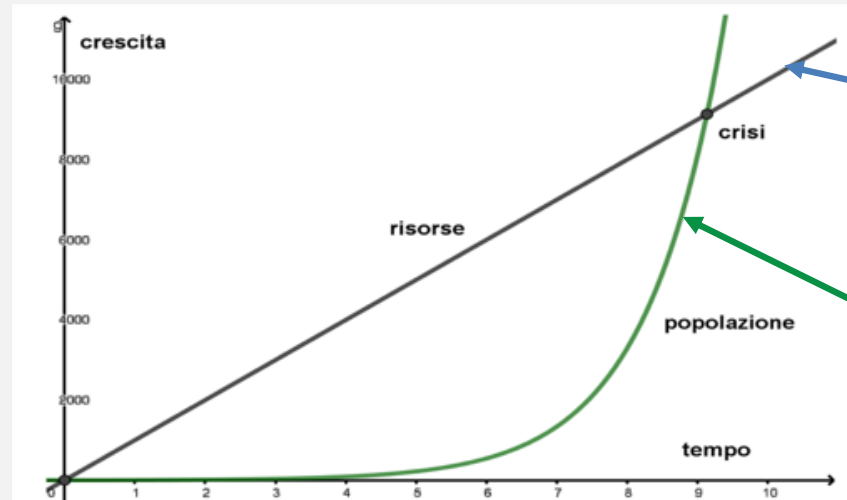


# Derivate e grafici di funzioni

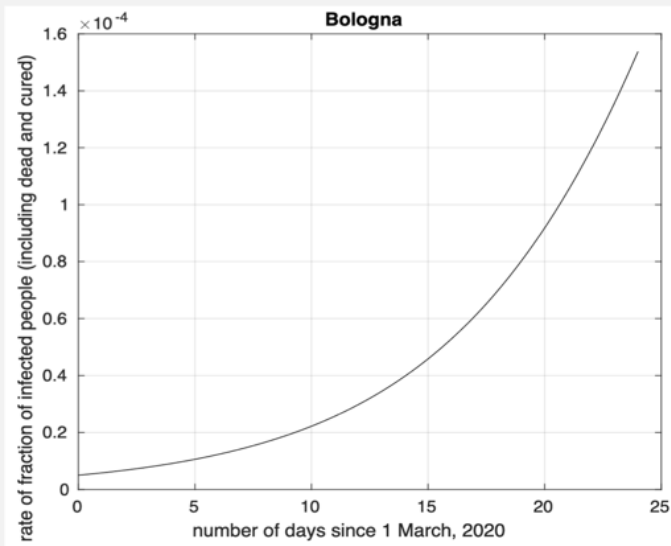
# Grafici di funzioni per 'vedere' la crescita di popolazioni, di contagiati, ...

Crescita di una popolazione e delle risorse per vivere secondo Malthus

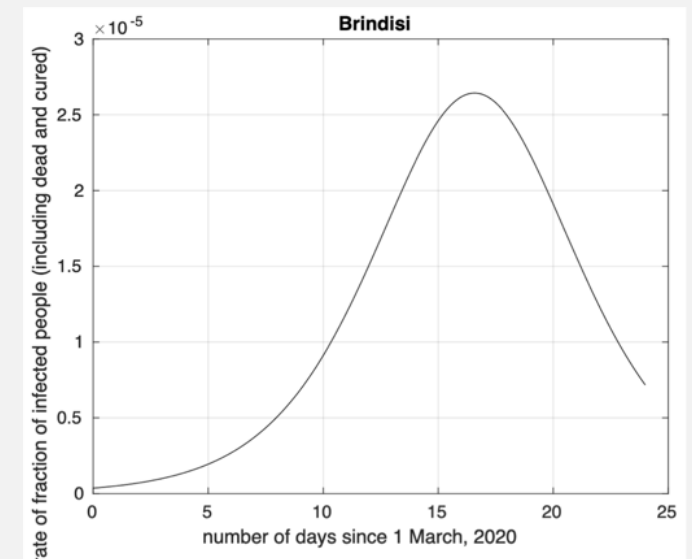


Retta  
Crescita lineare

Curva esponenziale  
Crescita esponenziale

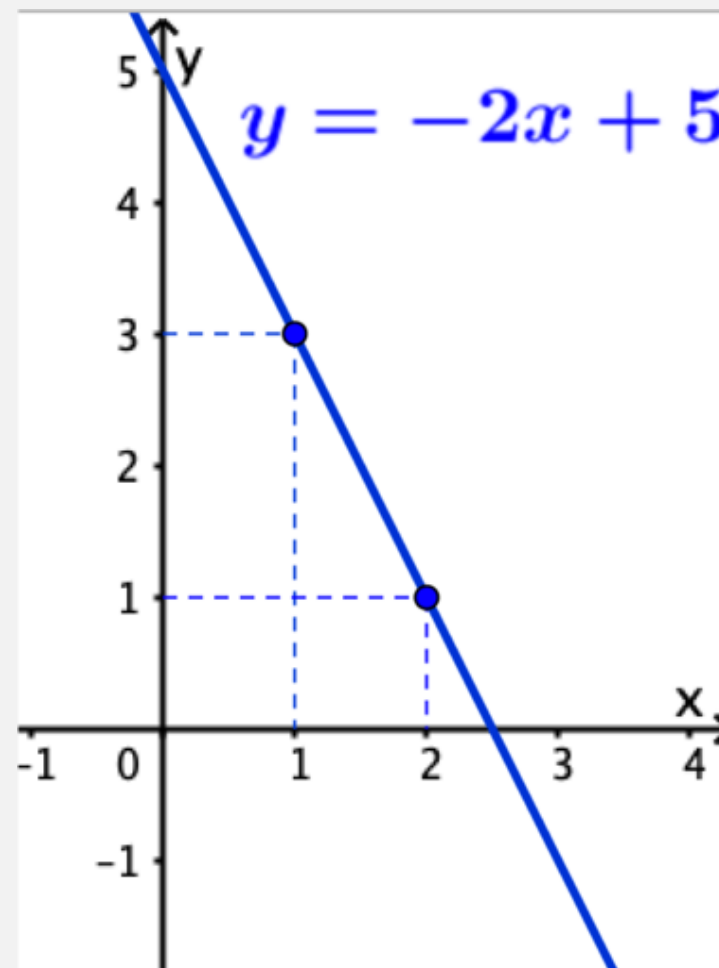
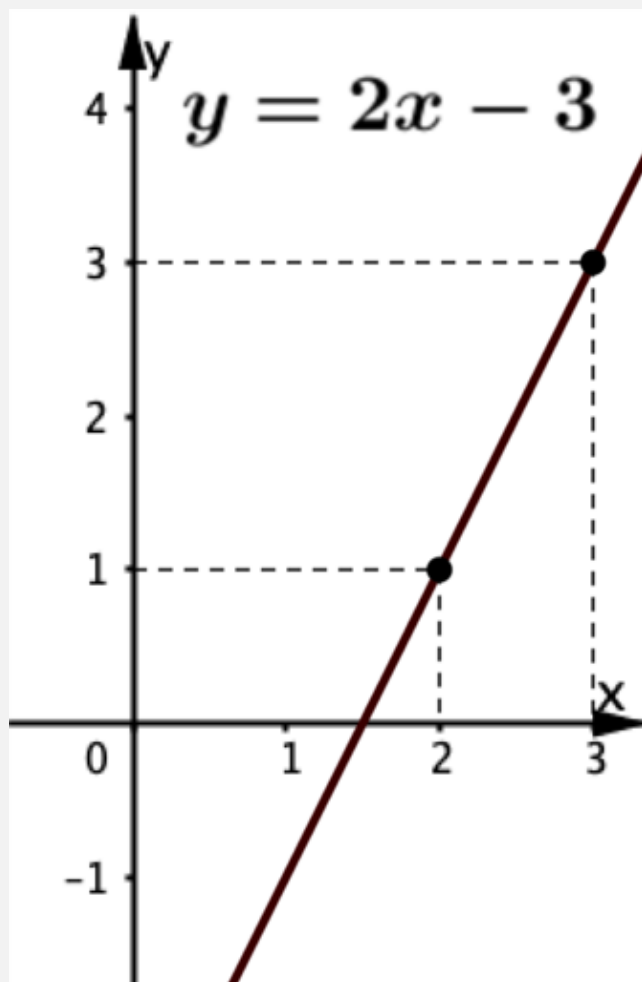


Crescita dei contagiati durante un'epidemia

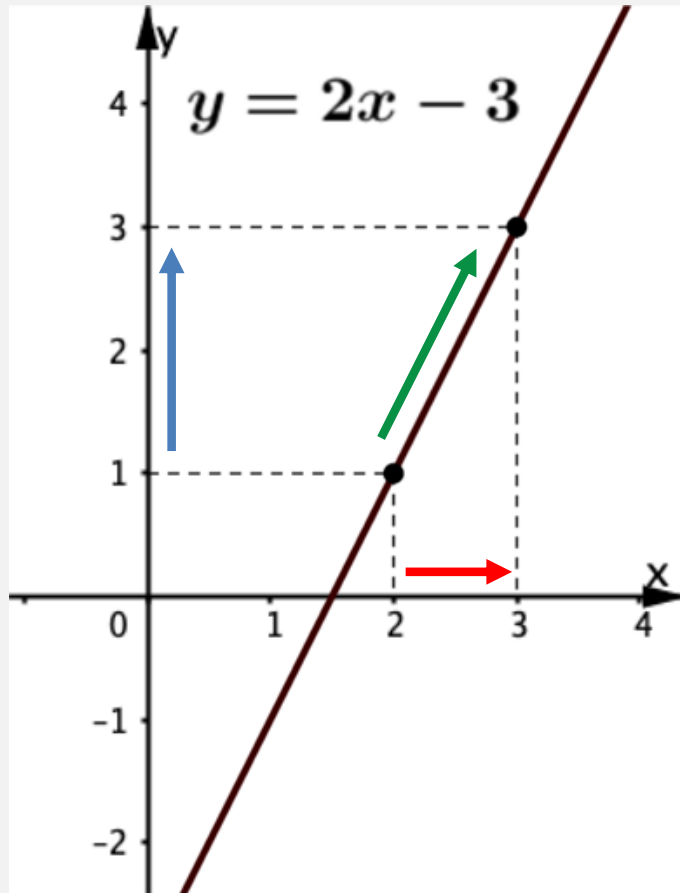


# Funzioni crescenti o decrescenti

## Le più semplici: le rette



# Retta crescente



## Grafico

Se percorro il grafico da O verso destra, 'vado in salita'.

$x$	1	2	3	4
$y = 2x - 3$	-1	1	3	5

## Tabella

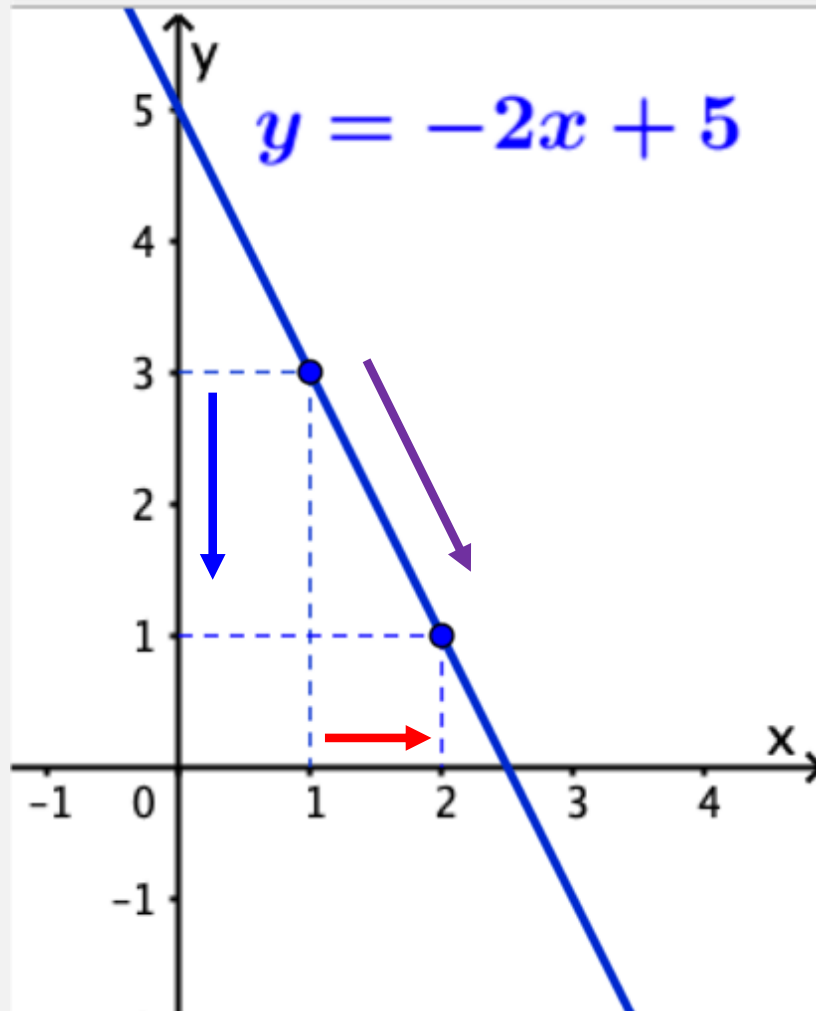
Se aumenta  $x$ , cresce anche  $y$ .

$$y = 2x - 3$$

## Formula

La pendenza è  $m = 2$ , positiva

# Retta decrescente



## Grafico

Se percorro il grafico da O verso destra, 'vado in discesa'.

$x$	0	1	3	4
$y = -2x + 5$	5	3	1	-3

## Tabella

Se aumenta  $x$ , decresce  $y$ .

$$y = -2x + 5$$

## Formula

La pendenza è  $m = -2$ , negativa

# Riconoscere funzioni lineari $y = mx + q$ crescenti o decrescenti

$m$  positivo  
funzioni crescenti

$$y = x - 4$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = \frac{2}{3}x - 5$$

$$y = \sqrt{2}x - 2$$

⋮

$m$  negativo  
funzioni decrescenti

$$y = -x + 3$$

$$y = -3x + 2$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$y = -\sqrt{2}x + 4$$

