Tre teoremi sulle funzioni derivabili

Stefano Volpe e Daniela Valenti

Tre teoremi

La lezione presenta un percorso grafico – intuitivo per scoprire tre teoremi validi per tutte le funzioni derivabili:

1. Teorema di Lagrange (o del valor medio)
2. Teorema di Rolle
3. Continuità delle funzioni derivabili.

1. Teorema di Lagrange

Una figura per osservare e riflettere

$$m_t = f'(x)$$

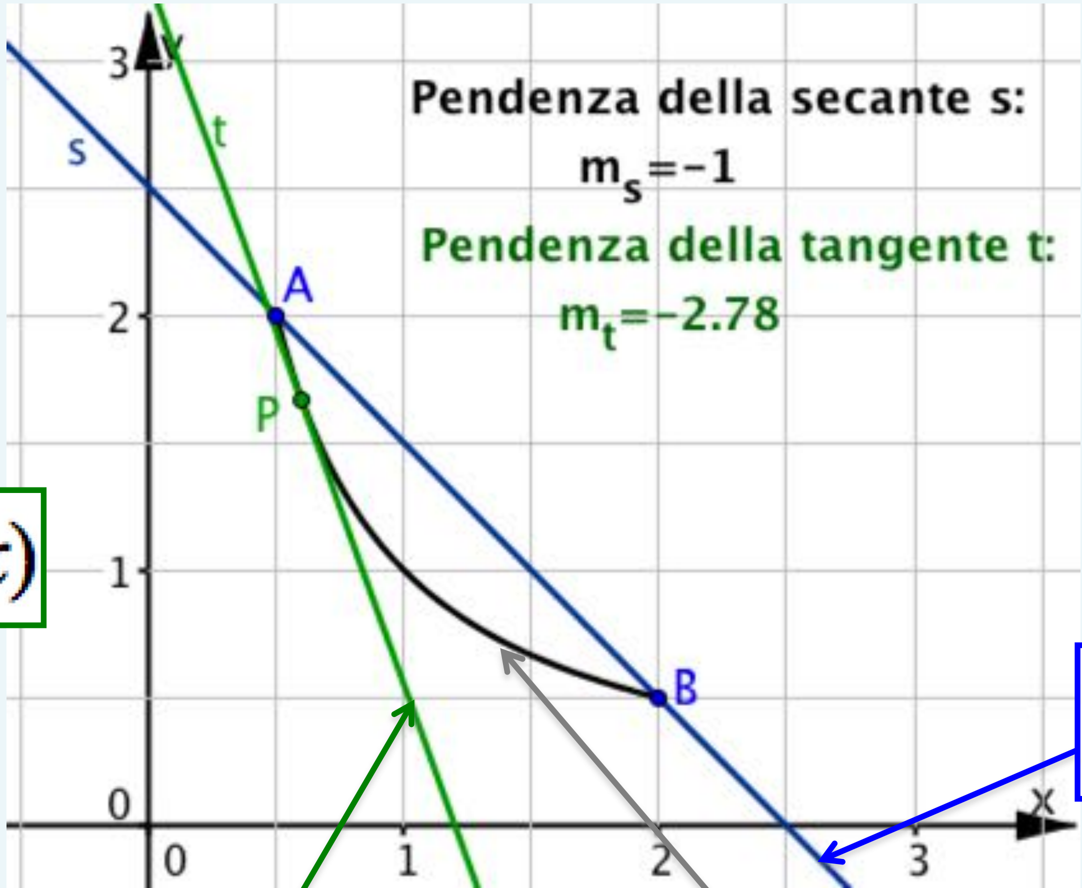


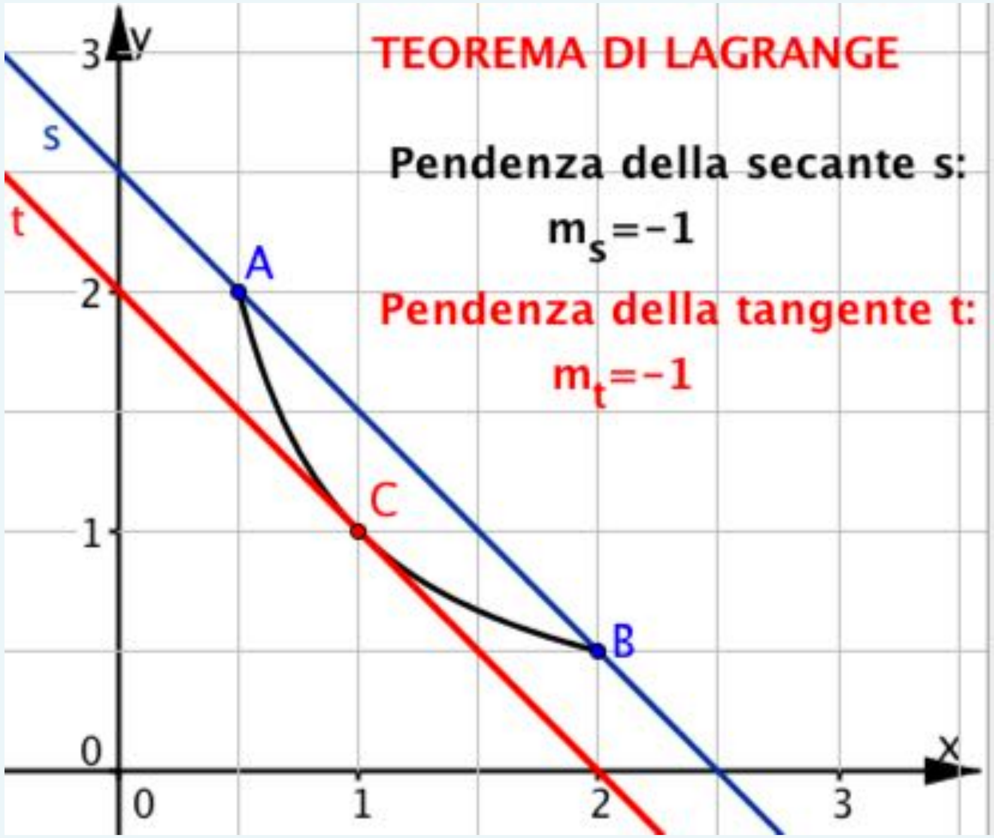
Grafico della secante *s* che congiunge A e B

Grafico della tangente *t* alla curva in un punto *P* variabile sull'arco AB

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **nell'intervallo** $[0{,}5;2]$

