Funzioni continue in un intervallo e loro proprietà

Daniela Valenti, 2022

Funzione continua in un intervallo

Un’animazione

Daniela Valenti, 2022

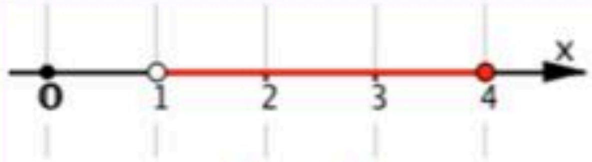
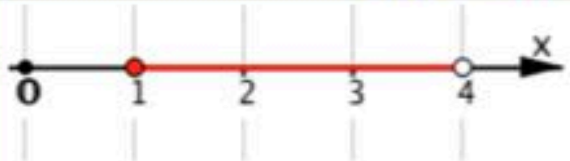
Vocabolario matematico

INTERVALLI

ESEMPI	IN GENERALE
Intervallo chiuso	
 $[1, 4]$ Formato dai numeri reali x $1 \leq x \leq 4$	 $[a, b]$ Formato dai numeri reali x $a \leq x \leq b$
Intervallo aperto	
 $(1, 4)$ Formato dai numeri reali x $1 < x < 4$ 1 e 4 sono esclusi	 (a, b) Formato dai numeri reali x $a < x < b$ a e b sono esclusi

Vocabolario matematico

INTERVALLI

ESEMPI	IN GENERALE
Intervallo aperto a sinistra	
 $(1, 4]$ Formato dai numeri reali x $1 < x \leq 4$ Solo 1 è escluso	 $(a, b]$ Formato dai numeri reali x $a < x \leq b$ Solo a è escluso
Intervallo aperto a destra	
 $[1, 4)$ Formato dai numeri reali x $1 \leq x < 4$ Solo 4 è escluso	 $[a, b)$ Formato dai numeri reali x $a \leq x < b$ Solo b è escluso

Tre proprietà delle funzioni continue in un intervallo

1. Massimo e minimo di una funzione

Un’immagine per riflettere

Penso a un paesaggio di prati e colline.
Ecco un’immagine che evoca il paesaggio.