⋮

**Grafici e tabelle non sono necessari:  
basta esaminare la formula**

# Riconoscere funzioni crescenti o decrescenti

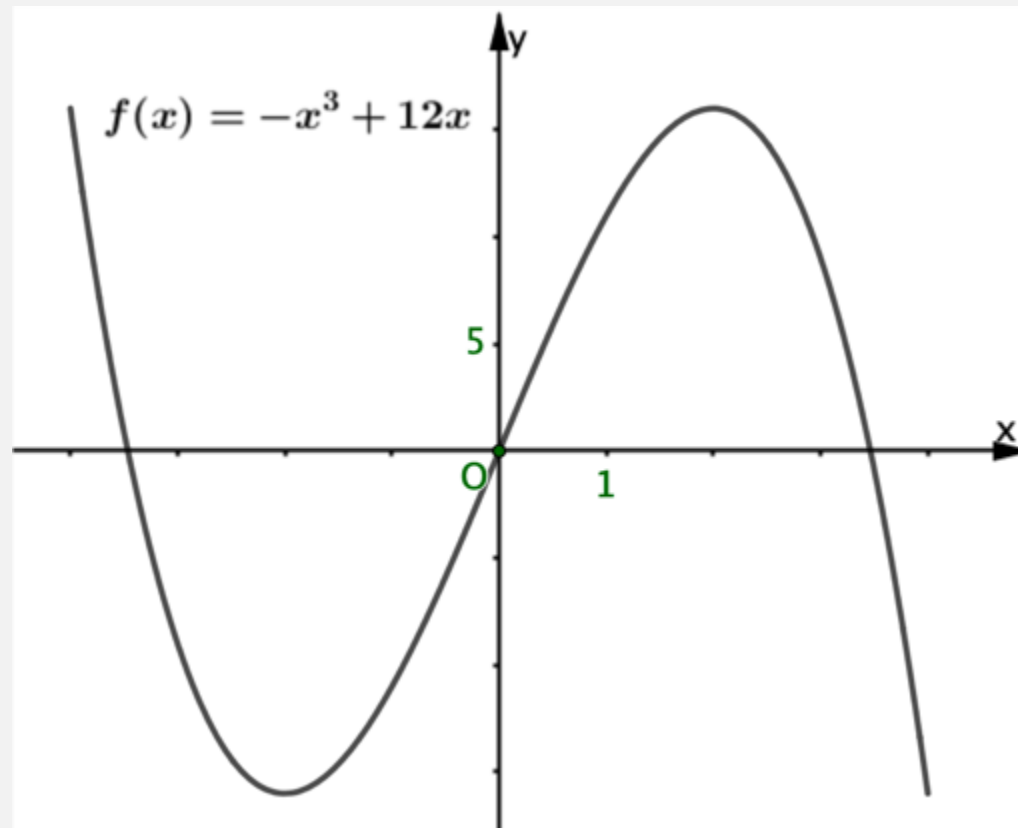
**E se la funzione non è lineare?**

**Ragiono a partire da un esempio**

# Osservo il grafico di una funzione

Osservo un esempio di curva: il grafico della funzione

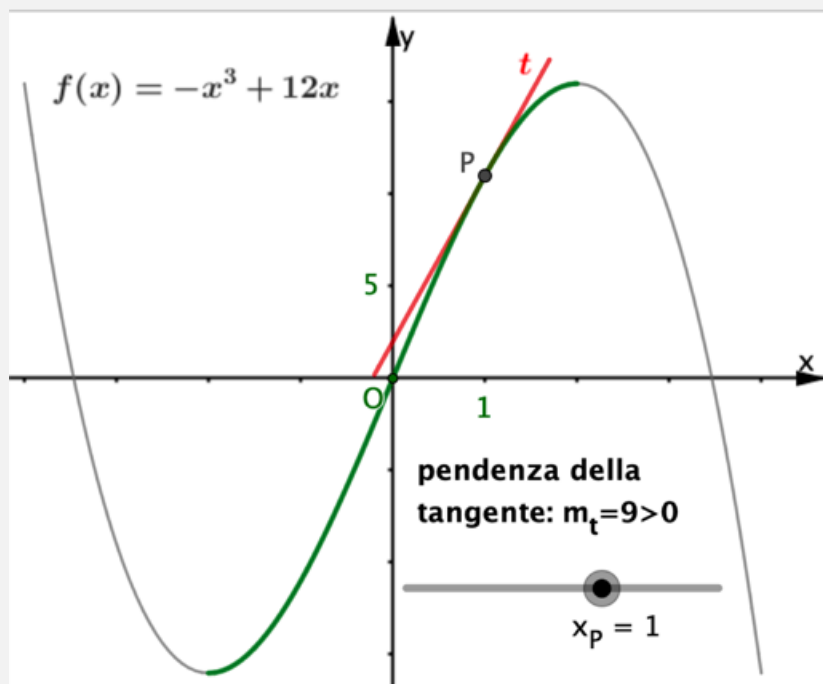
$$f(x) = -x^3 + 12x$$



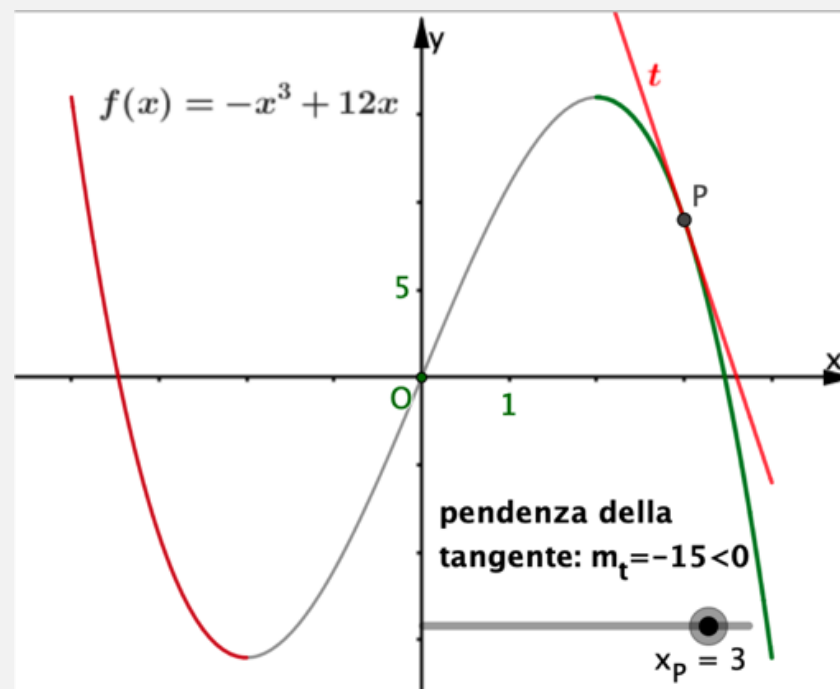
**Sulla curva posso trovare archi crescenti o decrescenti**



# Osservo il grafico insieme alla retta tangente



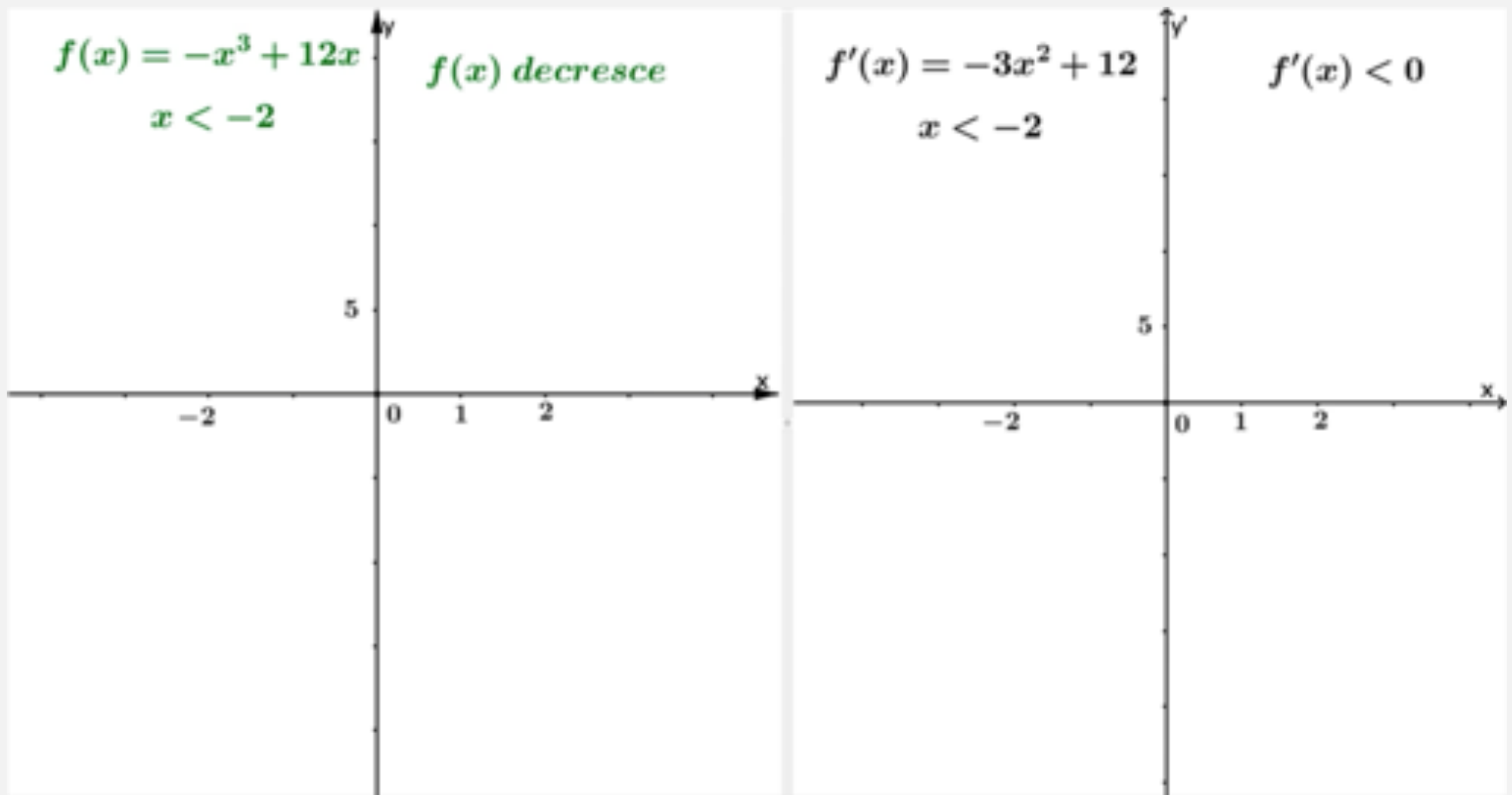
Se  $m_t$  è positiva,  $P$  si trova su un arco crescente



Se  $m_t$  è negativa,  $P$  si trova su un arco decrescente.

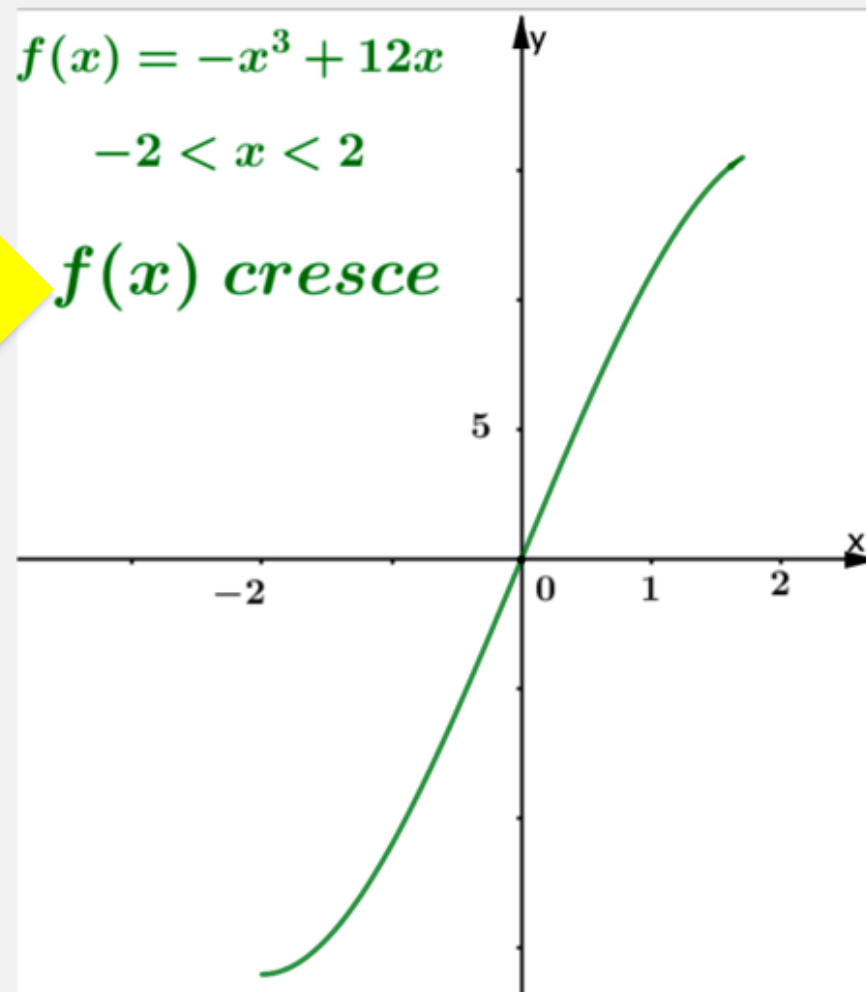
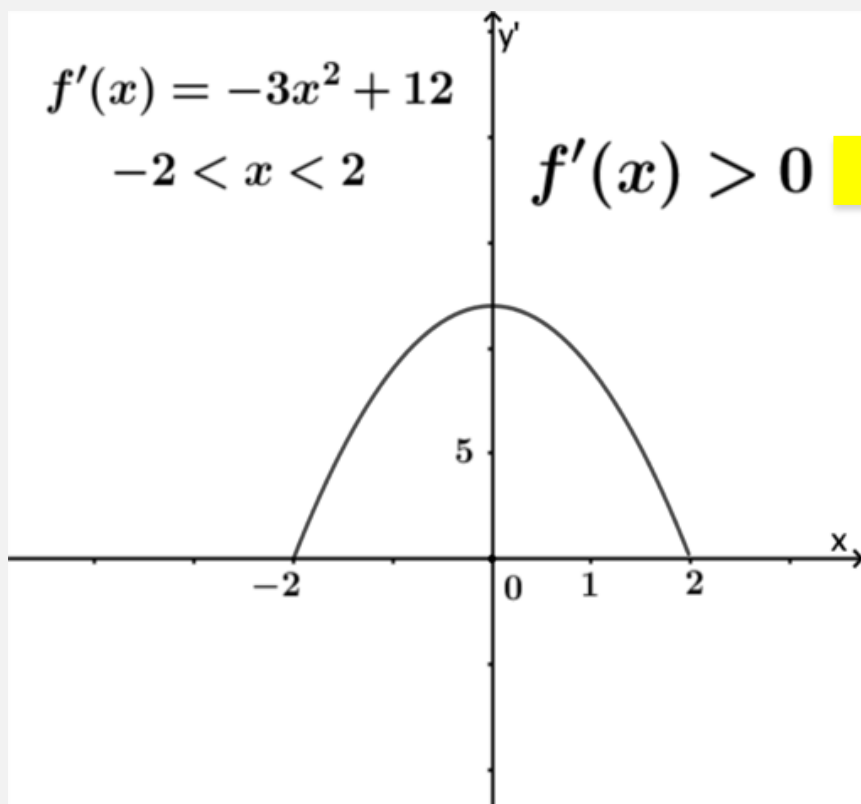
La funzione  $f(x)$  è derivabile e la derivata  $f'(x)$  dà, per ogni  $x$ , la pendenza  $m_t$  della tangente al grafico nel punto  $P$ .

# Il segno di $f'(x)$ indica archi crescenti o decrescenti di $f(x)$



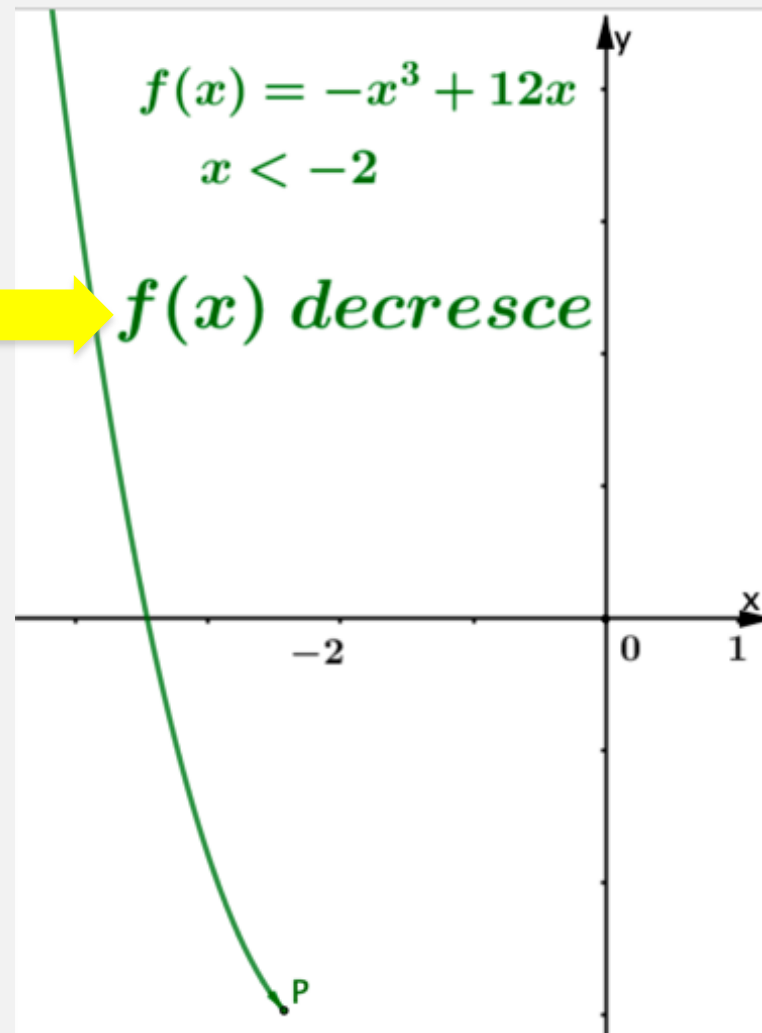
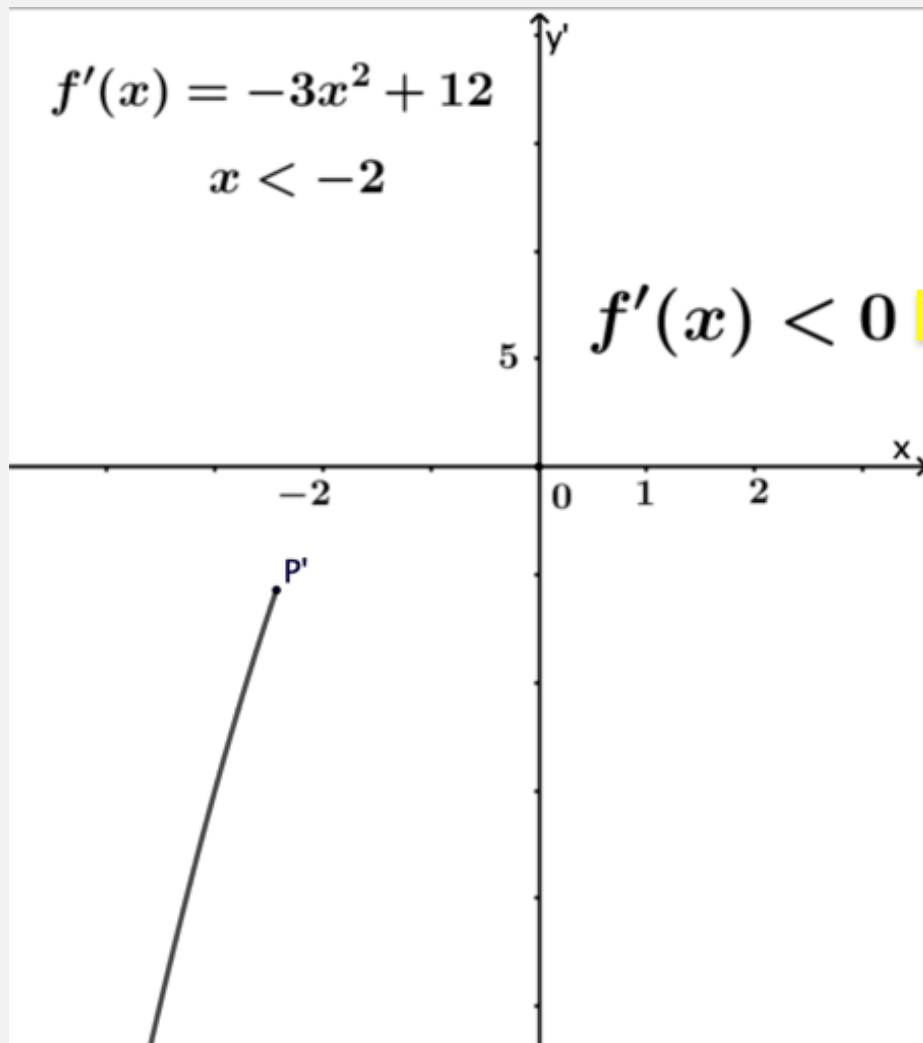
# Segno positivo di $f'(x)$ e crescita di $f(x)$

