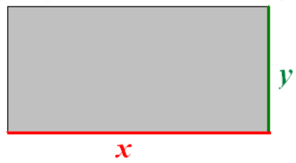
Problemi di ottimizzazione senza derivate

A. ESERCIZI GUIDATI

Non c'è solo un procedimento per trovare il rettangolo di area massima fra tutti i 'rettangoli di spago' con perimetro lungo 40cm. Negli esercizi 1 e 2 sono proposti due procedimenti diversi da quello che hai seguito nella lezione.

1. Completa il seguente procedimento



- Indica con x e y le dimensioni dei 'rettangoli di spago';
- L'area di tutti i rettangoli è S = ...
- Il semiperimetro di tutti i rettangoli è 20, perciò risulta $x + y =$ .....
- A quali limitazioni è soggetta x?.......
- Apri con Geogebra il file 'Ottimo-geo' ed esegui quello che il software ti propone.
- Rispondi alle seguenti domande.

a. Spiega perché il rettangolo rosso mantiene sempre il semiperimetro 20, mentre il punto A si muove sul segmento nero.

....

b. Perché si muove la curva blu, mentre A si muove?

....

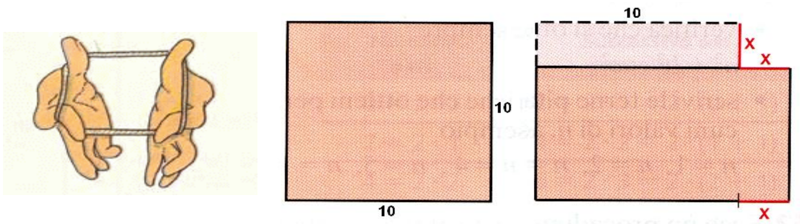
c. La curva blu incontra il segmento nero in A e in un altro punto; quale significato ha il secondo punto per il problema dello spago?..

d. Basati sulla figura per dimostrare che il quadrato ha l'area massima, fra tutti i rettangoli col perimetro lungo 40.

....

....

....



2. Osserva la figura qui sopra e completa il seguente procedimento

- Disegno il quadrato di perimetro 40.
- Per disegnare un rettangolo con lo stesso perimetro, tolgo .... e aggiungo ....
- A quali limitazioni è soggetta x? ………………
- Ottengo che l'area S del rettangolo è data da: S = ...
- Eseguo la moltiplicazione indicata e ottengo: $S = 100 - x^2$
- In quale caso S è massima? ....
- Motiva la tua risposta

....

I problemi 3, 4 e 5 ricercano un minimo, invece che un massimo.

3. Come sfondo per il palco di uno spettacolo all'aperto, vuoi realizzare una zona rettangolare colorata e delimitata da una robusta cornice di metallo.
Hai la vernice sufficiente a colorare una zona 25m^2 e devi comprare la cornice; in quale caso la cornice ha lunghezza minima?
Completa qui sotto un procedimento per risolvere il problema

- Il semiperimetro p è dato da p = …………
- L'area della zona è 25, perciò risulta xy = …….. da cui y = …..
- Esprimi il semiperimetro in funzione di x, così ottieni p = ……..
- Scegli qui sotto la limitazione corretta per la variabile x.
  A. $x \geq 0$ B. $0 \leq x \leq 25$ C. $x > 0$ D. $x < 0$
- Esegui l'addizione indicata e ottieni $p = \dfrac{\dots\dots\dots}{x}$
- Osserva che puoi scrivere: $x^2 + 25 = 10x + (x - 5)^2$ e quindi
  $$p = 10 + \frac{\dots\dots\dots}{x}$$
- Concludi che p è minimo quando aggiungi 0 a 10, cioè quando x = ….. e quindi la zona è ……………………….

4. Fra tutti i rettangoli che hanno l'area di 36cm^2, qual è quello di perimetro minimo? Motiva la risposta.

....

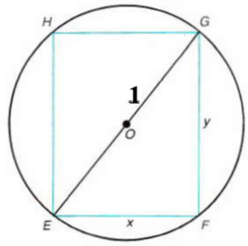
5. Due numeri hanno il prodotto costante che vale 64; in quale caso la loro somma è minima? Motiva la risposta

....

B. ESERCIZI PROPOSTI

6. La funzione qui sotto è definita per tutti gli x reali da
$$y = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determina il minimo della funzione. [*Da un quesito dato all'Esame di Stato 2015*]

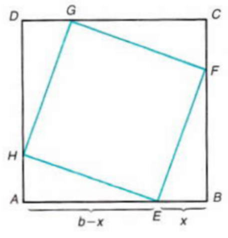
7. Un oggetto viene lanciato verso l'alto e $h = 40t - 2t^2$ è la legge del suo moto, con la quota h espressa in metri e il tempo in secondi. Determina la quota massima raggiunta dall'oggetto. [*Quesito 9, Simulazione MIUR del 10/12/2015*]



8. Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio 1 determina quello di area massima.

9. Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio 1 determina quello di perimetro massimo.

10. In un quadrato di lato ***b*** inscrivi il quadrato di area minima.



11. Determina il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0). [*Quesito 2, Esame di Stato 2011*]