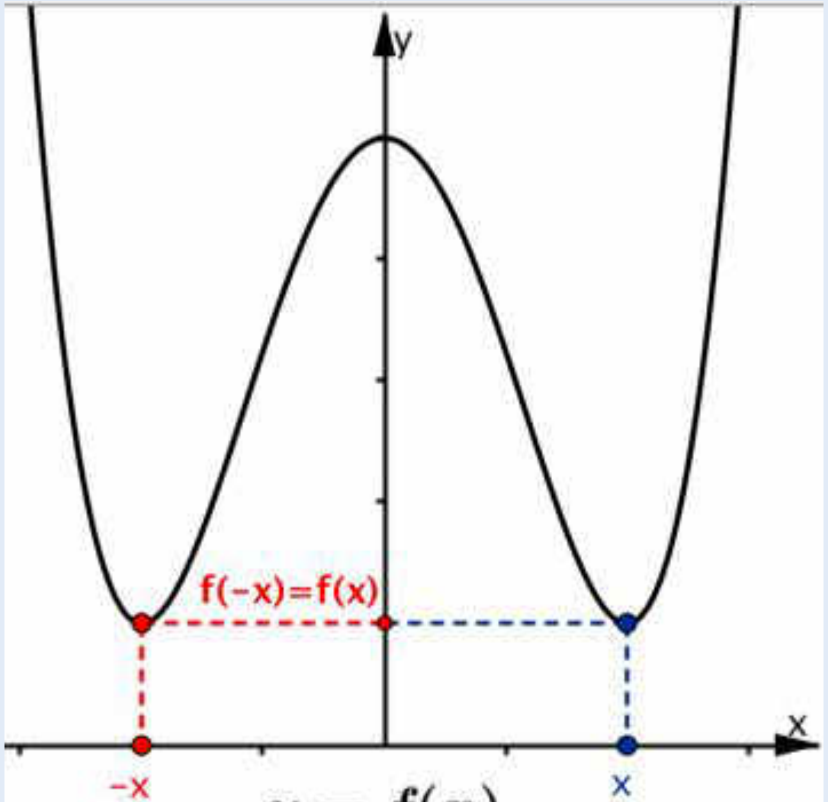
ESEMPIO



$$y = x^2 + 1$$

$$(-2)^2 + 1 = 2^2 + 1$$

IN GENERALE



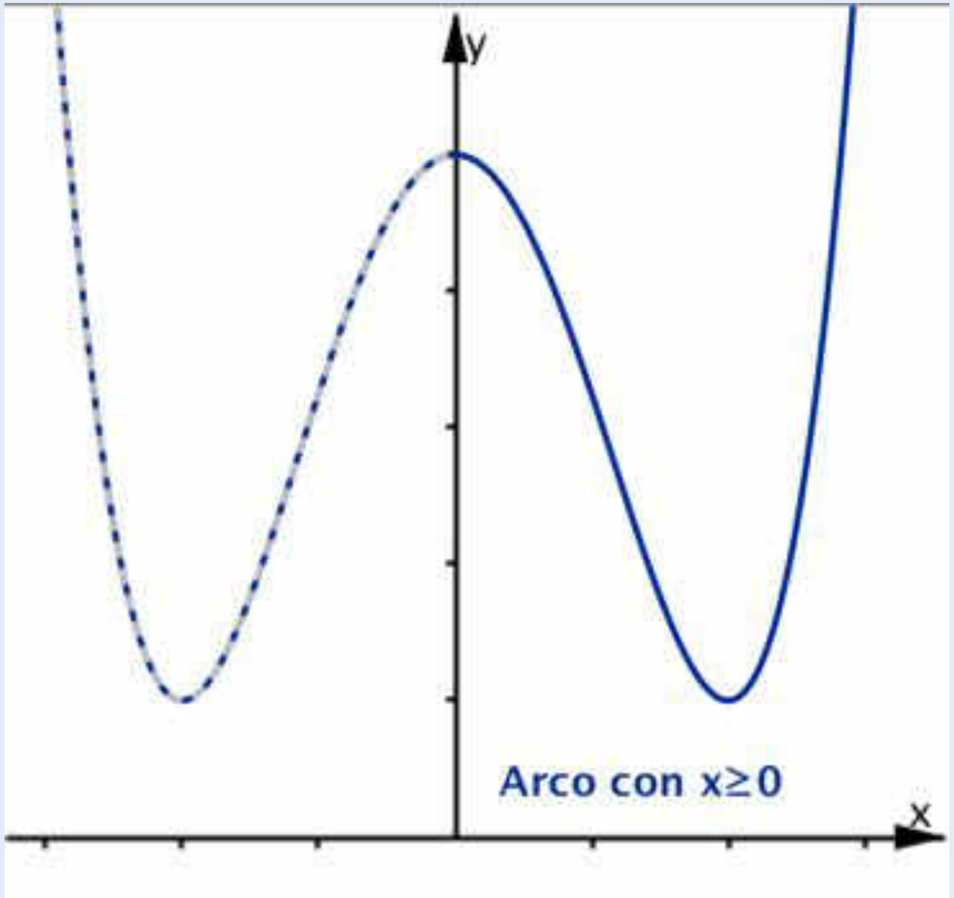
$$y = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

FUNZIONI PARI

Tracciare il grafico di una funzione pari

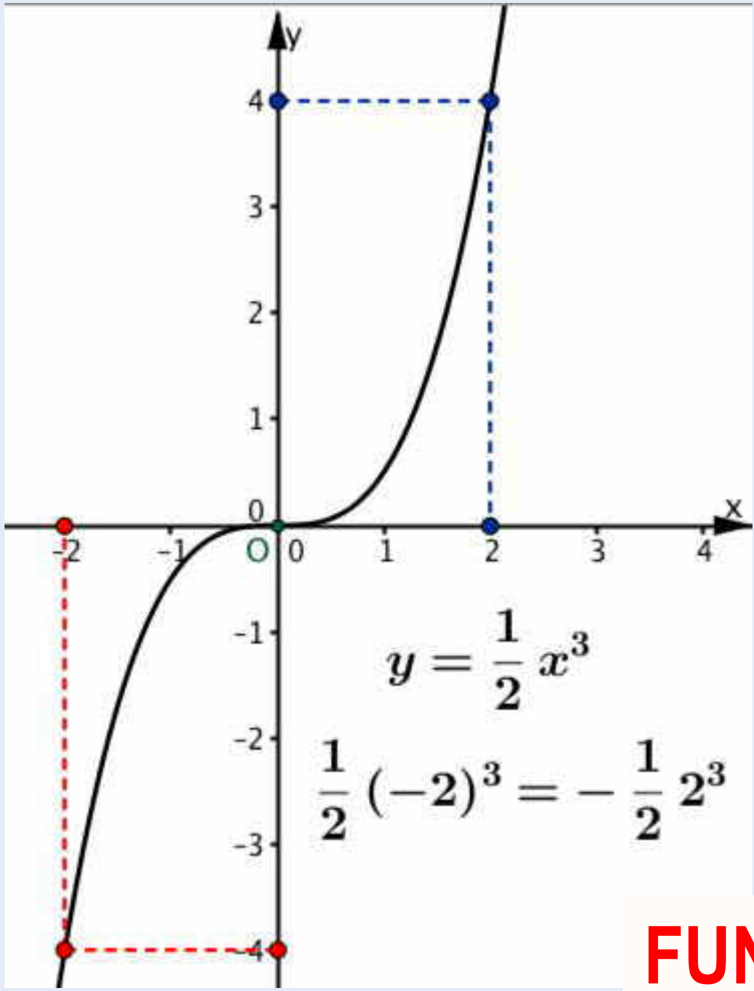
Per tracciare il grafico di una funzione pari, basta disegnare l'arco con $x \geq 0$; l'arco con $x < 0$ si ottiene con la simmetria rispetto all'asse y.



