Derivate e grafici con dimostrazioni

1. Curve crescenti e decrescenti

In questo paragrafo cominciamo a vedere come si possono scoprire delle caratteristiche geometriche di una curva a partire da proprietà algebriche della funzione $y=f(x)$ che la descrive. Questa scoperta porta anche ad individuare un procedimento per tracciare il grafico di una curva a partire da opportuni calcoli svolti sulla funzione $y=f(x)$.

Cominciamo ad esaminare un'importante caratteristica di una curva: la crescenza o decrescenza.

Dire che un arco di curva è crescente equivale a dire che al crescere di x cresce anche y.

Questa proprietà geometrica può essere espressa in linguaggio algebrico quando l'arco crescente è il grafico di una funzione $y=f(x)$ in un dato intervallo (fig. 11): scelti comunque nell'intervallo due valori a e b, risulta

$$f(b)>f(a), \qquad \text{con } b>a,$$

ossia

$$f(b)-f(a)>0, \qquad \text{con } b-a>0.$$

In breve, dire che una funzione è crescente equivale a dire che le espressioni

$$f(b)-f(a) \qquad \text{e} \qquad (b-a)$$

hanno sempre segno concorde e, quindi, risulta sempre:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$$

Analogamente, dire che una curva d'equazione $y=f(x)$ è decrescente in un dato intervallo (fig. 12) equivale a dire che al crescere di x, decresce y e cioè, scelti comunque due valori a e b, si verifica sempre:

$$f(b)<f(a), \qquad \text{con } b>a$$

e perciò risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0.$$

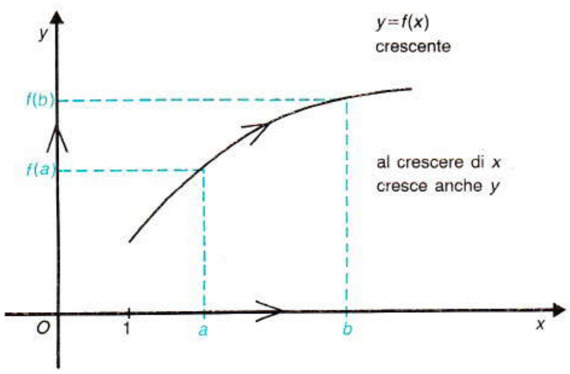

Fig. 11

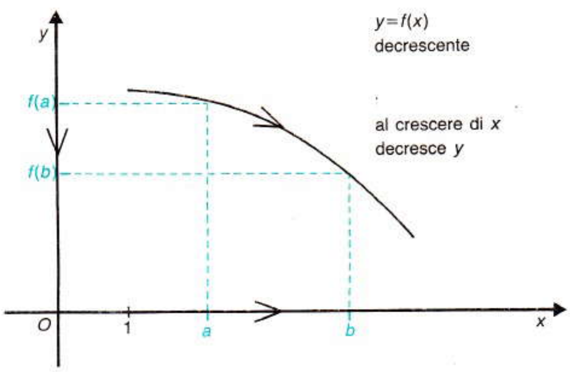

Fig. 12

In questo modo la caratteristica di essere crescente o decrescente in un intervallo è descritta in termini algebrici: basta scegliere nell'intervallo due qualunque valori a e b e studiare il segno dell'espressione

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Questo studio diventa particolarmente rapido se la funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo considerato; vale infatti il seguente **teorema**:

- **se risulta $f'(x)>0$, la funzione $y=f(x)$ è crescente;**
- **se risulta $f'(x)<0$, la funzione $y=f(x)$ è decrescente.**

È facile dimostrare questo teorema, basandosi sul teorema di Lagrange
Il teorema di Lagrange garantisce infatti che, scelti comunque due numeri a e b, si può trovare nell'intervallo $[a, b]$ un valore c per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Se dunque la funzione $y'=f'(x)$ si mantiene positiva, si ha

$$f'(c)>0, \quad \text{quindi} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0 \quad \text{e perciò} \quad y=f(x) \text{ crescente.}$$

Analogamente, si dimostra che, se risulta $f'(x)<0$, la funzione è decrescente.

Due osservazioni importanti:

1) Il teorema ha un immediato significato geometrico, quando viene applicato alla funzione

   $$y=mx+q,$$

   che ha per grafico una retta (fig. 13). Si ha che la funzione è
   - crescente, se risulta $f'(x)=m>0$ e cioè la retta ha pendenza positiva,
   - decrescente, se si ha $f'(x)=m<0$ e cioè la retta ha pendenza negativa.

   Così (fig. 14) è chiaro che una funzione $y=f(x)$ è
   - crescente in un suo punto A di ascissa a, se in quel punto "si appoggia" ad una tangente t che ha pendenza $f'(a)>0$,
   - decrescente nel suo punto A, se "si appoggia" ad una tangente t che ha pendenza $f'(a)<0$.