Un'animazione per scoprire il teorema di Lagrange

Cosa mostra l'animazione



A(0,5; 2) **B(2; 0,5)**

$$m_s = \frac{f(2) - f(0{,}5)}{2 - 0{,}5} = \frac{0{,}5 - 2}{2 - 0{,}5} = -1$$

$$\boxed{m_t = f'(1)}$$

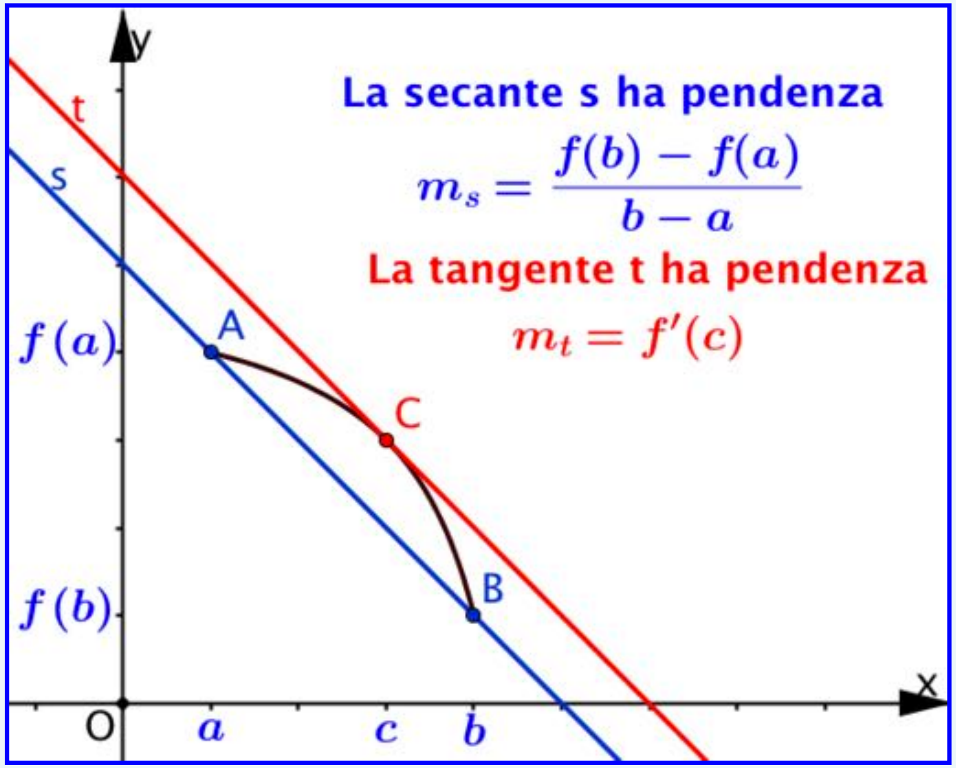
Il punto C di ascissa 1 ha un'importante proprietà: la tangente *t* in C ha la stessa pendenza della secante *s*

$$\boxed{\frac{f(2) - f(0{,}5)}{2 - 0{,}5} = f'(1)}$$

Teorema di Lagrange

Se una funzione *f*(*x*) è continua in un intervallo [*a*, *b*] e derivabile all'interno dell'intervallo, allora esiste nell'intervallo almeno un numero *c*, tale che risulti:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$



Teorema di Lagrange e autovelox

Un modello di autovelox (Tutor) misura la velocità media di un veicolo su una distanza di 15km.

Quali informazioni porta il teorema di Lagrange?

Legge del moto

Legge del moto dell'auto:

$$s = f(t)$$

dove

- **t è il tempo che varia;**
- **s è la distanza che varia al variare del tempo t**
- **$f(t)$ è una funzione derivabile perché l'auto in ogni istante ha una sua velocità istantanea $f'(t)$.**

Velocità media e velocità istantanea

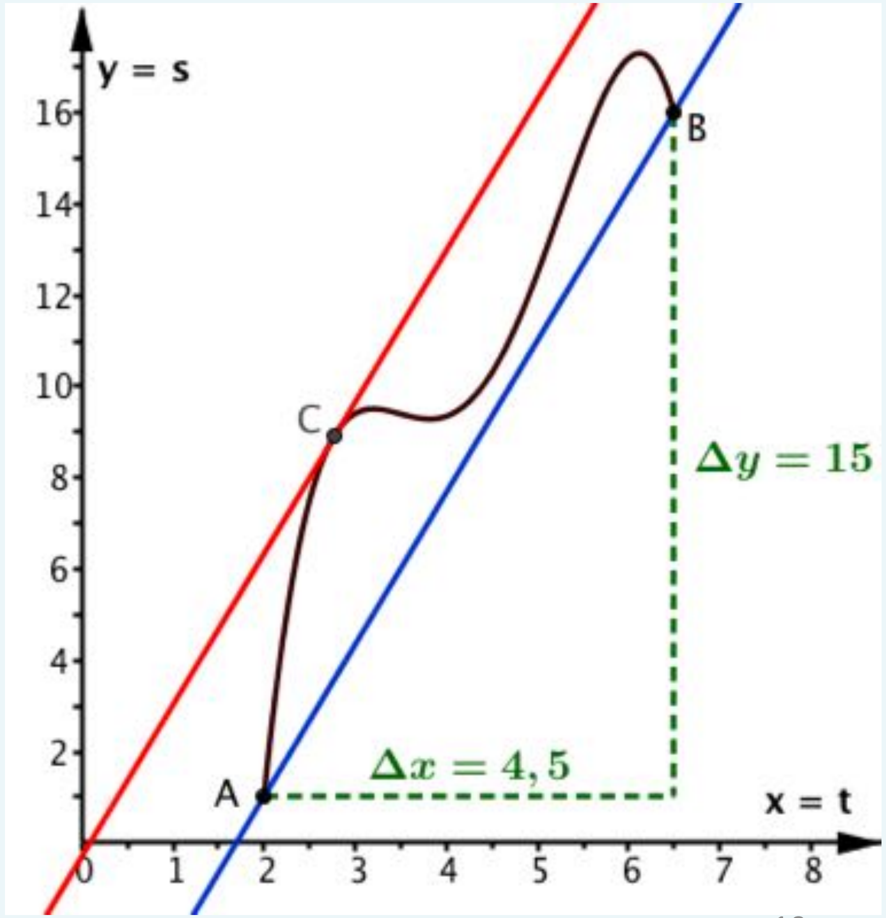
Velocità media

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Velocità istantanea

$$v = f'(c)$$

Possibile grafico di $s = f(t)$



Teorema di Lagrange e velocità

Esiste almeno un numero *c* tale che

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(c)}$$

Velocità media

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Velocità istantanea

$$v = f'(c)$$

Esiste almeno un istante *c* in cui l'auto ha avuto la velocità istantanea *v* uguale alla velocità media v_m.

