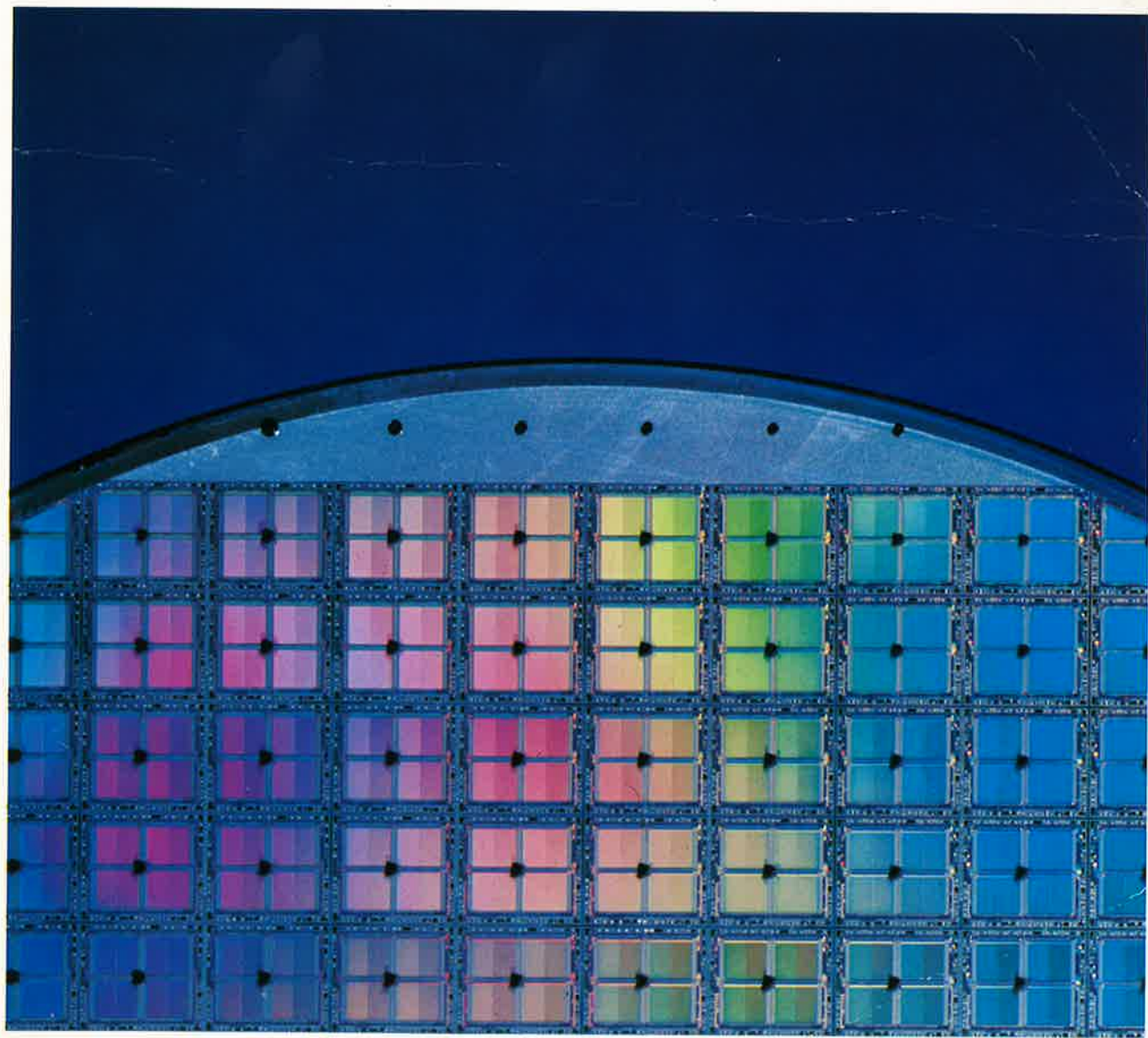


La Nuova Italia



# Castelnuovo/Gori Giorgi/Valenti Matematica oggi 2



# Matematica oggi







---

© Copyright 1992  
by La Nuova Italia Editrice, Scandicci (Firenze)  
Printed in Italy  
1<sup>a</sup> edizione: marzo 1992  
1<sup>a</sup> ristampa: gennaio 1993  
3<sup>a</sup> ristampa: maggio 1995

Copertina e progetto grafico: Marco Capaccioli, C.D. & V., Firenze  
Videoimpaginazione e disegni: Studio Marabotto, Roma  
Redazione: Paolo M. Mazzoni, Roberto Rugi

Fotocomposizione: Lino 2, Città di Castello (Perugia)  
Riproduzione fotolitiche: La Zincotecnica, Firenze  
Stampa: Lito Terazzi, Firenze

ISBN 88-221-1085-4

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDROS), via delle Erbe, 2 - 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010863



