Problemi di ottimizzazione
Risposte e commenti all’attività

Quesito 1

Completa la soluzione del seguente problema

Una ditta produce scatole a base quadrata come quella nella figura a fianco. Una scatola deve avere un volume di 125cm³; in quale caso produce la scatola con la minima quantità di cartone?

La scatola ha la forma di un parallelepipedo a base quadrata. La scatola prodotta con la minima quantità di cartone è quella con superficie totale S minima.

1. Indica sulla figura:
   - il lato di base che ha lunghezza variabile x
   - l'altezza, che ha lunghezza variabile h

Quesiti 2 e 3

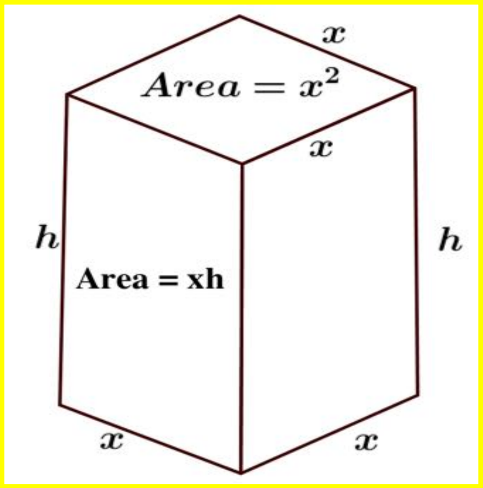
2. Spiega perché le seguenti formule esprimono il volume V e la superficie totale S del parallelepipedo in funzione di x ed h.

$V = x^2h$ $\qquad$ $V =$ Area di base $(x^2) \times$ altezza (h)

$S = 2x^2 + 4xh$ $\qquad$ $S =$ Area di 2 basi + area di 4 rettangoli

3. Spiega perché, nel problema assegnato, V ed h sono legate dalla relazione $h = \dfrac{125}{x^2}$

$$\left.\begin{aligned} V &= x^2h \\ V &= 125 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 125 = x^2h \Rightarrow h = \frac{125}{x^2}$$



Quesiti 4 e 5

4. Spiega perché, nel problema assegnato, la superficie totale y varia al variare di x con la legge

$$y = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 2x^2 + 4xh \\ h = \dfrac{125}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S = 2x^2 + 4\cancel{x} \cdot \frac{125}{x^2} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

5. Se pensi geometricamente al parallelepipedo, quali valori può assumere x? Tutti i numeri reali positivi

In simboli: $x > 0$ oppure $x \in R^+$

Indica il dominio della funzione ottenuta: R^+

Quesito 6

6. Spiega perché la derivata della funzione è

$$y' = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$$ con dominio R^+

Calcolo la derivata della funzione $y = 2x^2 + \frac{500}{x}$

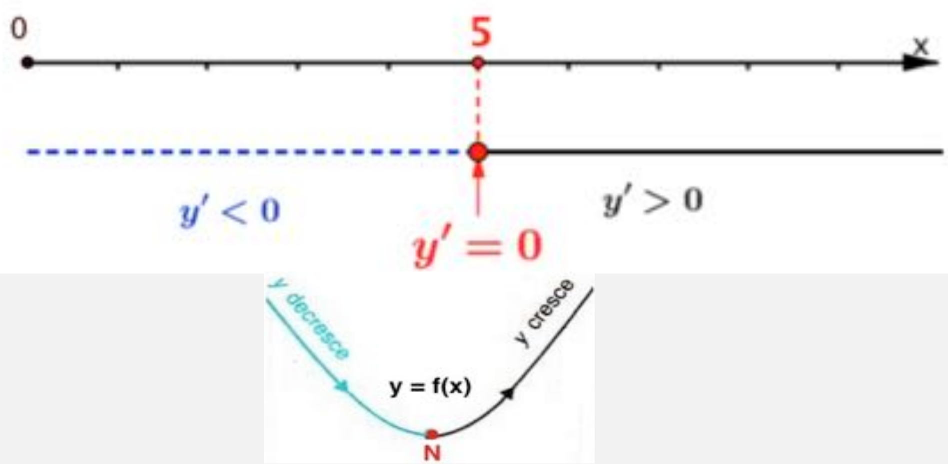
che avrà lo stesso dominio R^+ della funzione

$$y' = 2 \cdot 2x + 500 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2} = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$$

Quesiti 7, 8, 9 e 10

7. Quale fra i seguenti schemi rappresenta correttamente lo studio del segno di y'?

Schema C



$$y' = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^2 + 5x + 25\right)}{x^2}(x-5)$$

con $x \in R^+$, ha lo stesso segno di $x - 5$

8. Qual è lo spigolo x che rende minima la superficie totale? $x_{min} = 5$

9. Quanto vale l'altezza h che rende minima la superficie totale?

$h_{\min} = \frac{125}{5^2} = 5$ Il contenitore è il cubo con lo spigolo lungo 5cm.

10. Quanto vale (in cm²) la superficie minima? $S_{\min} = 6 \cdot 5^2 = 150$

Generalizzare il problema

La ditta produce scatole con volumi diversi e ha bisogno di costruire, per ogni volume V, la scatola con la minima quantità di cartone. Come risolvi questo problema?

Sostituisco la lettera V al numero 125 e ripeto il procedimento.

Ottengo la funzione $y = 2x^2 + \frac{4V}{x}$ con dominio R^+

La derivata è $y' = 4\left(\frac{x^3 - V}{x^2}\right)$ con dominio R^+

La scatola con superficie totale minima è il cubo con lo spigolo lungo (in centimetri) $\sqrt[3]{V}$.

Attenzione!
La lettera V indica il volume, che rimane costante in questo procedimento.

Vocabolario matematico

Ottimizzazione

I due problemi esaminati sono due esempi di una vasta categoria di problemi, che hanno il nome collettivo di *'Problemi di ottimizzazione'*:

- **nel primo problema, *la scatola ottima* è quella con volume massimo, perché siamo interessati a inserire nelle scatole il maggior contenuto possibile;**

- **nel secondo problema, *la scatola ottima* è quella con superficie totale minima, perché siamo interessati a costruire scatole con minor spesa possibile.**

Ottimizzazione oggi

Problemi di ottimizzazione sono oggi studiati nei più vari settori. Ecco qualche esempio:

- **massimizzare i guadagni e minimizzare i costi in economia, sia aziendale che nazionale e internazionale;**
- **ottimizzare la distribuzione di ripetitori, antenne, centrali elettriche, pozzi petroliferi, ... in ingegneria;...**

Alessio Figalli
Roma 1984

Medaglia Fields per la matematica 2018

Studi per ottimizzare i trasporti

Karen Uhlenbeck
USA 1942

Premio Abel 2019

Studi su superfici minime