2. Teorema di Rolle

Dal teorema di Lagrange al teorema di Rolle

Il teorema di Lagrange

Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile all'interno dell'intervallo, allora esiste, all'interno dell'intervallo, almeno un numero c, tale che:

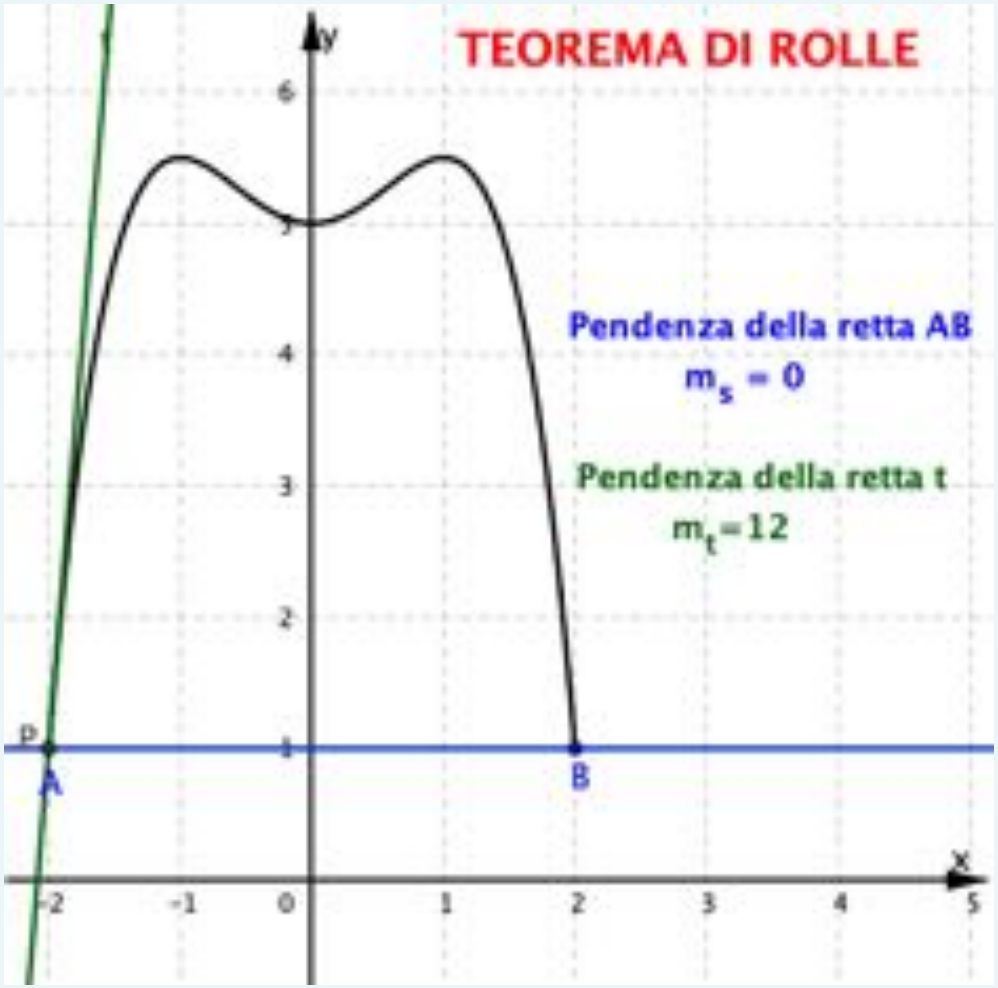
$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

Che cosa succede se ho $f(b) = f(a)$?

Risulta $f(b) - f(a) = 0$, ma $b - a \neq 0$.
Perciò trovo $f'(c) = 0$.

Teorema di Rolle

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile all'interno dell'intervallo, se risulta $f(b) = f(a)$, allora esiste, all'interno dell'intervallo, almeno un numero c, tale che $f'(c) = 0$.



Teorema di Rolle e velocità

Se trovo f(b) = f(a), esiste almeno un numero *c* tale che

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

Velocità istantanea

$$v = f'(c)$$

Se un'auto compie un viaggio senza soste tornando al punto di partenza, esiste almeno un istante *c* in cui la velocità istantanea è zero.