Conclusioni suggerite dal video

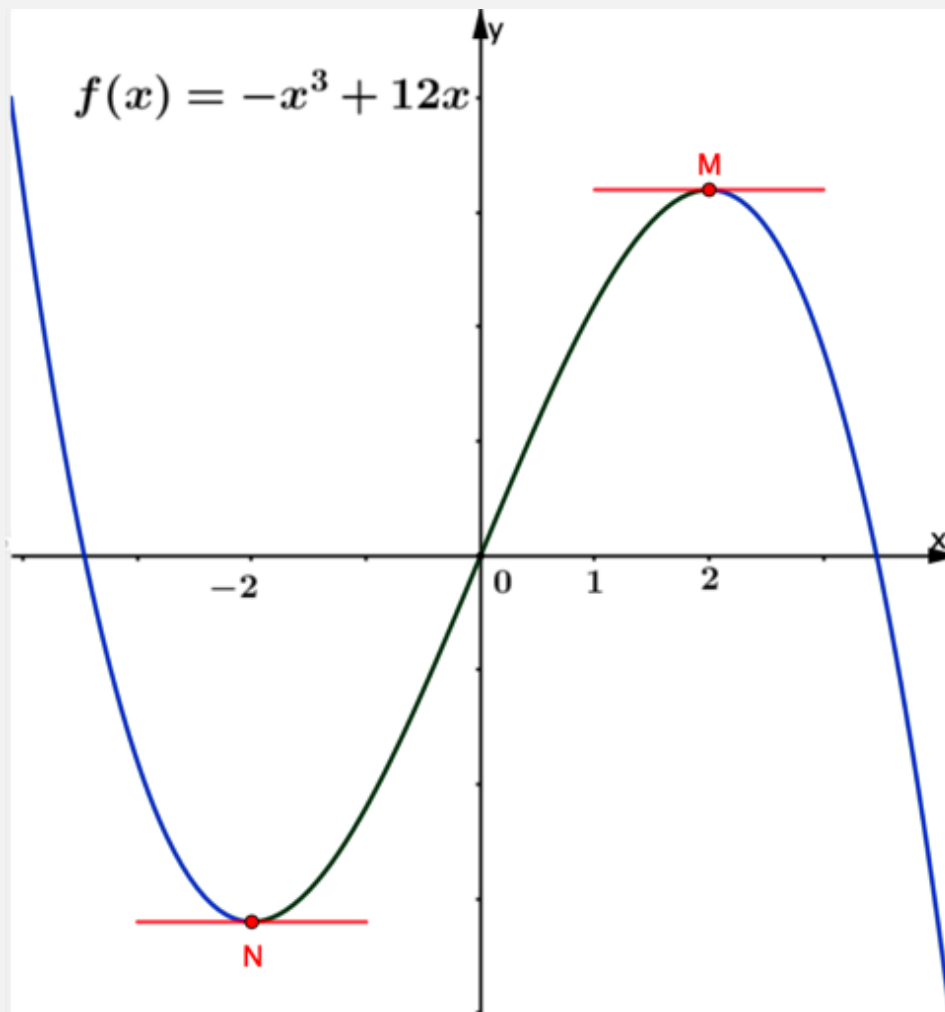


# Segno negativo di $f'(x)$ e decrescita di $f(x)$

## Conclusioni suggerite dal video

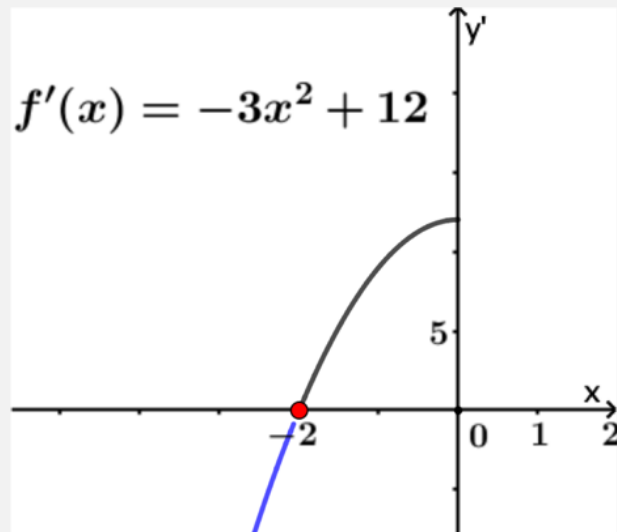


# Due punti notevoli sul grafico di $f(x)$

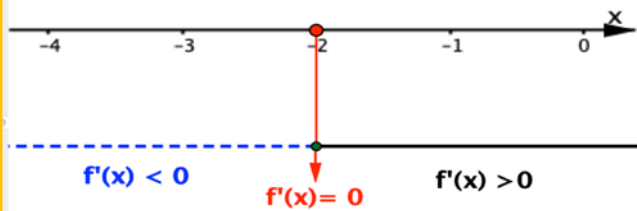


**Esamino i due punti**

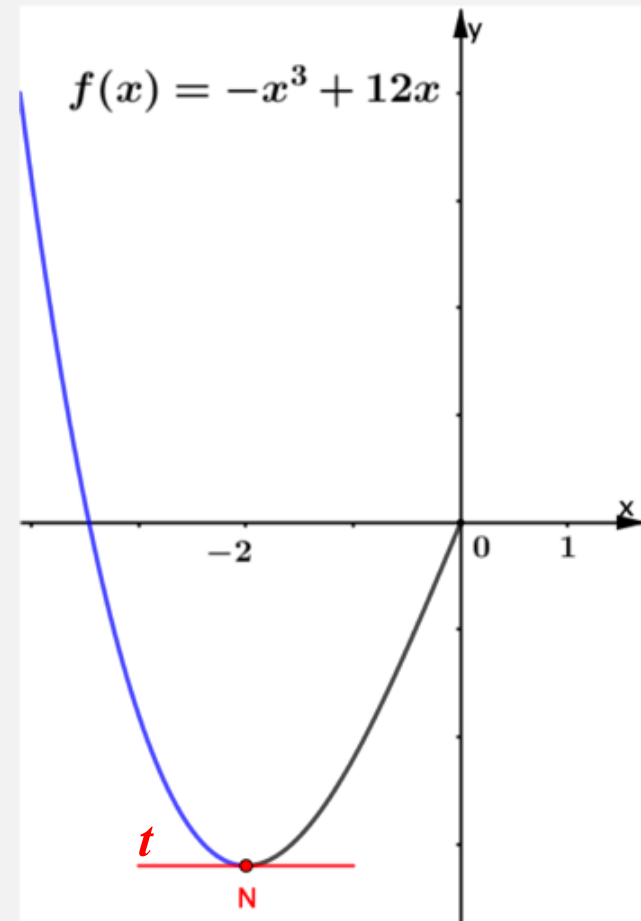
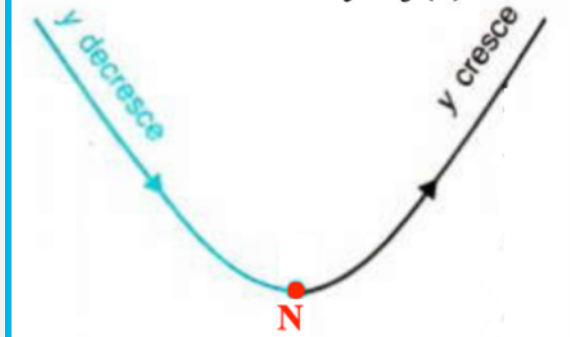
# Punto N di minimo relativo



Segno di  $f'(x) = -3x^2 + 12$

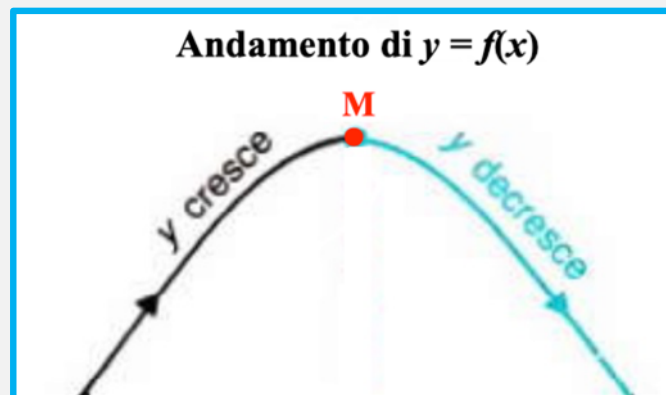
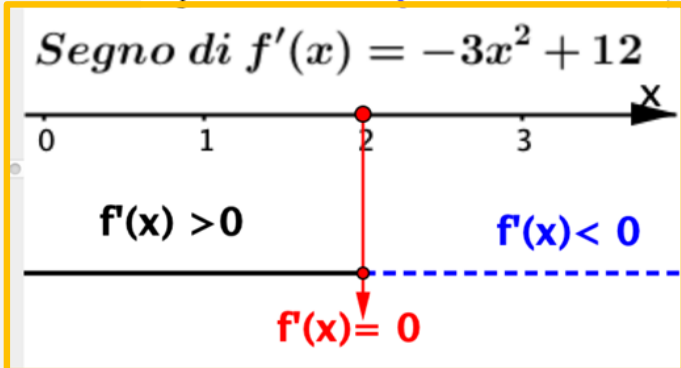
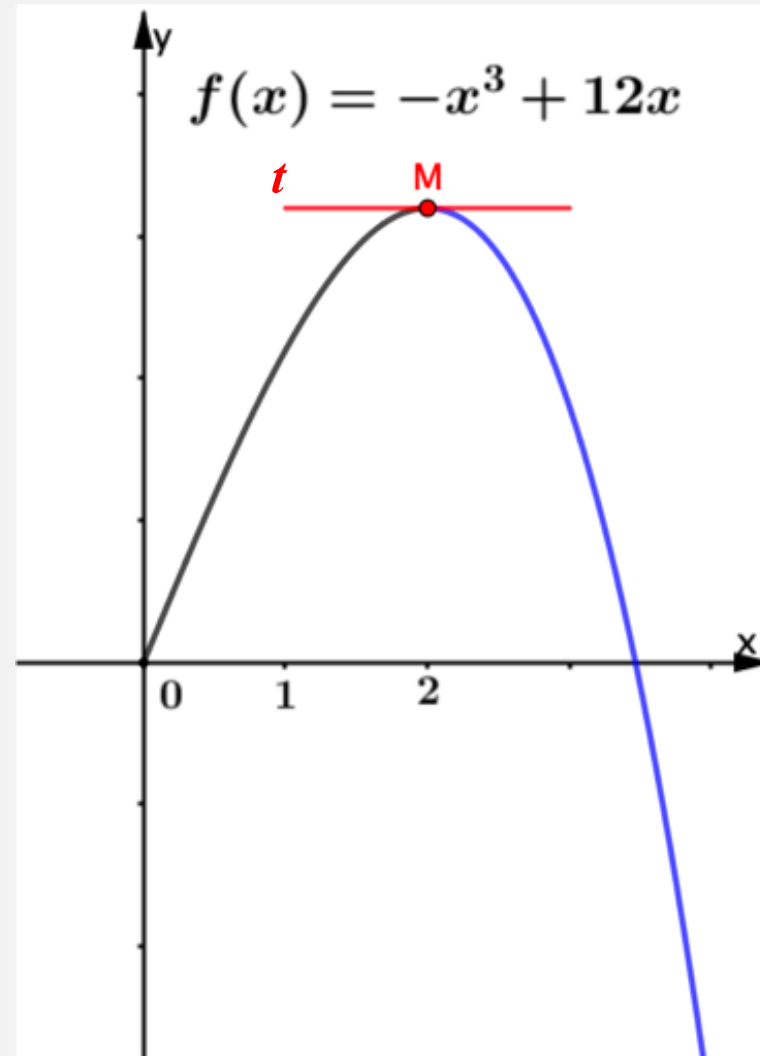
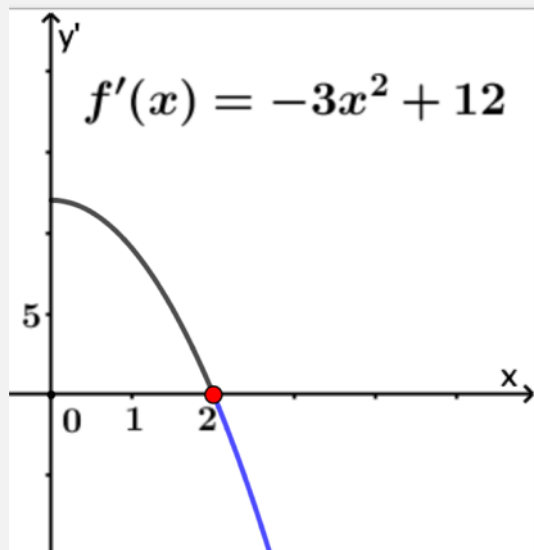