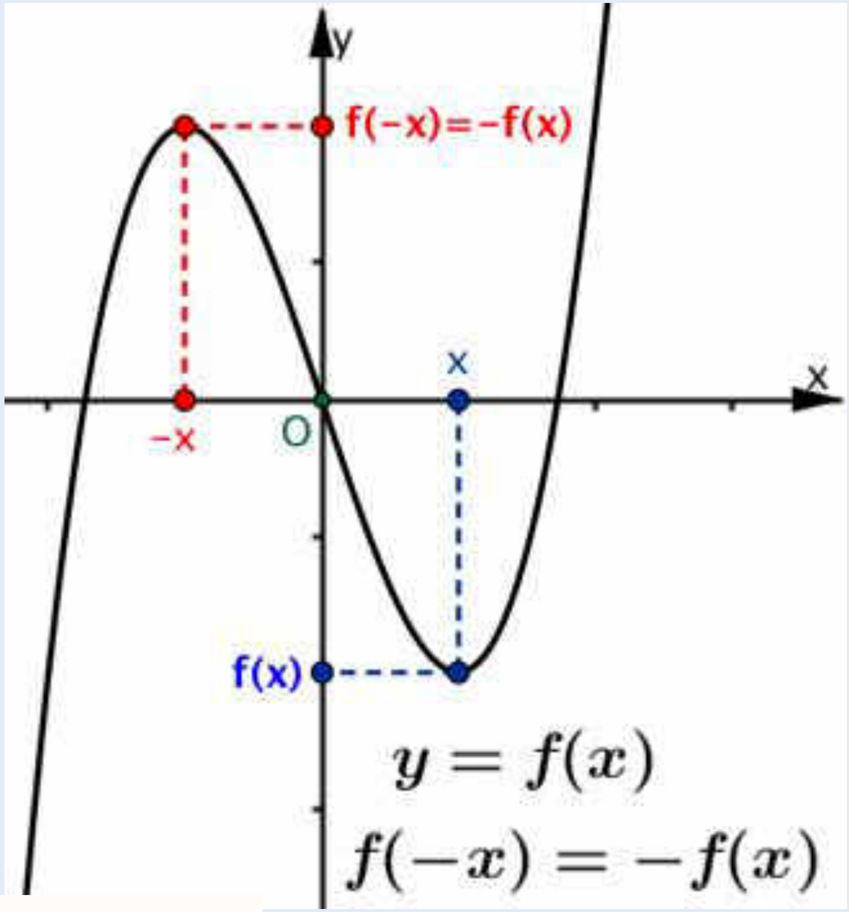
Simmetria rispetto all'origine O

Come riconosco una funzione che ha grafico simmetrico rispetto all'origine O?

ESEMPIO



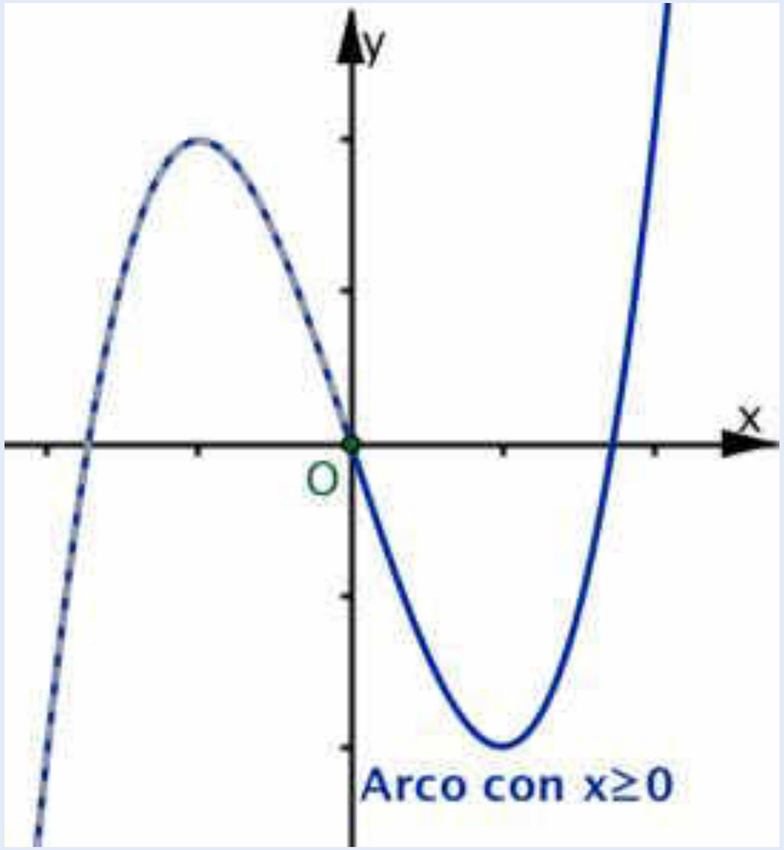
IN GENERALE



FUNZIONI DISPARI

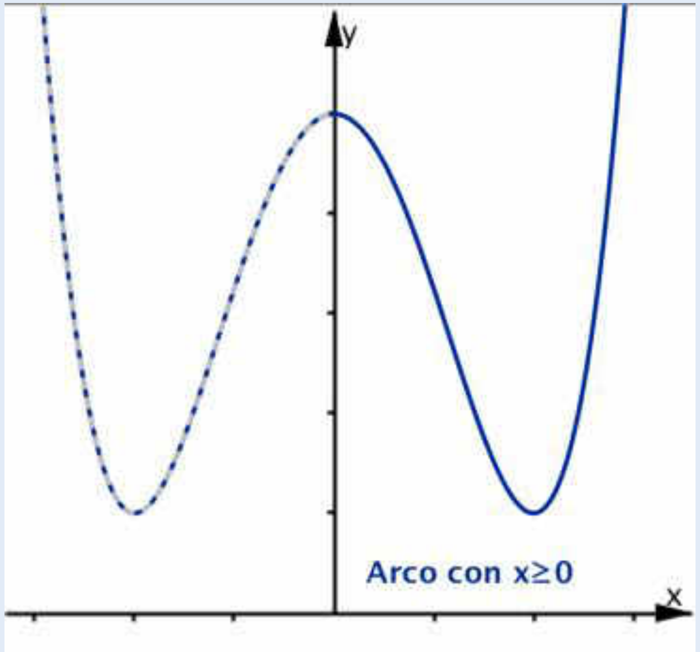
Tracciare il grafico di una funzione dispari

Per tracciare il grafico di una funzione dispari, basta disegnare l'arco con $x \geq 0$; l'arco con $x < 0$ si ottiene con la simmetria rispetto al punto O.

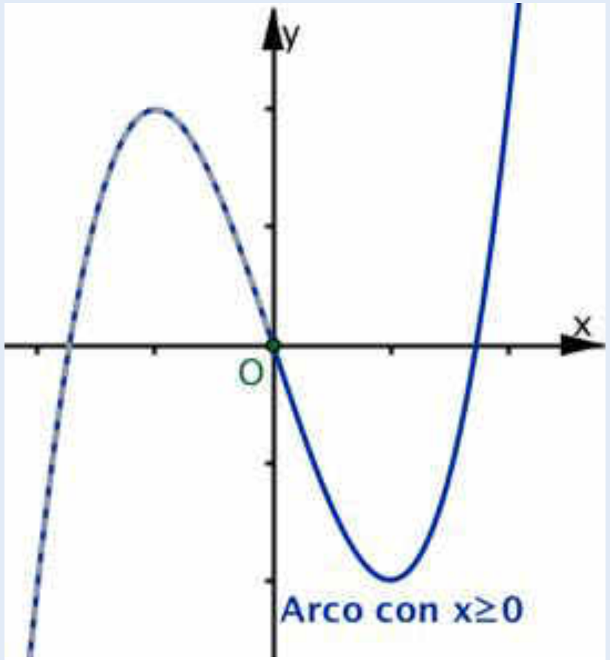


Studiare il grafico di funzioni pari o dispari

Quando so che una funzione è pari o dispari, lo studio del grafico diventa più rapido: basta esaminare la curva per valori positivi di x e poi applicare l'adatta simmetria.



