**Idee per la prova di matematica all’esame di Stato 2022**

**Proposte basate su: grafico di polinomi o quoziente di polinomi, retta tangente, ottimizzazione e calcoli con derivate**

**PROPOSTA 1**

***Problema 1***

Utilizzo un filo metallico lungo 20 metri per recintare una zona rettangolare.

1. Qual è la zona di area massima che posso recintare?

Taglio in due parti un altro filo metallico, sempre lungo 20 metri, per recintare due zone: una quadrata e una circolare. Spiega come debbo tagliare il filo per ottenere:

1. che la somma delle due aree sia minima;
2. che la somma delle due aree sia massima.

***Problema 2***

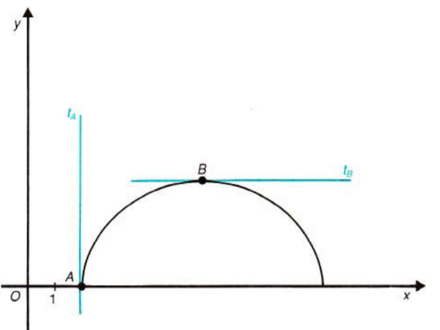
È data la curva grafico della funzione

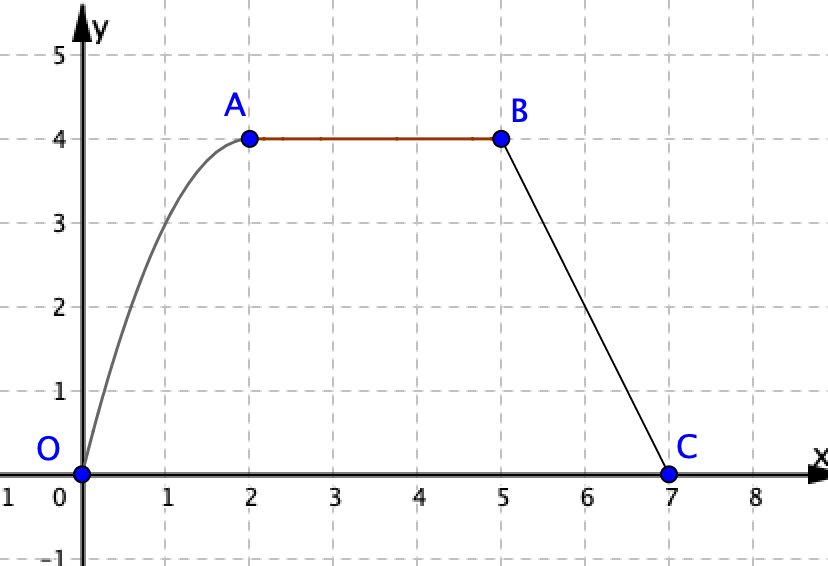


Risolvi i seguenti quesiti:

1. traccia il grafico della curva;
2. scrivi le equazioni delle tangenti alla curva nei suoi punti P(–2, 1) e Q(2, 1);
3. disegna il quadrilatero convesso individuato dalle tangenti con le rette PO e OQ;
4. dimostra che il quadrilatero è un rombo;
5. determina, in gradi e primi sessagesimali, gli angoli del rombo.

***Quesiti***

1. Stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere (**V**) e quali false **(*F***) per la la funzione rappresentata nella figura qui sotto.
2. La funzione non è derivabile nel punto B, perché la tangente è parallela all’asse delle *x*;\_\_
3. La derivata della funzione nel punto B vale zero, perché la tangente è parallela all’asse delle *x*; \_\_
4. La funzione non è derivabile nel punto A, perché la tangente è parallela all’asse delle *y*;\_\_
5. La derivata della funzione nel punto A vale zero, perché la tangente è parallela all’asse delle *y.* \_\_
6. Determina il parametro *k* in modo che il grafico della funzione 𝑓(𝑥) = 𝑘𝑥3 − 𝑥 + 4 abbia nel punto di ascissa 1 la tangente parallela all’asse delle *x*.
7. Sono date le funzioni *f*(*x*) = e*x* e *g*(*x*) = ln(*x*). Fissata un’ascissa *a* > 0, considera le rette *r* ed *s* tangenti a *f* e *g* nei rispettivi punti di ascissa *a* e dimostra che esiste una sola ascissa *a* per la quale *r* ed *s* sono parallele.
8. Spiega perché hanno la stessa derivata le funzioni *f*(*x*) = 4ln(*x*) e .
9. È data la funzione *f*(*x*) rappresentata nella figura qui sotto, dove trovi l’arco OA di parabola di equazione *y* = –*x*2 + 4*x* e i punti A(2, 4), B(5, 4), C(7, 0). Traccia il grafico della funzione *f’*(*x*).