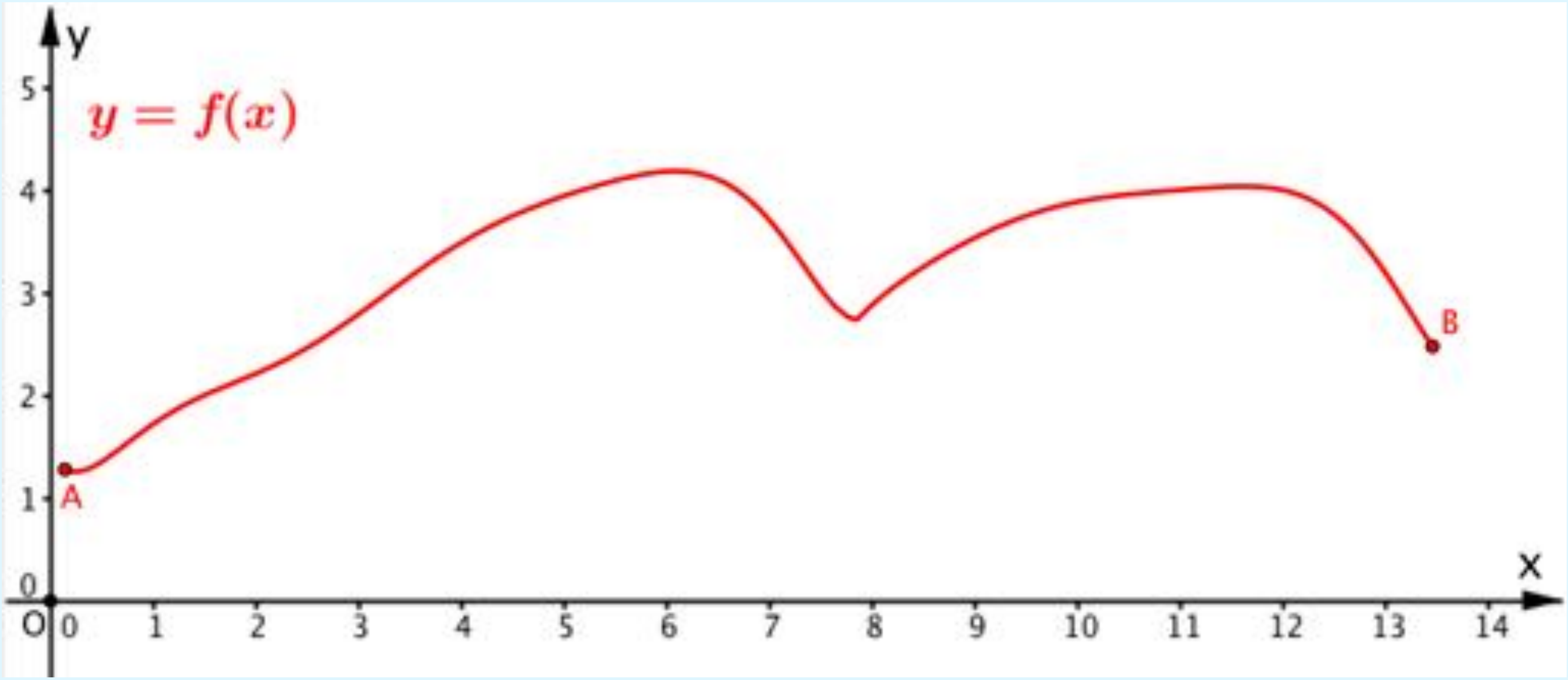
L’immagine in un riferimento cartesiano

Immergo la foto in un riferimento cartesiano e traccio il profilo delle colline.

Daniela Valenti, 2022

Grafico di una funzione continua

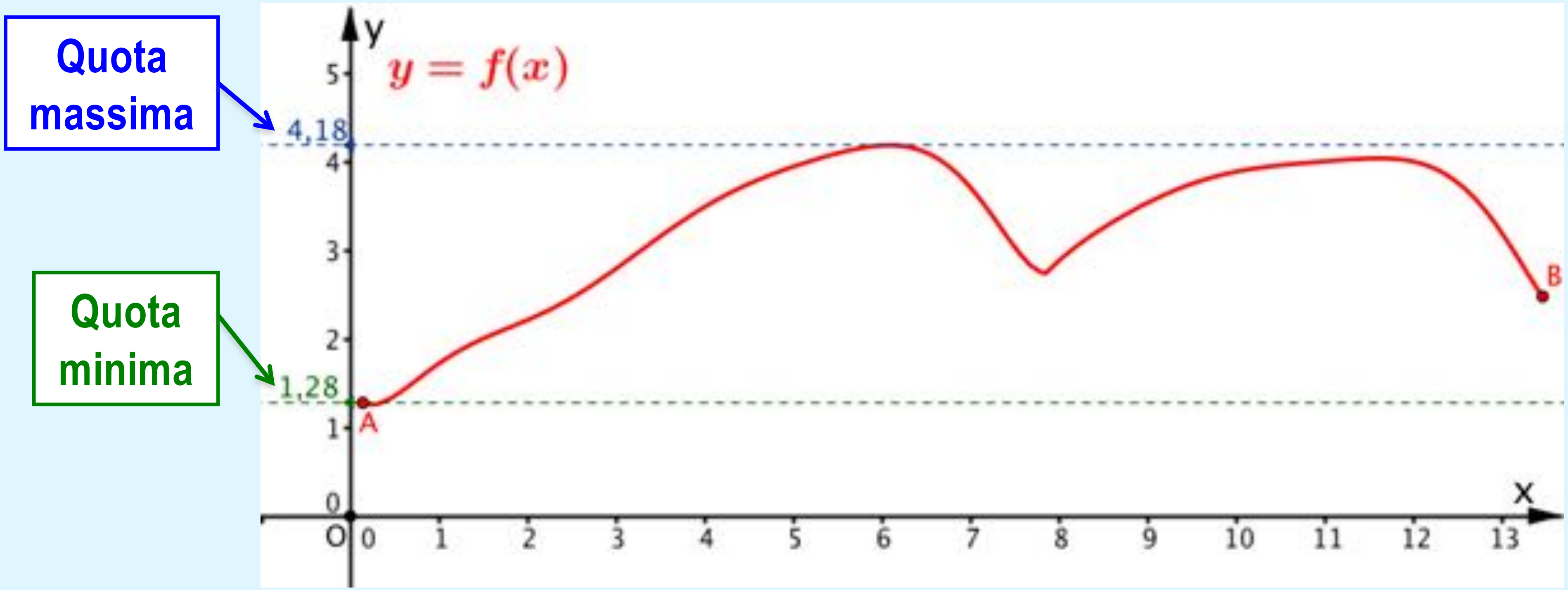
Ora osservo solo il profilo delle colline: è un arco AB di curva, grafico di una funzione continua in un intervallo.