3. Continuità di funzioni derivabili

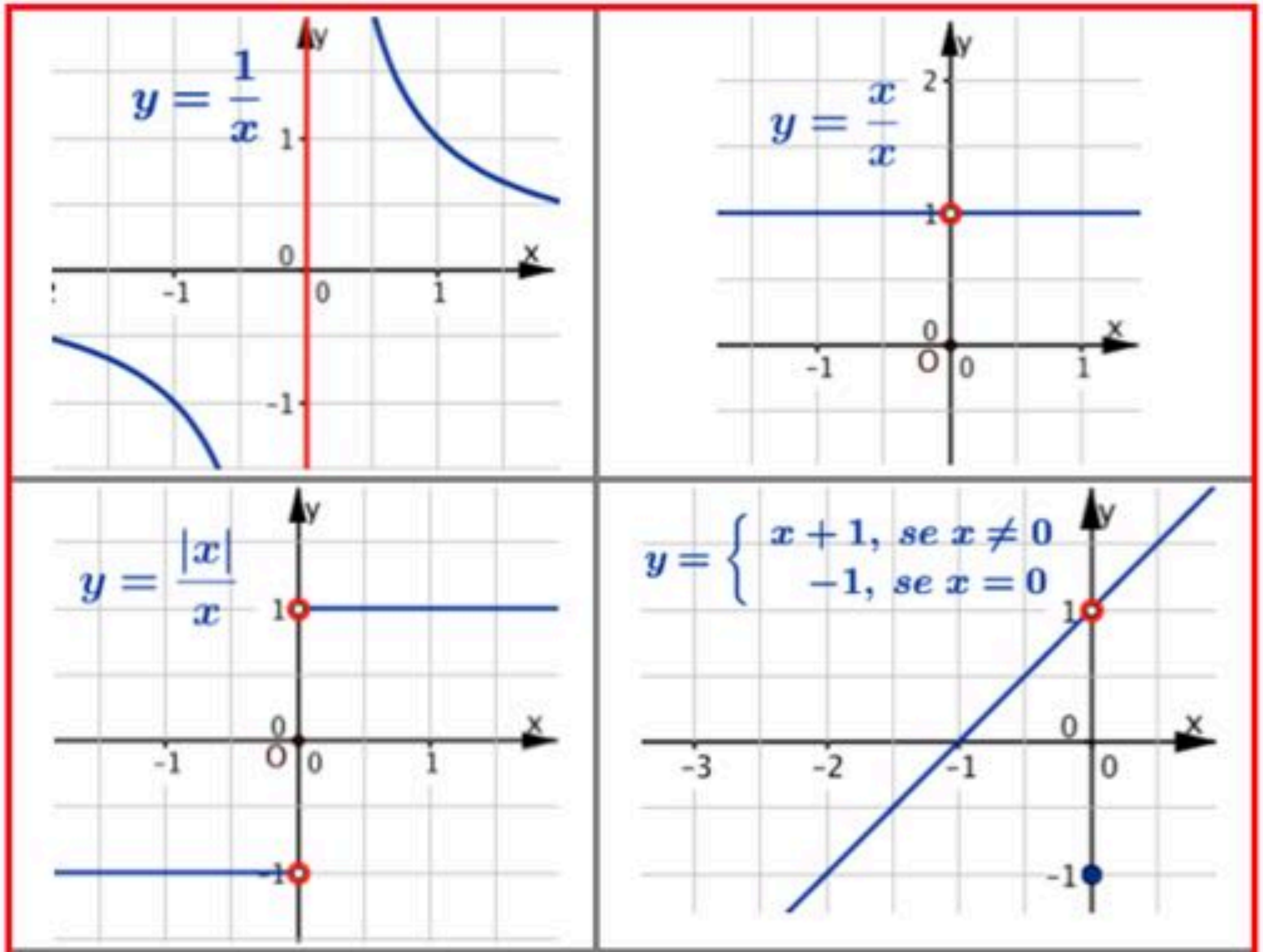
Continuità

Come stabilisco se un funzione è continua in un punto A?

Ecco un criterio grafico – intuitivo: traccio il grafico della funzione e controllo se posso passare da una parte all'altra di A senza alzare la matita dal foglio.

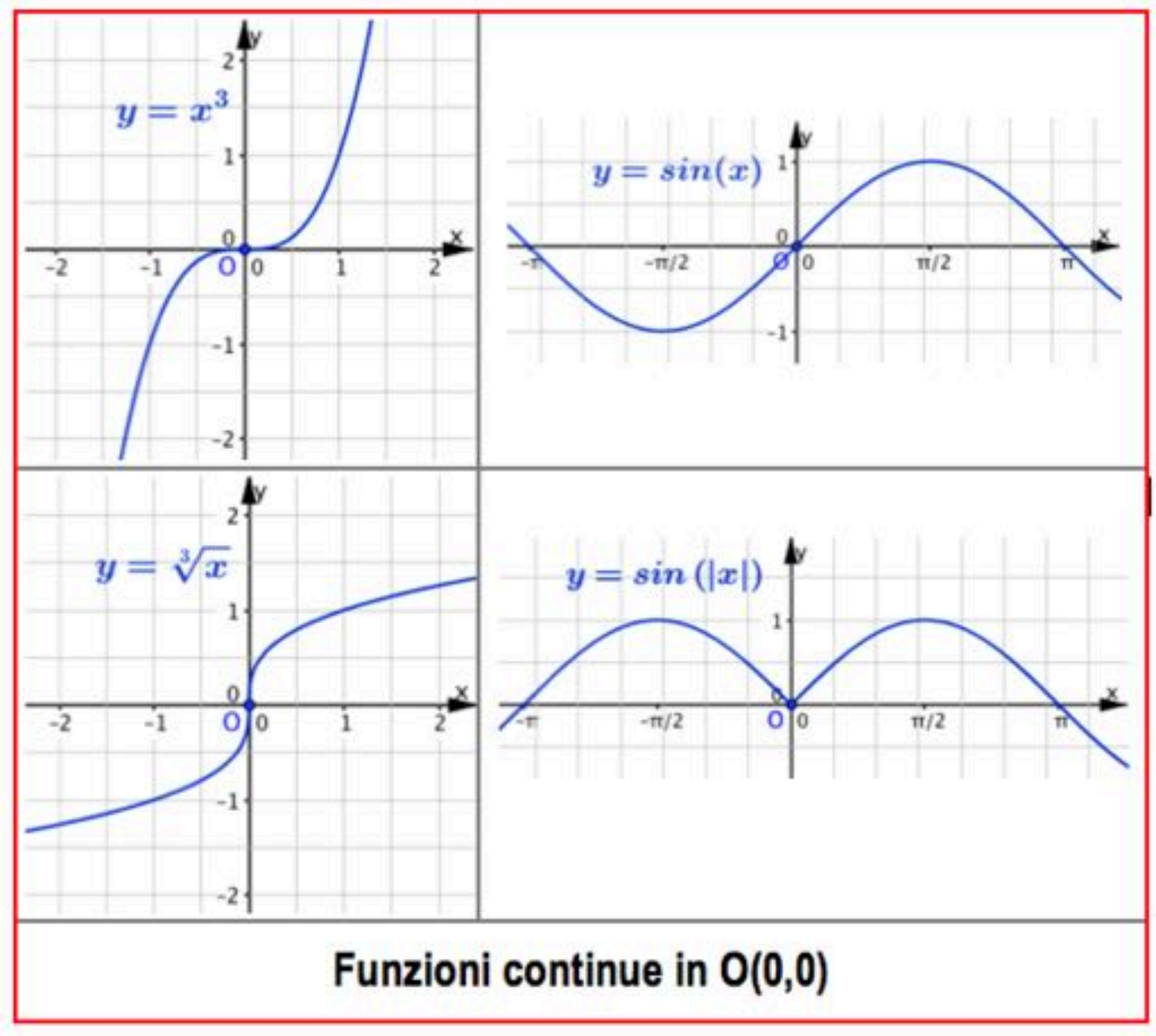
Rivediamo allora degli esempi di funzioni discontinue e continue.

