

Tre teoremi sulle funzioni derivabili

Risposte e commenti all'attività

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano l'ipotesi:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

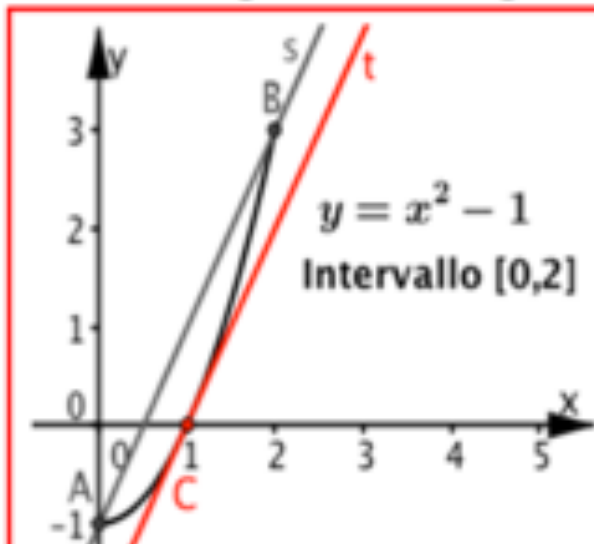
Se è vera l'ipotesi, allora è vera la tesi: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Quesiti 1 e 2

Funzione 1

1. Associa ad ognuno dei seguenti grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



2. Determina le coordinate del punto C, di cui è assicurata l'esistenza dalla frase b.

$$\text{Pendenza } m_s \text{ della retta AB: } m_s = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Derivata della funzione: } f'(x) = 2x$$

$$\text{Ascissa } c: m_s = f'(c) \Leftrightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\mathbf{C(1, 0)}$$

Funzione 1

b. Per la funzione sono vere tutte le condizioni del teorema di Lagrange e la tesi è vera

Quesito 1

Funzione 2

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano l'*ipotesi*:

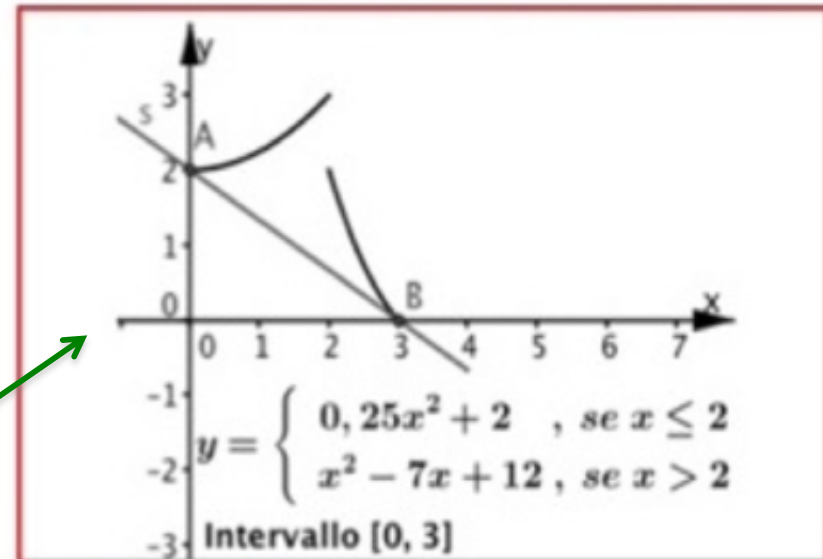
1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

Se è vera l'*ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Funzione discontinua
in corrispondenza
all'ascissa 2.**

1. Associa ad ognuno dei grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



Funzione 2

- a. Per la funzione non è vera la 1° condizione del teorema di Lagrange e la tesi non è vera.

Quesito 1

Funzione 3

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano l'*ipotesi*:

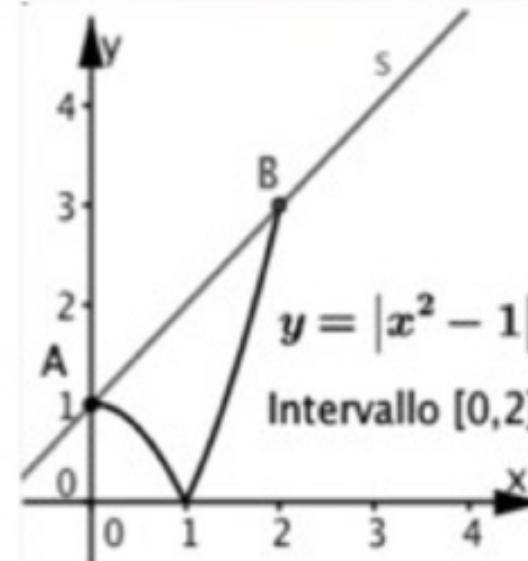
1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

Se è vera l'*ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Funzione continua,
ma non derivabile
nel punto $(1, 0)$.

1. Associa ad ognuno dei grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



Funzione 3

- c. Per la funzione non è vera la 2° condizione del teorema di Lagrange e la tesi non è vera.