Andamento di  $y = f(x)$



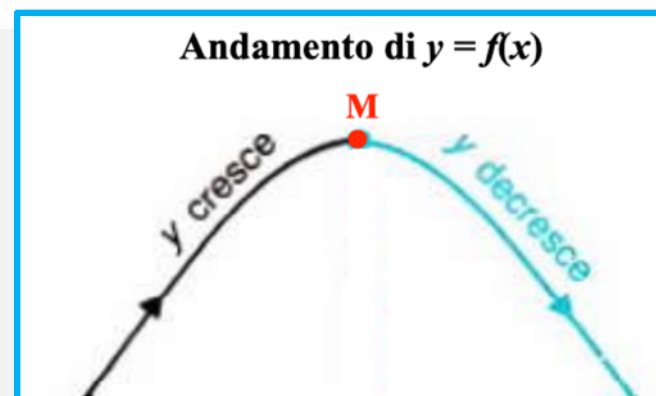
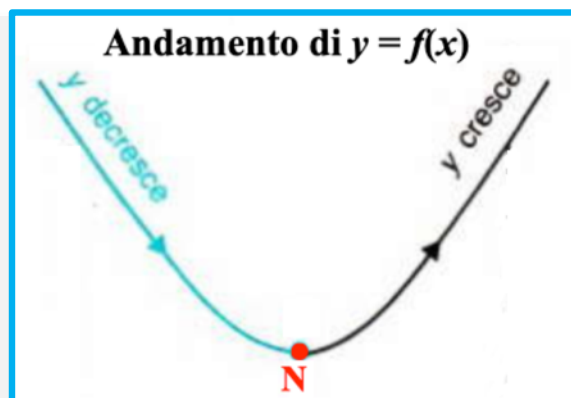
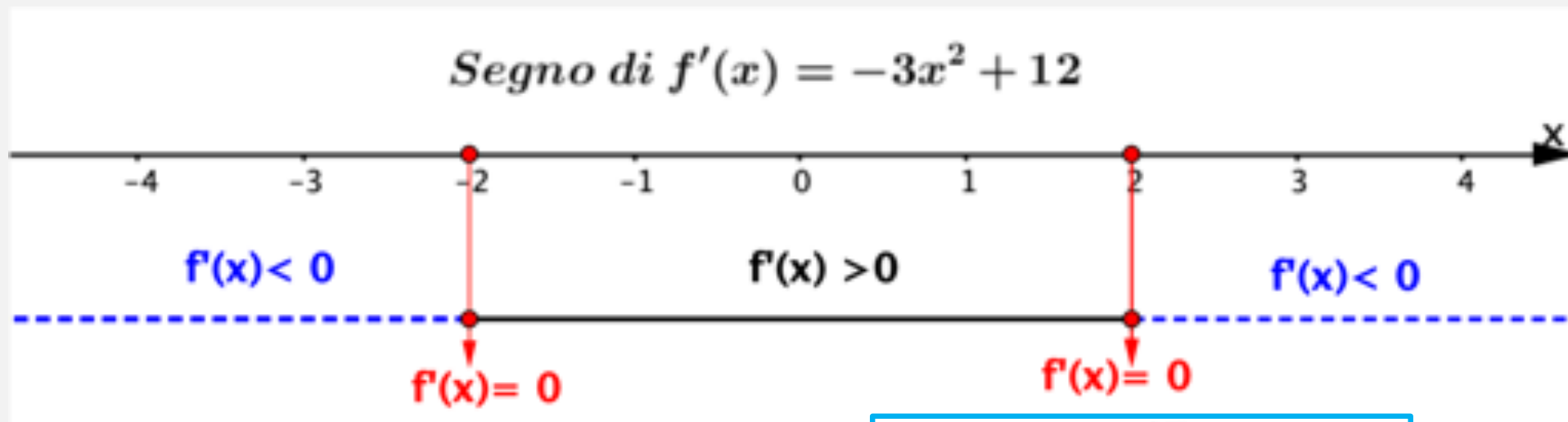
**N** è 'il più basso dei punti vicini'  
La tangente **t** in **N** ha pendenza  $m_t = 0$

# Punto M di massimo relativo



**M** è 'il più alto dei punti vicini'  
La tangente **t** in **M** ha pendenza  $m_t = 0$

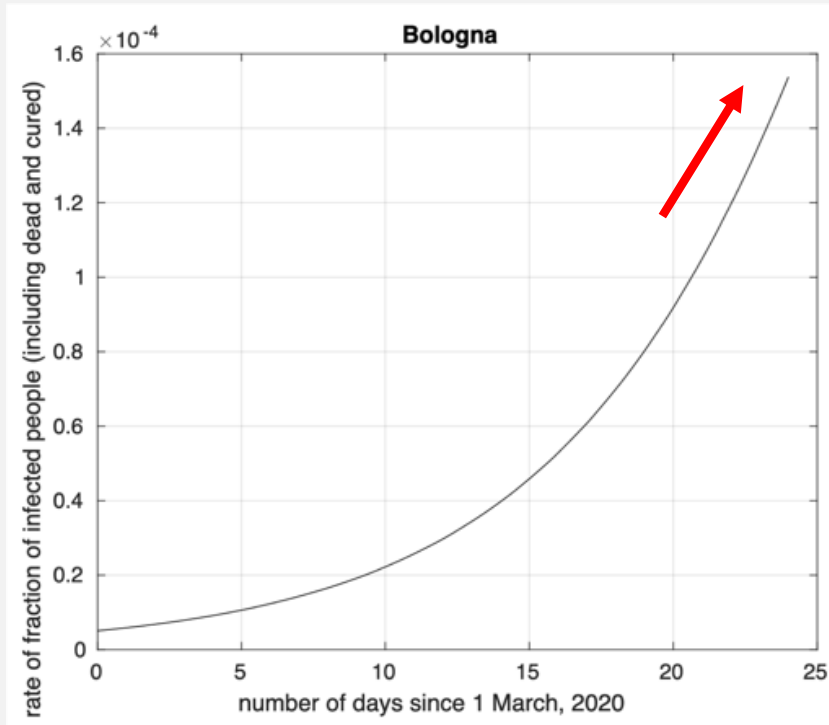
# Riconoscere archi crescenti o decrescenti nel grafico di una funzione $y = f(x)$



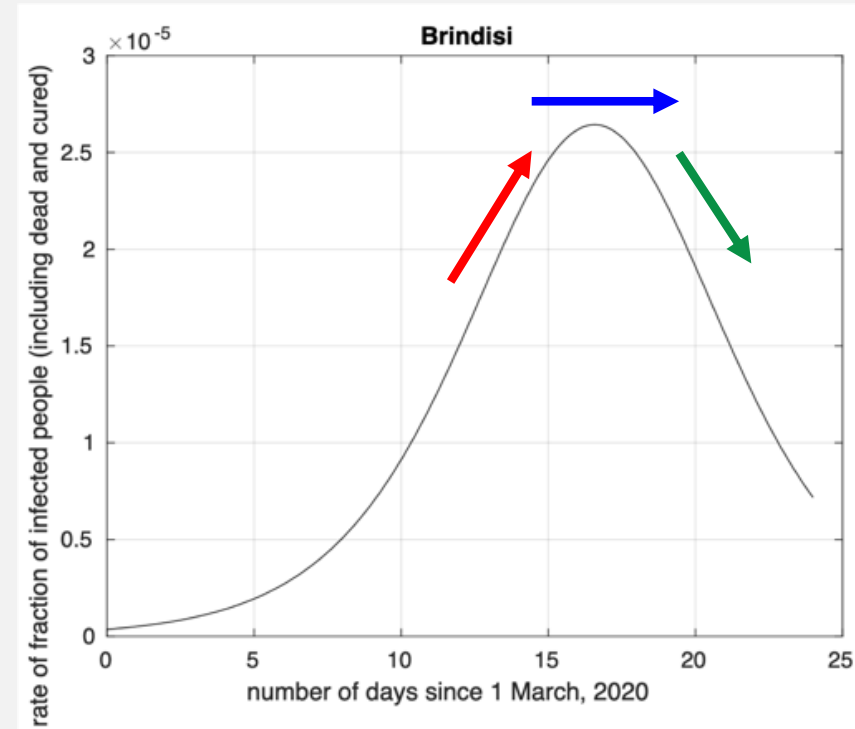
**Il grafico non è necessario: basta esaminare il segno di  $f'(x)$**



# Vari 'modelli di crescita'

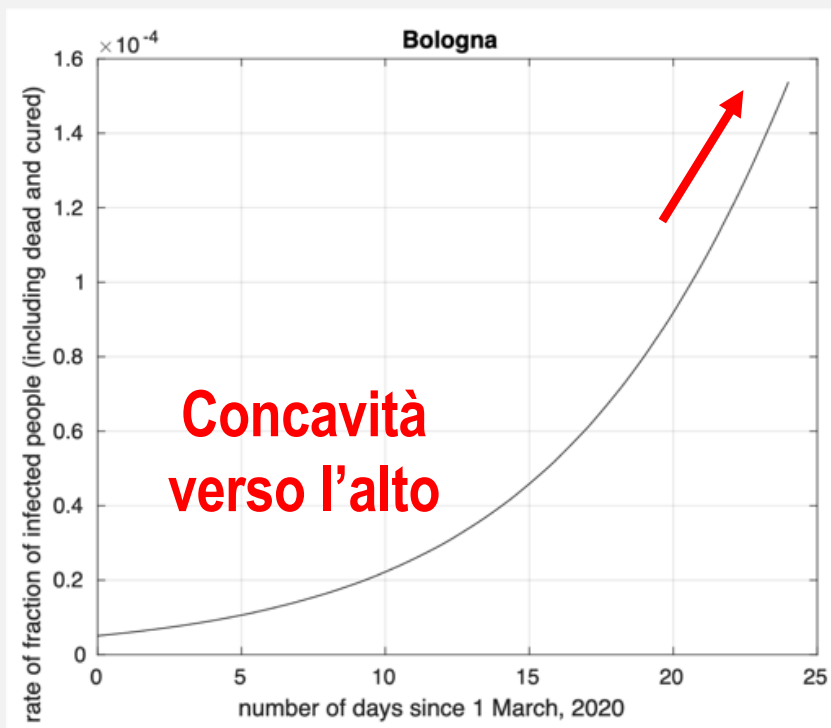


**La crescita è sempre  
più veloce**

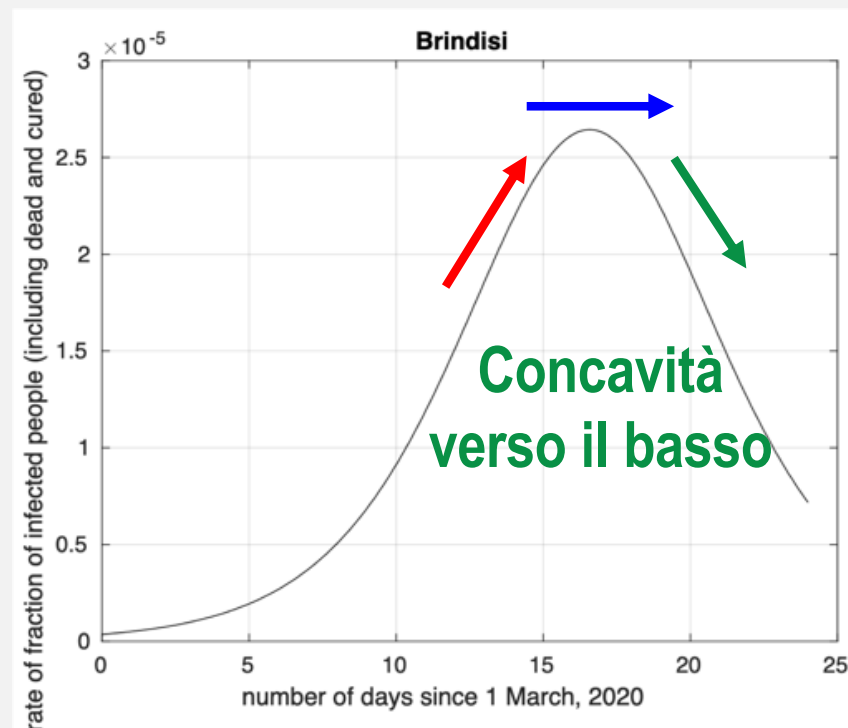


**La crescita si ferma e poi  
diventa decrescita**

# Attenzione alla concavità della curva!



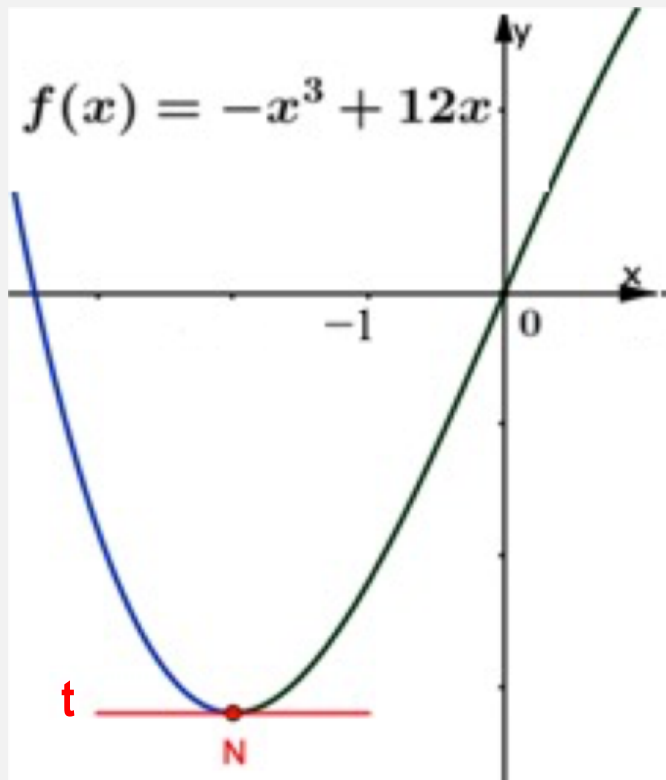
La crescita è sempre più veloce



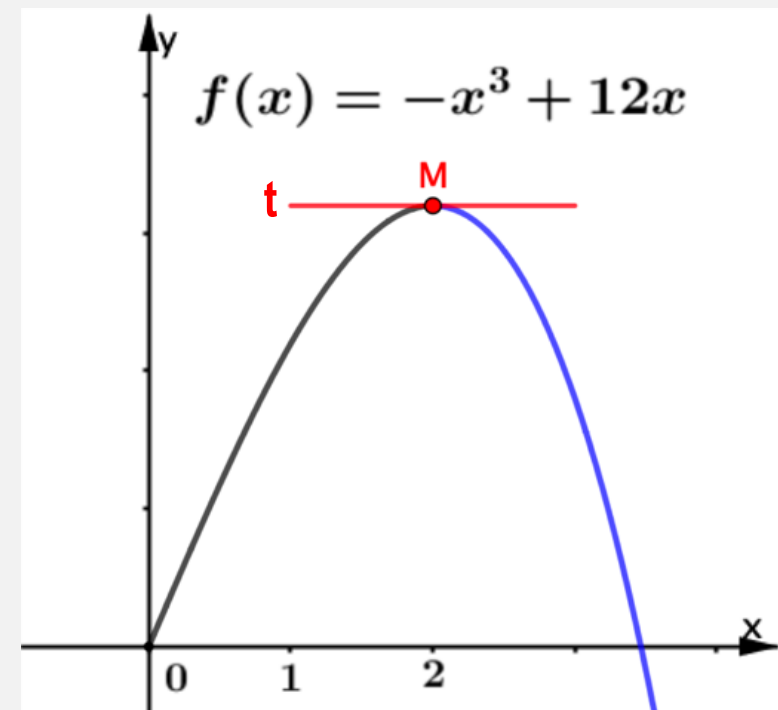
La crescita si ferma e poi diventa decrescita

# Concavità di una curva

La curva è sopra la tangente **t**:  
la concavità è verso l'alto.



La curva è sotto la tangente **t**:  
la concavità è verso il basso.

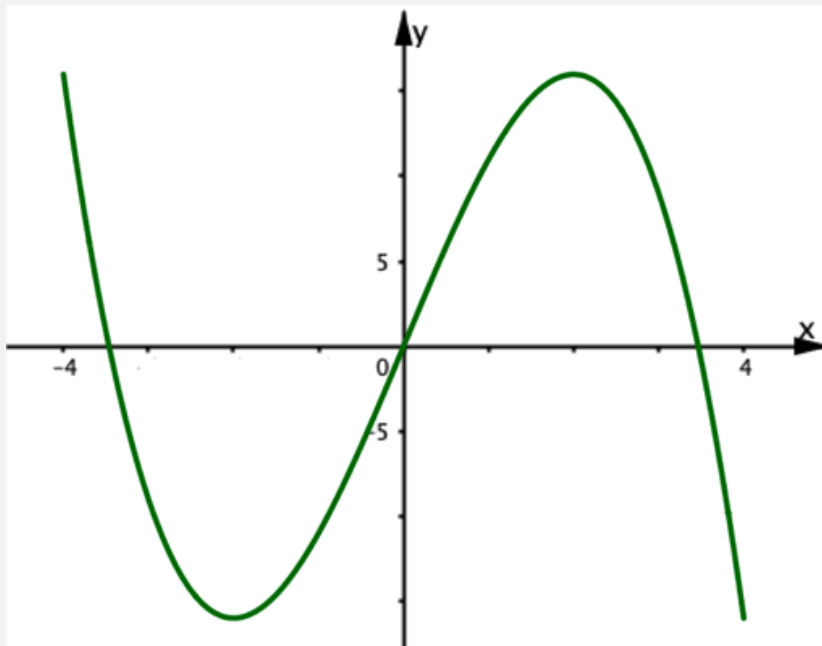


# Concavità di una curva e derivate

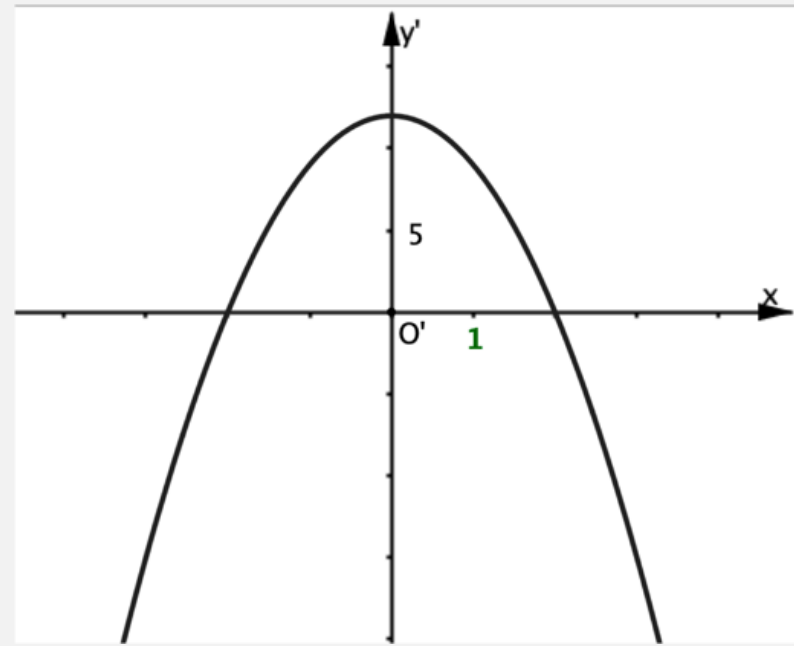
Anche il verso della concavità del grafico è collegato alla derivata di  $f(x)$ ?