Esempi di funzioni discontinue



Discontinuità in corrispondenza dell'ascissa $x = 0$

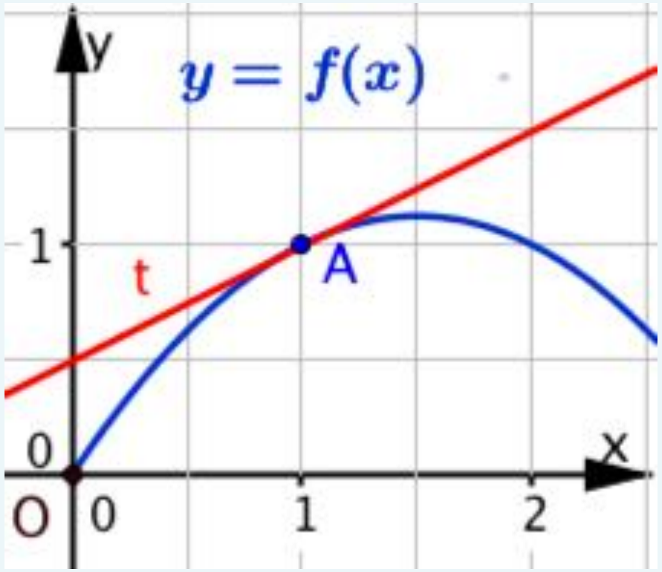
Esempi di funzioni continue



Derivabilità

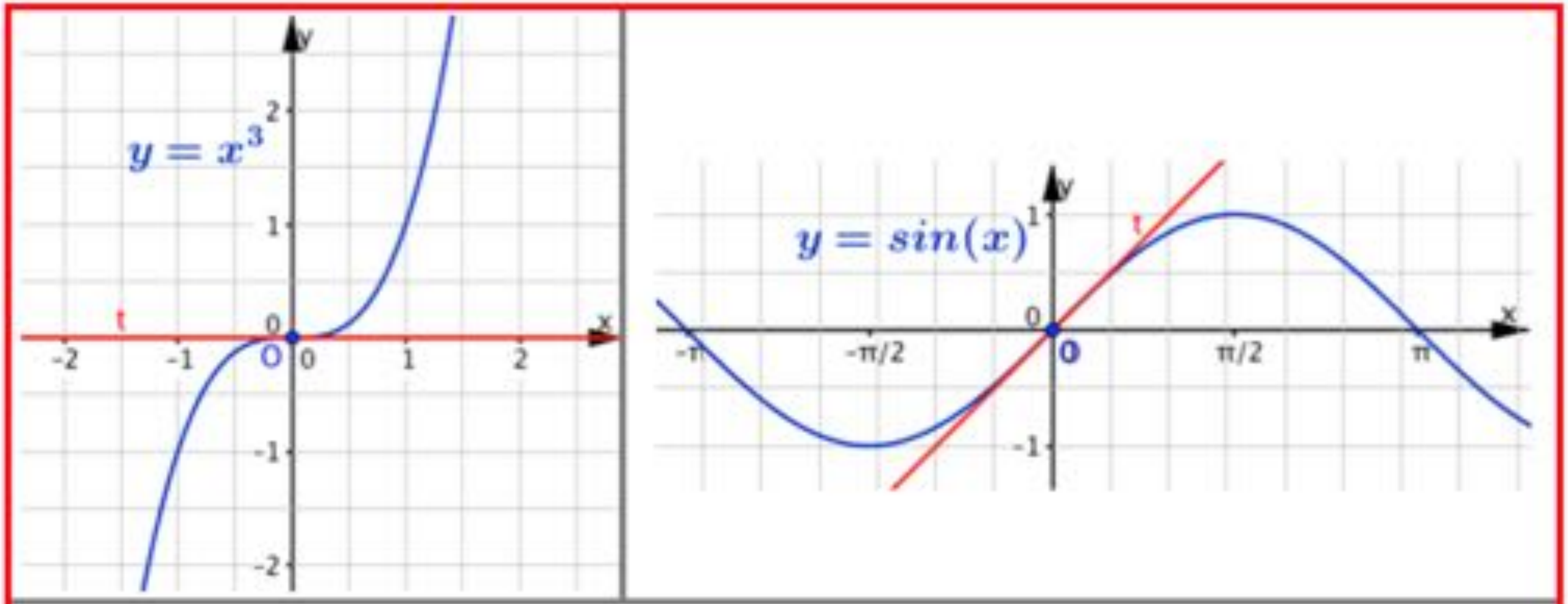
Come stabilisco se un funzione è derivabile in un punto A?

Ancora un criterio grafico – intuitivo: nel punto A il grafico 'si appoggia' alla tangente, che è un'unica retta non parallela all'asse delle ordinate.



Rivediamo allora gli esempi di funzioni continue in O per stabilire se esse sono anche derivabili in O.

