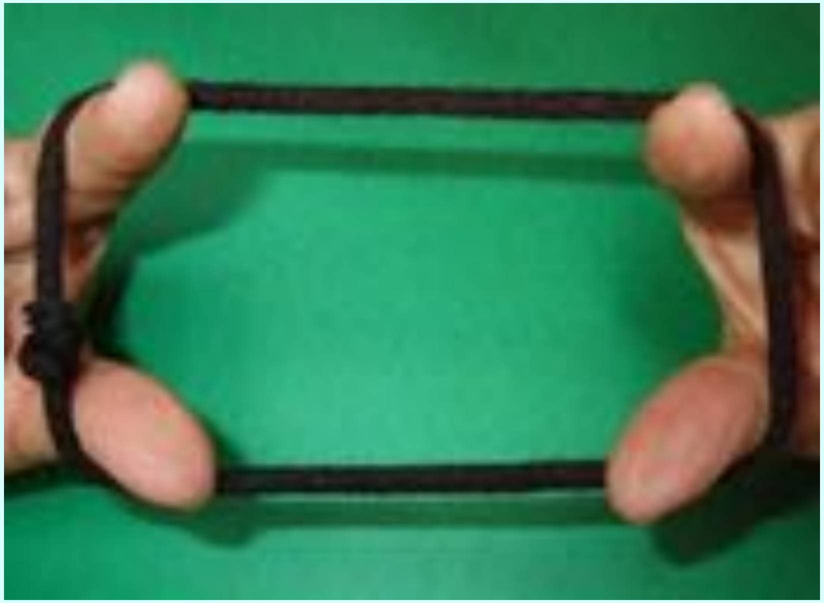
Un problema ‘classico’

Un filo metallico di lunghezza *L* viene utilizzato per delimitare il perimetro di un’aiuola rettangolare.

Qual è l’aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Un semplice esperimento

Uno spago lungo 40 cm aiuta a ‘vedere’ il filo che delimita tante aiuole rettangolari



Video: lo spago in movimento

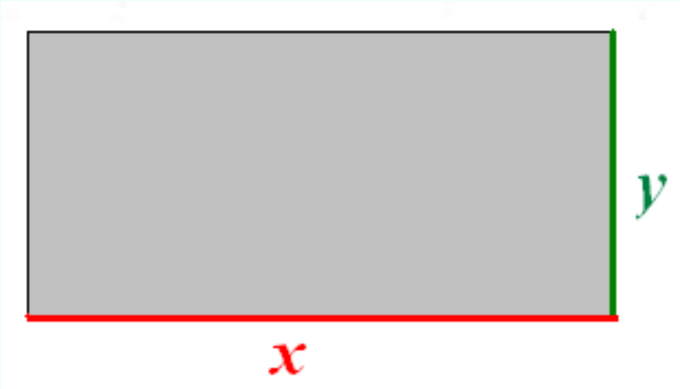
L’area dei rettangoli varia

L’area parte da 0, quando l’altezza è 0, poi aumenta, ma arrivati a un certo punto comincia a diminuire, per tornare a 0, quando la base è 0.

Si intuisce che l’area è massima nel caso del quadrato.

Come posso dimostrare questa congettura?

Con la geometria analitica



$0 \leq x \leq 20$

L'area *S* del rettangolo è data da:

$$S = xy$$

Con semiperimetro 20 e perciò

$$x + y = 20 \quad \text{da cui} \quad y = 20 - x$$

Esprimo l'area S in funzione della sola *x*.