Daniela Valenti, 2022

Quota massima e minima

Non so descrivere facilmente la funzione con una formula, ma trovo subito un'intuitiva caratteristica:
- la quota massima;
- la quota minima.

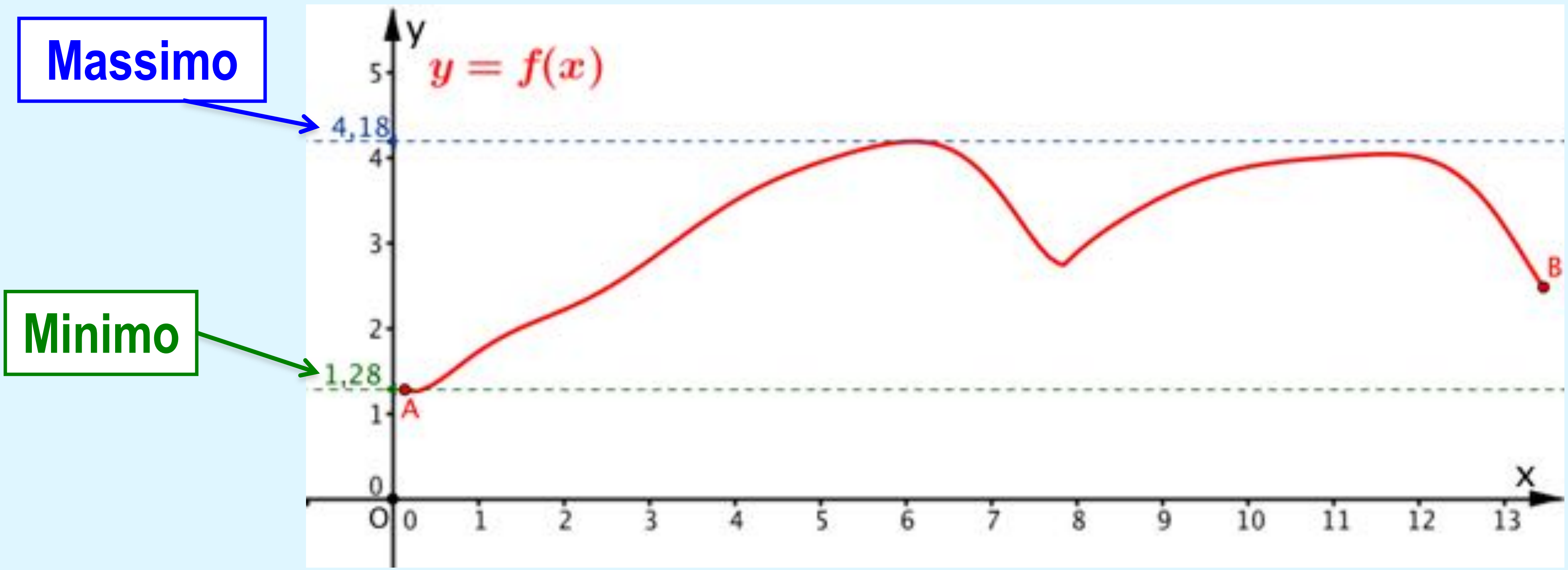


Daniela Valenti, 2022

Massimo e minimo di una funzione y = f(x)