Esempi di funzioni continue e derivabili

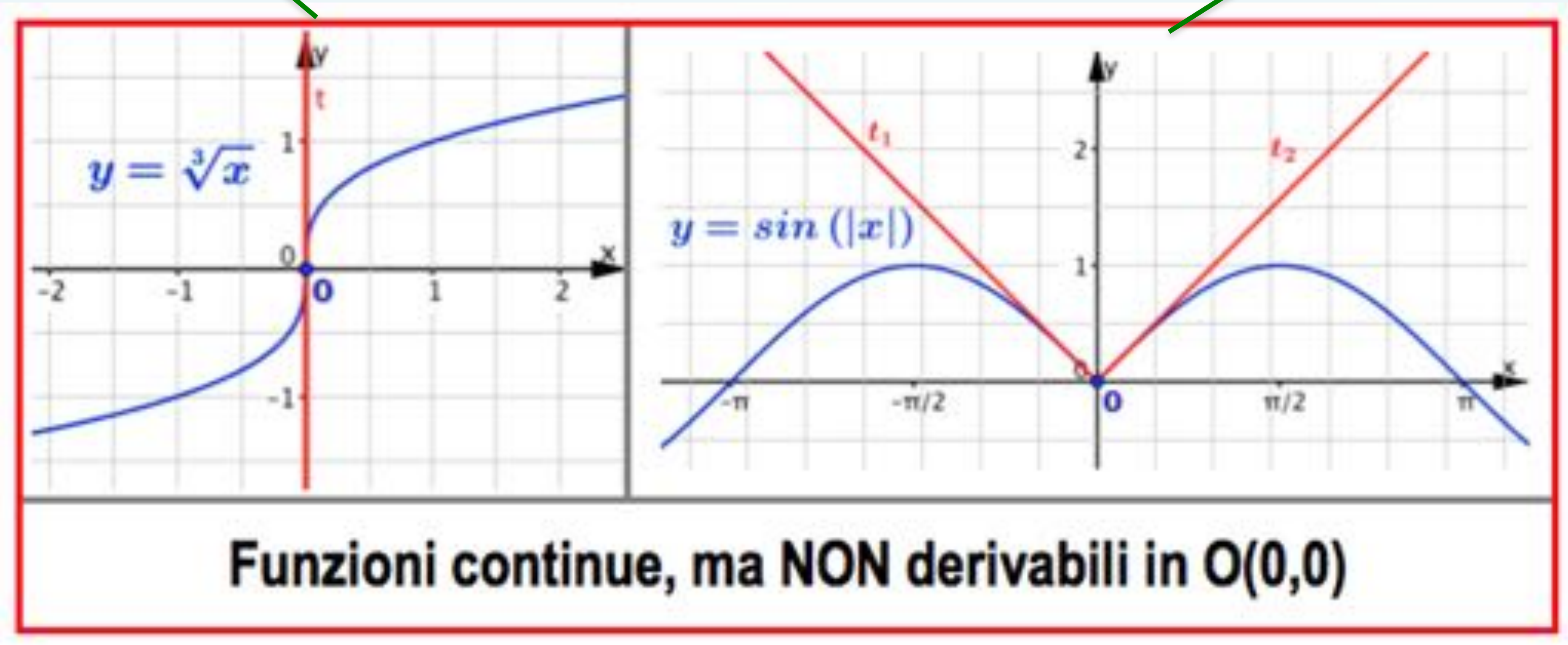


Funzioni continue e derivabili in O(0,0)

Esempi di funzioni continue, ma non derivabili nel punto O

La tangente in O è l'asse delle y

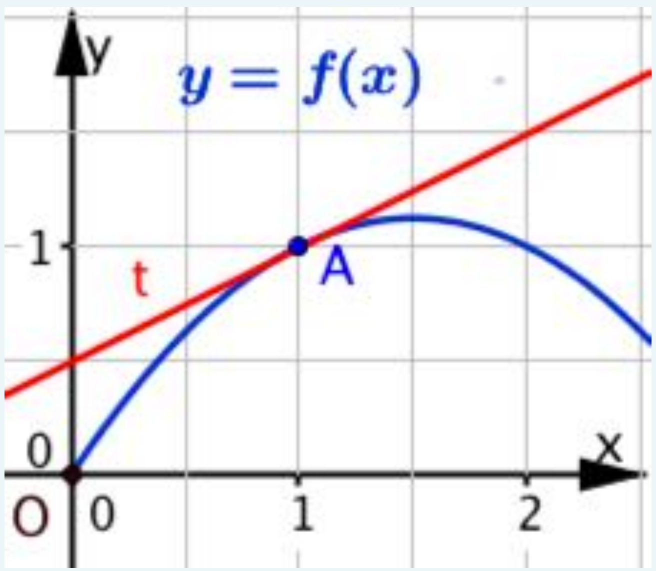
Due diverse tangenti in O



Posso trovare esempi di funzioni derivabili, ma non continue in un punto?

Risposta grafico – intuitiva: NO

Perché il grafico di una funzione derivabile ‘si appoggia’ in A alla retta tangente, che è continua, perciò non può avere interruzioni in A.



Continuità delle funzioni derivabili

Abbiamo scoperto per via grafico - intuitiva che:
Se una funzione è derivabile in un suo punto A, in quel punto è anche continua.

Questa affermazione prende il nome di *'teorema sulla continuità delle funzioni derivabili'.*

Continuità delle funzioni derivabili

Posso estendere il teorema a tutti i punti di un intervallo: una funzione derivabile in un intervallo è ivi anche continua.

Perciò posso applicare alle funzioni derivabili tutte le proprietà e i teoremi validi per le funzioni continue.

Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere sui teoremi appena presentati.

Stefano Volpe e Daniela Valenti

Riflessioni sul lavoro svolto

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano *l'ipotesi*:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;

2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

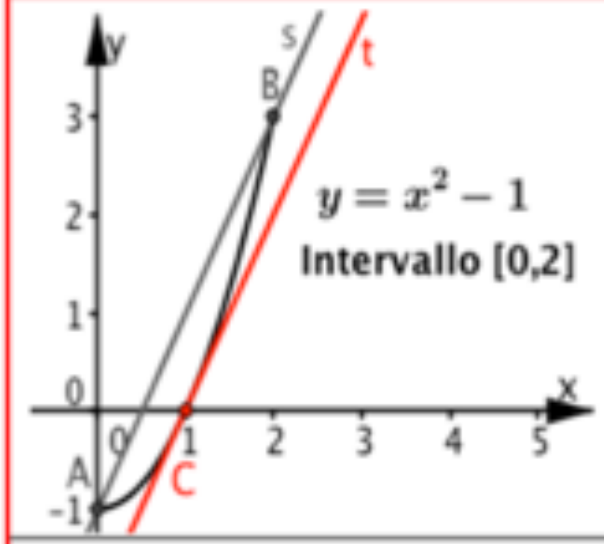
Se è vera *l'ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Quesiti 1 e 2

Funzione 1

1. Associa ad ognuno dei seguenti grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



2. Determina le coordinate del punto ***C***, di cui è assicurata l'esistenza dalla frase **b.**

Pendenza m_s della retta AB: $m_s = \dfrac{3-(-1)}{2-0} = \dfrac{4}{2} = 2$

Derivata della funzione: $f'(x) = 2x$

Ascissa c: $m_s = f'(c) \Leftrightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$

***C* (1, 0)**

Funzione **1**

b. Per la funzione *sono vere tutte le condizioni* del teorema di Lagrange e *la tesi è vera*

Quesito 1

Funzione 2

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano *l'ipotesi*:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;

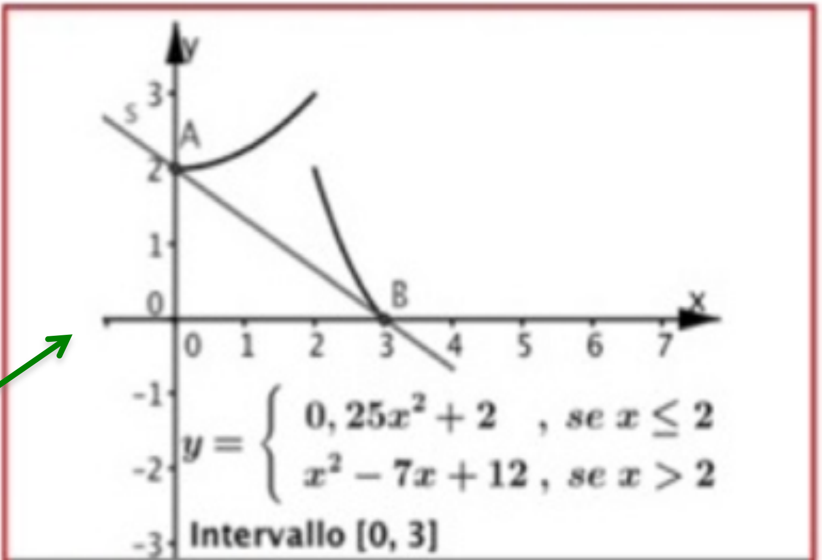
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

Se è vera *l'ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Funzione discontinua in corrispondenza all'ascissa 2.