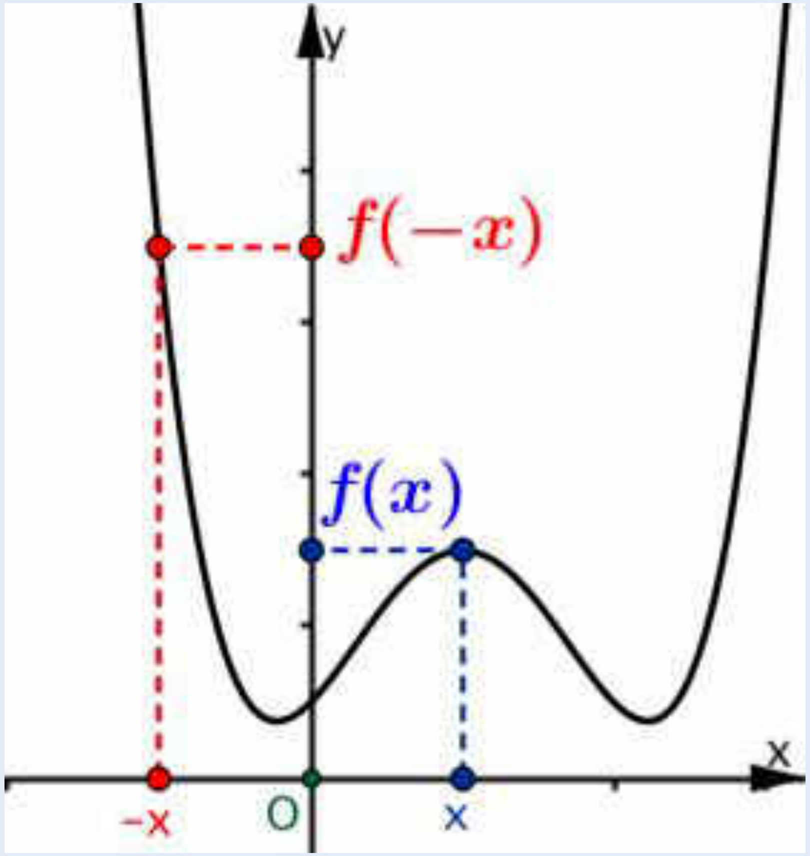
Funzione pari

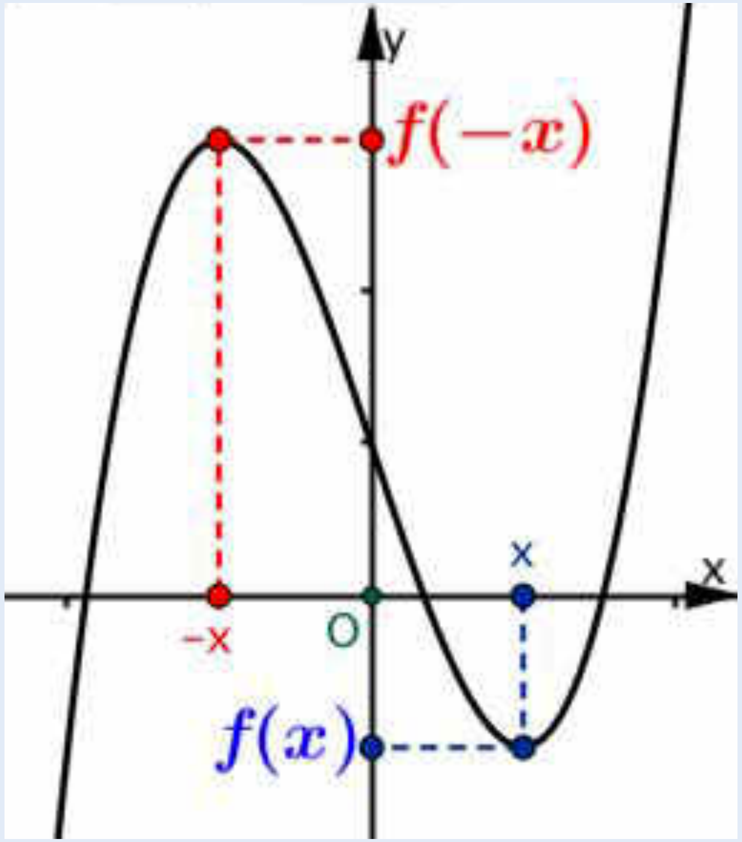


Funzione dispari

Funzioni che non sono né pari né dispari

Ma attenzione! Applica questa semplificazione *solo* ai casi di funzioni pari o dispari!





Esempi di funzioni né pari né dispari

Studiare il grafico di una funzione

Una sintesi dei risultati finora richiamati:
studiare il segno di una funzione e delle sue derivate porta a prevedere l'andamento del grafico della funzione.

Questo permette di tracciare un accurato grafico con carta e penna, anche quando manca un idoneo software.

Studiare il grafico di una funzione significa dunque *tracciare il grafico a partire dal segno della funzione e delle sue derivate*.

Ecco un esempio. Studiare il grafico della funzione

$$y = x^3 - 3x^2$$

1. Ricerca di eventuali simmetrie

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2$$

$$-f(x) = -(x^3 - 3x^2) = -x^3 + 3x^2$$

La funzione non è né pari né dispari, perciò la curva non è simmetrica né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine O.

2. Segno di $y = x^3 - 3x^2$

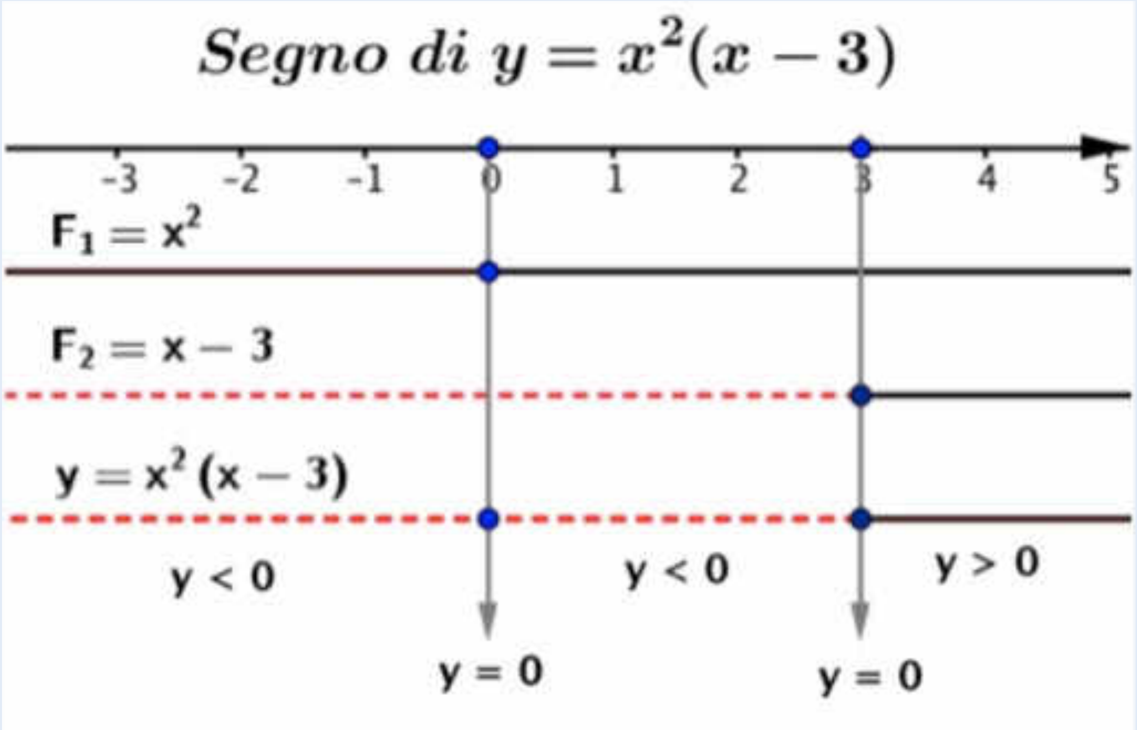
a. Scompongo in fattori il polinomio e ottengo