Confrontiamo i grafici di  $f(x)$  ed  $f'(x)$  a partire dalla funzione  $f(x) = -x^3 + 12x$

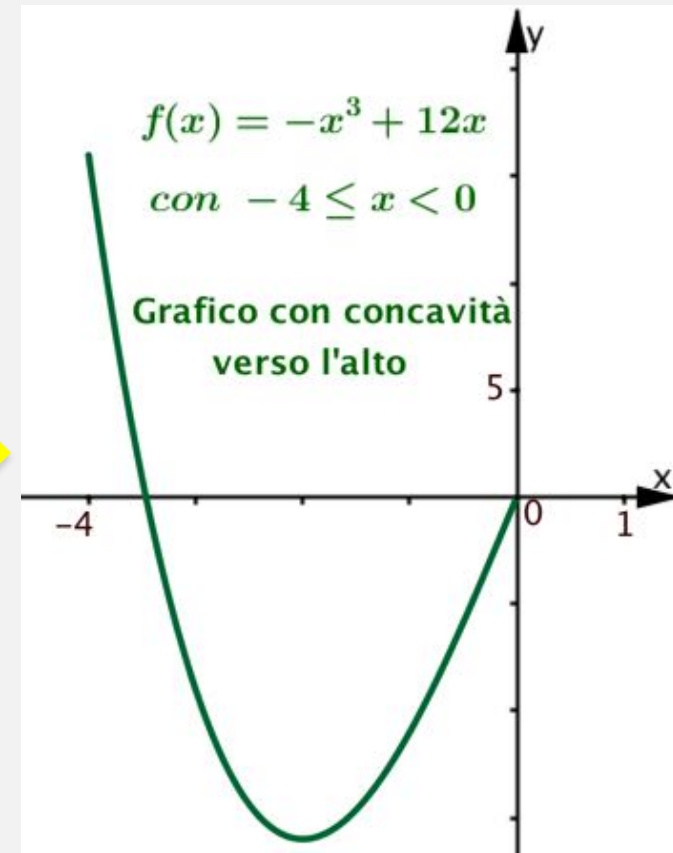
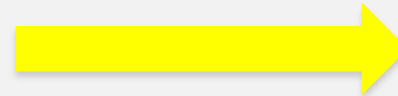
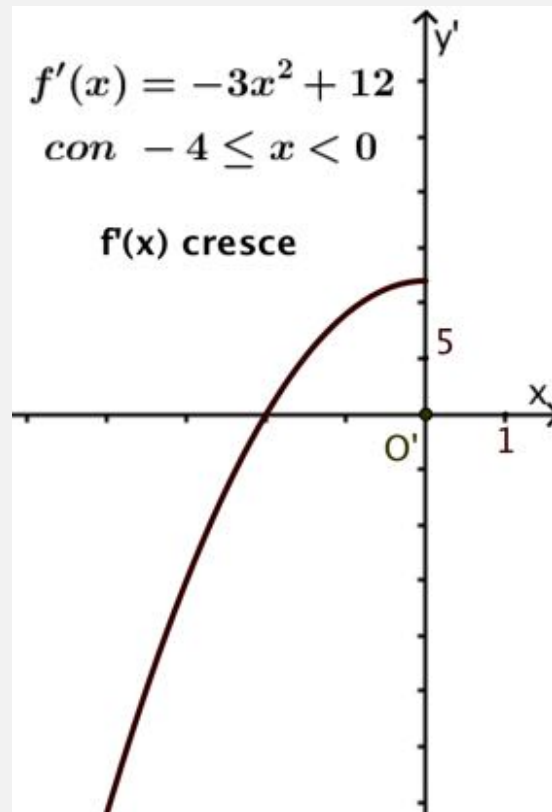
$$f(x) = -x^3 + 12x$$



$$f'(x) = -3x^2 + 12$$



# $f'(x)$ cresce



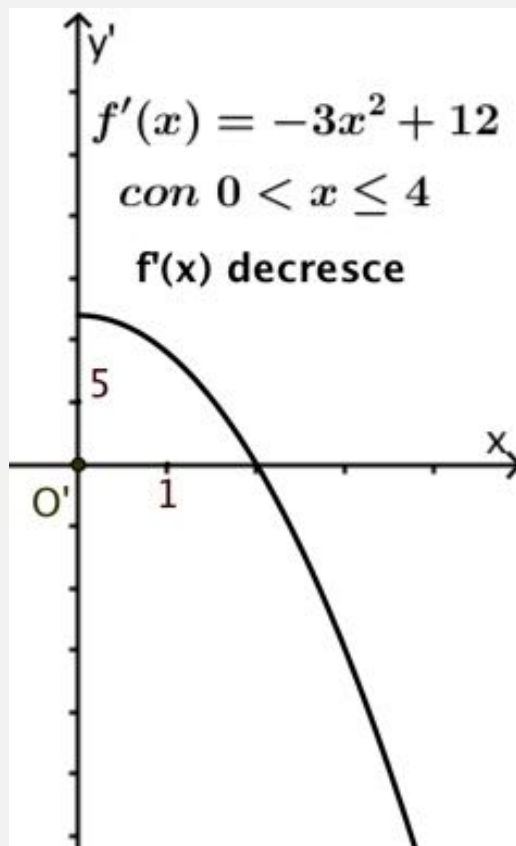
$f'(x)$  cresce



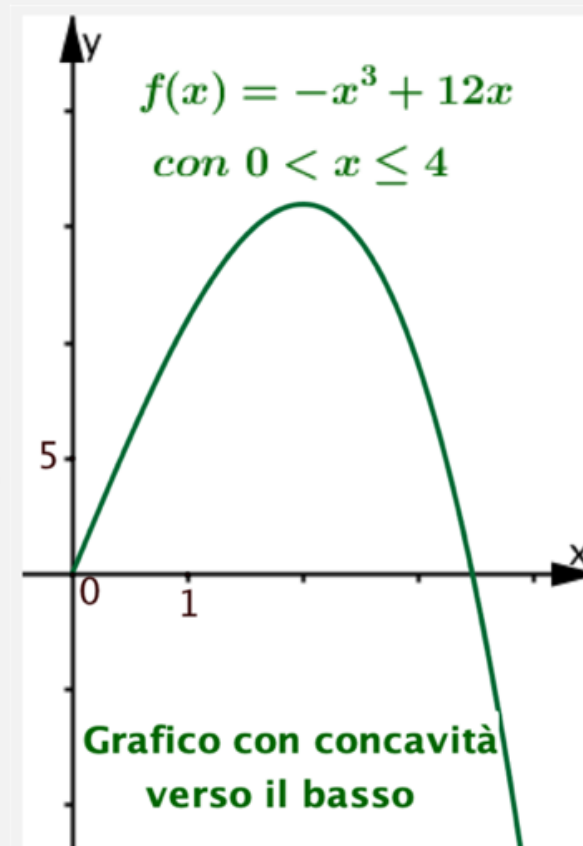
Il grafico di  $f(x)$  rivolge la concavità verso l'alto

La crescita di  $f'(x)$  è legata al segno della sua derivata

# $f'(x)$ decresce



$f'(x)$  decresce



Il grafico di  $f(x)$  rivolge la concavità verso il basso

La decrescita di  $f'(x)$  è legata al segno della sua derivata

# La derivata della derivata

Ripeto il procedimento di derivazione e calcolo la derivata della derivata di  $f(x)$ , indicata con il simbolo  $f''(x)$  che si legge 'derivata seconda di  $x$ '.

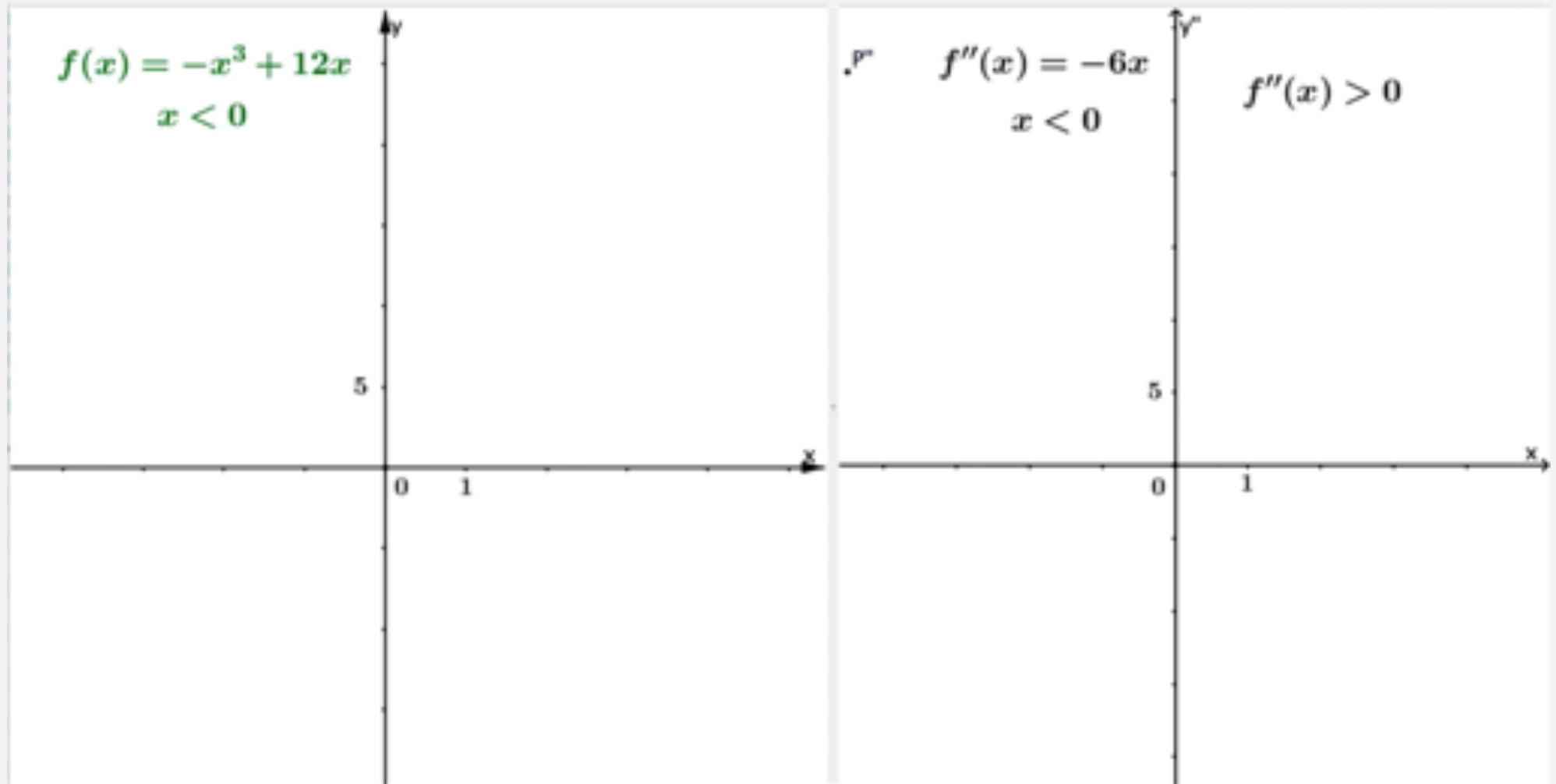
**Funzione:**  $f(x) = -x^3 + 12x$

**Derivata:**  $f'(x) = -3x^2 + 12$

**Derivata seconda:**  $f''(x) = -6x$

# Concavità del grafico di $f(x)$ e segno di $f''(x)$

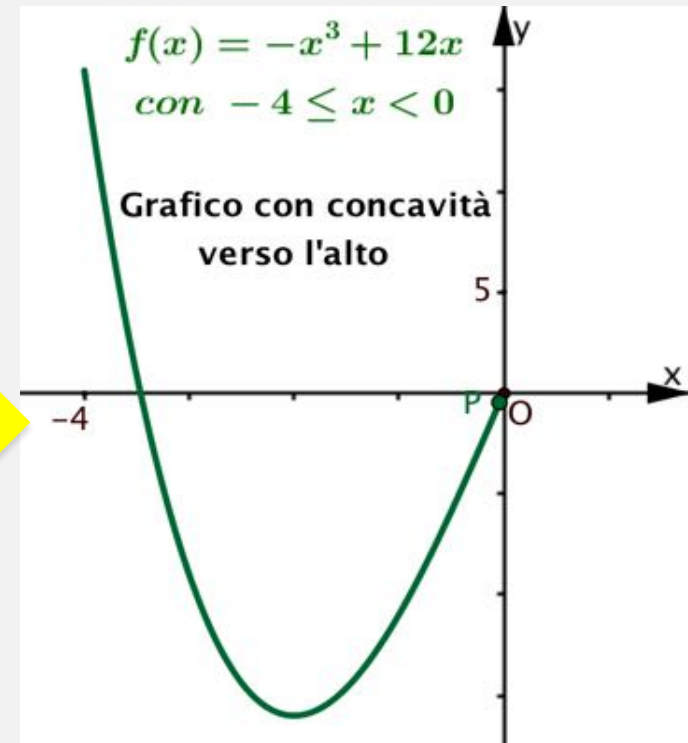
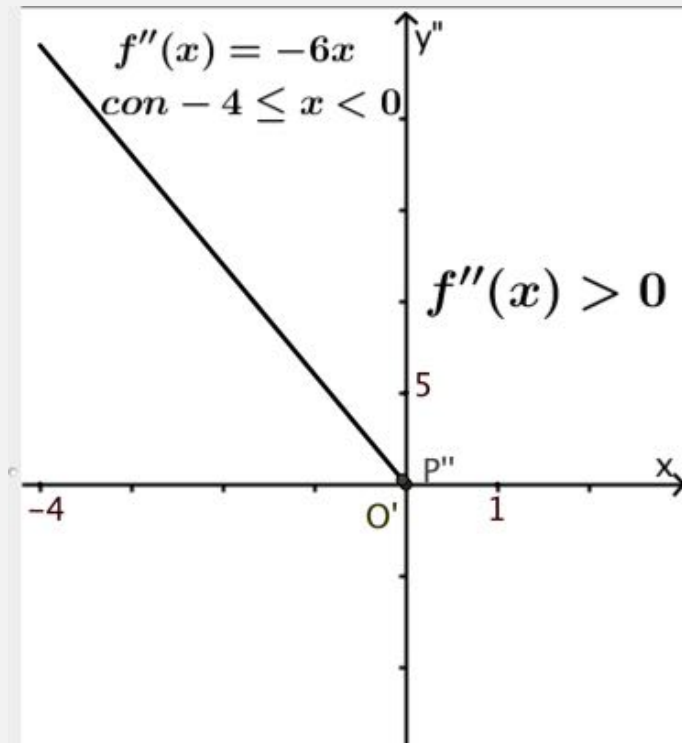
Un video per collegare la concavità del grafico di una funzione con il segno della derivata seconda.