1. Associa ad ognuno dei grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



Funzione 2

a. Per la funzione non è vera la 1° condizione del teorema di Lagrange e la tesi non è vera.

Teorema di Lagrange

Per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti condizioni, che formano *l'ipotesi*:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$;

2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo.

Se è vera *l'ipotesi*, allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

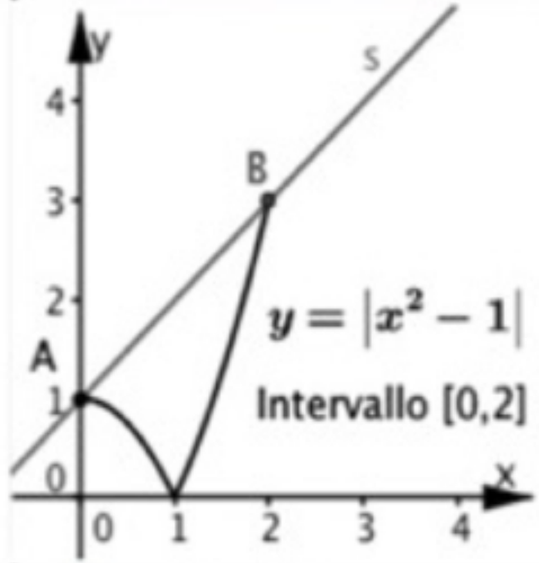
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Quesito 1

Funzione 3

Funzione continua, ma non derivabile nel punto (1, 0).

1. Associa ad ognuno dei grafici la frase scelta fra quelle sotto le tre figure.



Funzione 3

c. Per la funzione non è vera la 2° condizione del teorema di Lagrange e la tesi non è vera.

Teorema di Rolle

Se per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti *ipotesi*:

1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo
3. $f(b) = f(a)$

Allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$f'(c) = 0$$

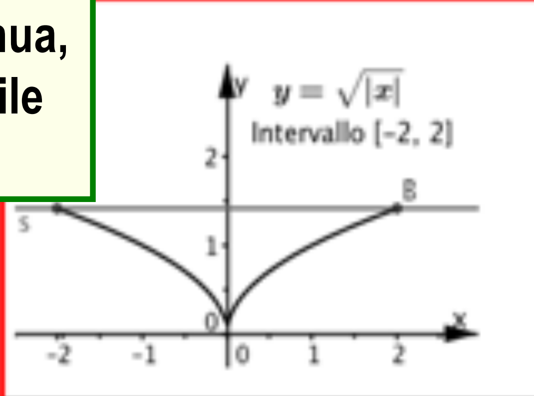
Quesito 3

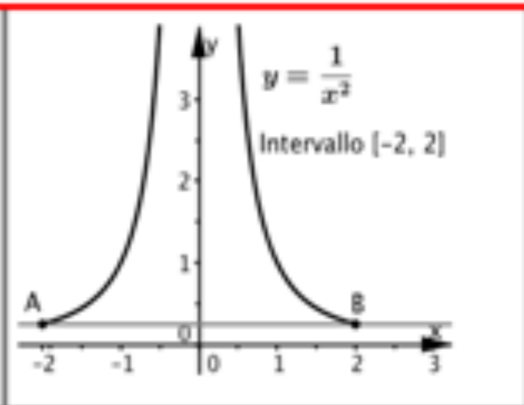
Funzioni 4,6,7

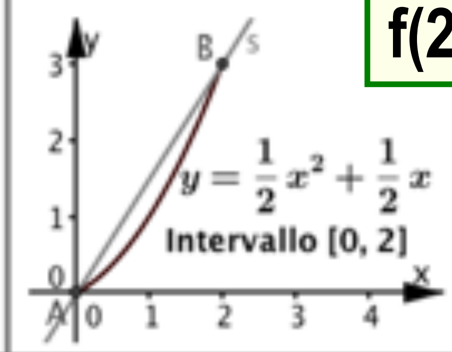
3. Associa ad ognuno dei grafici, la frase scelta fra quelle sotto le figure.

$f(0) = 0$
$f(2) = 3$

Funzione continua, ma non derivabile nel punto (0, 0).







Funzione 4	Funzione 6	Funzione 7
f. Per la funzione non è vera la 2° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.	**e.** Per la funzione non è vera la 1° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.	**d.** Per la funzione non è vera la 3° condizione del teorema di Rolle e la tesi non è vera.

Funzione con una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 0.

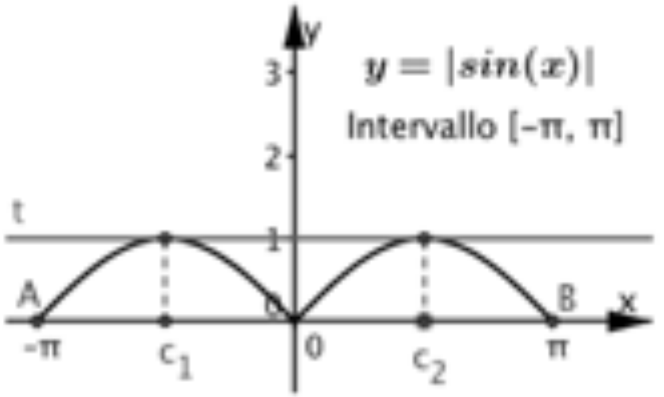
Teorema di Rolle
Se per una funzione $y = f(x)$ sono vere tutte le seguenti *ipotesi*:
1. $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$
2. $f(x)$ è derivabile all'interno dell'intervallo
3. $f(b) = f(a)$
Allora è vera la *tesi*: esiste almeno un numero c all'interno dell'intervallo, per cui risulta

$$f'(c) = 0$$

Quesiti 3 e 4

Funzione 5

3. Associa ad ognuno dei grafici, la frase scelta fra quelle sotto le figure.



4. La funzione descritta dalla frase ***g*** contraddice il teorema di Rolle? **NO**
Perché il teorema garantisce che **se** tutte le condizioni sono vere, **allora** anche la tesi è vera.
Ma non esclude che la tesi sia vera anche nel caso di qualche condizione falsa.