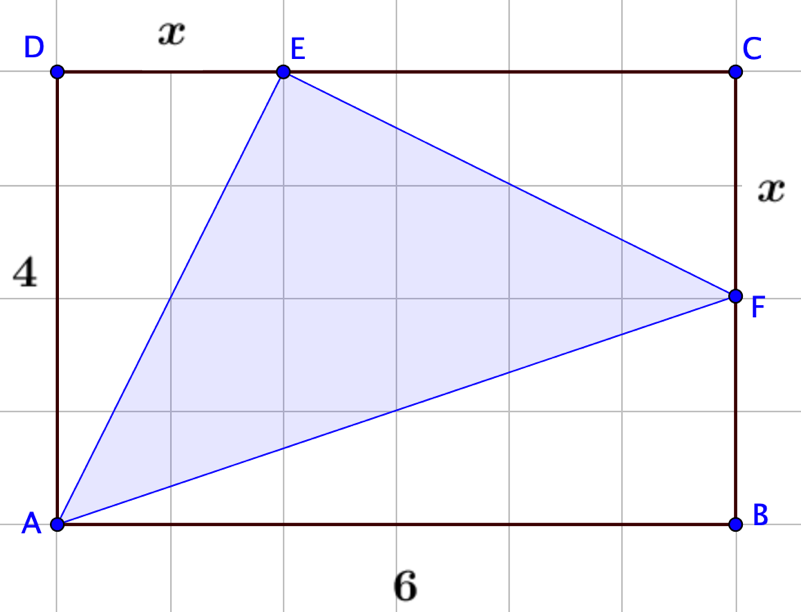
1. È data una funzione *y* = *f*(*x*) e il suo punto P di ascissa *x* = 2, scegli qui sotto l’affermazione corretta
2. Se risulta , la funzione non è derivabile nel punto P.
3. Se risulta , la tangente alla curva nel punto P è parallela all’asse *x.*
4. Se risulta , la funzione non è derivabile nel punto P.
5. Se risulta , la tangente alla curva nel punto P è parallela all’asse *y*
6. Dimostra che la derivata di una funzione pari è dispari e porta un esempio di funzione pari con la sua derivata.
7. Un foglio di carta deve contenere: un’area di stampa di 50 cm2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che posso utilizzare?

**PROPOSTA 2**

***Problema 1***

Nella figura qui sotto un triangolo AEF è inscritto in un rettangolo ABCD con le dimensioni lunghe 4 cm e 6 cm. Al variare di *x* il punto E si muove lungo CD, mentre il punto F si muove lungo BC. Osserva come varia l’area *S* del triangolo AEF e rispondi ai seguenti quesiti:

1. Quanto vale l’area S se *x* vale 0?
2. Quanto vale l’area S se *x* vale 4?
3. Spiega perché l’area S, al variare di *x* è descritta dall’espressione
4. Per quale valore di *x* ottengo l’area S minima?

