Dimostrazioni dei teoremi sulle funzioni derivabili

Questo approfondimento integra la lezione in cui sono esposti solo da un punto di vista grafico – intuitivo tre teoremi sulle funzioni derivabili. Qui si trovano:

- la dimostrazione dei tre teoremi esposti nella lezione;
- la dimostrazione di altri due teoremi che, per brevità, sono stati omessi nella lezione.

1. Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili

Per dimostrare il teorema fissiamo prima di tutto l'attenzione sull'ipotesi e sulla tesi.

– **ipotesi**: $y=f(x)$ è derivabile in $P[a, f(a)]$, cioè risulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a);$$

– **tesi**: $y=f(x)$ continua in P, ossia si ha:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Si deve dunque dimostrare che l'ipotesi implica la tesi, ossia che l'ipotesi "contiene in sé" la tesi.
Infatti, dato che $f'(a)$ è un numero finito, a partire dall'ipotesi si può scrivere:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h=0,$$

da cui

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]=0, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

Per concludere la dimostrazione, basta ora introdurre la variabile

$$x=a+h, \qquad \text{tale che} \qquad x\to a, \qquad \text{quando} \qquad h\to 0.$$

In questo modo si ottiene, appunto, la condizione di continuità:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

2. Teorema sui punti di massimo o minimo relativo (o di Fermat)

Vediamo prima di tutto che cosa si intende con il termine "punto di massimo o minimo relativo", esaminando il grafico di fig. 1.

Fissiamo l'attenzione sul punto A della curva; si tratta di un punto che presenta una caratteristica particolare: è "il più alto dei punti vicini" e perciò prende il nome di **punto di massimo relativo**.

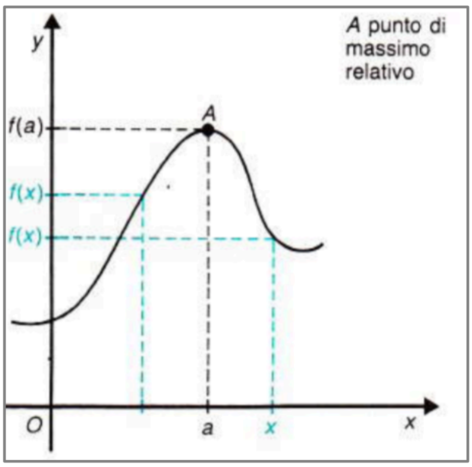
In termini precisi, si dice che:

$A(a, f(a))$ è un punto di massimo relativo, se risulta

$$f(a)\geq f(x),$$

quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.

Fig.1



Analogamente si osserva che il punto B di figura 2 è "il più basso dei punti vicini" e si dice che:

$B(b, f(b))$ è un punto di minimo relativo, se risulta

$$f(b) \leq f(x),$$

quando x varia in un opportuno intorno $I(b)$.

Relativamente a questi punti particolari vale il seguente teorema:

Se una funzione $y=f(x)$, derivabile in un punto A d'ascissa a, presenta in A un punto di massimo (o di minimo) relativo, allora risulta $f'(a)=0$.

Questo teorema ha un'intuitiva interpretazione geometrica, illustrata in figura 3: in un punto di massimo o di minimo relativo la tangente *t* al grafico di una funzione derivabile è parallela all'asse delle *x*, perciò ha la pendenza, data da $f'(a)$, che vale 0.