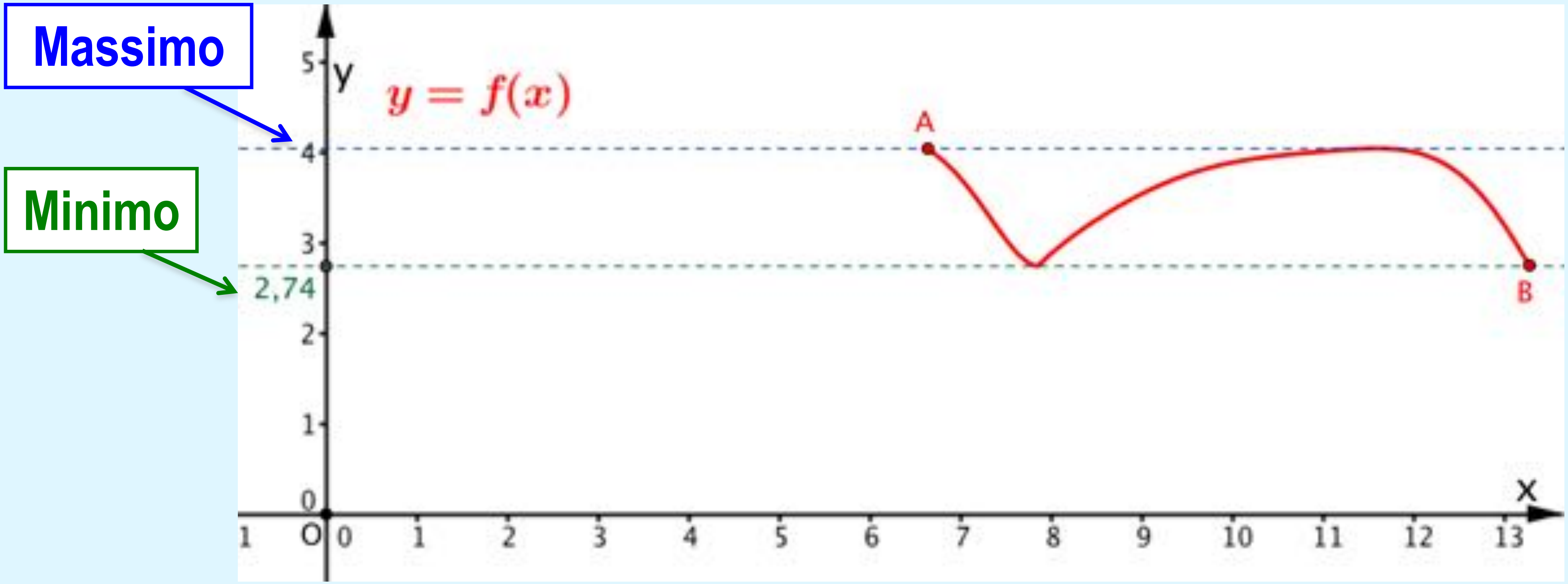
Analogamente in matematica, per una funzione y = *f*(*x*) trovo:

- *il massimo* è il più grande valore che assume *y*, quando *x* varia nel dominio dato e il massimo è 4,18 nell'esempio;
- *il minimo* è il più piccolo valore che assume *y*, quando *x* varia nel dominio dato e il minimo è 1,28 nell'esempio.



Massimo e minimo dipendono dall'intervallo

Fissata una funzione y = f(x), il massimo e il minimo sono legati anche al dominio della funzione. Qui sotto y = f(x) è continua in un diverso intervallo: trovo ancora il massimo e il minimo, ma sono cambiati rispetto alla funzione iniziale.



Uno sguardo alla storia

Nel corso del 1800 vari matematici si sono dedicati a studiare massimi e minimi di una funzione.
In particolare, Weierstrass ha dimostrato algebricamente le osservazioni intuitive appena viste e ha dato il suo nome al seguente teorema.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] ha massimo e minimo.