$$y = x^2(x - 3)$$

b. Studio il segno dei singoli fattori

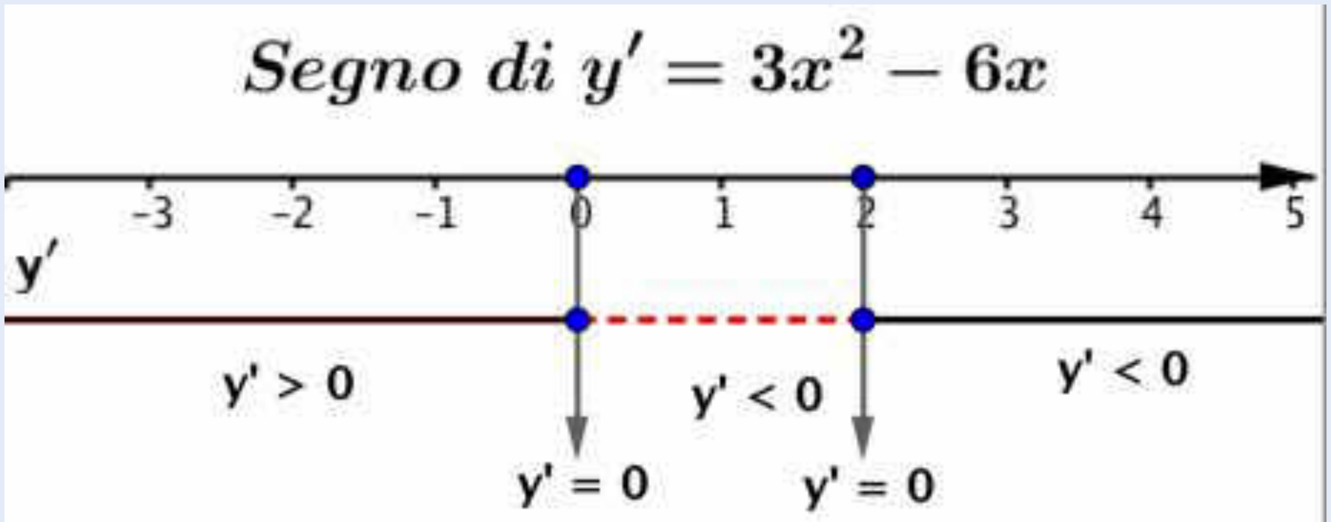
$$F_1 = x^2 \qquad\qquad F_2 = x - 3$$

c. Determino il segno del prodotto y.



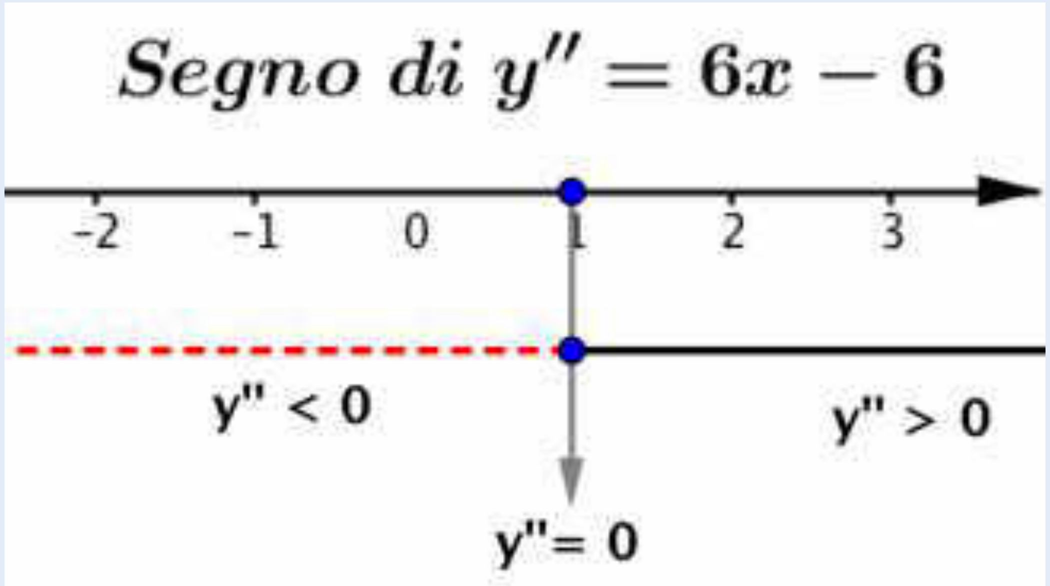
3. Segno di $y' = 3x^2 - 6x$

Derivata di 2⁰ grado, che ha per grafico una parabola con la concavità verso l'alto e intersezioni con asse x di ascissa 0 e 2.



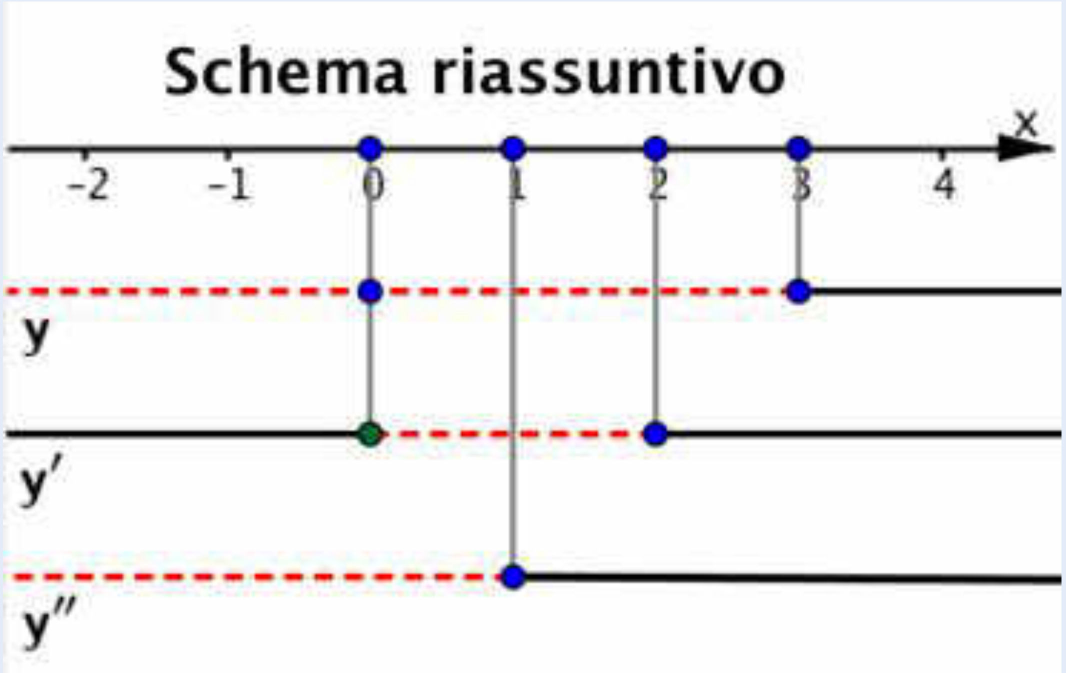
4. Segno di $y'' = 6x - 6$

Derivata di 1^0 grado che ha per grafico una retta con pendenza positiva e intersezione con asse x di ascissa 1.