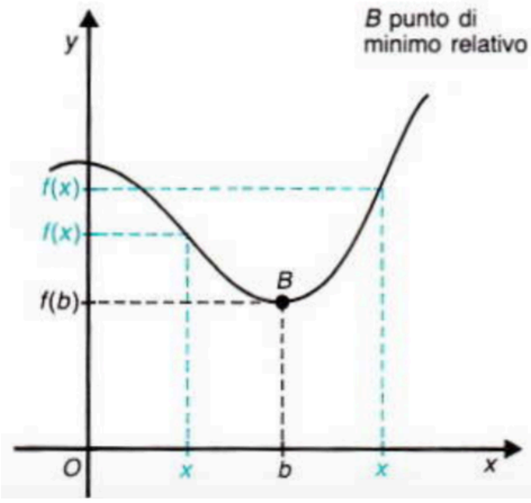


Fig. 2

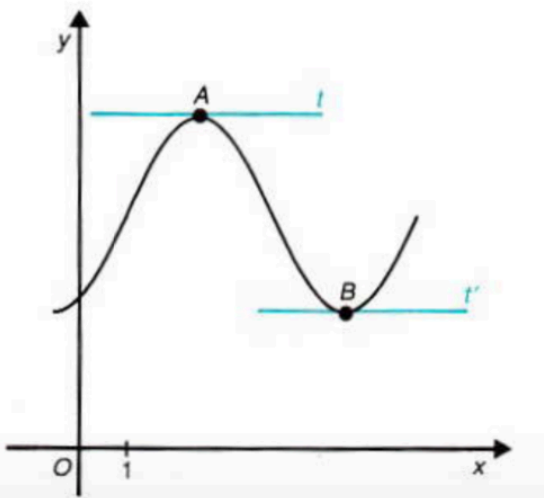


Fig. 3

Dimostriamo ora il teorema per un punto di massimo relativo; si ha dunque:

ipotesi: $y=f(x)$ derivabile in $A(a, f(a))$,
$f(a) \geq f(x)$ per x variabile in $I(a)$,

tesi: $f'(a)=0$.

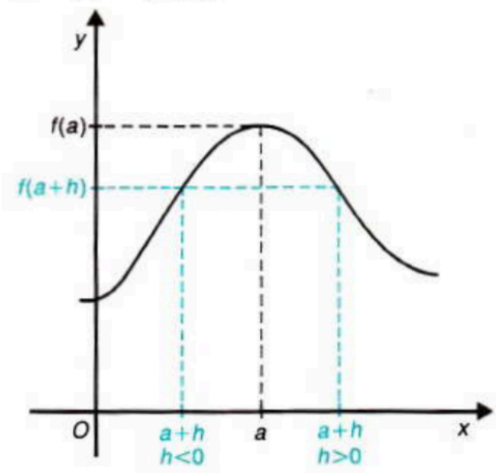
Per dimostrare che la tesi segue necessariamente dall'ipotesi, calcoliamo la derivata $f'(a)$; dato che la funzione è derivabile in A per ipotesi, si ha certamente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell, \qquad \text{con } \ell \text{ numero finito.}$$

Esaminiamo ora come varia il rapporto incrementale, quando si assegnano ad h valori positivi e negativi vicini a 0. È chiaro che si ha comunque (fig.4).

$$f(a) > f(a+h) \qquad \text{e quindi} \qquad f(a+h)-f(a) < 0.$$

Fig.4



Tenendo ora presente il teorema della permanenza del segno[1], si può dire che

– se è dato $h>0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell, \quad \text{con } \ell\le 0;$$

– se è dato $h<0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell, \quad \text{con } \ell\ge 0.$$

Allora deve necessariamente risultare

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0, \quad \text{ossia} \quad f'(a)=0.$$

La dimostrazione si ripete, con qualche ovvia modifica, per un punto di minimo relativo.

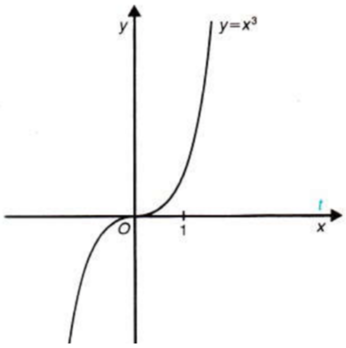
Abbiamo così dimostrato che **se un punto A d'ascissa a è un punto di massimo o di minimo relativo, allora risulta $f'(a)=0$.**

È importante notare subito che **non vale il teorema inverso**; cioè non basta verificare che in un punto P d'ascissa a risulti $f'(a)=0$, per essere certi che il punto P sia di massimo o minimo relativo.

Ecco un esempio: per la funzione $y=x^3$, risulta $y'=3x^2$; perciò nel punto $O(0, 0)$ risulta $y'(0)=0$.

Eppure l'origine O non è certo un punto di massimo o minimo relativo per la curva (fig.5) anche se la retta tangente in O ha la pendenza che vale 0, dato che coincide con l'asse delle x.

Fig.5



3. Teorema di Rolle

Se per una funzione $y=f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$, si ha

$$f(a)=f(b),$$

allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c tale che risulti

$$f'(c)=0.$$

Per dimostrare questo teorema ricordiamo che, nelle condizioni indicate, la funzione è continua in un intervallo chiuso, perciò vale il teorema di Weierstrass[2]: la funzione ha un valore massimo ***M*** e un valore minimo ***m***.

Inoltre, la condizione $f(a)=f(b)$ esclude che il massimo ed il minimo cadano entrambi agli estremi dell'intervallo (altrimenti risulterebbe $m=M$ e la funzione avrebbe valore costante).