K. Weierstrass
1815 -1897

2. I valori intermedi

I valori intermedi

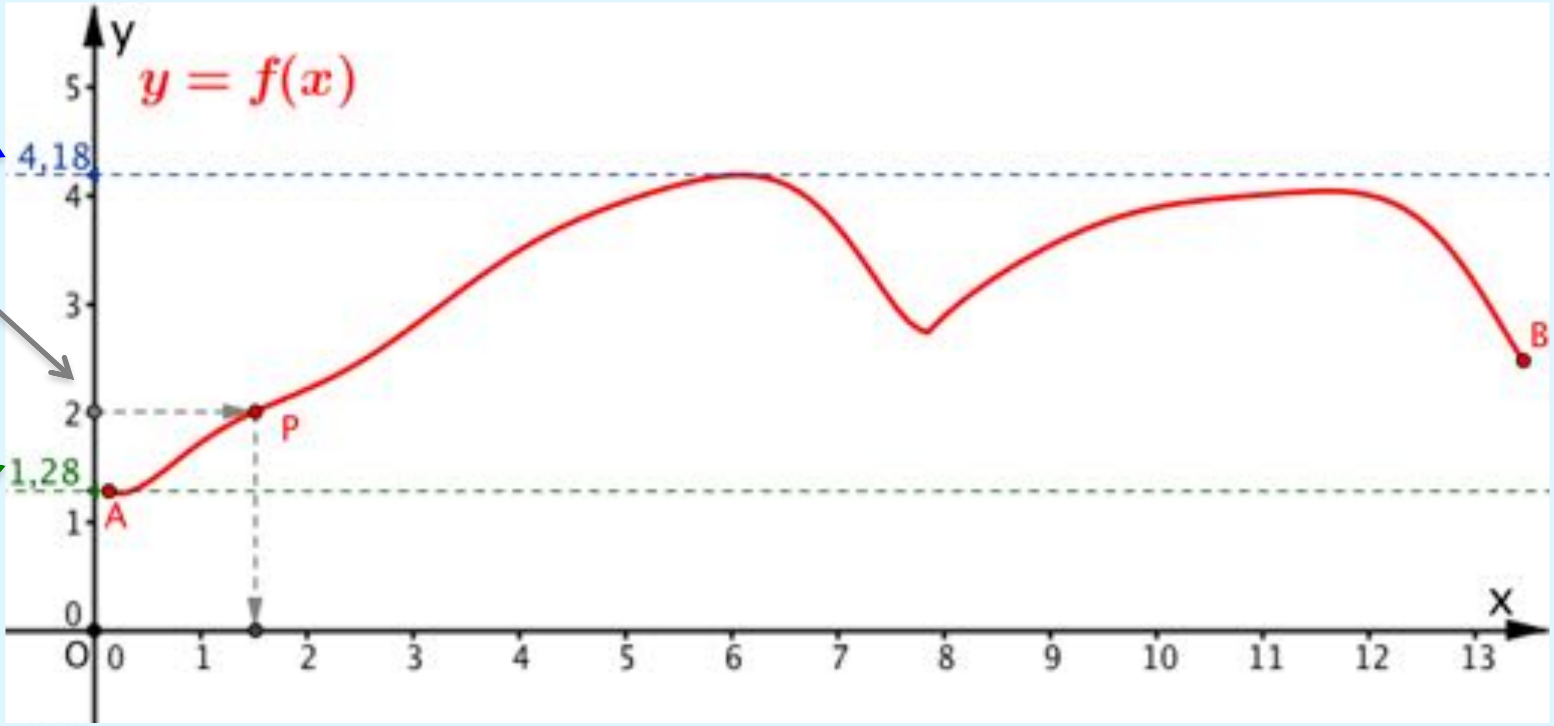
Un' intuitiva proprietà precisa l'idea di funzione continua data da un grafico senza interruzioni.

Una funzione continua in un intervallo chiuso assume tutti i valori intermedi fra il massimo e il minimo.

Il massimo

Un valore intermedio

Il minimo



Uno sguardo alla storia

La seconda proprietà ora esaminata prende il nome di

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso assume tutti i valori intermedi fra il massimo e il minimo.