Teorema di Rolle

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano l'ipotesi:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo;
3. $f(b) = f(a)$

Se è vera l'ipotesi, allora è vera la tesi: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$f'(c) = 0$$

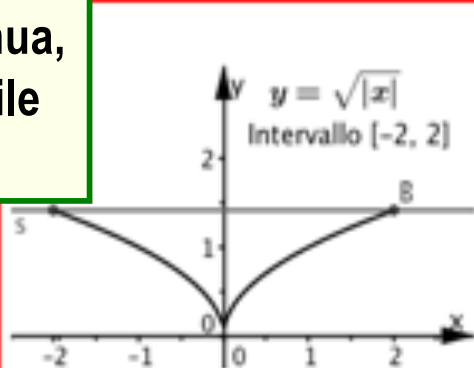
Quesito 3

Funzioni 4,6,7

3. Associa ad ognuno dei grafici, la frase scelta fra quelle sotto le figure.

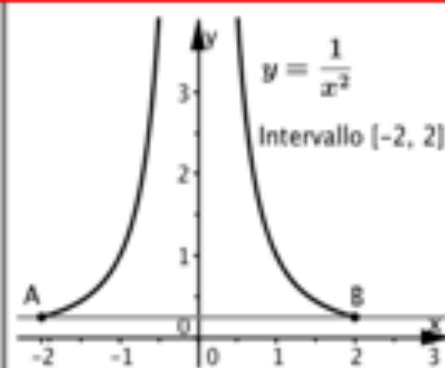
Funzione continua, ma non derivabile nel punto $(0, 0)$.

$$f(0) = 0$$
$$f(2) = 3$$



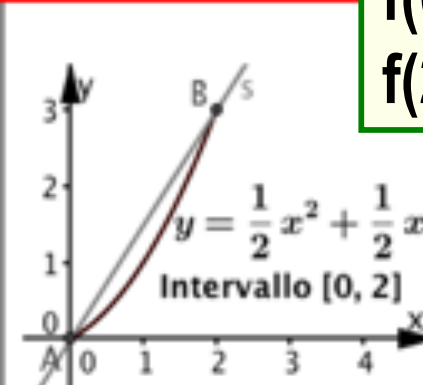
Funzione 4

f. Per la funzione non è vera la 2° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.



Funzione 6

e. Per la funzione non è vera la 1° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.



Funzione 7

d. Per la funzione non è vera la 3° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.

Funzione con una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 0.

Teorema di Rolle

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano l'ipotesi:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo;
3. $f(b) = f(a)$

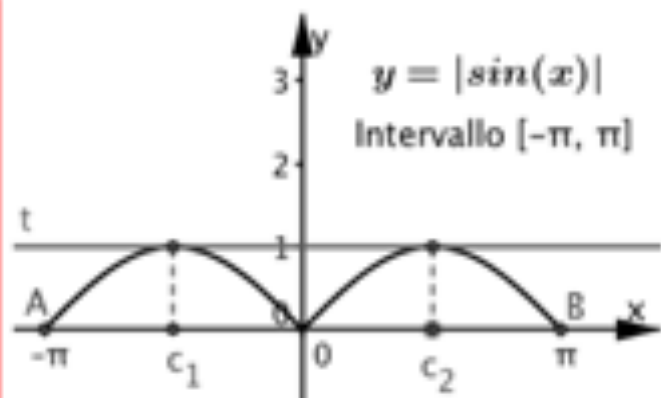
Se è vera l'ipotesi, allora è vera la tesi: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$f'(c) = 0$$