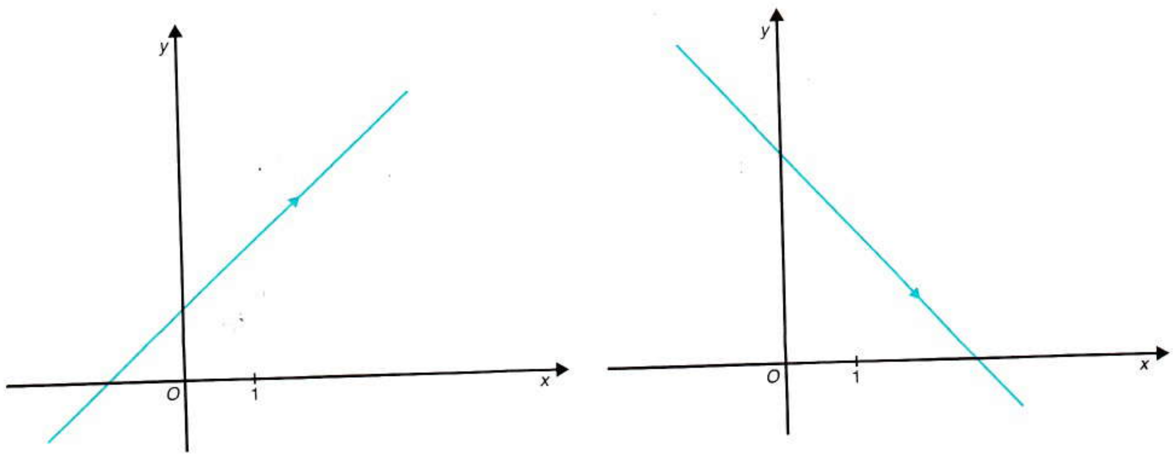

Fig. 13

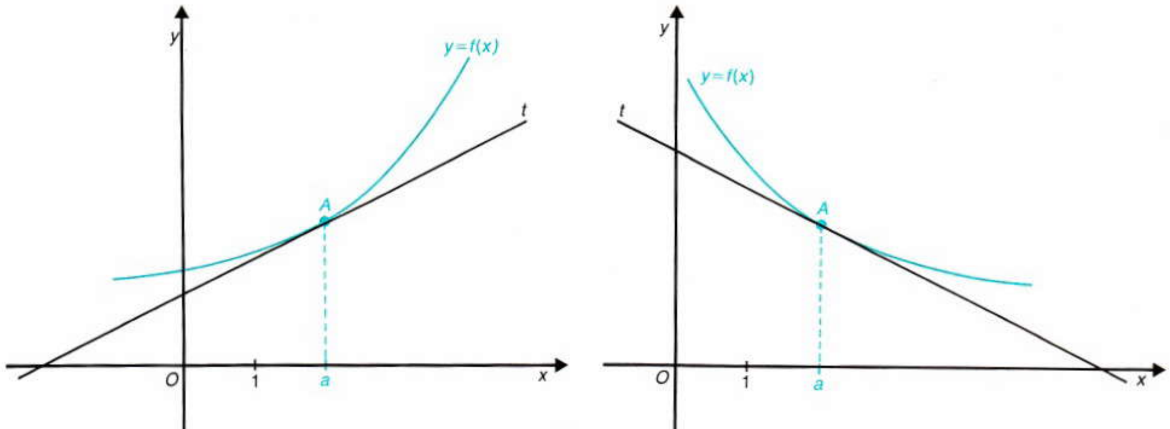

Fig. 14

2) Occorre qualche cautela nel considerare **il teorema inverso**: può essere infatti che una funzione sia crescente in un dato intervallo, senza che la derivata si mantenga positiva in tutto l'intervallo. Basta un esempio per rendersene conto.

Consideriamo la curva d'equazione

$$y=x^5,$$

rappresentata in fig. 15: si tratta di una curva sempre crescente.
Calcoliamo ora la derivata della funzione; si ottiene:

$$y'=5x^4.$$

Risulta perciò

$$y'>0 \text{ per qualunque } x\neq 0, \text{ ma } y'(0)=0.$$

Si ha dunque che il grafico della funzione è una curva crescente, ma la derivata $f'(x)$ non è sempre positiva: nel punto $O(0, 0)$ la derivata vale 0.

Analogamente, una funzione decrescente in un dato intervallo può anche non avere la derivata negativa in tutto l'intervallo (fig. 16).

Si osserva subito che in questi due esempi la derivata si annulla per un valore di x senza però cambiare segno.

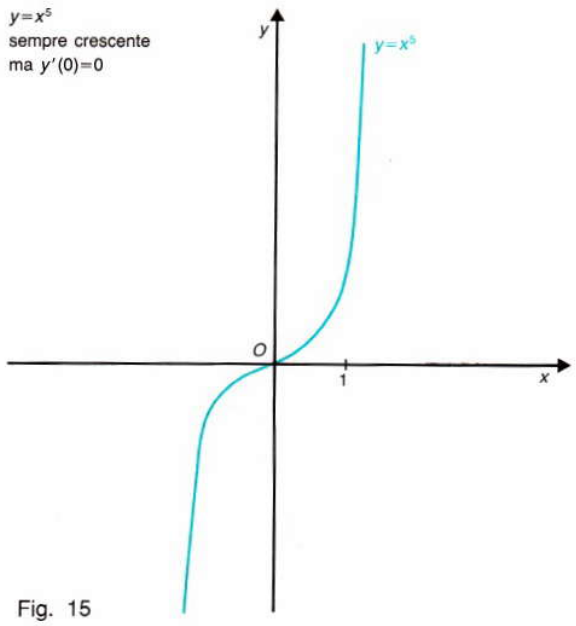

Fig. 15

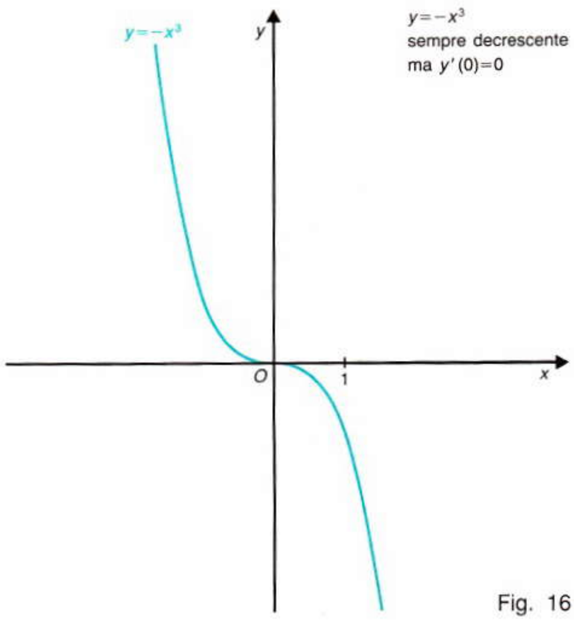

Fig. 16

Ecco un caso diverso: in fig. 17 è rappresentato il grafico della funzione

$$y=x^3-3x,$$

che abbiamo già esaminato nel cap. 1 paragrafo 6.
Per questa funzione risulta:

$$y'=3x^2-3;$$

si ha dunque (fig. 18)

$$y'>0 \quad \text{per} \quad x<-1, \quad y'=0 \quad \text{per} \quad x=-1, \quad y'<0 \quad \text{per} \quad -1<x<1.$$

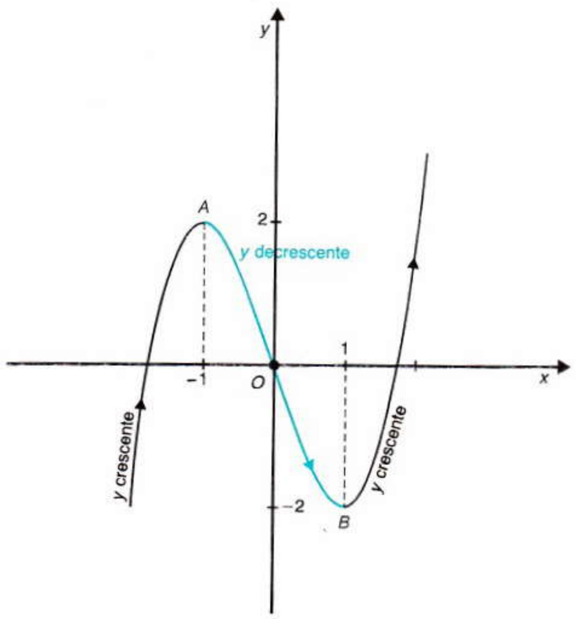

Fig. 17

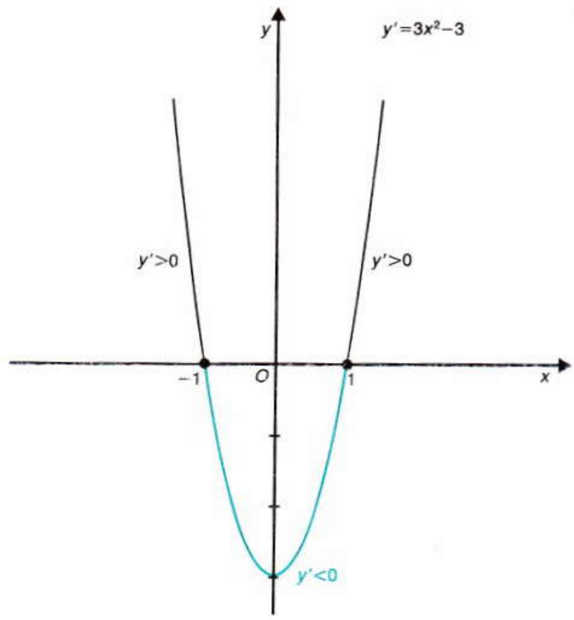

Fig. 18

È chiaro allora che la curva è crescente in corrispondenza a valori di x inferiori a -1, mentre è decrescente per valori di x maggiori di -1.