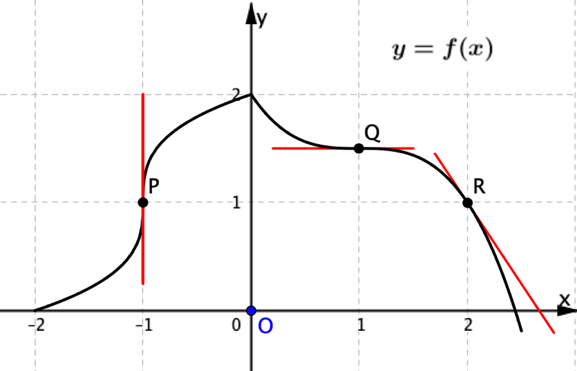


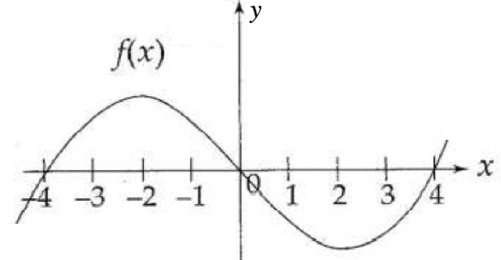
***Problema 2***

È data la curva grafico della funzione

Risolvi seguenti quesiti:

1. traccia il grafico della curva;
2. scrivi l’equazione della tangente ***t*** e della normale ***n*** alla curva nel suo punto P d’ascissa 2;
3. scrivi le equazioni delle rette ***t’***e ***t”*** che sono tangenti alla curva ed hanno un’inclinazione di 135° e calcola le coordinate dei punti di contatto;
4. scrivi le equazioni delle rette ***t*1**e ***t*2** tangenti alla curva condotte dal punto **A**(4,0) e calcola le coordinate dei punti di contatto **T1** e **T2;**
5. scrivi l’equazione della retta ***r*** che congiunge **T1** con **T2**; disegna del triangolo determinato dalle rette ***r***, ***t*1**e ***t*2** ecalcola le ampiezze dei suoi angoli.

***Quesiti***

1. Esaminala funzione *y* = *f*(*x*) rappresentata nella figura a fianco e scegli l’affermazione corretta.
2. Nel punto P la derivata è positiva;
3. Nel punto Q la funzione non è derivabile;
4. Nel punto P la derivata vale zero;
5. Nel punto R la derivata è negativa.
6. Dimostra che la derivata di una funzione dispari è pari e porta un esempio di funzione dispari con la sua derivata.
7. È data la funzione *f*(*x*) = log*b*(*x*) e α è l’inclinazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base *b* è α = 45°? E per quale valore di *b* è α = 135°?
8. La figura a fianco rappresenta il grafico di *f*(*x*); quale dei grafici nelle figure qui sotto potrebbe essere il grafico di *f’*(*x*)? …….  
   Motiva la tua risposta.

|  |  |
| --- | --- |
| **A** | **B** |
| **C** | **D** |

1. È data una funzione *y* = *f*(*x*) e il suo punto P di ascissa *x* = 3, scegli qui sotto l’affermazione corretta
2. Se risulta , la tangente alla curva nel punto P è parallela alla retta d’equazione *y* = *x.*
3. Se risulta , la tangente alla curva nel punto P è parallela all’asse *x.*
4. Se risulta , la funzione non è derivabile nel punto P.
5. Se risulta , la tangente alla curva nel punto P è parallela all’asse *y.*
6. Un foglio di carta deve contenere: un’area di stampa di 80 cm2, margini superiore e inferiore di 3 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che posso utilizzare?
7. Calcola la derivata della funzione *f*(*x*) = *arcsenx + arcosx*. Quali conclusioni puoi trarre per la *f*(*x*)?
8. Stabilisci per quale valore di *k* il grafico della funzione ha una sola tangente parallela alla retta d’equazione *y* = *x*. Quante tangenti parallele all’asse delle *x* ha il grafico della funzione per il valore di *k* che hai ottenuto?

**PROPOSTA 3**

***Problema 1***

Sono date le curve grafici delle funzioni

e

Risolvi i seguenti quesiti:  
**a.** traccia il grafico delle due curve;

**b**. verifica che le due curve si incontrano nel punto A(1, 1);  
**c.** calcola l’ampiezza ***γ***  dell’angolo fra le due curve nel punto A;

**d.** scrivi le equazioni delle due tangenti in A e rappresentale, insieme al grafico delle curve;

**e.** determina l’equazione della retta tangente ***t*** ad *f*(*x*) che ha un’inclinazione di 45°, precisa le coordinate del punto di contatto T e rappresenta la retta sul grafico.

