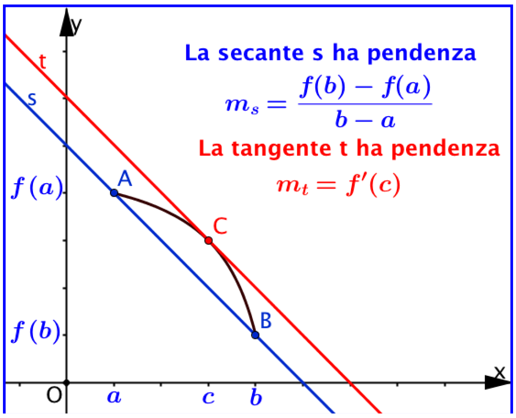
Tre teoremi sulle funzioni derivabili. Esercizi

A. Sul teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange
Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano *l'ipotesi*:
1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.
Se è vera *l'ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

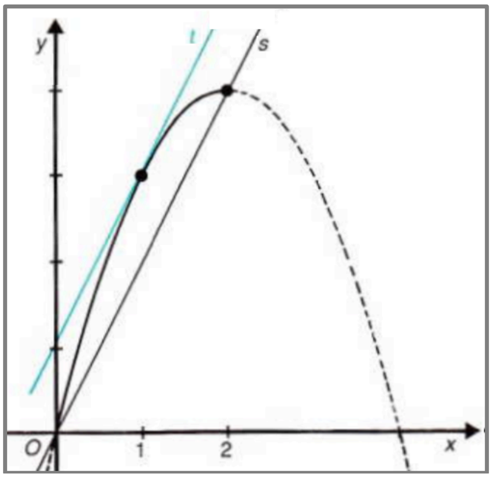
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Esercizio guidato

1. È data la funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ nell'intervallo $[0, 2]$. Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.

   a. $f(x)$ è derivabile in tutti i punti dell'intervallo, perciò …………………………………
   *b. Per determinare **c** calcolo*
   $\frac{f(2)-f(0)}{\dots\dots\dots} = \cdots\cdots\cdots = \cdots$ *e* $f'(x) = -2x + 4$
   Infine risolvo l'equazione $-2x + 4 = \dots$ *e ottengo la soluzione* $x = \dots$
   c. La figura qui sotto interpreta geometricamente il risultato ottenuto.



2. È data la funzione $f(x) = x^3 + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.

3. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [1, 4]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.

Esercizio guidato

4. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [–1, 1]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.
   a. All'interno dell'intervallo trovo l'ascissa 0, esclusa dal dominio della funzione, perciò ivi la funzione non è certamente derivabile e quindi………………………
5. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ nell'intervallo [0, 1]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.
6. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ nell'intervallo [–2, 0]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c di cui il teorema garantisce l'esistenza;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.
7. Osserva la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nell'intervallo [–1, 8]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. verifica che $f(x)$ non soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange;
   b. verifica che trovi l'ascissa $c = 1$, per cui risulta
   $$\frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} = f'(1)$$
   c. spiega perché questo risultato non contraddice il teorema di Lagrange.
8. Applica il teorema di Lagrange per dimostrare il seguente teorema: se una funzione $f(x)$ ha la derivata nulla in tutti i punti di un dato intervallo, allora risulta $f(x) = k$ in tutti i punti di quell'intervallo.
9. Applica il teorema di Lagrange per dimostrare il seguente teorema: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno la stessa derivata in tutti i punti di un dato intervallo, allora risulta $f(x) - g(x) = k$ in tutti i punti di quell'intervallo.

Quesiti tratti da Prove date agli Esami di Stato dal 2001 al 2022

10. Verifica che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa l'ipotesi del *Teorema del valor medio* (o *Teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[-2, 2]$. Determina i valori medi forniti dal teorema e illustrane il significato geometrico.

11. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa l'ipotesi del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0, 1]$? Se sí, trova l'ascissa c che compare nella formula

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

12. La funzione $f(x) = \sqrt{x} - x$ soddisfa l'ipotesi del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0, 4]$?
Se sí, determina il punto di cui il teorema garantisce l'esistenza.