Quesiti 3 e 4

Funzione 5

3. Associa ad ognuno dei grafici, la frase scelta fra quelle sotto le figure.



4. La funzione descritta dalla frase g contraddice il teorema di Rolle? **NO**

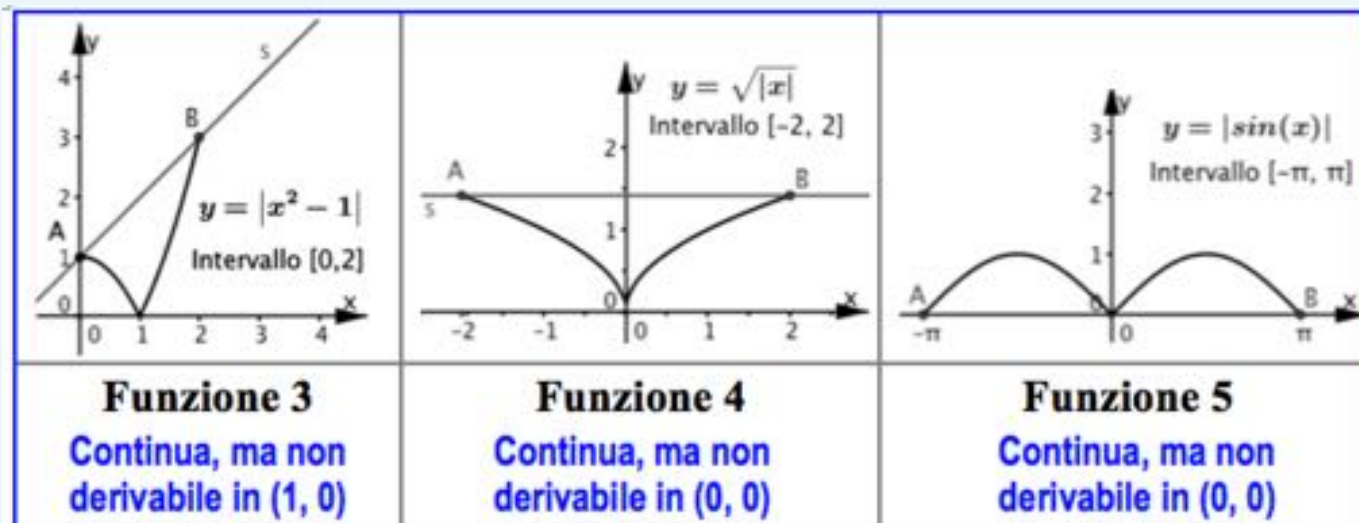
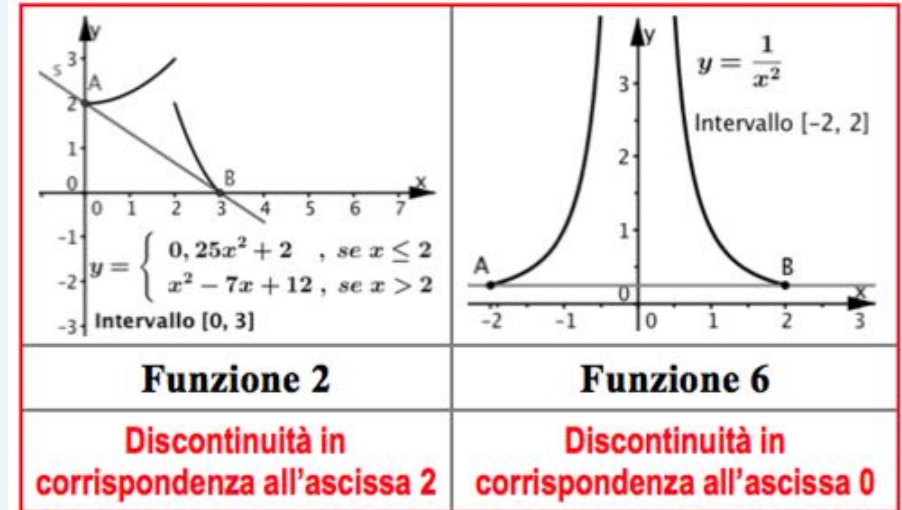
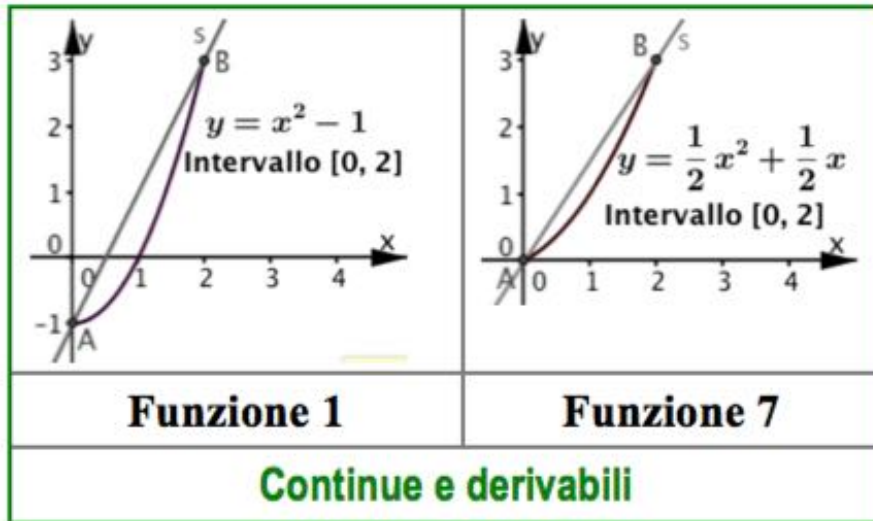
Perché il teorema garantisce che se tutte le condizioni sono vere, allora anche la tesi è vera. Ma non esclude che la tesi sia vera anche nel caso di qualche condizione falsa.

Funzione 5

g. Per la funzione non è vera la 2^o condizione del teorema di Rolle e la tesi è vera.

Quesiti 5, 6 e 7

5. Quali fra le 7 funzioni date sopra sono continue e derivabili nell'intervallo dato? **1 e 7**
6. Quali fra le 7 funzioni date sopra sono continue, ma non derivabili nell'intervallo dato? **3, 4 e 5**
7. Quali fra le 7 funzioni date sopra hanno una discontinuità nell'intervallo dato? **2 e 6**



Uno sguardo alla storia

Michel Rolle



Francia 1652 - 1719

Giuseppe Lagrange



Italia 1736 - 1813

Nello sviluppo storico della matematica troviamo prima, nel 1690, il teorema di Rolle nell'ambito di studi sulla risoluzione di equazioni e, circa un secolo dopo, il teorema del valor medio di Lagrange. Vari percorsi dimostrativi intrecciano i due teoremi.