$$\boxed{S = x(20 - x)}$$

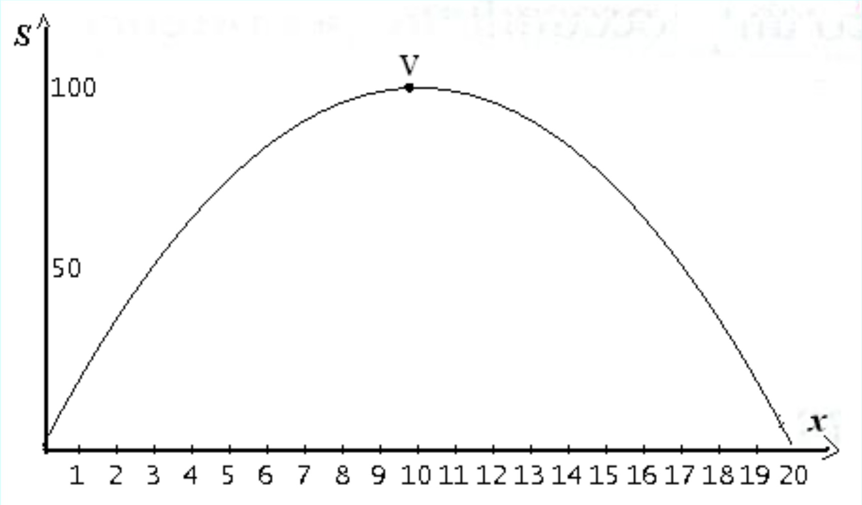
Daniela Valenti, 2022

Il grafico

Eseguo la moltiplicazione indicata e scrivo la funzione 'area *S* variabile al variare di *x*'

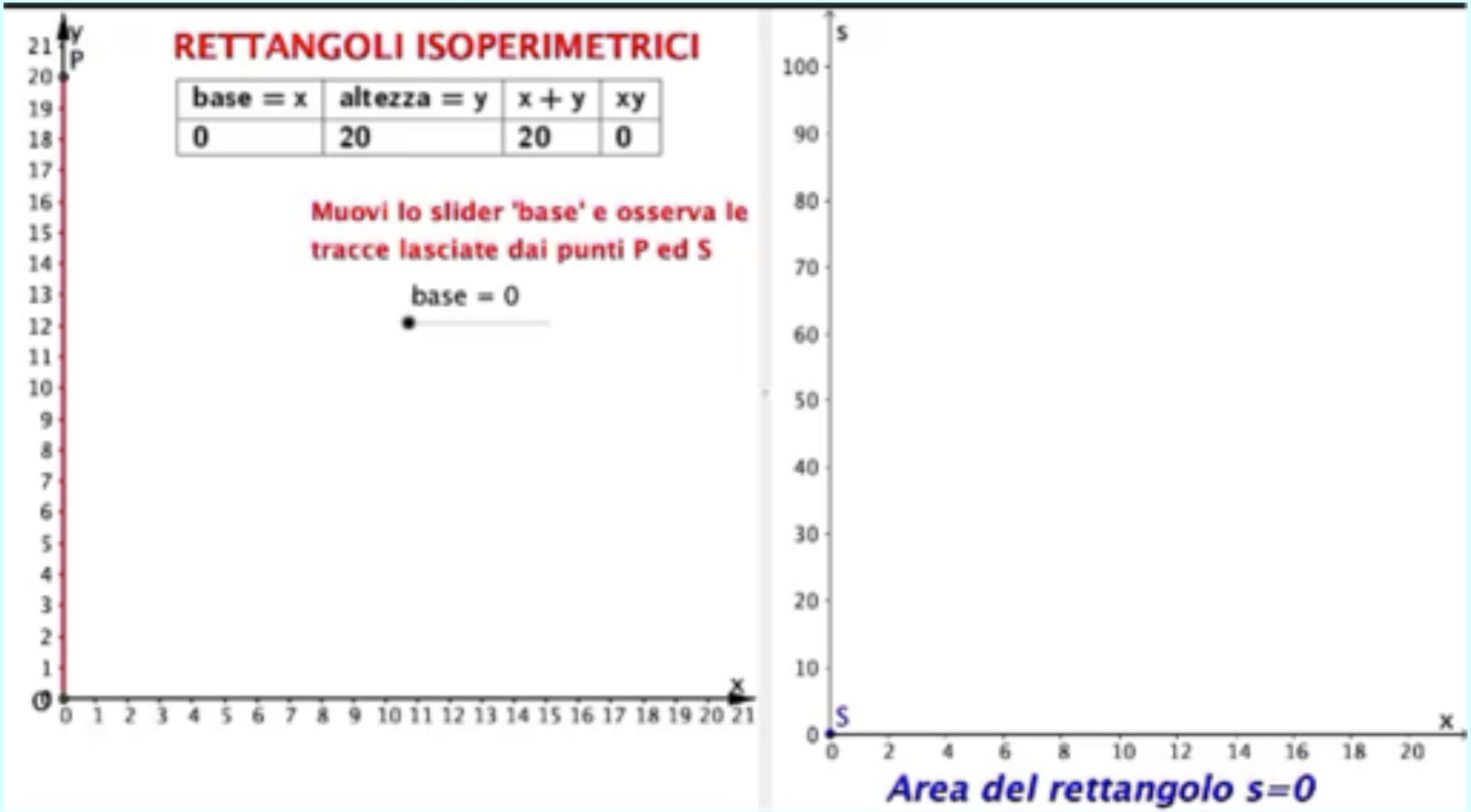
$$S = -x^2 + 20x \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 20$$