Nel punto $A(-1, 2)$ avviene dunque il passaggio da un andamento crescente ad uno decrescente; si ha un **punto di massimo relativo**.
Risulta inoltre

$$y'<0 \quad \text{per} \quad -1<x<1, \quad y'=0 \quad \text{per} \quad x=1, \quad y'>0 \quad \text{per} \quad x>1.$$

È chiaro allora che la curva è decrescente in corrispondenza a valori di x inferiori a 1, mentre è crescente per valori di x maggiori di 1.

In $B(1, -2)$ avviene il passaggio da un andamento decrescente ad uno crescente; si ha un **punto di minimo relativo**.

2. Punti massimo o minimo relativo

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente, a partire da un esempio, possono essere facilmente generalizzate e permettono di cogliere il significato delle seguenti definizioni (fig. 19):

- un punto $A[a, f(a)]$ è un **punto di massimo relativo (o locale)**, se si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$f(x)<f(a);$$

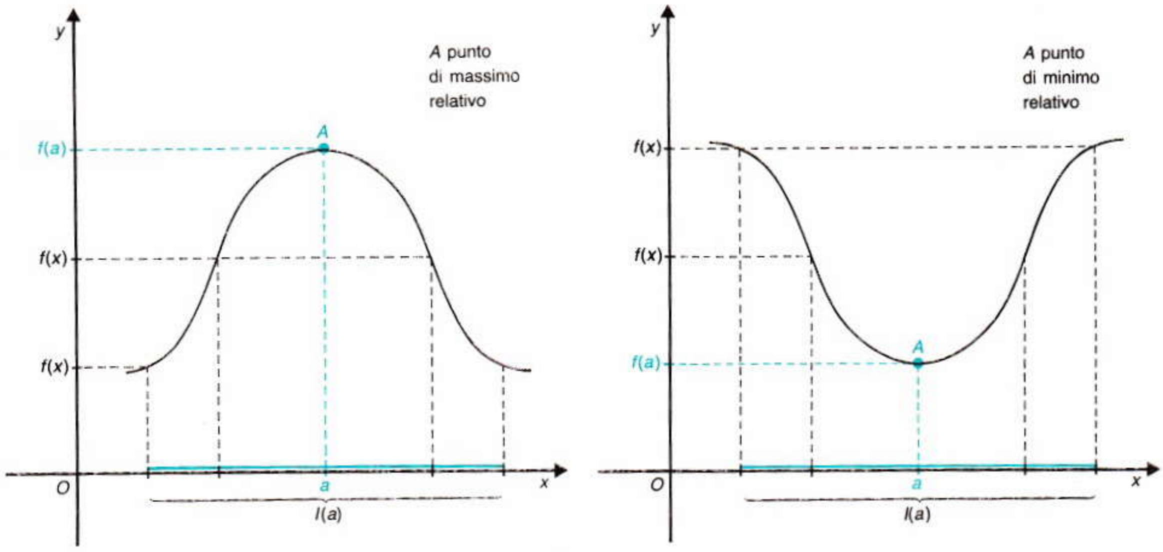

Fig. 19

– un punto $A[a, f(a)]$ è un **punto di minimo relativo (o locale)**, se si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$f(x)>f(a).$$

Si può dire, in breve, che un punto di massimo relativo è "il più alto fra i punti vicini", mentre un punto di minimo relativo è "il più basso fra i punti vicini"; in questo modo si capisce più facilmente il significato dell'aggettivo "relativo o locale".

Ora è facile dimostrare il teorema seguente:

se una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta nel punto A d'ascissa a un massimo o un minimo relativo, risulta $f'(a)=0$.

La dimostrazione è immediata: se, per esempio, $A[a, f(a)]$ è un punto di massimo relativo, risulta certamente

$$f(x)<f(a), \quad \text{per } x \text{ variabile in un opportuno } I(a).$$

Ma allora, non può essere $f'(a)>0$, perché, in tal caso, la funzione sarebbe crescente nel punto A e, dunque risulterebbe

$$f(x)>f(a), \quad \text{per } x>a;$$

e così non può essere $f'(a)<0$, perché la funzione sarebbe decrescente in A e, perciò, si avrebbe

$$f(x)>f(a), \quad \text{per } x<a.$$

Deve allora risultare $f'(a)=0$.
Una dimostrazione analoga può essere ripetuta per un punto di minimo relativo.

Due importanti osservazioni:

1) Il teorema ha un immediato significato geometrico (fig. 20): la tangente t in un punto $A[a, f(a)]$ di massimo o minimo relativo ha sempre pendenza $f'(a)=0$ e dunque t è parallela all'asse delle x.

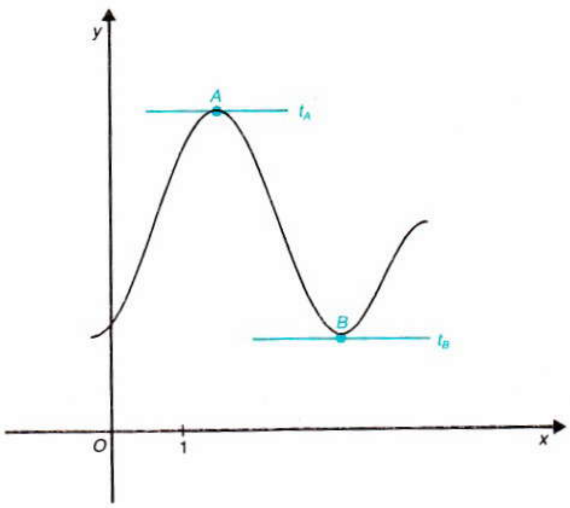

Fig. 20

2) **Non vale il teorema inverso**: non basta verificare che risulta $f'(a)=0$, per essere certi che il punto A d'ascissa a sia un punto di massimo o di minimo relativo. Le figg. 15 e 16 di pag. 3 mostrano appunto due esempi di curve che non presentano né massimo né minimo relativo in un punto in cui la derivata vale 0.