Nel corso del 1800 vari matematici hanno studiato e dimostrato algebricamente questo teorema. Ricordo in particolare:

B. Bolzano
1781 - 1848

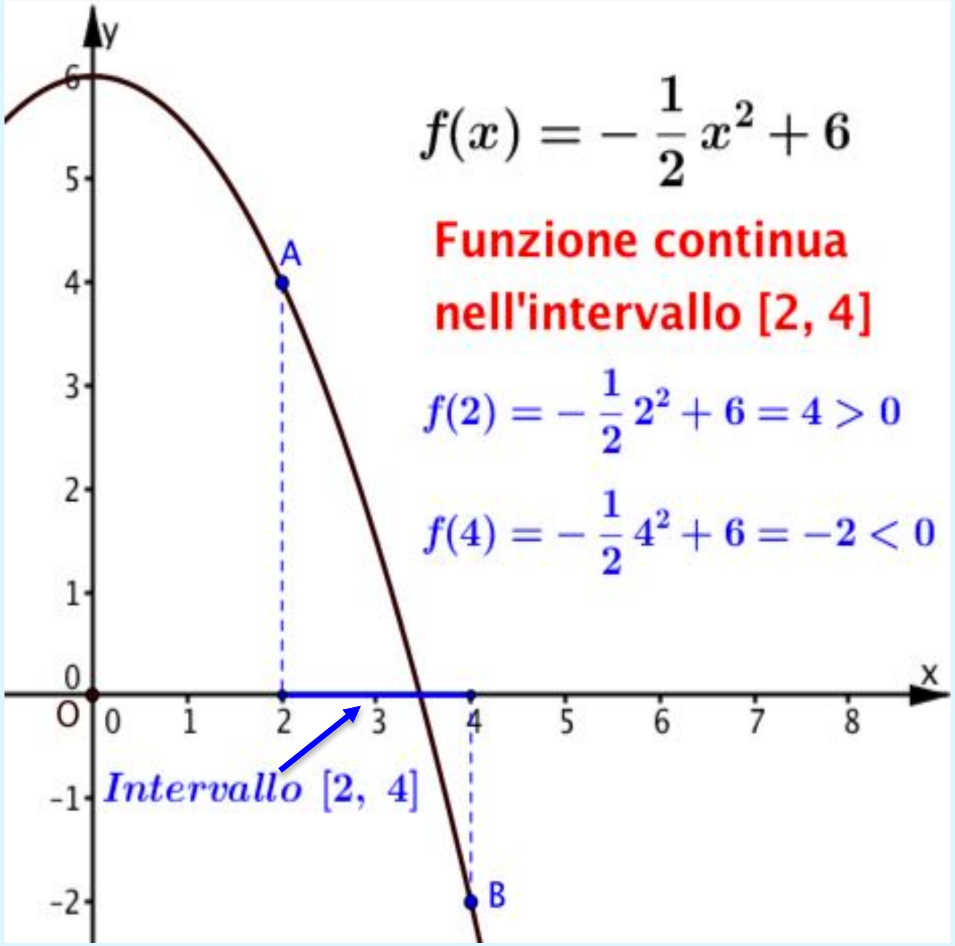
J. Darboux
1842 - 1917

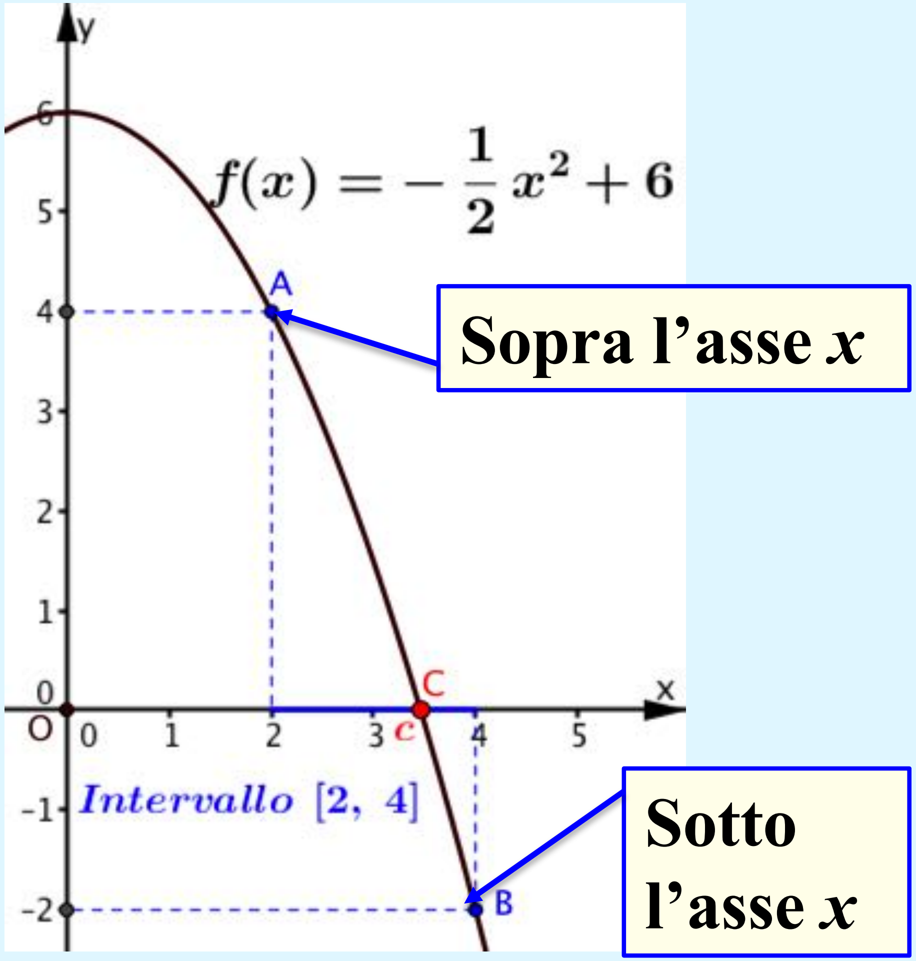
3. Zeri di una funzione e intersezioni del grafico con l’asse x