***Problema 2***

È data la funzione *f*(*x*) = *x***3** – 1. Risolvi i seguenti quesiti:

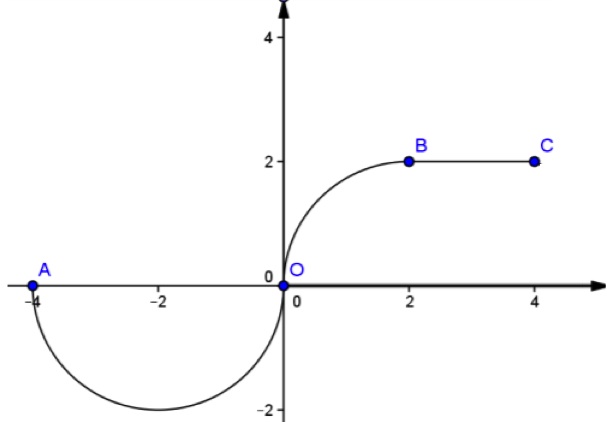
1. traccia il grafico della funzione;
2. scrivi le equazioni della tangente ***t*** e della normale ***n*** al grafico della funzione nel pun­to A d’ascissa 1; accompagna la risposta con un accurato grafico;
3. determina le coordinate dei punti T**1** e T**2** della curva in cui la tangente è parallela alla retta ***r*** d’equazione (T**1** è il punto di ascissa positiva), scrivi le equa­zio­ni delle rette ***t1*** e ***t2*** tangenti alla curva in tali punti e accompagna lo svolgimen­to del quesito con un accurato grafico;
4. determina le equazioni delle rette ***t3*** e ***t4*** che sono tangenti alla curva e passano per il punto P; indica con T**3** e T**4** i punti di contatto;
5. determina gli angoli triangolo P T**3** T**4** e accompagna le risposte con un accurato grafico;

***Quesiti***

**1**. Una coppia di numeri reali non negativi ha il prodotto che vale 15; in quale caso la somma dei numeri è minima?

1. Scrivi l’equazione della tangente ***t*** e della normale ***n*** al grafico della funzione nel suo punto A di ascissa 0.
2. Determina il parametro ***k*** in modo che il grafico della funzione

abbia la retta tangente nel suo punto O(0,0) con un’inclinazione di radianti.

1. Dimostra che la derivata di una funzione periodica con periodo T è una funzione periodica con lo stesso periodo e porta un esempio di funzione periodica con la sua derivata.
2. La funzione *f*(*x*) ha il grafico disegnato a lato, che passa per i punti A(–4, 0), O(0, 0), B(2, 2), C(4, 2) ed è formato da:

- la semicirconferenza di diametro AO;  
- l’arco OB, quarto di circonferenza di raggio 2;

- il segmento BC.

Rispondi ai seguenti quesiti:

**a.** *f*(*x*) è derivabile in A? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

**b.** *f*(*x*) è derivabile in O? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

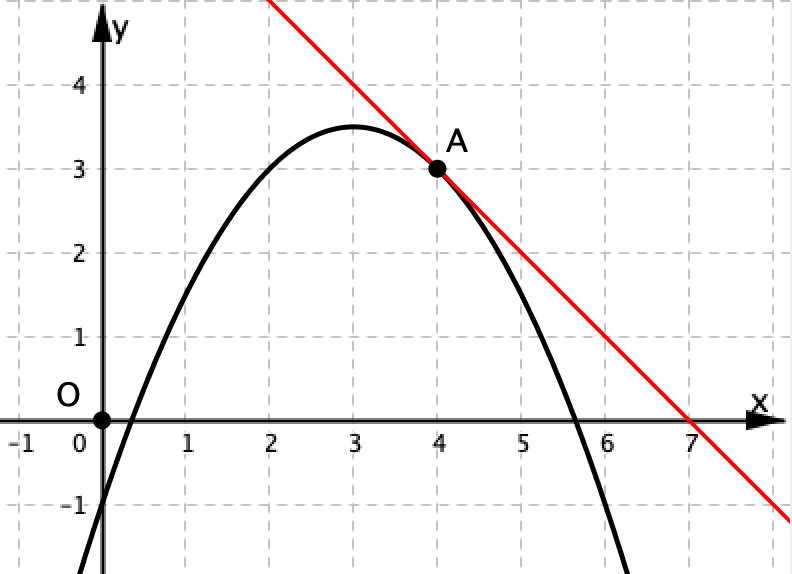
**c.** *f*(*x*) è derivabile in B? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