Deve dunque esistere almeno un punto di massimo o minimo che cade all'interno dell'intervallo (a, b); in questo punto, che è di massimo (o minimo) relativo, la derivata deve valere 0 per il teorema precedente.

La dimostrazione è così completata.

[1] Vedi pag.5

[2] Vedi pag.5

4. Teorema di Lagrange

Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c, tale che risulti

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Per dimostrare questo teorema, ricordiamo l'interpretazione geometrica e consideriamo il rapporto (fig.6):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m, \qquad (1)$$

dove m indica la pendenza della retta r che congiunge i due punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$. Si riscrive quindi la relazione (1) nella forma seguente:

$$f(b)-f(a)=m(b-a), \qquad \text{ossia} \qquad f(b)-mb=f(a)-ma.$$

L'ultima uguaglianza conduce ad individuare una "funzione ausiliaria" che soddisfa le condizioni indicate dal teorema di Rolle. Si tratta della seguente funzione:

$$F(x)=f(x)-mx,$$

che, in particolare, assume lo stesso valore sia per $x=a$ che per $x=b$.
Si applica allora il teorema di Rolle, affermando che esiste almeno un punto C d'ascissa c per cui risulta

$$F'(c)=0, \qquad \text{ossia} \qquad f'(c)-m=0$$

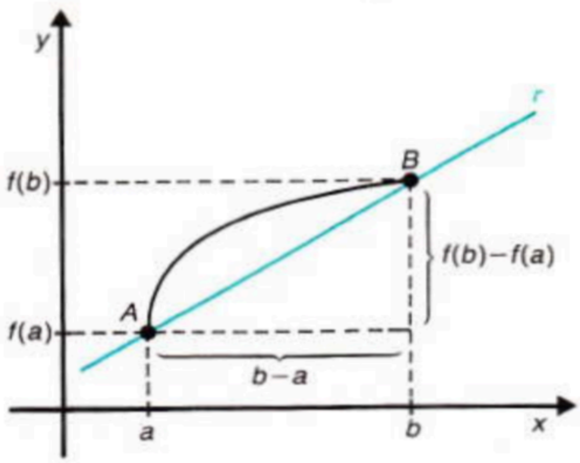
e quindi

$$m=f'(c).$$

Riprendendo la relazione (1), si conclude che esiste almeno un valore c per cui risulta:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

La dimostrazione è così completata.



5. Teorema di Cauchy

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite nello stesso intervallo $[a, b]$, presentano le seguenti caratteristiche:

– sono derivabili nell'intervallo $[a, b]$,
– risulta $g'(x) \neq 0$ per ogni valore di x interno all'intervallo $[a, b]$;

allora si verifica che:

I) $g(a) \neq g(b)$,
II) si può trovare almeno un punto c, all'interno dell'intervallo $[a, b]$ per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

È immediato dimostrare la prima affermazione presentata in questo teorema, basandosi sul teorema di Rolle e ragionando per assurdo: se risultasse $g(a)=g(b)$, si dovrebbe trovare, all'interno dell'intervallo, almeno un punto c in cui risulta $g'(x)=0$, contrariamente all'ipotesi.

La seconda parte del teorema è invece una generalizzazione del teorema di Lagrange e si dimostra in modo analogo.

Ci si basa sempre su una "funzione ausiliaria", che si scopre indicando con k il valore noto del seguente rapporto:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k \tag{2}$$

Così si scrive:

$$f(b)-f(a)=k[g(b)-g(a)], \qquad \text{ossia} \qquad f(b)-kg(b)=f(a)-kg(a).$$

Ora, la "funzione ausiliaria" che soddisfa le condizioni indicate dal teorema di Rolle è la seguente:

$$F(x)=f(x)-kg(x).$$

Applicando dunque il teorema di Rolle, si può trovare un valore c per cui risulta

$$F'(c)=0, \qquad \text{ossia} \qquad f'(c)-kg'(c)=0;$$

si ottiene così

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Riprendendo la relazione (2), si conclude che esiste almeno un valore c per cui risulta:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ed è così completata la dimostrazione.

Teorema di Weierstrass
Ogni funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] ha massimo e minimo.

Teorema della permanenza del segno
Se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x \to a} f(x)=\ell, \qquad \text{con} \qquad \ell \neq 0,$$

la funzione mantiene lo stesso segno di ℓ, quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.