Daniela Valenti, 2022

Intersezioni del grafico con l'asse x

ESEMPIO

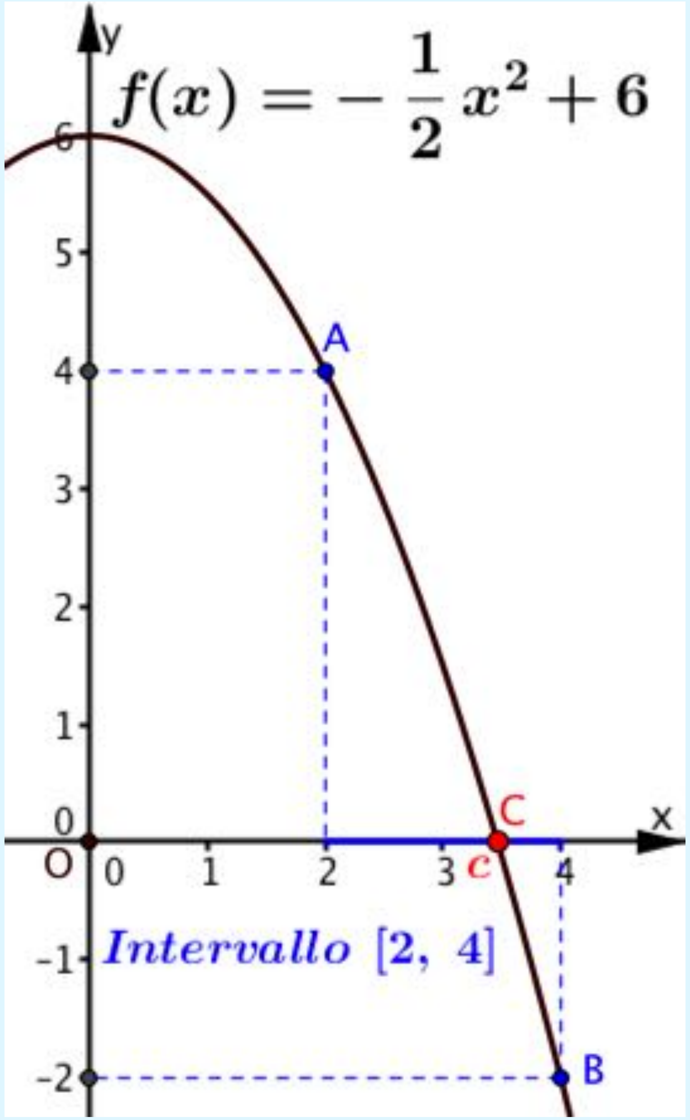




L'arco AB è continuo, cioè non ha interruzioni: per passare da sopra a sotto l'asse delle x, il grafico deve attraversare l'asse delle x in C.