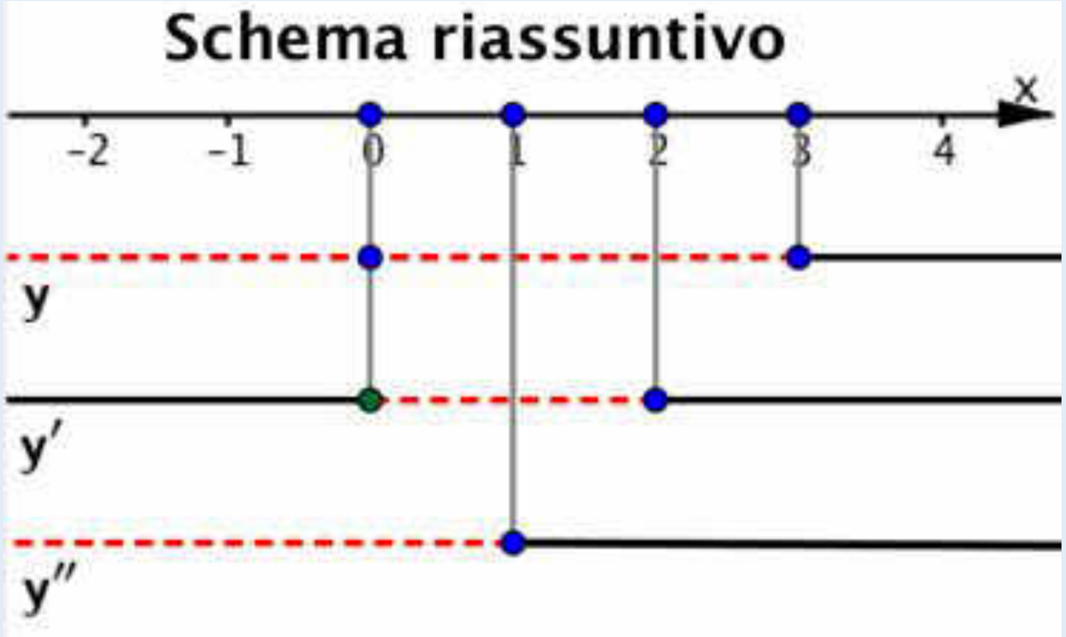


5. Riassumo in un unico schema il segno della funzione e delle sue derivate

$$y = x^3 - 3x^2$$



6. Calcolo le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero $f(x)$ o le sue derivate



$$y = x^3 - 3x^2$$

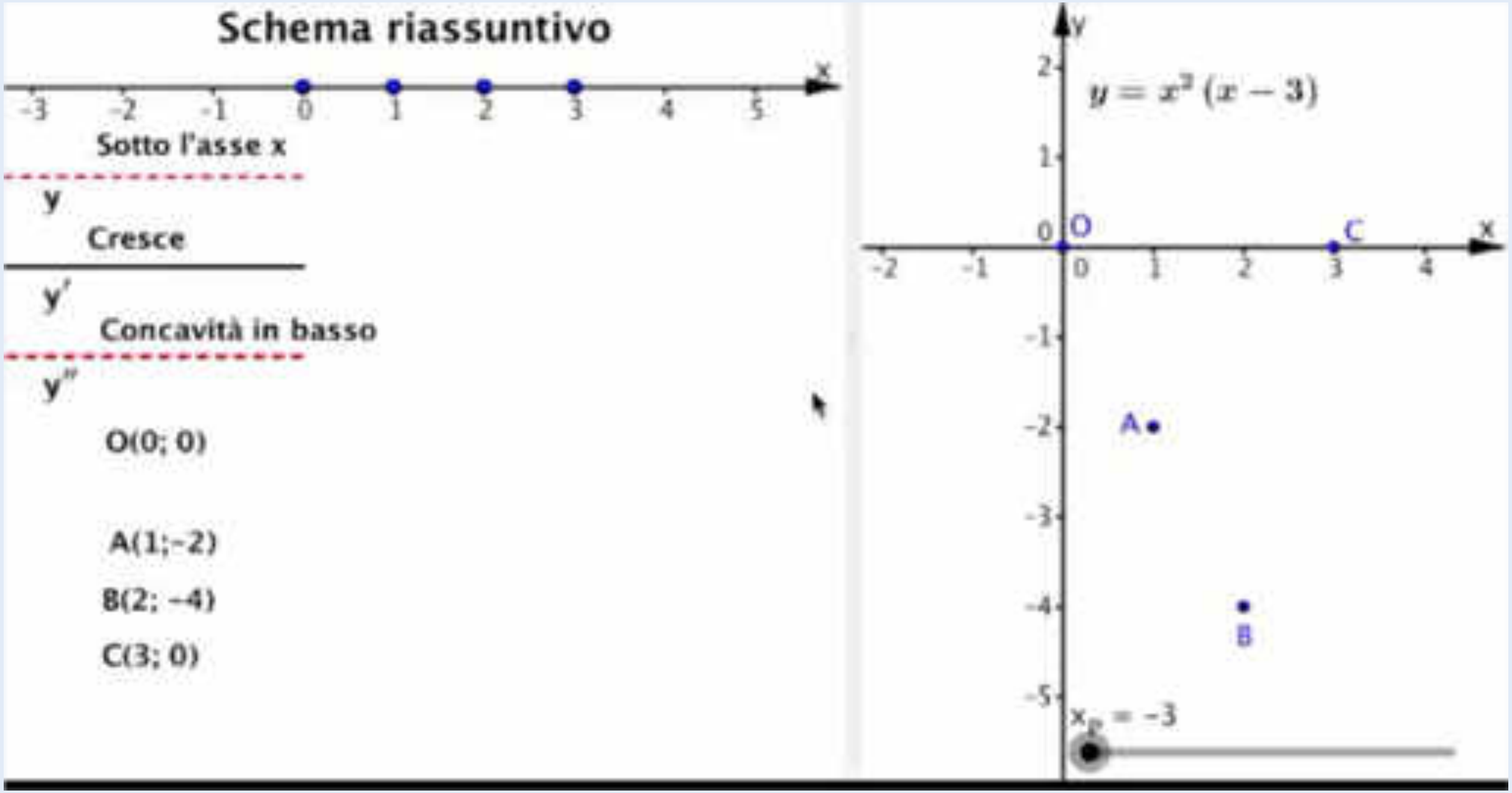
O(0; 0)

A(1; −2) $\quad x_A = 1 \quad , \quad y_A = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$

B(2; −4) $\quad x_B = 1 \quad , \quad y_B = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$