Per fissare meglio l'attenzione su questa osservazione, i punti con derivata nulla prendono il nome di **punti stazionari**. Questi punti possono essere anche individuati basandosi sulla seguente proprietà geometrica: la tangente alla curva in un punto stazionario è parallela all'asse delle x.

Risulta perciò chiaro che un punto di massimo o minimo relativo è certamente un punto stazionario, mentre un punto stazionario non è sempre un punto di massimo o minimo relativo (fig. 21).

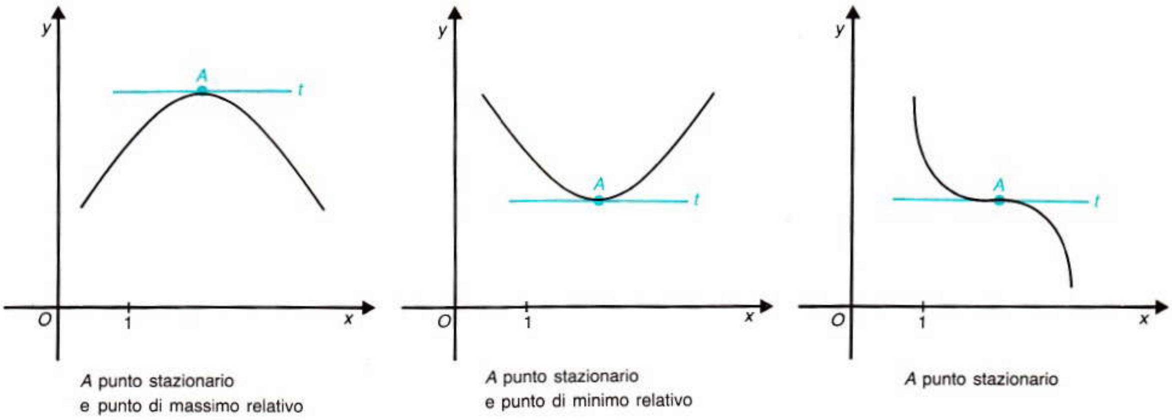

Fig. 21

È facile capire come, fra i punti stazionari, si può individuare un punto di massimo o minimo relativo: basta tener presente che in un punto di massimo o minimo la curva cambia andamento.

Si deve dunque verificare una delle seguenti situazioni:

1) La curva ha, nell'intorno del punto A, un andamento come quello di fig. 22: cresce a sinistra di a e decresce a destra di a; perciò **A è un punto di massimo relativo, se risulta**

$$y'(a)=0 \quad \text{con} \quad y'>0 \quad \text{per} \quad a-\delta<x<a \quad \text{e} \quad y'<0 \quad \text{per} \quad a<x<a+\delta.$$

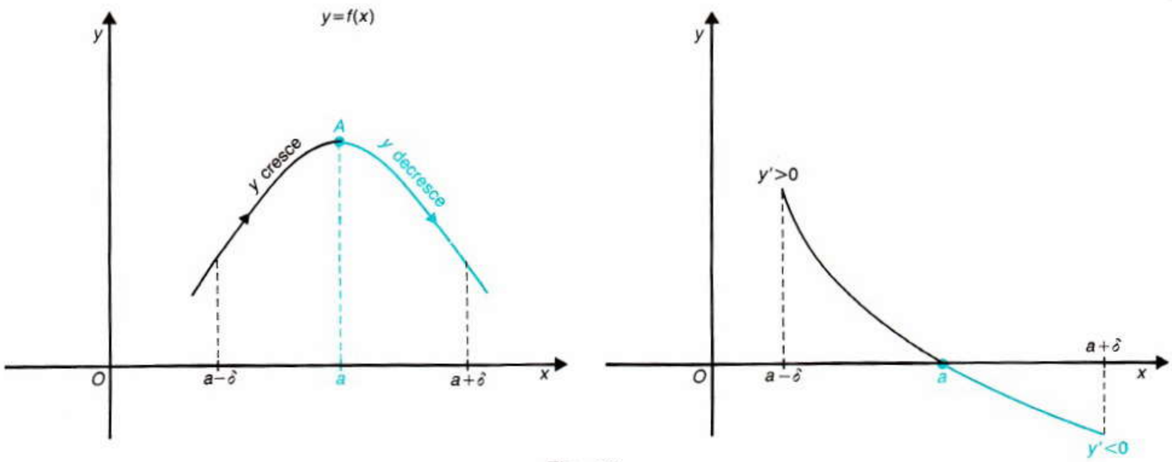

Fig. 22

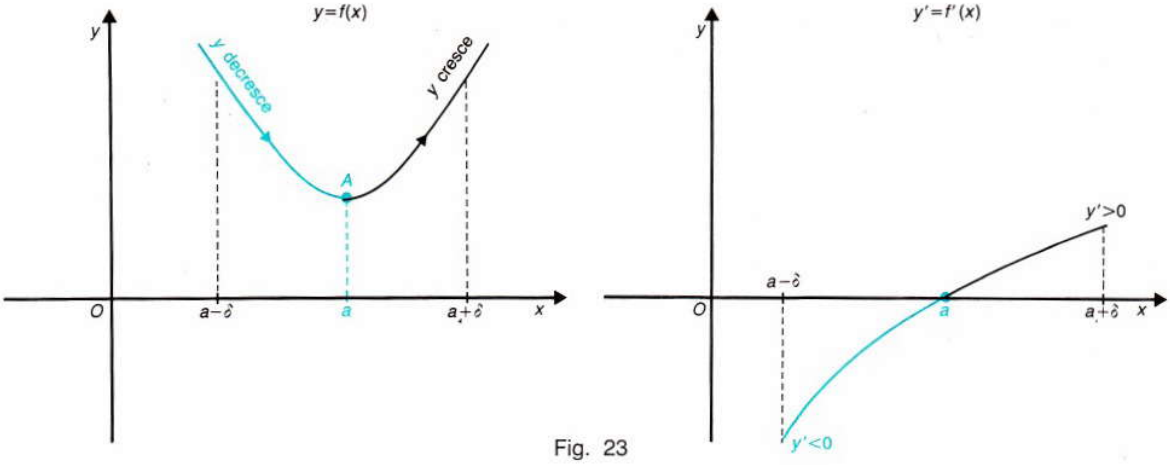

Fig. 23

2) La curva ha, nell'intorno del punto A un andamento come quello di fig. 23: decresce a sinistra di a e cresce a destra di a; perciò **A è un punto di minimo relativo se risulta**

$$y'(a)=0 \quad \textbf{con} \quad y'<0 \quad \textbf{per} \quad a-\delta<x<a \quad \textbf{e} \quad y'>0 \quad \textbf{per} \quad a<x<a+\delta.$$

3. Concavità di una curva verso l'alto o verso il basso

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come una caratteristica geometrica di una curva – essere crescente o decrescente – sia legata ad una proprietà algebrica della funzione $y=f(x)$ che descrive la curva: si possono determinare gli intervalli in cui una curva è crescente o decrescente, studiando il segno della derivata $y'=f'(x)$.