# Concavità del grafico di $f(x)$ e segno di $f''(x)$

Conclusioni suggerite dal video: concavità verso l'alto

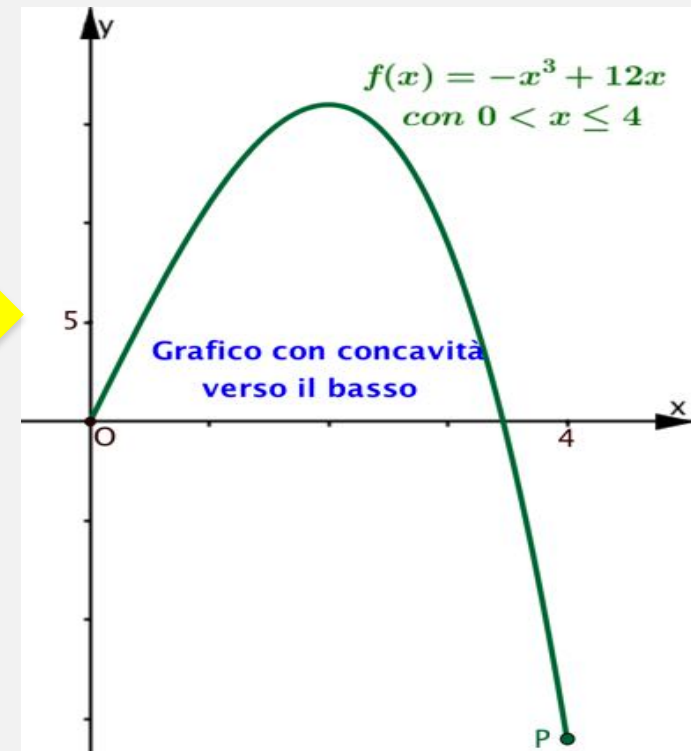
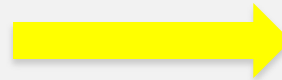
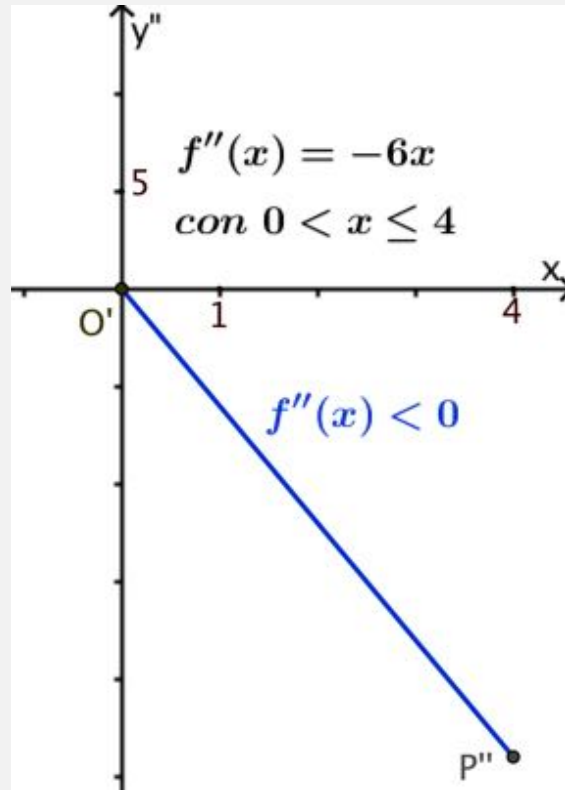


$$f''(x) > 0$$

Il grafico di  $f(x)$  rivolge la concavità verso l'alto

# Concavità del grafico di $f(x)$ e segno di $f''(x)$

Conclusioni suggerite dal video : concavità verso il basso

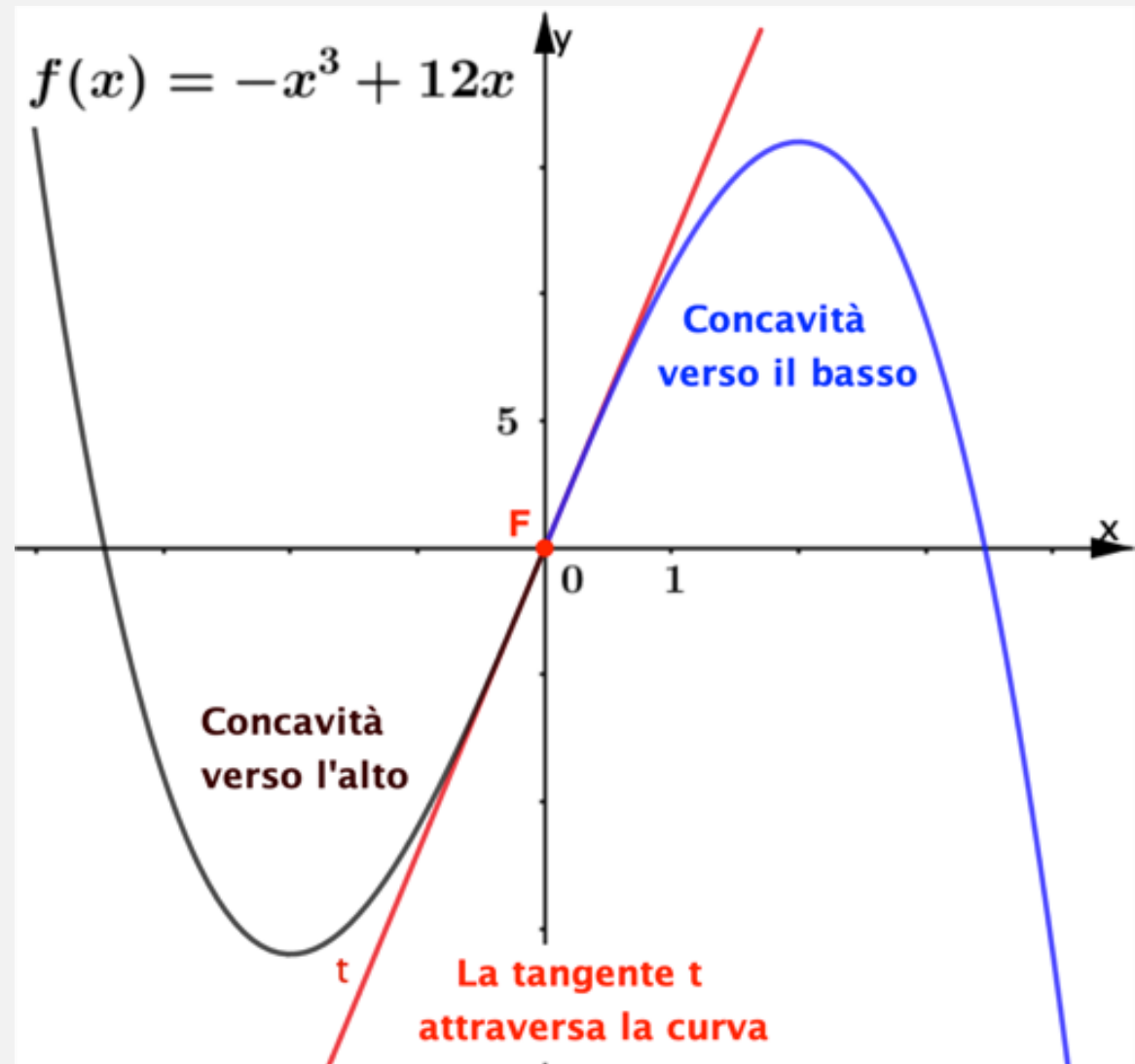
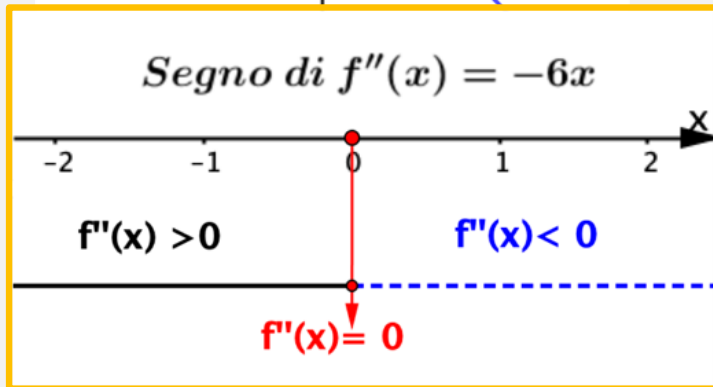
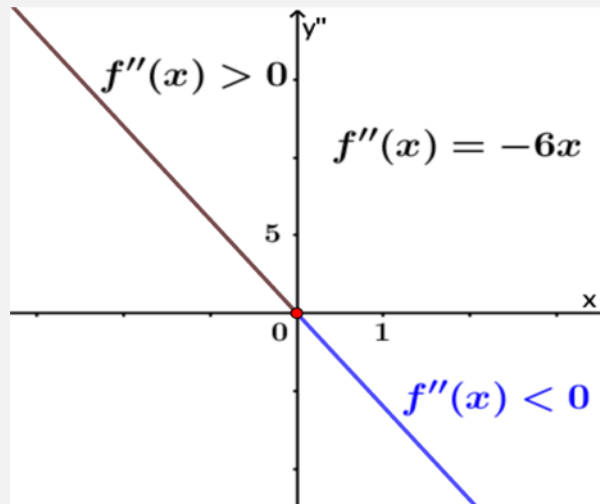


$$f''(x) < 0$$



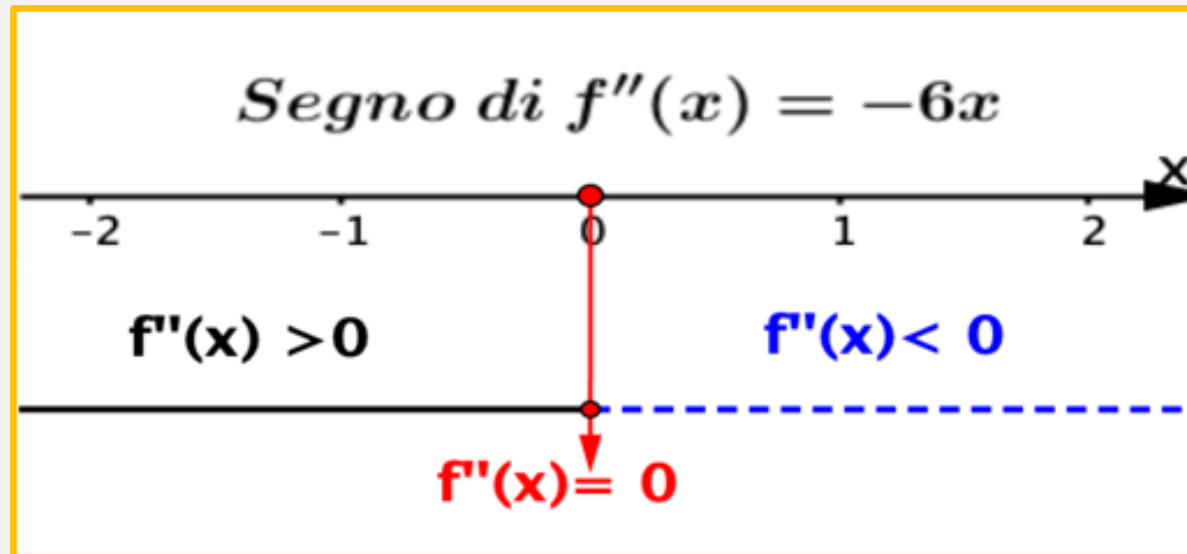
Il grafico di  $f(x)$  rivolge la concavità verso il basso

# Osservo un punto notevole



**F punto di flesso**

# Riconoscere archi con concavità verso l'alto o verso il basso nel grafico di una funzione $y = f(x)$



**Il grafico non è necessario:  
basta esaminare il segno  
di  $f''(x)$**

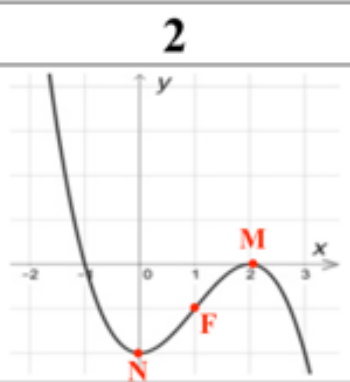
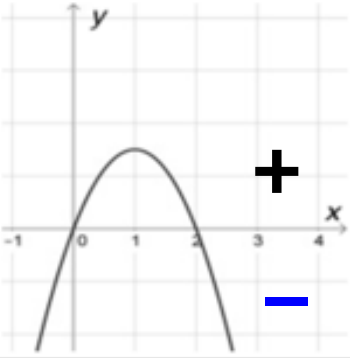
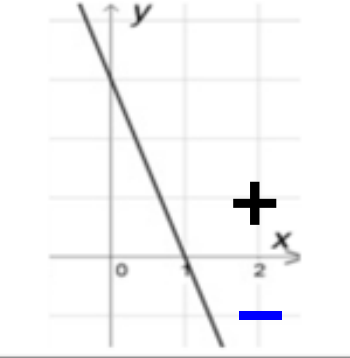
# Attività

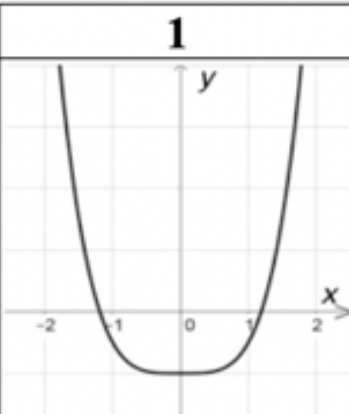
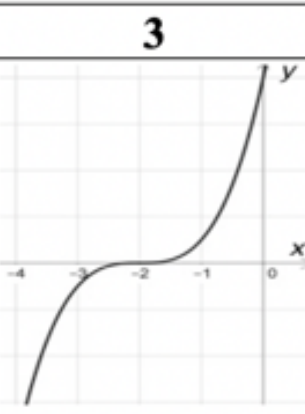
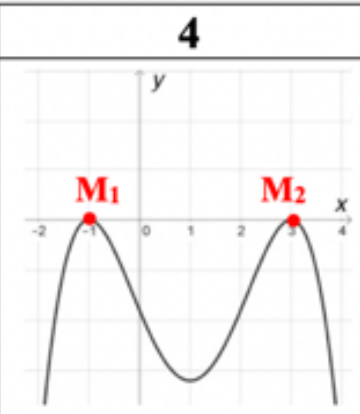
**Completa la scheda di lavoro per collegare il grafico di una funzione  $f(x)$  con il segno di  $f'(x)$  e  $f''(x)$**

# Riflessioni sul lavoro svolto

# I quesito, colonna A

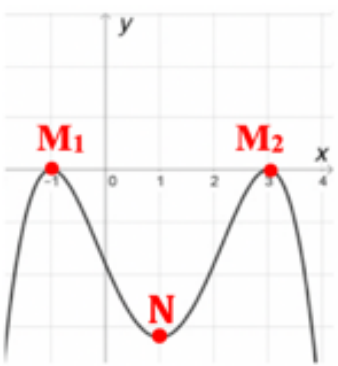
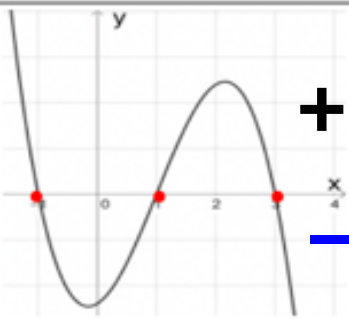
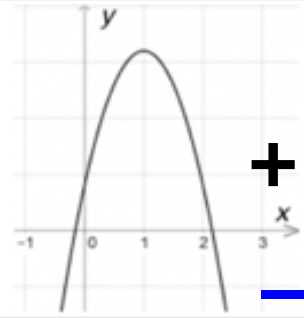
1. In ogni colonna della tabella seguente trovi la derivata prima e seconda di una stessa funzione. Associa a ciascuna coppia di derivate il grafico della funzione iniziale.

	<b>2</b>
$f(x)$	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
	<b>A</b>

	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$f(x)$			
	<b>Concavità verso l'alto per ogni <math>x</math></b>	<b>Crescente per ogni <math>x</math></b>	<b>Due punti di massimo relativo</b>

# I quesito, colonna B

1. In ogni colonna della tabella seguente trovi la derivata prima e seconda di una stessa funzione. Associa a ciascuna coppia di derivate il grafico della funzione iniziale.