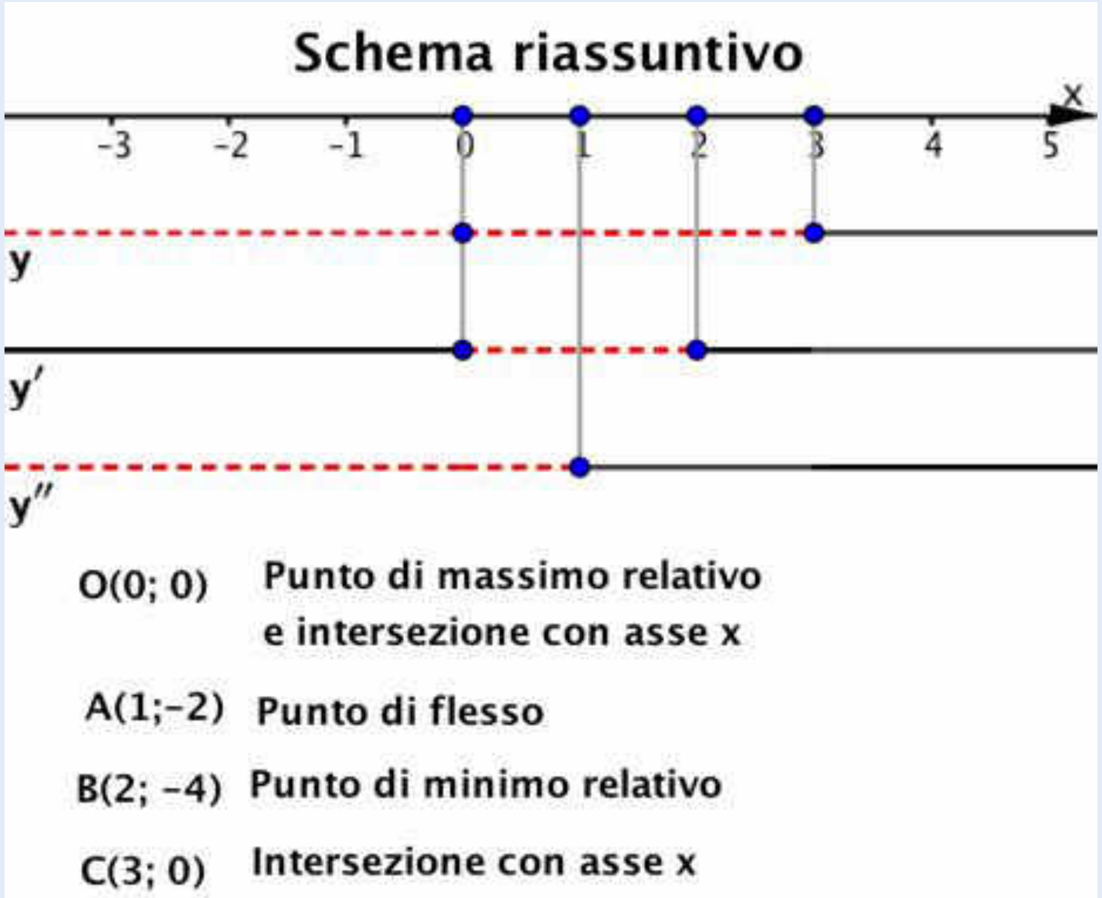
C(3; 0)

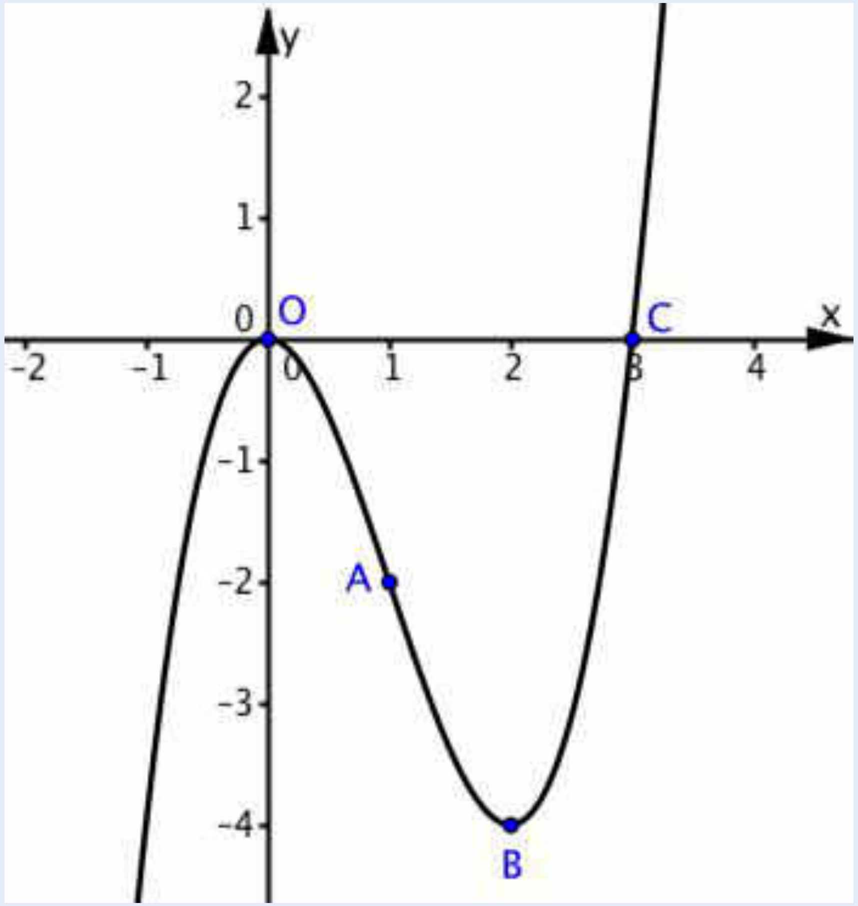
7. Traccio il grafico della funzione, a partire da tutte le informazioni ottenute