Funzione **5**

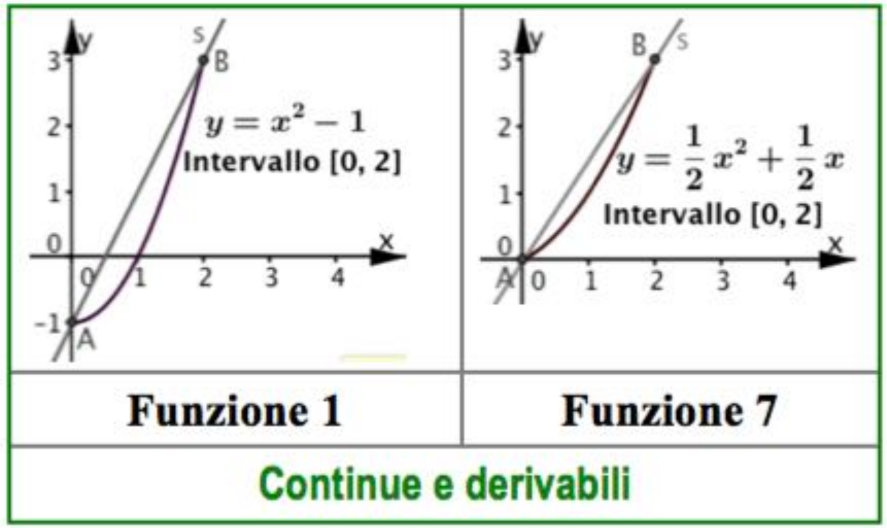
g. Per la funzione non è vera la 2° condizione del teorema di Rolle e la tesi è vera.

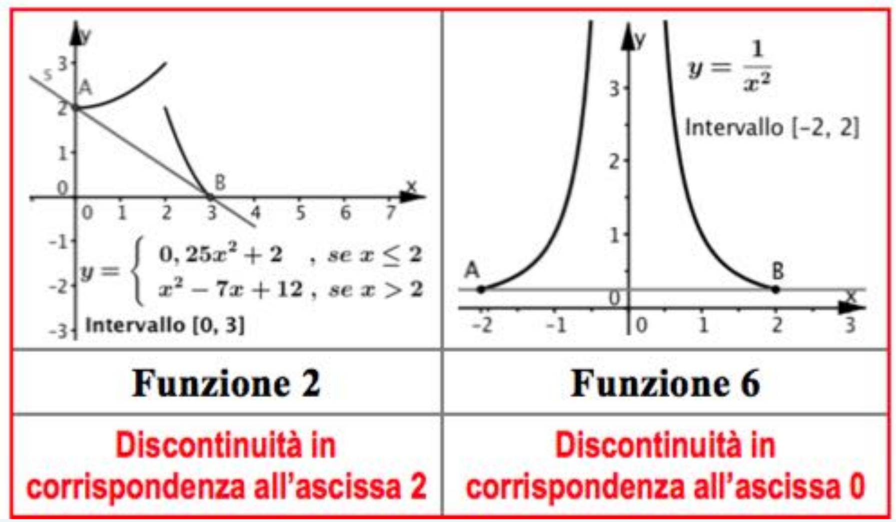
Quesiti 5, 6 e 7

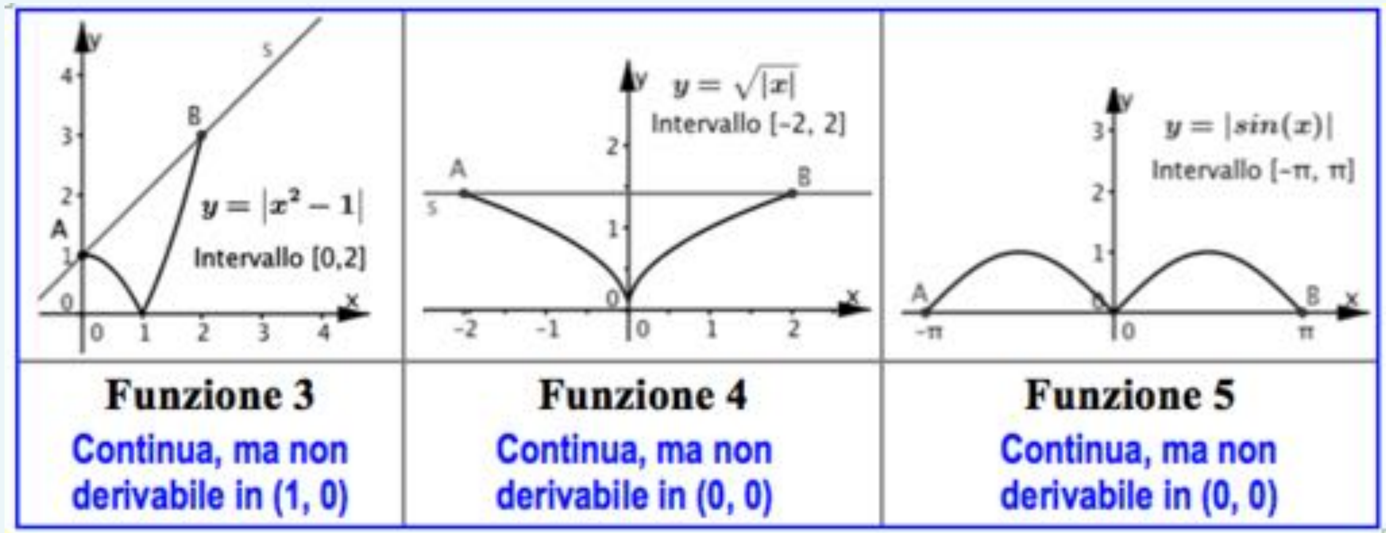
5. Quali fra le 7 funzioni date sopra sono continue e derivabili nell'intervallo dato? **1 e 7**

6. Quali fra le 7 funzioni date sopra sono continue, ma non derivabili nell'intervallo dato? **3, 4 e 5**

7. Quali fra le 7 funzioni date sopra hanno una discontinuità nell'intervallo dato? **2 e 6**







Uno sguardo alla storia

Michel Rolle

Francia 1652 - 1719

Giuseppe Lagrange

Italia 1736 - 1813

Nello sviluppo storico della matematica troviamo prima, nel 1690, il teorema di Rolle nell'ambito di studi sulla risoluzione di equazioni e, circa un secolo dopo, il teorema del valor medio di Lagrange. Vari percorsi dimostrativi intrecciano i due teoremi.