Arco di parabola con vertice V(10, 100)



***S* massima è 100, raggiunta per *x* = 10, caso del quadrato con i lati tutti lunghi 10. Basta ragionare per simmetria.**

Una simulazione con Geogebra



Il perimetro deve essere 40?

Nel video i rettangoli avevano il perimetro lungo, in centimetri, 40.
Se il perimetro è lungo 16 o 30 o 80, … cambia la dimostrazione? NO!

Infatti, nel problema trovo:
‘*Un filo metallico di lunghezza L …*’

Il perimetro è indicato con una lettera (*L*) per ricordare che può essere scelto a piacere, senza però cambiarlo mentre risolvo il problema.

In conclusione

Ho dimostrato che:

L'aiuola quadrata ha area massima fra tutte le aiuole rettangolari delimitate da un filo lungo L.

La conclusione con il linguaggio della geometria.

Il quadrato ha area massima fra tutti i rettangoli che hanno un dato perimetro.

La conclusione con il linguaggio dell'aritmetica.

Il prodotto di due numeri con somma costante è massimo quando due numeri sono uguali.

Problemi di ottimizzazione

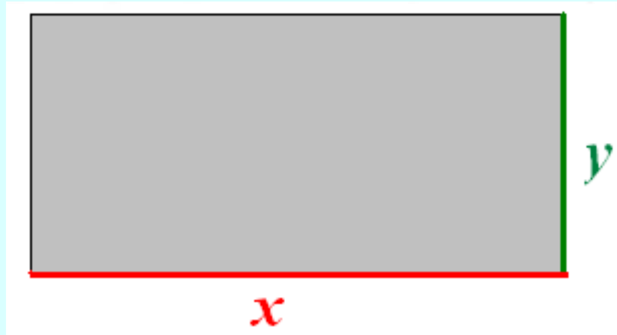
Abbiamo così risolto un problema di ottimizzazione da sintetizzare così:

Determinare la zona di area massima fra tutte le zone rettangolari che posso recintare con una rete lunga L.

Oppure

Determinare il rettangolo di area massima fra tutti i rettangoli con perimetro lungo L.

Riflessione sul procedimento



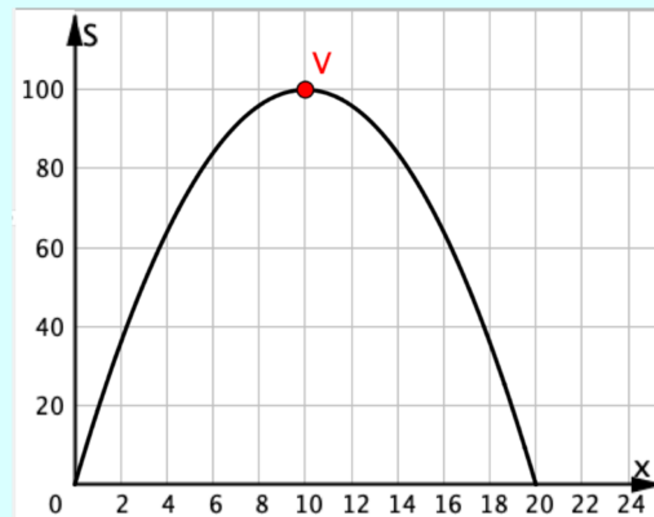
$0 \leq x \leq 20$

Due passi importanti

1. **Ho scritto la funzione 'area S variabile al variare di x'.**

$$S = -x^2 + 20x \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 20$$

2. **La funzione ha per grafico una parabola con concavità verso il basso, perciò S è massima in corrispondenza al vertice V.**



Il massimo dell'area S è 100, raggiunto per x = 10.