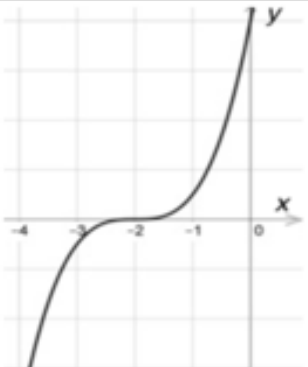
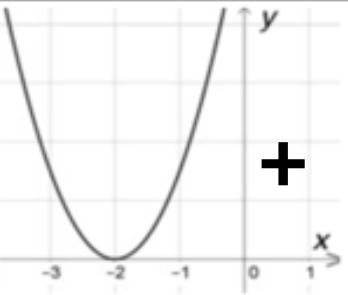
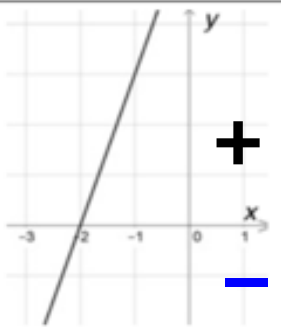
	<b>4</b>
$f(x)$	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
	<b>B</b>

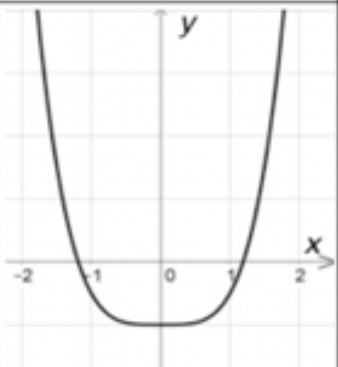

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$f(x)$			
	<b>Concavità verso l'alto per ogni x</b>	<b>1 punto di massimo e 1 punto di minimo relativi</b>	<b>Crescente per ogni x</b>



# I quesito, colonna C

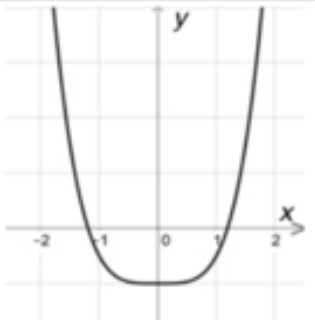
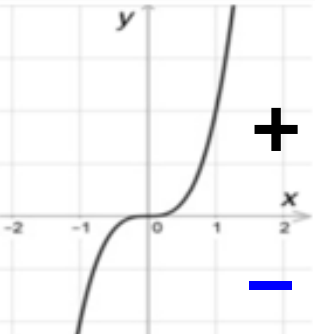
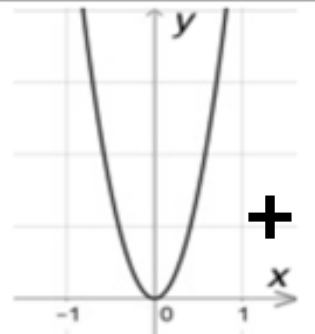
1. In ogni colonna della tabella seguente trovi la derivata prima e seconda di una stessa funzione. Associa a ciascuna coppia di derivate il grafico della funzione iniziale.


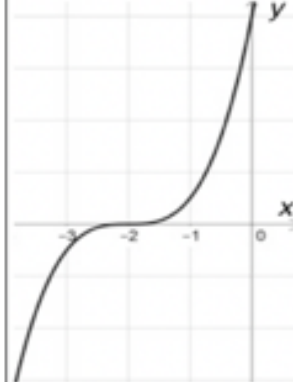
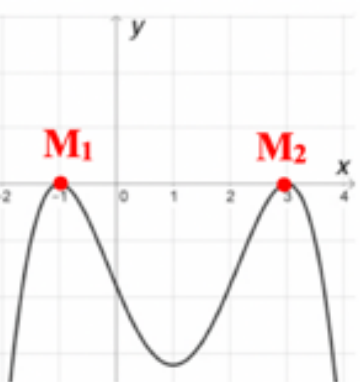
	<b>3</b>
$f(x)$	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
	<b>C</b>

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>
$f(x)$			
	<b>Concavità verso l'alto per ogni <math>x</math></b>	<b>1 punto di massimo e 1 punto di minimo relativi</b>	<b>Due punti di massimo relativo</b>

# I quesito, colonna D

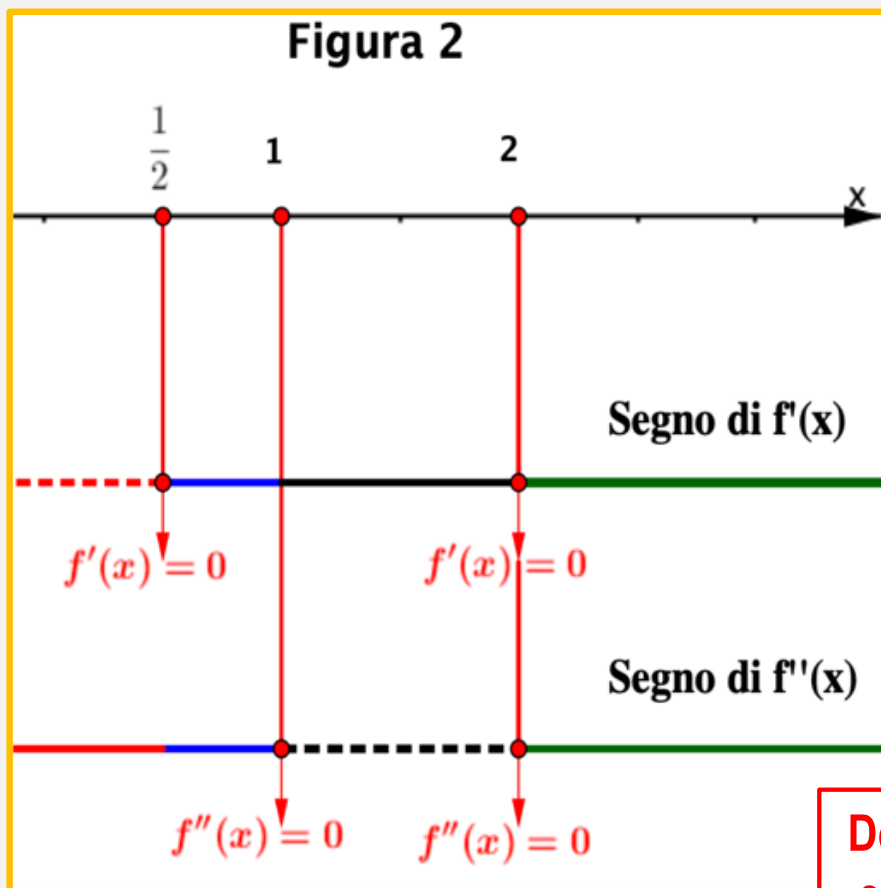
1. In ogni colonna della tabella seguente trovi la derivata prima e seconda di una stessa funzione. Associa a ciascuna coppia di derivate il grafico della funzione iniziale.

	1
$f(x)$	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
	<b>D</b>

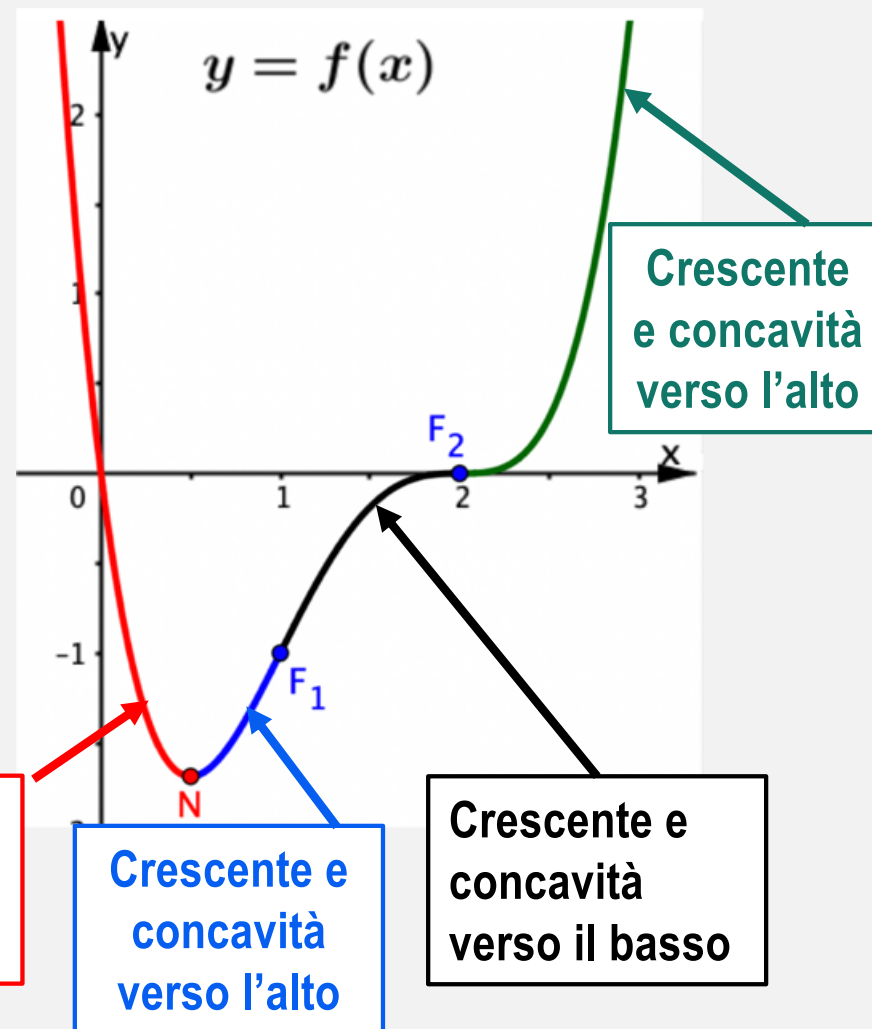
	2	3	4
$f(x)$			
	<b>1 punto di massimo e 1 punto di minimo relativi</b>	<b>Crescente per ogni x</b>	<b>Due punti di massimo relativo</b>

# Il quesito: risposta corretta

1. La figura a fianco rappresenta il grafico di una funzione  $f(x)$ .  
Quale fra le figure sotto rappresenta il segno di  $f'(x)$  e  $f''(x)$ ? **2**

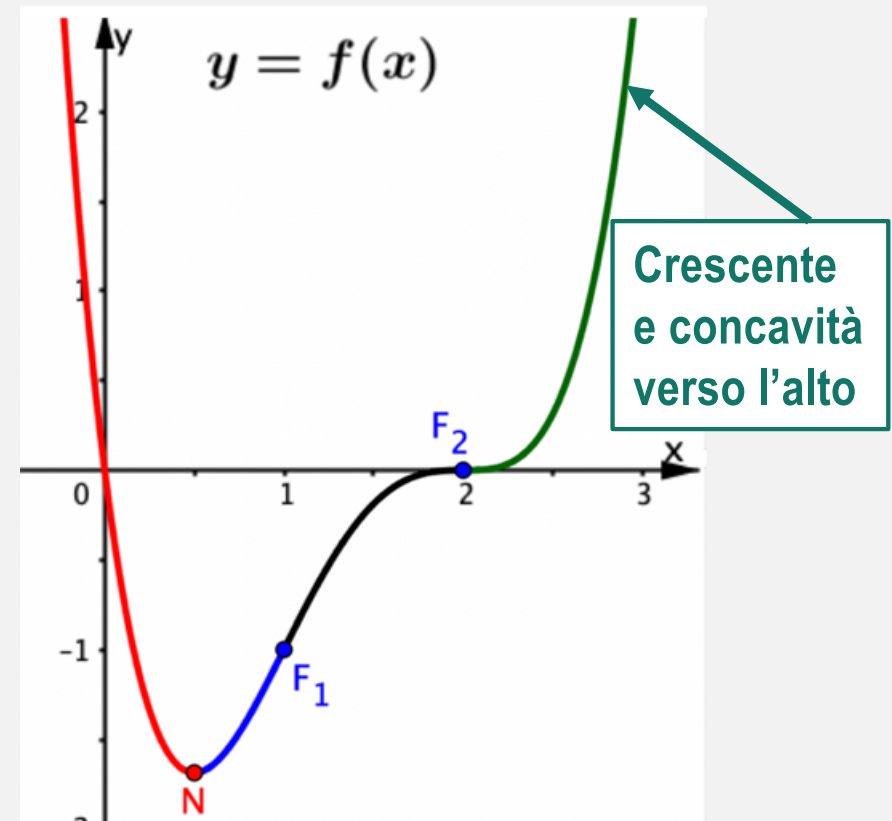
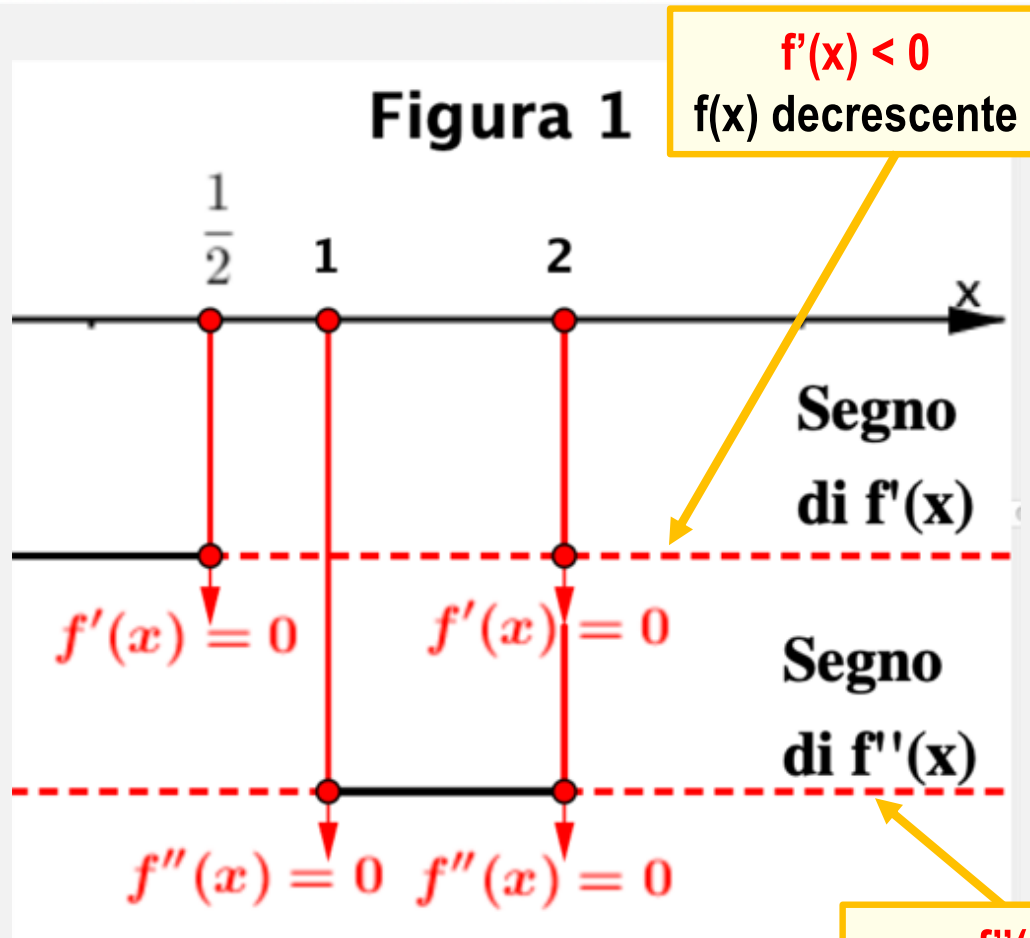


**N** punto di minimo relativo  
**F<sub>1</sub>** flesso  
**F<sub>2</sub>** flesso orizzontale



# Il quesito: risposta errata 1

1. La figura a fianco rappresenta il grafico di una funzione  $f(x)$ .  
Quale fra le figure sotto rappresenta il segno di  $f'(x)$  e  $f''(x)$ ? **2**