Zero di una funzione

ESEMPIO



Due caratteristiche essenziali di f(x):

- **l'arco AB non ha interruzioni, cioè la funzione è continua nell'intervallo [2, 4];**
- **i punti A e B sono da parti opposte rispetto all'asse x, cioè f(2) e f(4) hanno segno opposto.**

Se f(x) ha le due caratteristiche, concludo che:

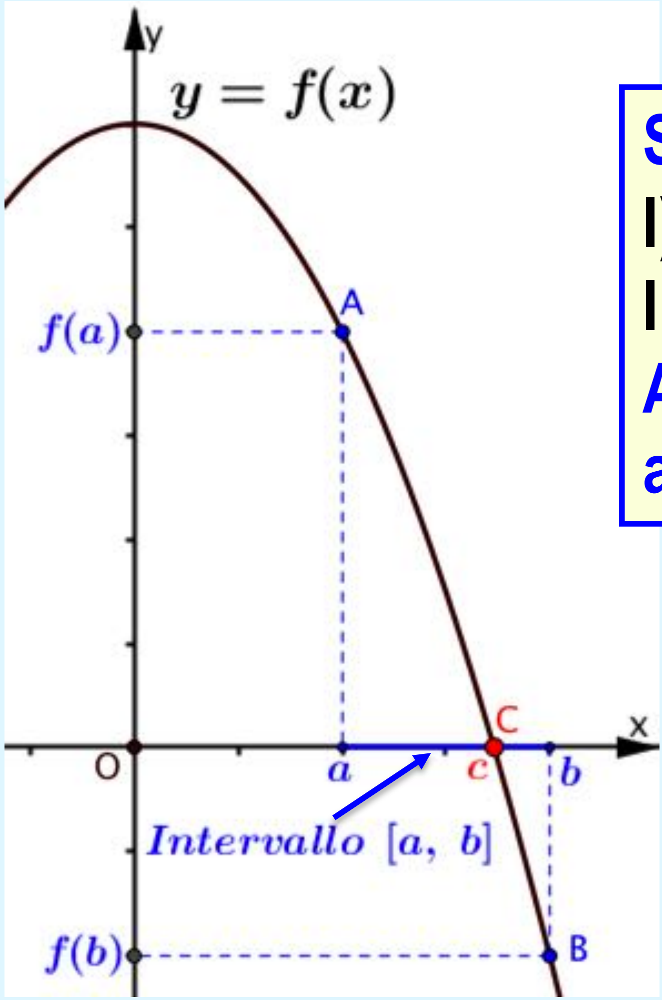
Il grafico attraversa l'asse x nel punto *C*, con ascissa *c* che appartiene all'intervallo [2, 4]

Risulta

$$f(c) = 0$$

L'ascissa *c* rende 0 la funzione e prende anche il nome di *'zero della funzione f(x)'*

Zeri di una funzione continua in un intervallo



IN GENERALE

Se per una funzione f(x) è vero che:
I) la funzione è continua nell'intervallo [a, b];
II) f(a) e f(b) hanno segno opposto.
Allora esiste all'interno dell'intervallo [a, b] almeno uno zero *c* della funzione f(x).

Uno sguardo alla storia

La terza proprietà ora esaminata prende il nome di

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI

Se per una funzione f(x) è vero che:
I) la funzione è continua nell'intervallo [a, b];
II) f(a) e f(b) hanno segno opposto.
Allora esiste all'interno dell'intervallo [a, b] almeno uno zero *c* della funzione f(x).

Nel corso del 1800 vari matematici si sono dedicati a formulare e dimostrare algebricamente questo teorema. Ricordo in particolare:

B. Bolzano
1781 - 1848

A.Cauchy
1789 - 1857