Video 1

Lo studio del grafico di una funzione polinomiale è completo





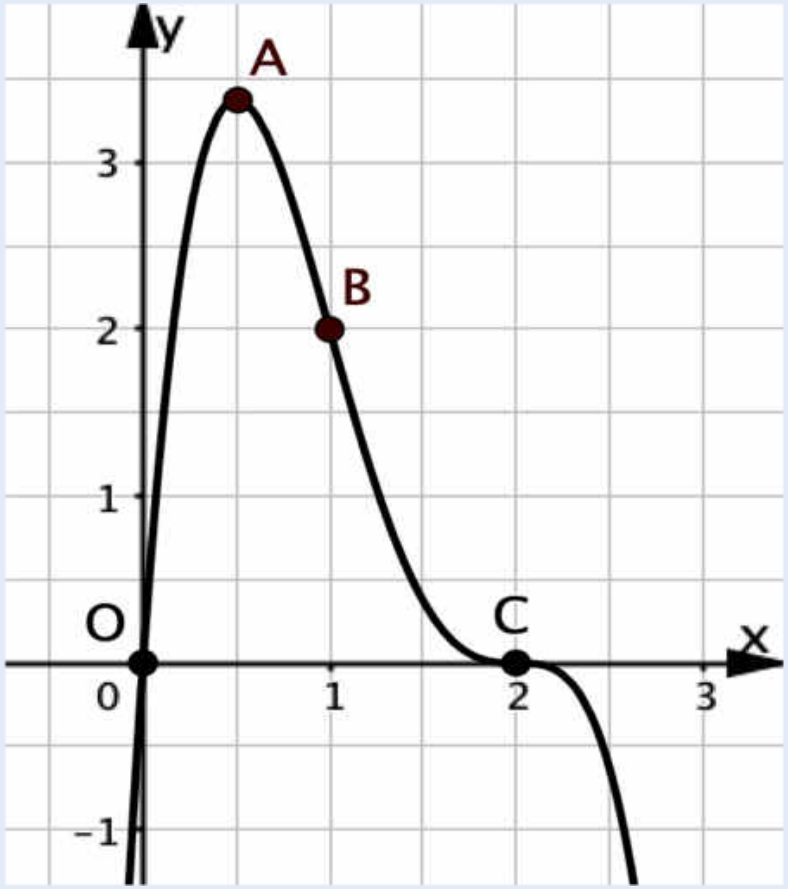
Attività

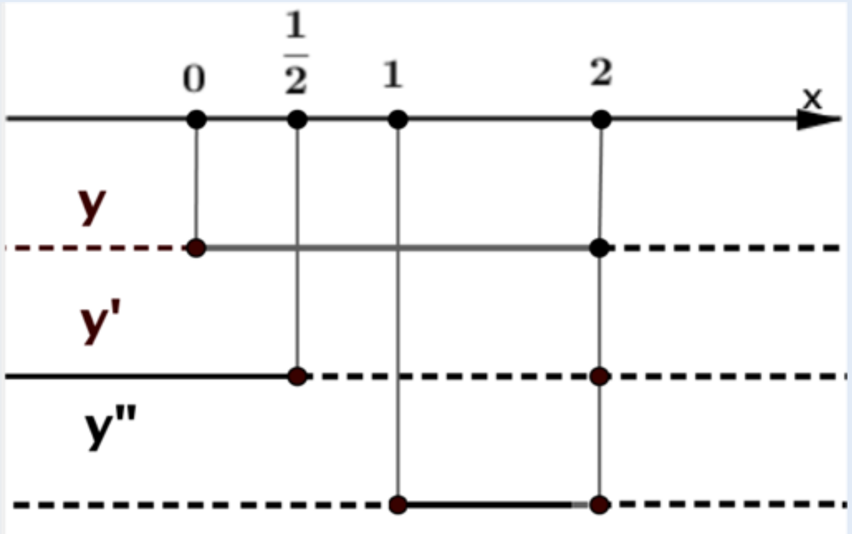
Completa la scheda di lavoro per consolidare lo studio del grafico di una funzione polinomiale

Revisione dell’attività

Grafico 1

c. $y = 2x\,(2 - x)^3$





O (0, 0) punto di intersezione con asse x

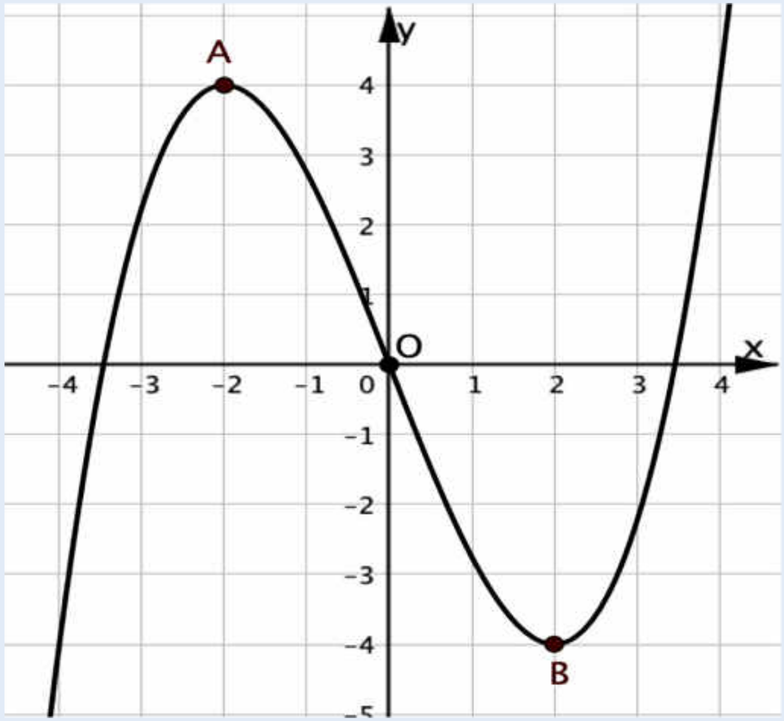
$A\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{8}\right)$ punto di massimo relativo