1. Se la funzione *f*(*x*) − *f*(2*x*) ha derivata 6 in *x* = 1 e derivata 8 in *x* = 2, qual è la derivata di *f*(*x*) − *f*(4*x*) in *x* = 1?
2. Determina i parametri ***h*** e ***k*** in modo che la curva grafico della funzione

passi per il punto A(1, 3) e sia ivi tangente alla retta ***t*** d’equazione *y* = –4*x* + 7.

1. La figura qui sotto mostra il grafico della funzione *f*(*x*) e della retta d’equazione *y* = –*x* + 7. La retta è tangente alla curva nel suo punto A di ascissa 4.   
   Rispondi ai seguenti quesiti:
2. quanto vale *f*(4)?\_\_\_\_
3. quanto vale la derivata di *f* in *x* = 4, cioè *f’*(4)?\_\_\_



**PROPOSTA 4**

***Problema 1***

È data la funzione *f*(*x*) = *x*4 – 2*x*3 – 1. Risolvi i seguenti quesiti:

1. traccia il grafico della funzione;

**b.** scrivi l’equazione della tangente tA al grafico nel suo punto A di ascissa 1 e rappresenta tA nel grafico;

**c.** determina le coordinate del punto B, ulteriore intersezione di tA con la curva.

**d.** determina le coordinate dei punti della curva che hanno la tangente parallela all’asse delle *x*;

**e.** scrivi le equazioni delle tangenti nei punti determinati nel quesito precedente.

***Problema 2***

Sono date le curve grafici delle funzioni

e

Risolvi i seguenti quesiti:  
**a.** traccia il grafico delle due curve;

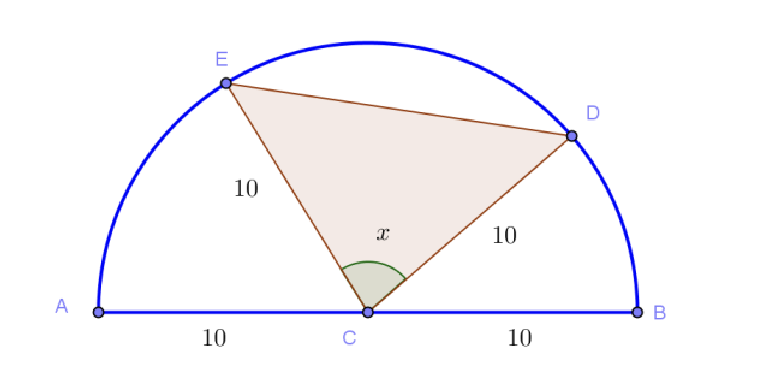
**b**. verifica che le due curve si incontrano nel punto A(1, 0);  
**c.** calcola l’ampiezza ***γ***  dell’angolo fra le due curve in tale punto di intersezione;