In questo paragrafo esaminiamo un'altra caratteristica geometrica di una curva: rivolgere la concavità verso l'alto o verso il basso.

Ecco un modo semplice per descrivere una curva che rivolge la concavità verso l'alto in un suo punto A (fig. 23): in un intorno del punto la curva si trova al disopra della tangente t.

Questo vuol dire che, se la curva è descritta da una funzione $y=f(x)$, si verifica la condizione illustrata in fig. 24: quando x varia in un intorno $I(a)$, risulta

$$y_P>y_T,$$

dove

$y_P=f(x)$ è l'ordinata del punto P,
$y_T=f(a)+f'(a)(x-a)$ è l'ordinata del punto T.

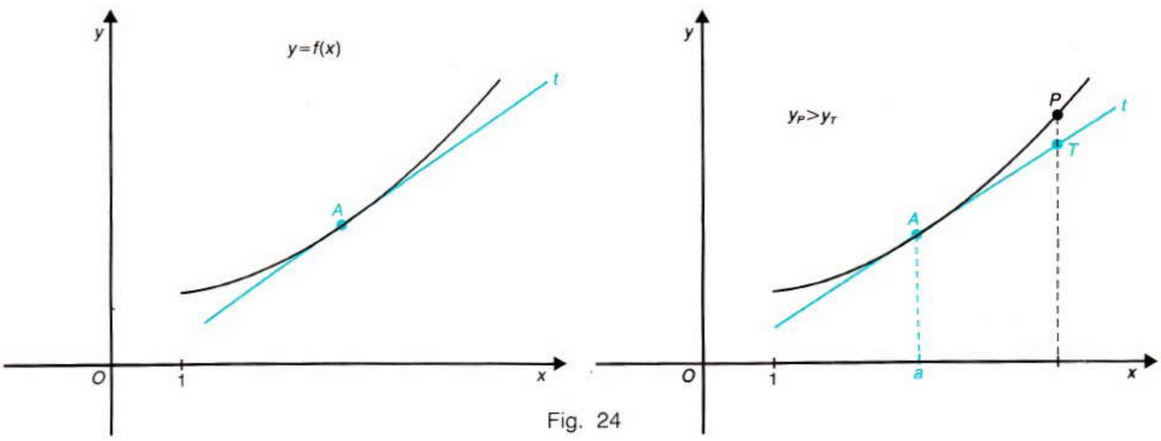

Fig. 24

In conclusione, dire che una curva rivolge la concavità verso l'alto significa dire che risulta

$$y_P - y_T > 0, \quad \text{ossia} \quad f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0.$$

Analogamente (fig. 25), una curva rivolge la concavità verso il basso in un suo punto A se si trova al disotto della tangente t in un intorno del punto A. Questo vuol dire (fig. 26) che, per x variabile in un intorno $I(a)$, risulta

$$y_P < y_T, \quad \text{cioè} \quad y_P - y_T < 0$$

e, perciò

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0.$$

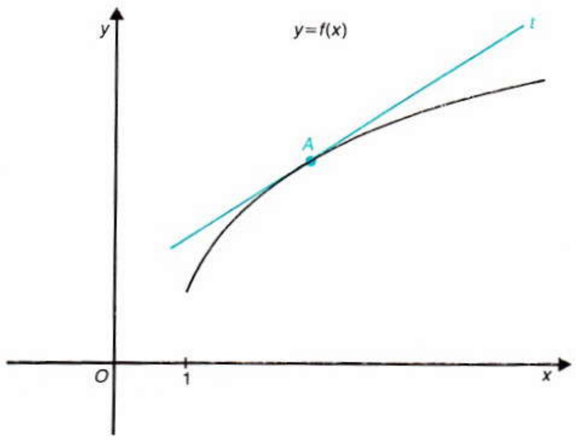

Fig. 25

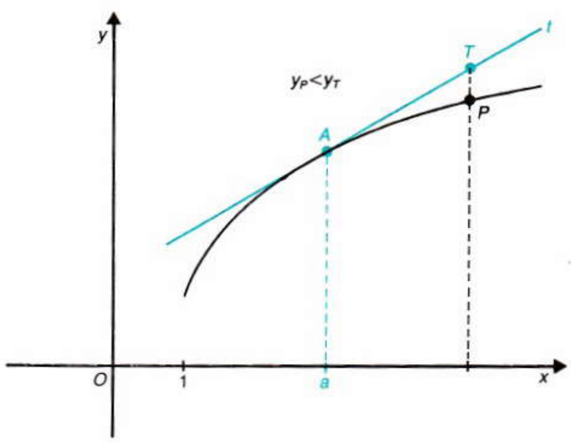

Fig. 26

Si comincia così ad intuire come si possa tradurre in termini algebrici anche la caratteristica di rivolgere la concavità verso l'alto (o verso il basso): basta studiare il segno dell'espressione

$$y_P - y_T = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]. \tag{1}$$

Si nota però che l'espressione è legata in modo piuttosto complicato alla funzione $y=f(x)$ e sembra quindi poco agevole da esaminare.

Si riesce tuttavia a studiare facilmente il segno dell'espressione (1), ripetendo due volte il procedimento di derivazione.

Si procede così: a partire dalla funzione $y=f(x)$, si calcola prima la derivata

$$y' = f'(x),$$

e poi la derivata della derivata e cioè **la derivata seconda** che si indica con il simbolo

$$y'' = f''(x).$$

Basandosi infatti sulla derivata seconda, si dimostra il seguente **teorema**:

- **se risulta $f''(x)>0$, la curva d'equazione $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto;**
- **se risulta $f''(x)<0$, la curva d'equazione $y=f(x)$ rivolge la concavità verso il basso.**

Per dimostrare questo teorema, si comincia con lo scrivere l'espressione (1) nella forma seguente:

$$[f(x) - f(a)] - f'(a)(x-a); \tag{2}$$

ci si vale poi del teorema di Lagrange.

Questo teorema garantisce infatti che si può trovare nell'intervallo $[a, x]$ un valore c per cui risulta

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a);$$

quindi si può modificare l'espressione (2) scrivendola nella forma

$$f'(c)(x-a)-f'(a)(x-a),$$

ossia

$$[f'(c)-f'(a)](x-a). \qquad (3)$$

Ora, molto spesso accade, anche nelle applicazioni, che la funzione $y'=f'(x)$ abbia a sua volta una derivata, che si indica con $y''=f''(x)$; in tal caso si può applicare il teorema di Lagrange una seconda volta, trovando nell'intervallo $[a, c]$ un valore d per cui risulta

$$f'(c)-f'(a)=f''(d)(c-a);$$

così si arriva a scrivere

$$y_P-y_T=f''(d)(c-a)(x-a). \qquad (4)$$

In quest'ultima espressione si nota che si ha sempre

$$(x-a)(c-a)>0,$$

dato che $(x-a)$ e $(c-a)$ sono due quantità di segno concorde (fig. 27); perciò l'espressione y_P-y_T ha lo stesso segno di $f''(d)$.