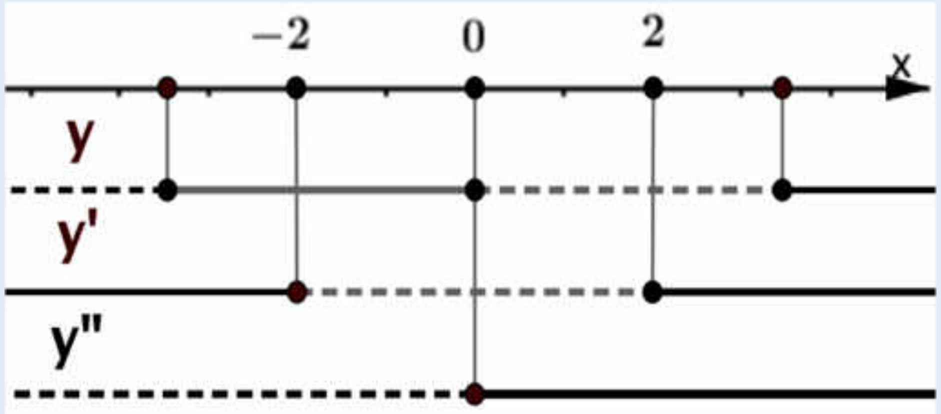
B (1, 2) flesso

C (2, 0) flesso orizzontale

Grafico 2

$$\textbf{a. } y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$





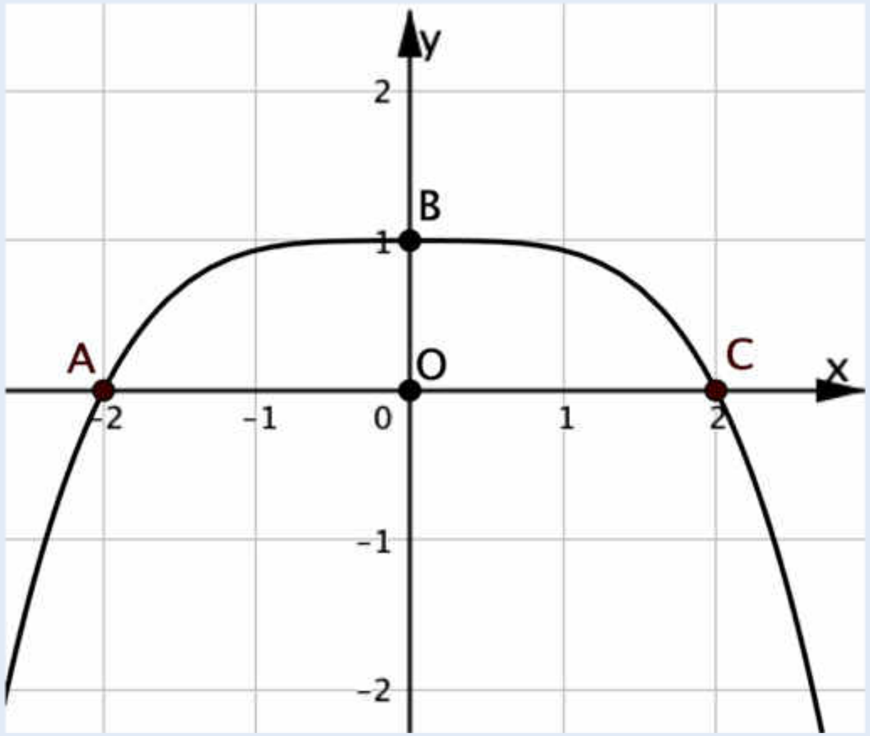
O (0, 0) flesso

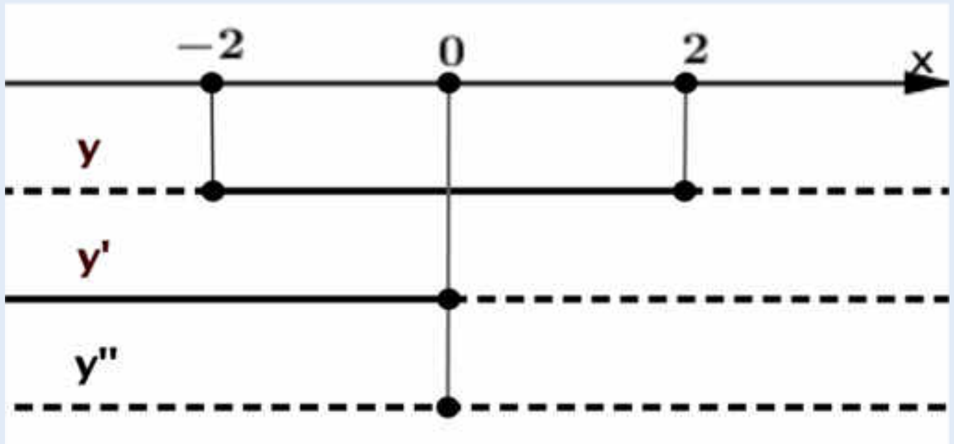
A (–2, 4) punto di massimo relativo

B (2, –4) punto di minimo relativo

Grafico 3

$$\mathbf{b.}\ y = 1 - \frac{1}{16}x^4$$





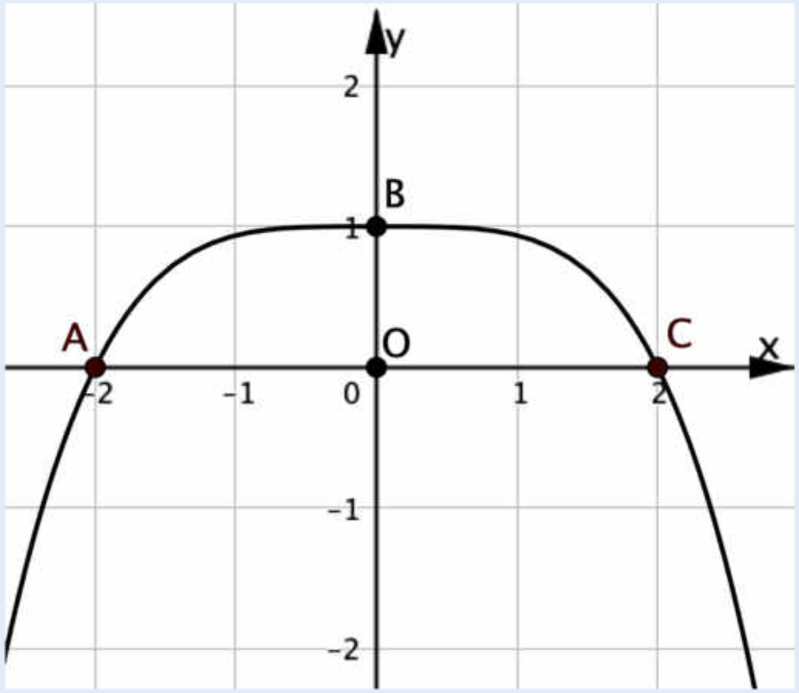
A $(-2, 0)$ punto di intersezione con asse x
B $(0, 1)$ punto di massimo relativo
C $(2, 0)$ punto di intersezione con asse x

Quesito *a*

a. Il grafico 3 rappresenta una parabola? Sì **No**

Perché **non è** il grafico di una funzione polinomiale **di 2° grado**.

$\boldsymbol{y = 1 - \frac{1}{16}x^4}$ è una funzione polinomiale **di 4° grado**:



Quesito b

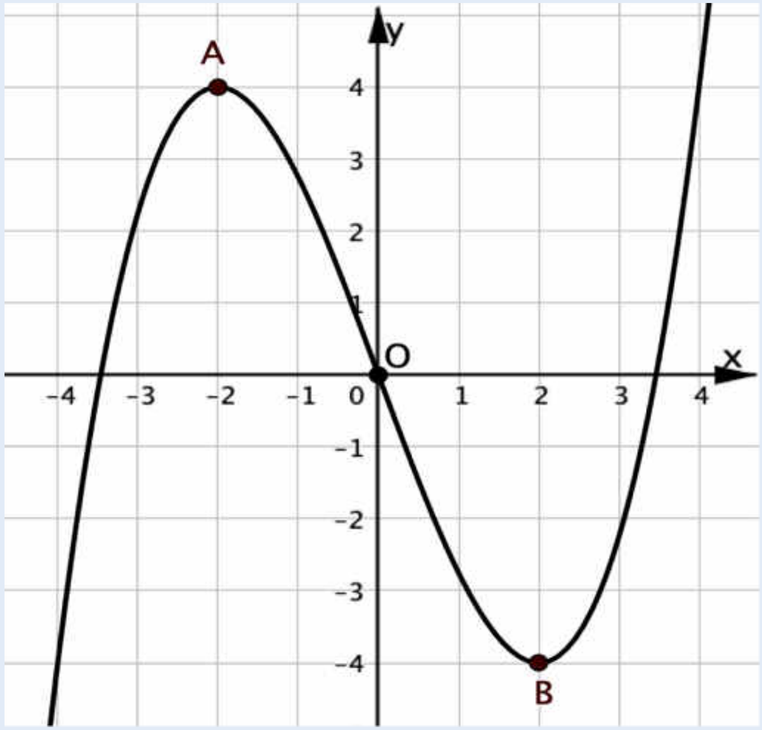
b. Quale grafico rappresenta una funzione dispari? **2**

Perché il grafico è simmetrico rispetto ad O.

Oppure

Perché $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

$$\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}(-x)^3 + 3x = -\frac{1}{4}x^3 + 3x = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

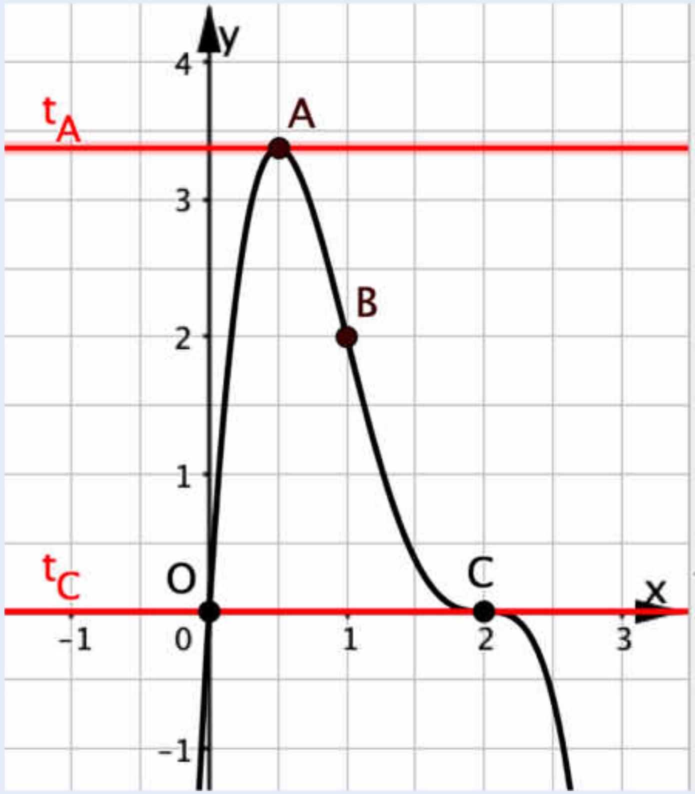


Quesiti c e d

c. In uno dei grafici trovi un punto di flesso orizzontale.

- Qual è il grafico? **1**
- Qual è il punto? **C**

d. Quali sono i punti stazionari del grafico 1? **A e C**



Flesso orizzontale

C punto di flesso con tangente parallela all'asse *x*.

Punti stazionari

A e C punti della curva con tangente parallela all'asse *x*.