13. Applica il teorema di Lagrange per stabilire se è vera la seguente affermazione: '*se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60km/h.*'

14. È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Dimostra che $f(x)$ soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[2, 4]$ e determina il punto o i punti di cui il teorema assicura l'esistenza.

15. Calcola il valore medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3, \\ e^{x-3} + 1, & \text{se } 3 < x \leq 6, \end{cases}$$

nell'intervallo $[1, 6]$ e determina il punto in cui la funzione assume il valore medio.

16. È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Determina il parametro k in modo da applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$ e trova il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

17. Determina i coefficienti a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & x \geqslant 4 \end{cases}$$

verifichi l'ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[2, 6]$ e individua il punto di cui il teorema assicura l'esistenza.

Esercizio guidato

18\. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 3]$ ed è derivabile nell'intervallo aperto $]1, 3[$. Sai che $f(1) = 1$ e $0 \le f'(x) \le 2$ per ogni x dell'intervallo $]1, 3[$.

Completa il procedimento per spiegare perché risulta $1 \le f(3) \le 5$.

Le ipotesi date consentono di applicare il teorema di Lagrange ad f(x) nell'intervallo $[1; 3]$, *perciò risulta:*

$f(3) - f(1) = f'(c) \cdot (3-1)$ *da cui* $f(3) =$ ____ $+ 2f'(c)$

Da $0 \le f'(x) \le 2$ *ricavo* __ $\le 2f'(c) \le$ __ *e quindi* ___ $\le f(3) \le$ ___

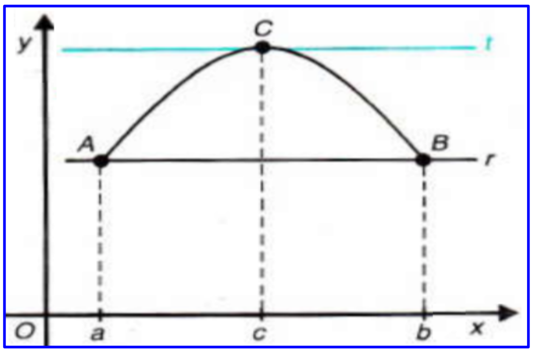
19\. È data la funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua nell'intervallo $[1; 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1, 3[$. Sai che $f(1) = 1$ e $2 \le f'(x) \le 3$ per ogni x dell'intervallo $]1, 3[$. Stabilisci se è possibile che risulti $f(3) = 8$ e motiva adeguatamente la risposta.

B. Sul teorema di Rolle

Teorema di Rolle
Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano *l'ipotesi*:
1. **$f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;**
2. **$f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo;**
3. **$f(b) = f(a)$**

Se è vera *l'ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$f'(c) = 0$$



Esercizio guidato

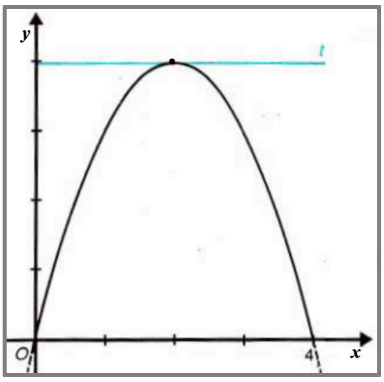
20\. È data la funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ nell'intervallo $[0, 4]$. Completa il procedimento per risolvere i seguenti quesiti.

a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Rolle;
b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c per cui risulta $f'(c) = 0$;
c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.

a. f(x) è derivabile in tutti i punti dell'intervallo, perciò ……………………………………

b. Per determinare ***c*** *calcolo f'(x)=*$-2x + 4$
e risolvo l'equazione $-2x + 4 = 0$ *, così ottengo la soluzione x = ….*

c. La figura qui sotto interpreta geometricamente il risultato ottenuto.



21. È data la funzione $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ nell'intervallo [0, 2]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Rolle;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c per cui risulta $f'(c) = 0$;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.
22. È data la funzione $f(x) = x^3 + 2x + 3$ nell'intervallo [– 1, 1]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Rolle;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c per cui risulta $f'(c) = 0$;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.
23. È data la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ nell'intervallo [1, 3]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. stabilisci se $f(x)$ soddisfa le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Rolle;
   b. se le condizioni sono soddisfatte, determina l'ascissa c per cui risulta $f'(c) = 0$;
   c. interpreta geometricamente i risultati ottenuti.