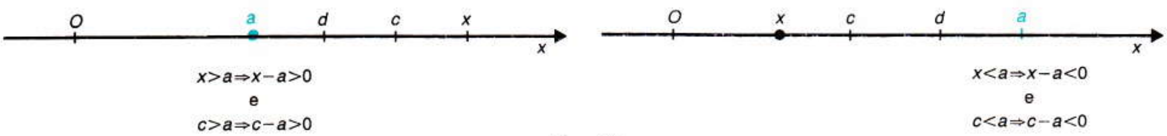

Fig. 27

Se dunque la funzione $y''=f''(x)$ si mantiene positiva, si ha:

$$f''(d)>0, \quad \text{quindi} \quad y_P-y_T>0$$

e perciò $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto.
In modo del tutto analogo, si dimostra che, se risulta $f''(x)<0$, la curva rivolge la concavità verso il basso.

È facile ora capire che, anche in questo caso, occorre qualche cautela nel considerare il **teorema inverso**: può accadere infatti che una curva rivolga la concavità verso il basso in un dato intervallo, senza avere la derivata seconda negativa in tutto l'intervallo. Basta un esempio per rendersene conto: la curva di fig. 28, che rivolge sempre la concavità verso l'alto. Si tratta del grafico della funzione

$$y=(x-1)^6,$$

che ha come derivate

$$y'=6(x-1)^5 \quad \text{e} \quad y''=30(x-1)^4;$$

si ha perciò:

$$y''>0 \text{ per qualunque } x\neq 1,$$

ma

$$y''(1)=0.$$

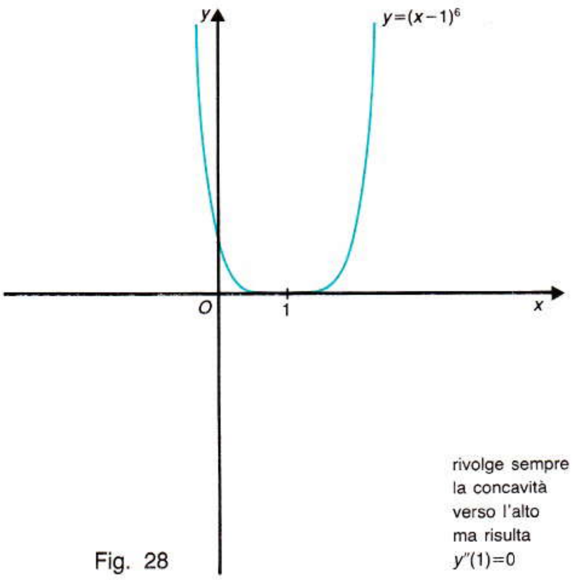

Fig. 28

Analogamente, una curva che rivolge la concavità verso il basso in un intervallo, può avere la derivata seconda che vale 0 in qualche punto dell'intervallo (fig. 29).

Si osserva subito che in questi due esempi la derivata seconda si annulla in un punto A senza però cambiare segno; si capisce dunque che non cambia il verso della concavità in un intorno del punto A.

Ecco un caso diverso (fig. 30): si tratta di nuovo del grafico della funzione

$$y=x^3-3x,$$

di cui ci siamo già occupati nel paragrafo precedente.

Per questa funzione risulta

$$y'=3x^2-3 \quad \text{e quindi} \quad y''=6x;$$

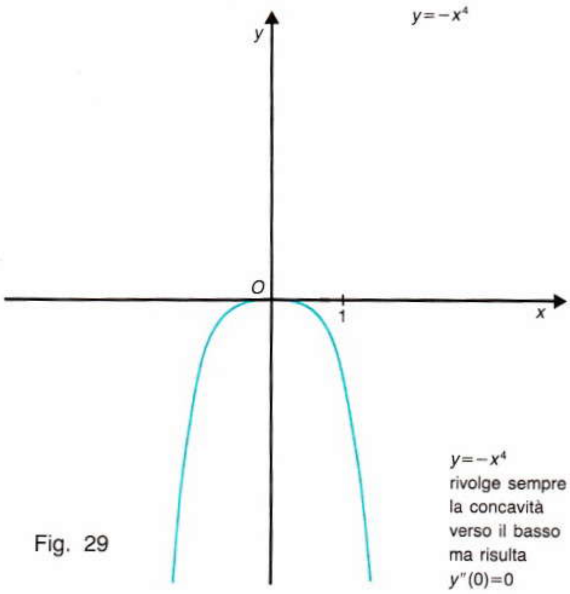

Fig. 29

si ha dunque (fig. 31):

$$y''<0 \quad \text{per} \quad x<0, \quad y''=0 \quad \text{per} \quad x=0, \quad y''>0 \quad \text{per} \quad x>0.$$

È chiaro che la curva rivolge la concavità verso il basso in corrispondenza a valori negativi di x, mentre rivolge la concavità verso l'alto in corrispondenza a valori positivi di x.

La curva cambia in O il verso della concavità; si ha in O **un punto di flesso o un punto inflessionale**.

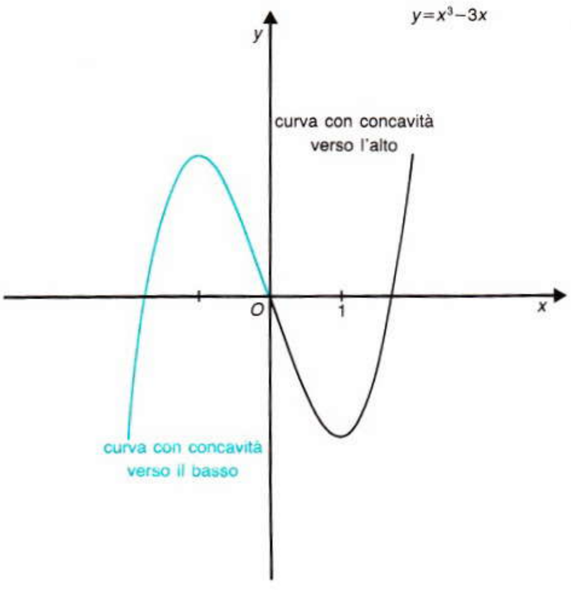

Fig. 30

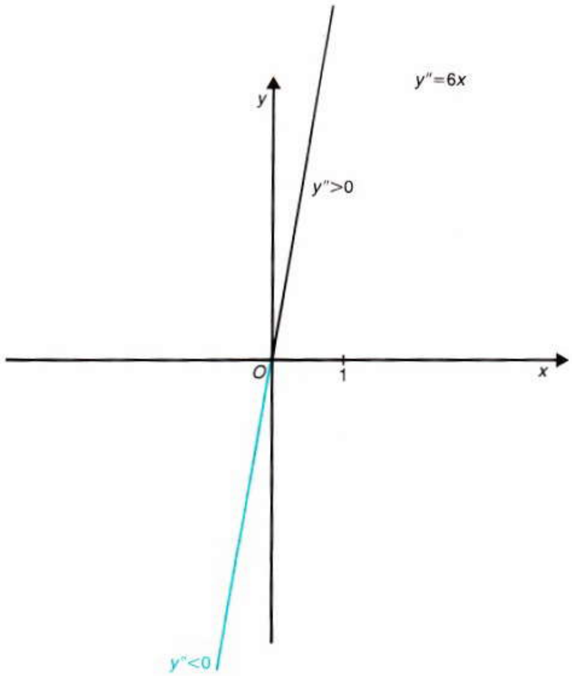

Fig. 31

4. Punti di flesso

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente a partire da un esempio numerico possono essere facilmente generalizzate: una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta un flesso nel punto A d'ascissa a, se la curva attraversa in A la sua tangente, ossia se cambia il verso della concavità nel punto A (fig. 32).