**d.** scrivi le equazioni delle due tangenti in A e rappresentale, insieme al grafico delle curve;

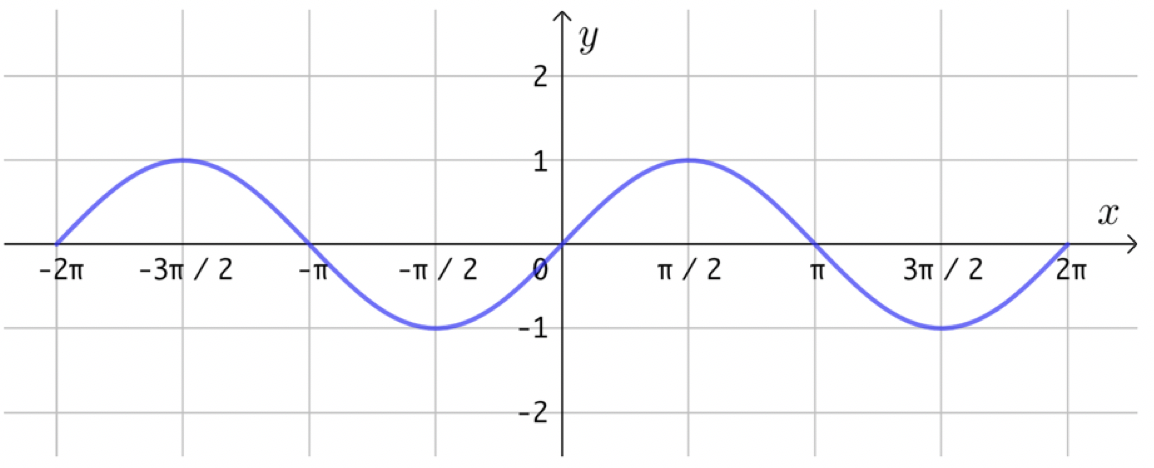
**e.** calcola l’inclinazione della tangente al grafico di *f*(*x*) nel punto di intersezione B con l’asse delle *y*.

***Quesiti***

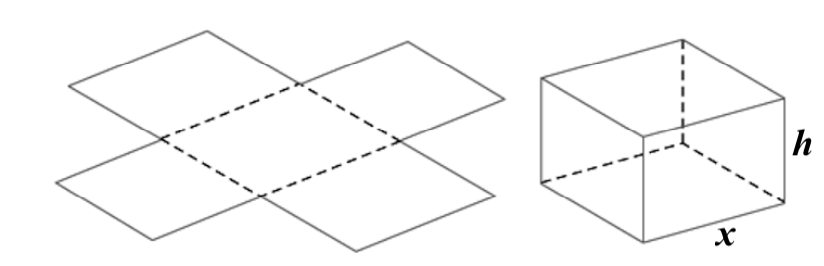
1. Scegli un procedimento rapido per derivare la funzione *f*(*x*) =
2. Spiega perché hanno la stessa derivata le funzioni *f*(*x*) = ln(*x*) e .
3. Determina il parametro reale 𝑎 in modo che i grafici di 𝑦 = 𝑥2 e *y* = −𝑥2 + 4𝑥 − 𝑎,  
   risultino tangenti e stabilisci le coordinate del punto di tangenza.
4. Data la famiglia di funzioni *𝑦 = − x*3 *+ kx,* trova la funzione tangente nel suo punto di ascissa 1 ad una retta parallela alla retta *y* = *x*. Determina l’equazione della tangente.
5. Nella figura qui sotto il triangolo CDE è inscritto nel semicerchio con il raggio lungo 10 cm. Qual è l’area massima che può assumere il triangolo CDE?



1. Stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere (**V**) e quali false **(F**) per la funzione *y* = sen(*x*) rappresentata qui sotto nell’intervallo [–2π, 2π]



1. Nell’origine la tangente al grafico ha equazione *y* = *x*\_\_\_
2. Nell’intervallo [4, 5] la funzione è positiva. \_\_\_
3. Nell’intervallo [0, 2π] esistono punti in cui la tangente al grafico ha la pendenza   
   *m* = –0.5 \_\_\_
4. Nell’intervallo [0, π] la funzione è sempre crescente. \_\_\_
5. Una scatola aperta a base quadrata deve avere un volume di 550 cm3; trova le dimensioni della scatola che può essere costruita con la minima quantità di cartone.



1. Determina il parametro *b* in modo che il grafico della funzione

abbia la retta tangente nel suo punto O(0,0) con un’inclinazione di radianti.