Esercizio guidato

24. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo [–1, 1]. Spiega perché risulta
   $f(-1) = f(1) = 1$,
   ma non ha soluzioni l'equazione $f'(x) = 0$.
   All'interno dell'intervallo trovo l'ascissa 0, esclusa dal dominio della funzione, perciò ivi la funzione non è certamente derivabile e quindi……………………
23. È data la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ nell'intervallo [–1, 1]. Spiega perché risulta
   $f(-1) = f(1) = 1$,
   ma non ha soluzioni l'equazione $f'(x) = 0$.
25. Osserva la funzione $f(x) = 4 - x^2$ nell'intervallo [–1, 2]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. verifica che $f(x)$ è derivabile in tutto l'intervallo, ma risulta $f(-1) \neq f(2)$;
   b. verifica che trovi l'ascissa c, per cui risulta $f'(c) = 0$
   c. spiega perché questo risultato non contraddice il teorema di Rolle.
26. Osserva la funzione $f(x) = |4 - x^2|$ nell'intervallo [–1, 3]. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. verifica che $f(x)$ non è derivabile in tutto l'intervallo e risulta $f(-1) \neq f(3)$;
   b. verifica che trovi l'ascissa c, per cui risulta $f'(c) = 0$
   c. spiega perché questo risultato non contraddice il teorema di Rolle.
27. Applica il teorema di Rolle per dimostrare il seguente teorema: se una funzione $f(x)$ è derivabile nel suo insieme di definizione e l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno due soluzioni distinte, allora l'equazione $f'(x) = 0$ ha almeno una soluzione.
28. Applica il teorema di Rolle per dimostrare il seguente teorema: se una funzione $f(x)$ è derivabile nel suo insieme di definizione e l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno n soluzioni distinte, allora l'equazione $f'(x) = 0$ ha almeno $n - 1$ soluzioni distinte.

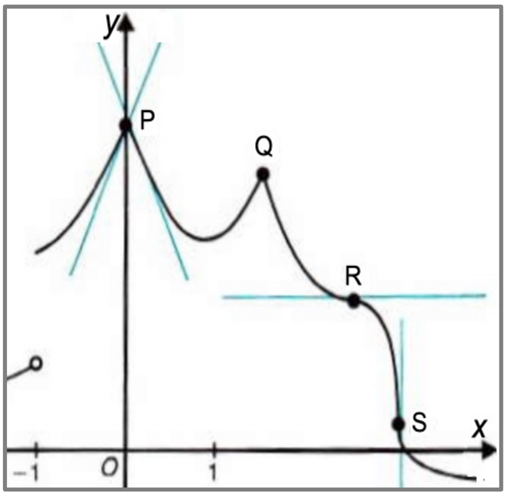
Quesiti tratti da Prove date agli Esami di Stato dal 2001 al 2022

29. Enuncia il teorema di Rolle e mostra, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.
30. Verifica che la funzione $f(x) = -\frac{2}{2x^4 - x^2 + 3}$ soddisfa l'ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [–1, 1] e determina il punto o i punti di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
31. È data la funzione $f(x) = |4 - x^2|$ nell'intervallo [–3, 3]. Verifica che la funzione non soddisfa tutte le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema di Rolle, però esiste almeno un punto dell'intervallo [–3, 3] in cui la derivata di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle?
Motiva adeguatamente la risposta.
32. Applica il teorema di Rolle per dimostrare che, se l'equazione:
$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$
ammette radici reali, allora fra due di esse trovi almeno una soluzione dell'equazione:
$nx^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$
33. Dimostra che se $p(x)$ è un polinomio allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.
34. Applica il teorema di Rolle per provare che tra due radici reali di $e^x \operatorname{sen} x = 1$ c'è almeno una radice di $e^x \cos x = -1$.