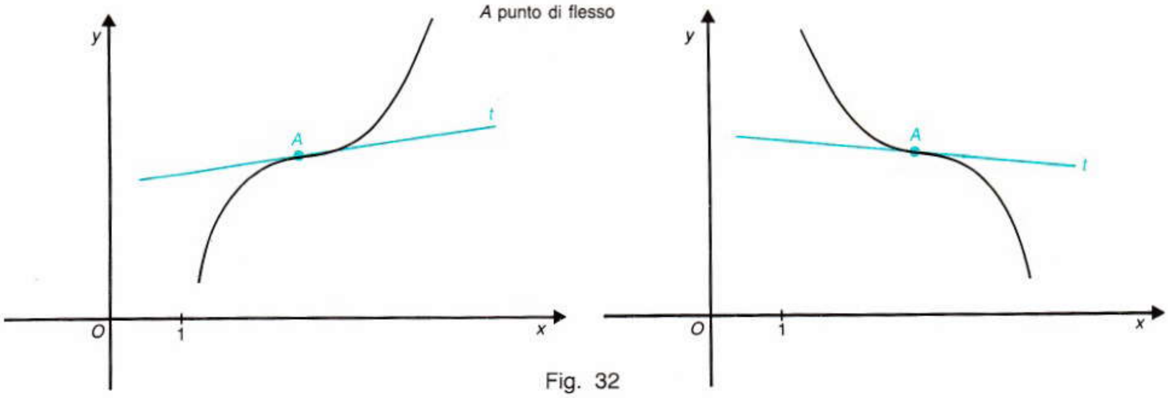

Fig. 32

Ora è facile dimostrare il seguente **teorema**:

se la curva d'equazione $y=f(x)$ presenta un flesso nel punto A d'ascissa a, risulta $f''(a)=0$.

La dimostrazione è immediata: non può risultare $f''(a)>0$, perché in tal caso la curva si manterrebbe al disopra della tangente in un intorno di A; analogamente non può essere $f''(a)<0$. Deve allora risultare $f''(a)=0$.

È importante notare che **non vale il teorema inverso**: non basta verificare che risulta $f''(a)=0$ per essere certi che il punto A d'ascissa a sia un flesso; le figg. 28 e 29 di pagg. 9-10 mostrano appunto due esempi di curve che non presentano un flesso in un punto in cui la derivata seconda vale 0.

Tuttavia è facile capire come si può individuare algebricamente l'ascissa a di un punto di flesso, tenendo presente che in un punto di flesso cambia il verso della concavità; si ha dunque che **A è un punto di flesso se si verifica una delle seguenti condizioni**:

1) La curva ha, nell'intorno del punto A, un andamento come quello di fig. 33: rivolge la concavità verso l'alto a sinistra di A, mentre rivolge la concavità verso il basso a destra di A; cioè risulta:

$$y''(a)=0 \quad \textbf{con} \quad y''>0 \quad \textbf{per} \quad a-\delta<x<a \quad \textbf{e} \quad y''<0 \quad \textbf{per} \quad a<x<a+\delta;$$

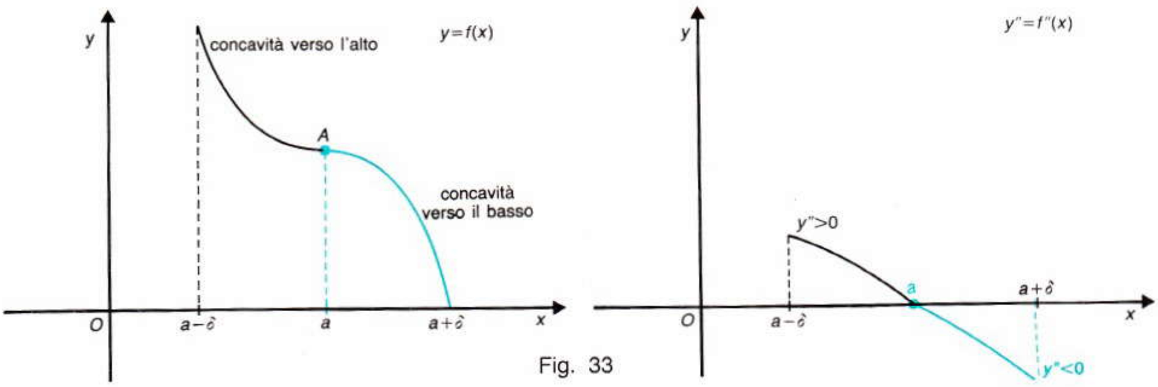

Fig. 33

2) La curva ha, nell'intorno del punto A un andamento come quello di fig. 34: rivolge la concavità verso il basso a sinistra di A, mentre rivolge la concavità verso l'alto a destra di A; cioè risulta:

$$y''(a)=0 \quad \textbf{con} \quad y''<0 \quad \textbf{per} \quad a-\delta<x<a \quad \textbf{e} \quad y''>0 \quad \textbf{per} \quad a<x<a+\delta.$$

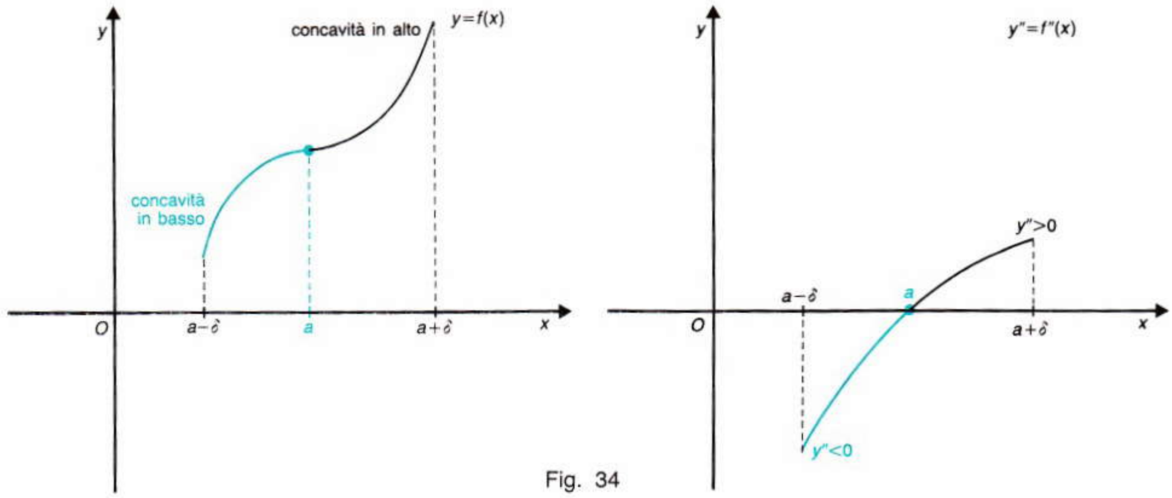

Fig. 34

Le figg. 33 e 34 conducono anche ad intuire un'interessante proprietà geometrica della tangente ad una curva in un punto A di flesso: una secante s, che congiunge A con un punto P prossimo ad A (fig. 35), interseca la curva non solo in A e P, ma anche in un terzo punto (Q), anch'esso vicino ad A.