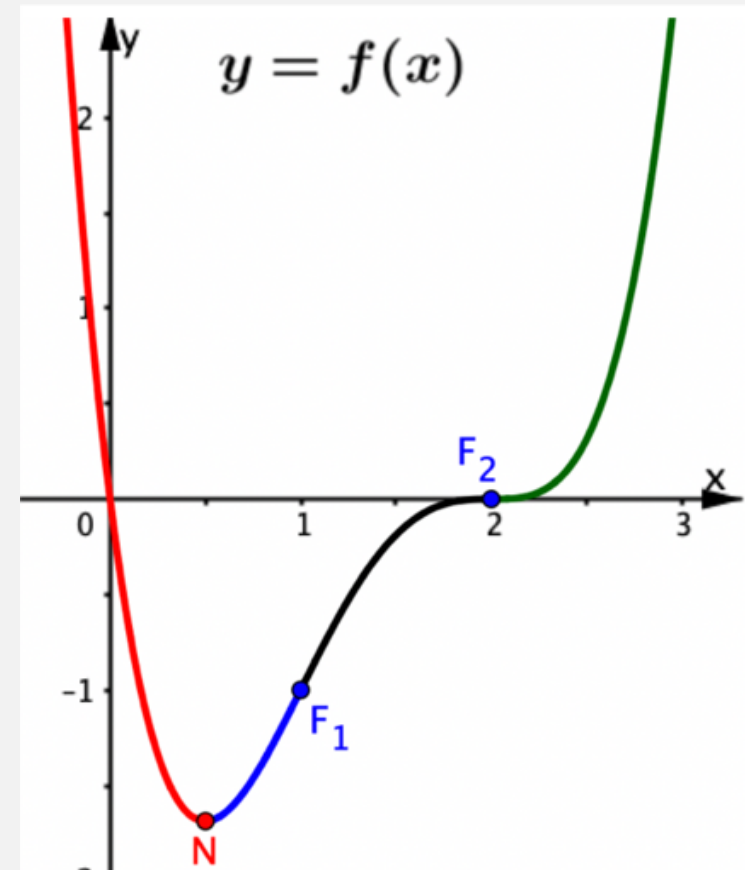
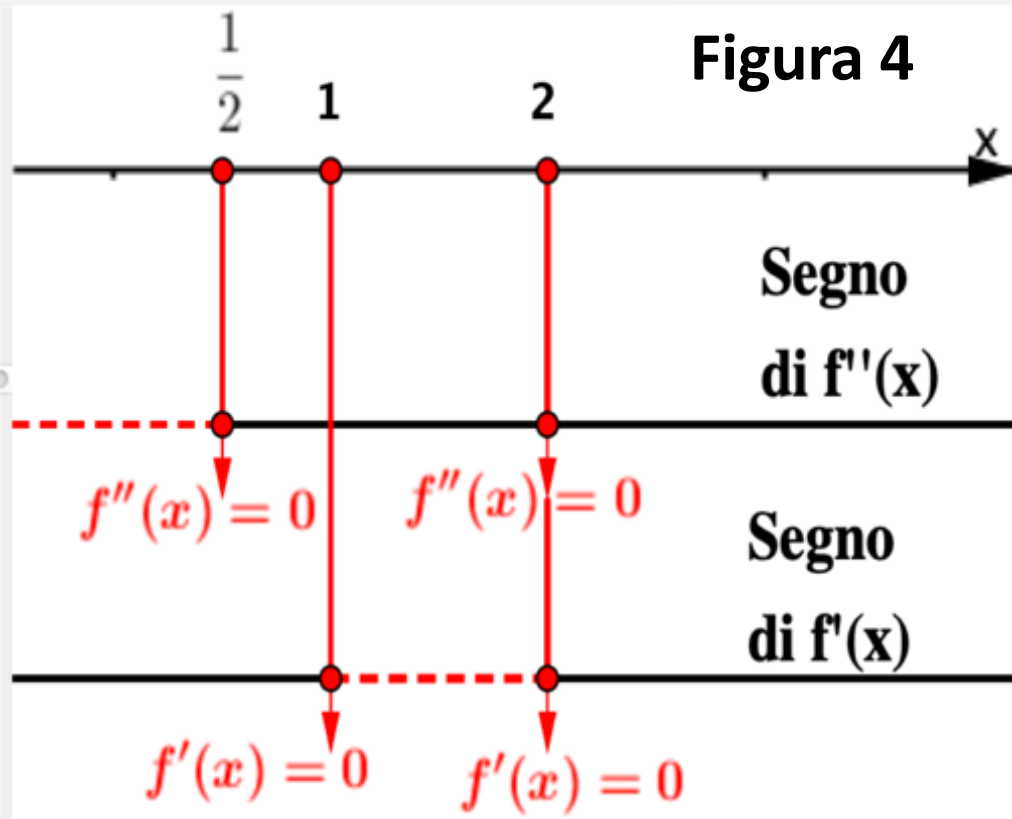


**N** punto di **massimo** relativo  
**F<sub>1</sub>** flesso  
**F<sub>2</sub>** flesso orizzontale

$f''(x) < 0$   
 $f(x)$  con concavità verso il basso

# Il quesito: risposta errata 4

1. La figura a fianco rappresenta il grafico di una funzione  $f(x)$ .  
Quale fra le figure sotto rappresenta il segno di  $f'(x)$  e  $f''(x)$ ? **2**



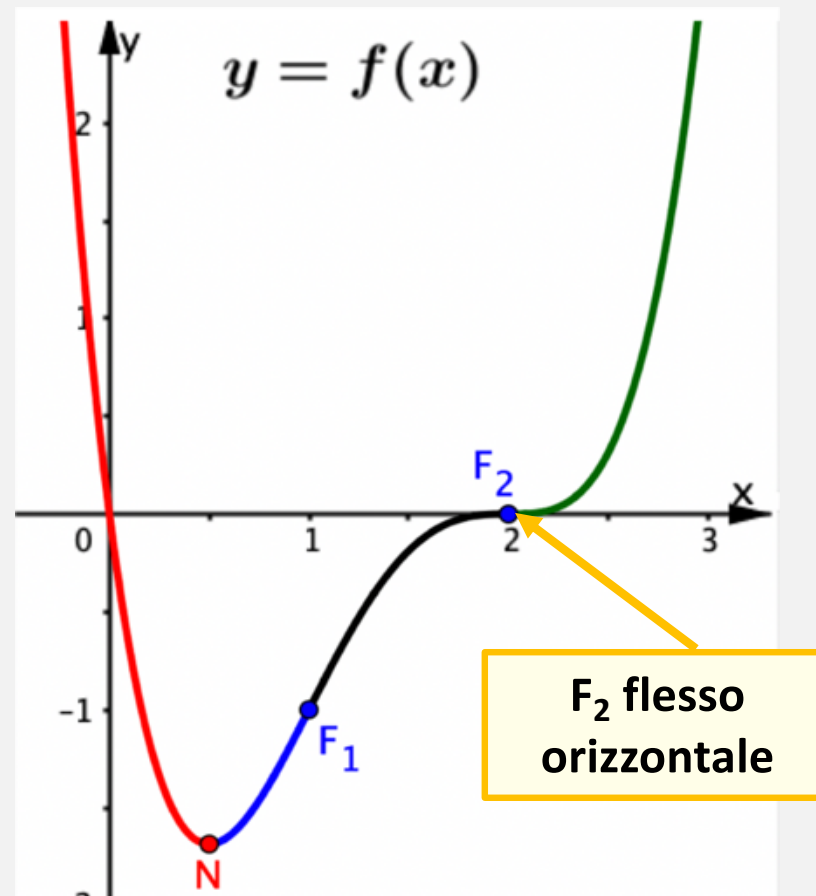
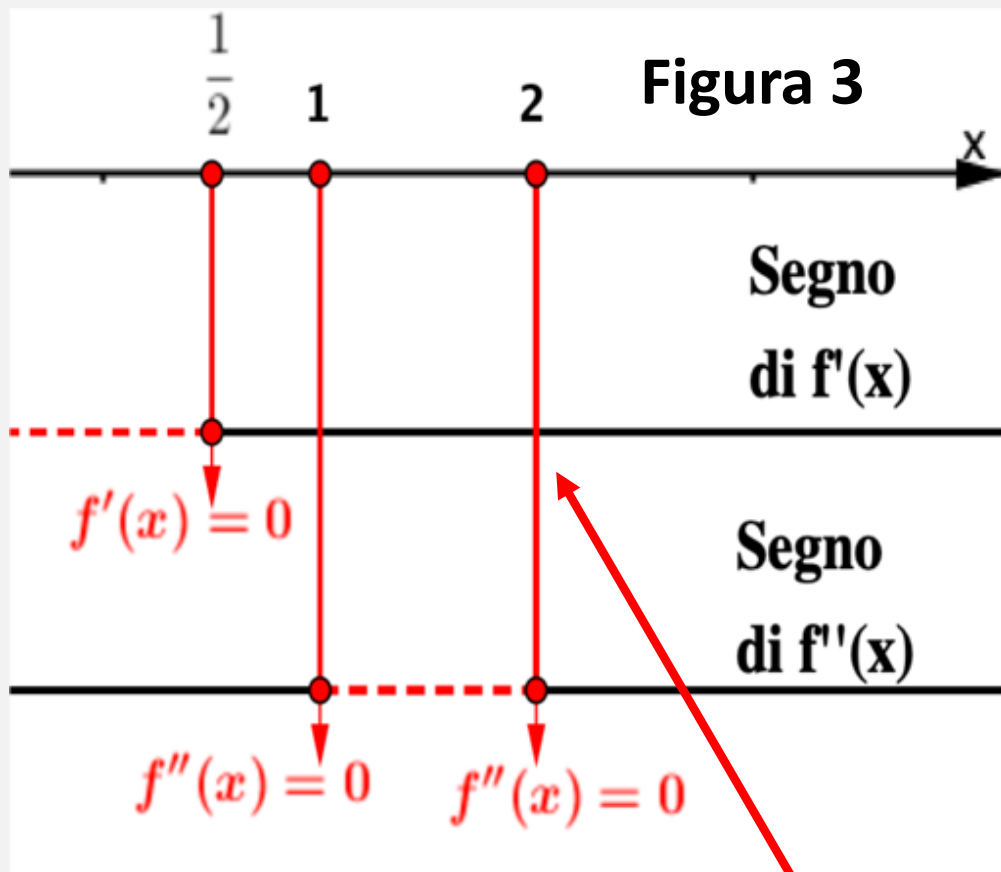
**Scambiata  $f'(x)$  con  $f''(x)$**

**N** flesso

**$F_1$**  punto di massimo relativo, con concavità verso l'alto??

# Il quesito: risposta errata 3

1. La figura a fianco rappresenta il grafico di una funzione  $f(x)$ .  
Quale fra le figure sotto rappresenta il segno di  $f'(x)$  e  $f''(x)$ ? **2**

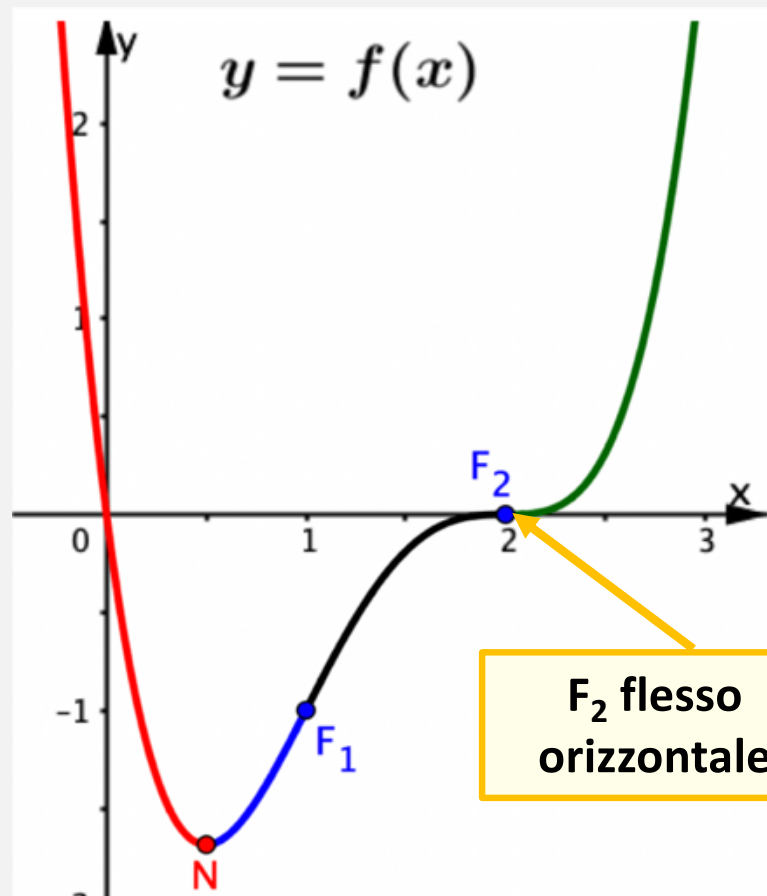


Nello schema trovo  
 $f''(2) = 0$  ma  $f'(2) > 0$

Deve essere  
 $f'(2) = 0$  e  $f''(2) = 0$

# Osservazioni sulla risposta errata 3 al II quesito

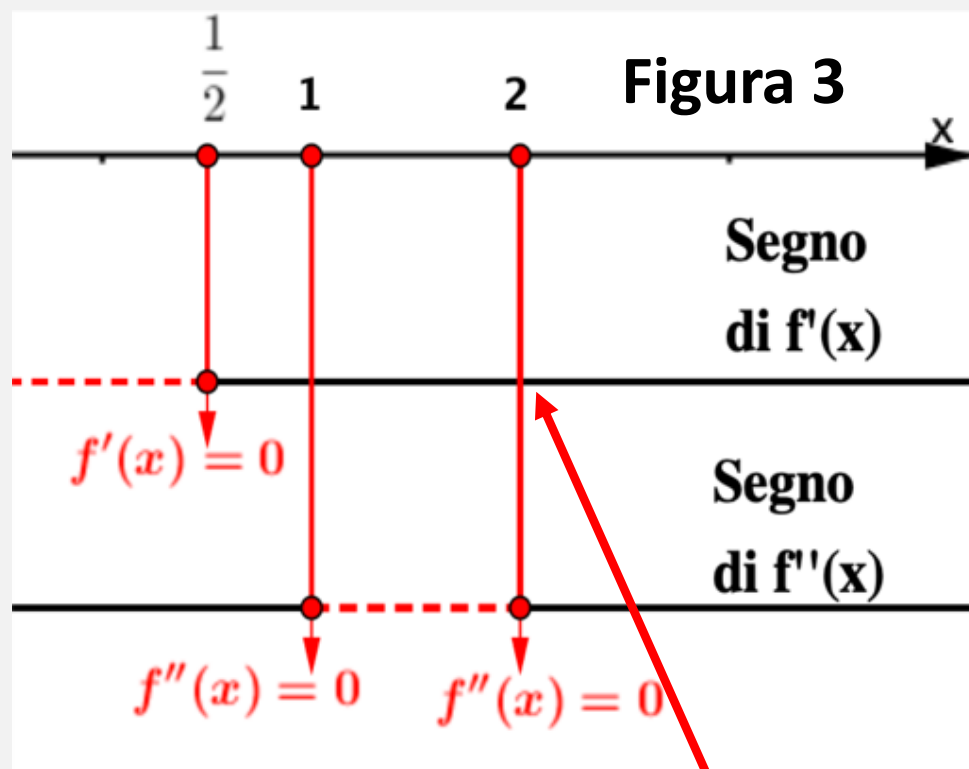
# 1. Attenzione alle caratteristiche di un flesso orizzontale



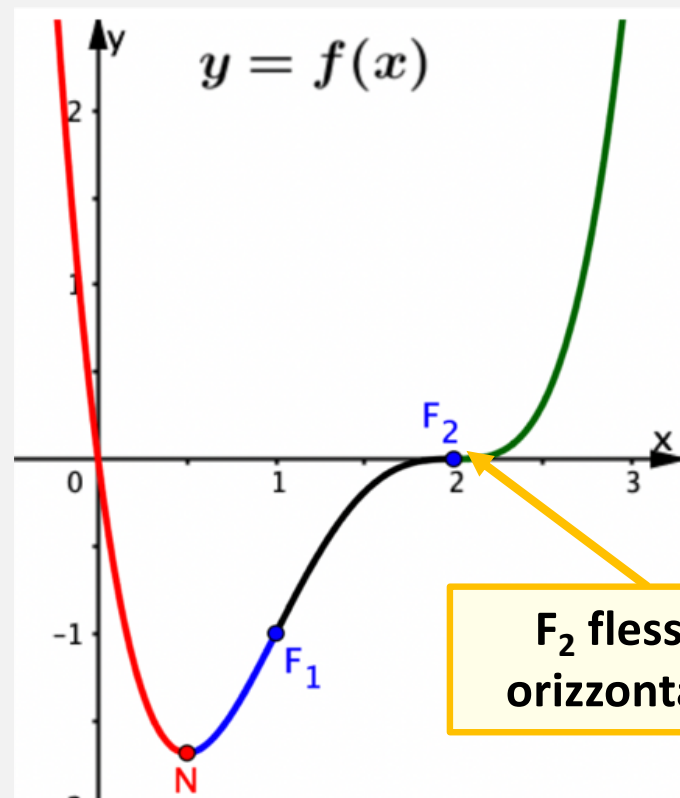
- È un flesso perciò trovo  $f''(2) = 0$
- La tangente ha pendenza 0, perciò trovo **anche**  $f'(2) = 0$



## 2. Attenzione nel collegare il grafico di $f(x)$ con il segno delle sue derivate



Nello schema trovo  
 $f''(2) = 0$  ma  $f'(2) > 0$



Deve essere  
 $f'(2) = 0$  e  $f''(2) = 0$