C. Su funzioni derivabili e continue

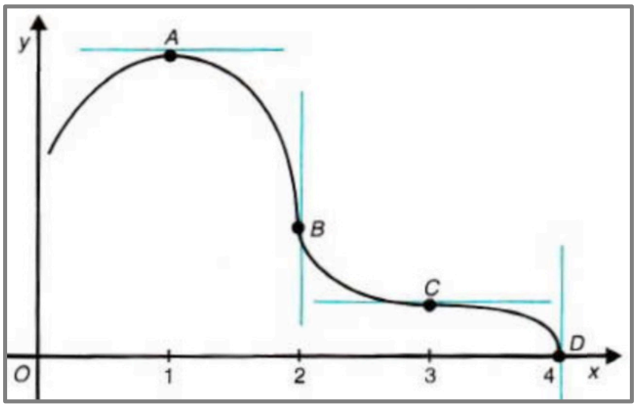
Continuità di una funzione derivabile
Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo, in quei punti è anche continua,

35. Osserva la funzione $f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto e scegli l'affermazione corretta per completare le seguenti frasi.
- Nel punto P la funzione $f(x)$ è:
A. derivabile, con $f'(x) = 0$ **B.** continua, ma non derivabile
C. discontinua **D.** derivabile, ma non continua
- Nel punto Q la funzione $f(x)$ è:
A. continua, ma non derivabile **B.** derivabile
C. derivabile, ma non continua **D.** discontinua
- Nel punto R la funzione $f(x)$ è:
A. continua, ma non derivabile **B.** discontinua
C. derivabile, ma non continua **D.** derivabile
- Nel punto S la funzione $f(x)$ è:
A. continua, ma non derivabile **B.** discontinua
C. derivabile, ma non continua **D.** derivabile
- Se l'ascissa è $x = -1$, la funzione $f(x)$ è:
A. continua, ma non derivabile **B.** discontinua
C. derivabile, ma non continua **D.** derivabile



36. Esamina la funzione $f(x) = x^3$ e risolvi i seguenti quesiti:
    a. verifica che la funzione è derivabile e quindi continua in O(0, 0);
    b. calcola $f'(0)$;
    c. esamina la funzione $g(x) = \sqrt[3]{x}$, inversa della precedente e verifica che è continua, ma non derivabile in O(0, 0).

37. Osserva la funzione $f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto e risolvi i seguenti quesiti:
    a. elenca i punti in cui $f(x)$ è continua ma non derivabile;
    b. elenca i punti in cui risulta $f'(x) = 0$;
    c. traccia il grafico della funzione $g(x)$, inversa di $f(x)$;
    d. elenca i punti in cui $g(x)$ è continua ma non derivabile;
    e. elenca i punti in cui risulta $g'(x) = 0$;



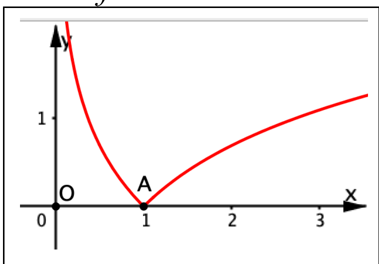
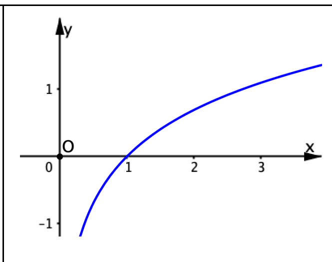
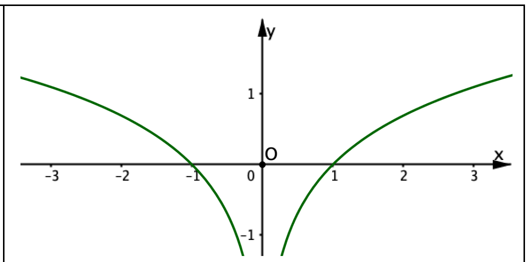
Esercizio guidato

38. Sono date le funzioni:

$$y = \ln(x) \quad , \quad y = \ln|x| \quad , \quad y = |\ln(x)|$$

Risolvi i seguenti quesiti:
a. associa ad ognuno dei grafici qui sotto la corrispondente funzione;
b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

a. Grafici

		
Funzione	Funzione	Funzione ....

b. Solo la funzione $y = |\ln(x)|$ è continua, ma non derivabile in A(1,0). Le altre due funzioni sono derivabili e quindi continue nel loro campo di esistenza.