Si capisce allora che, quando la secante s ruota intorno ad A, assumendo posizioni vicine a quella della tangente t, i punti P e Q si avvicinano sempre di più ad A (fig. 36); al limite la tangente t interseca la curva in tre punti coincidenti nel punto A.

Si intuisce così la seguente proprietà, caratteristica della tangente t ad una curva nel punto A di flesso (chiamata anche **tangente inflessionale**):

la tangente inflessionale tocca la curva in tre punti coincidenti nel punto di flesso.

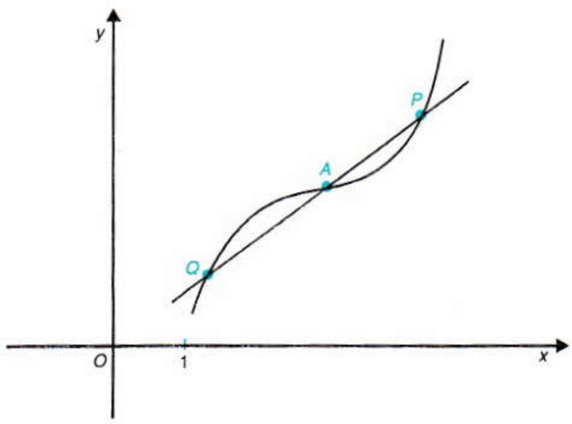

Fig. 35

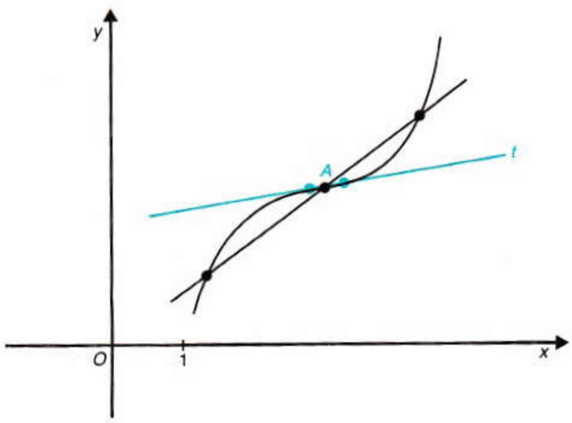

Fig. 36

Derivate e grafici con dimostrazioni. Esercizi

Gli esercizi qui proposti richiedono anche di applicare l'algebra delle derivate per derivare funzioni

Curve crescenti o decrescenti

Esercizio guidato

Completa la dimostrazione richiesta nel seguente esercizio

1. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se una funzione $y=f(x)$ è crescente in un intervallo, la funzione $y=-f(x)$ è decrescente nello stesso intervallo».

Se f(x) è crescente, f'(x) non può essere negativa.
–f(x) ha come derivata …… che non può essere …………, perché è opposta di f'(x).
Perciò ………………………

2. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se una funzione $y=f(x)$ è crescente in un intervallo, la funzione $y=\frac{1}{f(x)}$ è decrescente nello stesso intervallo».

3. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «la somma di due funzioni crescenti è ancora una funzione crescente».

4. È data una funzione $y=f(x)$ crescente; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ è ancora una funzione crescente.

Punti di massimo o minimo relativo

5. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo (o un minimo) relativo, anche la funzione $y=f(x)+k$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo (o un minimo) relativo, qualunque sia il valore della costante k».

6. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo relativo, la funzione $y=-f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un minimo relativo; viceversa, se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un minimo relativo, la funzione $y=-f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo relativo».

7. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=k\,f(x)$ presenta un massimo o un minimo relativo.

8. Ripetere l'esercizio 7 a partire da una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo.

9. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=\frac{1}{f(x)}$ presenta un massimo o un minimo relativo.

10. Ripetere l'esercizio 9 a partire da una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo.

11. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ presenta certamente un massimo relativo nel punto d'ascissa $x=a$.

12. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ presenta certamente un minimo relativo.

13. Sono date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, che hanno un punto stazionario in corrispondenza all'ascissa $x=a$; descrivere il comportamento della funzione $y=f(x)+g(x)$ in corrispondenza all'ascissa $x=a$.

14. Ripetere l'esercizio 13 descrivendo il comportamento delle funzioni $y=f(x)\cdot g(x)$ e $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Concavità di una curva verso l'alto o verso il basso

15. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:

- «la derivata $y'=f'(x)$ è crescente negli intervalli in cui il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità rivolta verso l'alto»;
- «la derivata $y'=f'(x)$ è decrescente negli intervalli in cui il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità rivolta verso il basso».

16. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:

- «la retta tangente ad una curva ha pendenza crescente negli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso l'alto»;
- «la retta tangente ad una curva ha pendenza decrescente negli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso il basso».

17. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni, interpretandole anche dal punto di vista grafico:

- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto, la funzione $y=-f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso»;
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità verso il basso, la funzione $y=-f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto».

18. È data una funzione $y=f(x)$ con il grafico che rivolge la concavità verso l'alto e si considera una funzione del tipo $y=k\,f(x)$; stabilire in quali condizioni la seconda funzione ha il grafico con la concavità verso l'alto o verso il basso.

19. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:

- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto, anche la funzione $y=f(x)+ax+b$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto»;
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso, anche la funzione $y=f(x)+ax+b$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso».

20. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:

- «se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno il grafico con la concavità verso l'alto, anche la funzione $y=f(x)+g(x)$ ha il grafico con la concavità verso l'alto»;
- «se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno il grafico con la concavità verso il basso, anche la funzione $y=f(x)+g(x)$ ha il grafico con la concavità verso il basso».

Punti di flesso

21. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso, anche la funzione $y=f(x)+hx+k$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso».

22. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso, anche la funzione $y=kf(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso».

23. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se le funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ presentano nel punto d'ascissa a un flesso, presenta nel punto d'ascissa a un flesso anche la funzione $y=f(x)+g(x)$».

24. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «la derivata $y'=f'(x)$ ha un punto stazionario nel punto in cui il grafico di $y=f(x)$ presenta un flesso».