39. Sono date le funzioni:

$$y = \operatorname{sen}(x) \quad , \quad y = \operatorname{sen}|x| \quad , \quad y = |\operatorname{sen}(x)|$$

Risolvi i seguenti quesiti:
a. traccia il grafico delle funzioni;
b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

40. Sono date le funzioni:

$$y = \cos(x) \quad , \quad y = \cos|x| \quad , \quad y = |\cos(x)|$$

Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico delle funzioni;

b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

41. Sono date le funzioni:

$$y = x^2 - 1 \quad , \quad y = 1 - x^2 \quad , \quad y = |x^2 - 1|$$

Risolvi i seguenti quesiti:

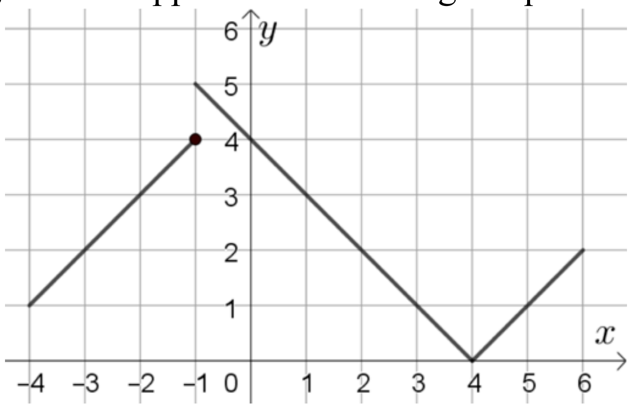
a. traccia il grafico delle funzioni;

b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

42. La funzione $f(x)$ è data da:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } -4 < x \leq -1 \\ 4 - x & \text{se } -1 < x \leq 4 \\ x - 4 & \text{se } \quad 4 < x < 6 \end{cases}$$

e il grafico è rappresentato dalla figura qui sotto.



Fra le seguenti affermazioni scegli quelle vere (**V**) e quelle false (**F**)

A. $f(x)$ è continua in $x = 2$ **V** **F**

B. $f(x)$ è continua in $x = -1$ **V** **F**

C. $f(x)$ è continua in $x = 4$ **V** **F**

D. $f(x)$ è derivabile in $x = 4$ **V** **F**

43. Sono date le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}(x), \text{se } x > 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2x, \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}(x), \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico delle funzioni;

b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

44. Sono date le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 2x, \text{se } x > 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} -x, \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 2x, \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico delle funzioni;

b. studia continuità e derivabilità delle funzioni nel loro campo di esistenza.

Quesiti tratti da Prove date agli Esami di Stato dal 2001 al 2022

45. Studia continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$.

46. Determina e classifica eventuali punti di non derivabilità della funzione
$$f(x) = |-x^2 + 2x + 3|$$

47. Studia continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & se\ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & se\ x \geq 1 \end{cases}$.

48. È data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1, & \text{per } x < 2, \\ x^2 + (k-1)x - 1, & \text{per } x \geq 2, \end{cases}$$
Stabilisci se è possibile determinare k, in modo che $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

49. È data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h, & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
Determina i parametri h e k in modo che la funzione $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo [0, 4].

Sui tre teoremi

50. È data la funzione:
$$f(x) = \left|\frac{3-2x}{x-3}\right|$$
Risolvi i seguenti quesiti:
    a. rappresenta il grafico della funzione;
    b. verifica se negli intervalli [0, 2] e [4, 6] la funzione soddisfa l'ipotesi del teorema di Lagrange;
    c. in caso affermativo, trova i punti di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza,
    d. esiste un intervallo [a, b], in cui puoi applicare il teorema di Rolle?
    e. motiva la precedente risposta.

51. È data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} + bx + 3 & x > 0 \end{cases}$$
Risolvi i seguenti quesiti:
    - determina i parametri a e b, in modo che $f(x)$ sia derivabile nell'insieme dei numeri reali;
    - verifica che nell'intervallo [– 1, 6] la funzione ottenuta soddisfa l'ipotesi del teorema di Lagrange;
    - trova il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.