---

Emma Castelnuovo / Claudio Gori Giorgi / Daniela Valenti

# Matematica oggi

## 2

Corso di matematica  
per il biennio della scuola secondaria superiore

La Nuova Italia



## I NUMERI IRRAZIONALI



1.  
Il teorema di Pitagora

**Scheda storica.**

Il teorema di Pitagora  
prima di Pitagora

2.  
Il primo teorema di Euclide

3.  
Il secondo teorema di Euclide

**Attività.**

Applicare i teoremi di Pitagora  
e di Euclide

4.  
Dalla geometria alla scoperta  
dei numeri irrazionali

5.  
I radicali quadratici

6.  
I radicali: il caso generale

7.  
Potenze a esponente frazionario

**Attività.**

Le radici con il calcolatore tascabile

8.  
Proprietà delle potenze  
e calcoli con i radicali

**Attività.**

Potenze e prodotti di radicali

**Sintesi.**

Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**

Che cosa bisogna saper fare



# 1

## Il teorema di Pitagora

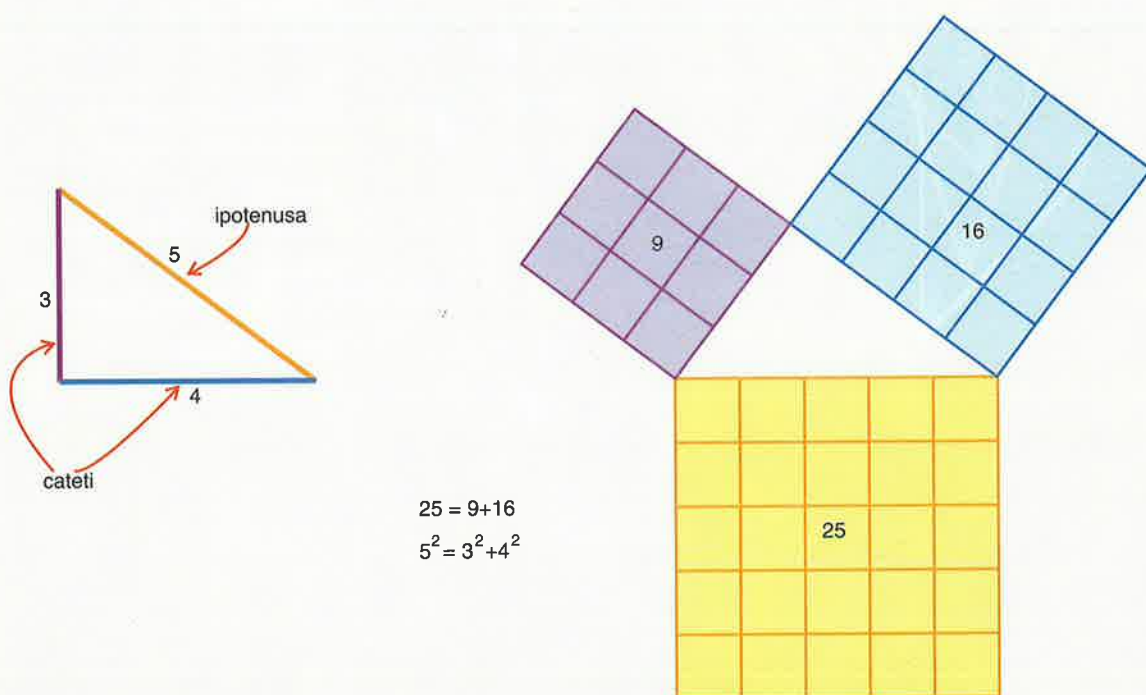
### Il teorema di Pitagora

Il *teorema di Pitagora* esprime la proprietà del triangolo rettangolo illustrata in fig. 1: *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei*

*quadrati costruiti sui cateti.*

La scoperta di questa proprietà è attribuita a *Pitagora*, matematico greco del VI secolo a.C. Per gli antichi greci la parola *teorema* significava «riflessione, osservazione» e quindi «scoperta di proprietà geometriche».

**Figura 1**  
Il teorema di Pitagora in un caso particolare



## Una dimostrazione del teorema di Pitagora

Non si sa come Pitagora sia arrivato a questa proprietà, perché nulla è rimasto delle sue opere; ma sembra che la proprietà sia stata scoperta in qualche triangolo rettangolo particolare (fig. 1). Successivamente si è trovato un ragionamento per spiegare perché la proprietà fosse valida per tutti i triangoli rettangoli.

Questo ragionamento, che prende anche il nome di *dimostrazione*, potrebbe essere quello illustrato in fig. 2, dove due quadrati di area  $Q$  vengono scomposti in due modi diversi.

- I. Si tolgono da  $Q$  quattro triangoli di area  $T$  e si ottiene (fig. 2a) il quadrato di area  $C$ ; cioè si ha:

$$C = Q - 4T \quad (1)$$

- II. Si tolgono da  $Q$  i quattro triangoli  $T$  disposti diversamente (fig. 2b) e così rimangono due quadrati di area  $A$  e  $B$ ; perciò si trova anche:

$$Q - 4T = A + B \quad (2)$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene allora:

$$C = A + B$$

Rappresentando i quadrati di area  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in un'unica figura (fig. 2c) si nota che:

-  $C$  è l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa;

-  $A$  e  $B$  sono le aree dei quadrati costruiti sui due cateti.

Si conclude così che *in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'ipotenusa ha l'area  $C$  che è uguale alla somma delle aree  $A$  e  $B$  dei quadrati costruiti sui cateti.*

E questo è il teorema di Pitagora, esposto, o meglio *enunciato*, in una forma solo apparentemente diversa da quella data all'inizio.

### Il teorema di Pitagora vale solo per i triangoli rettangoli

Il teorema di Pitagora *non* vale per un triangolo che *non* è rettangolo; per rendersene conto basta osservare i tre triangoli isosceli con la

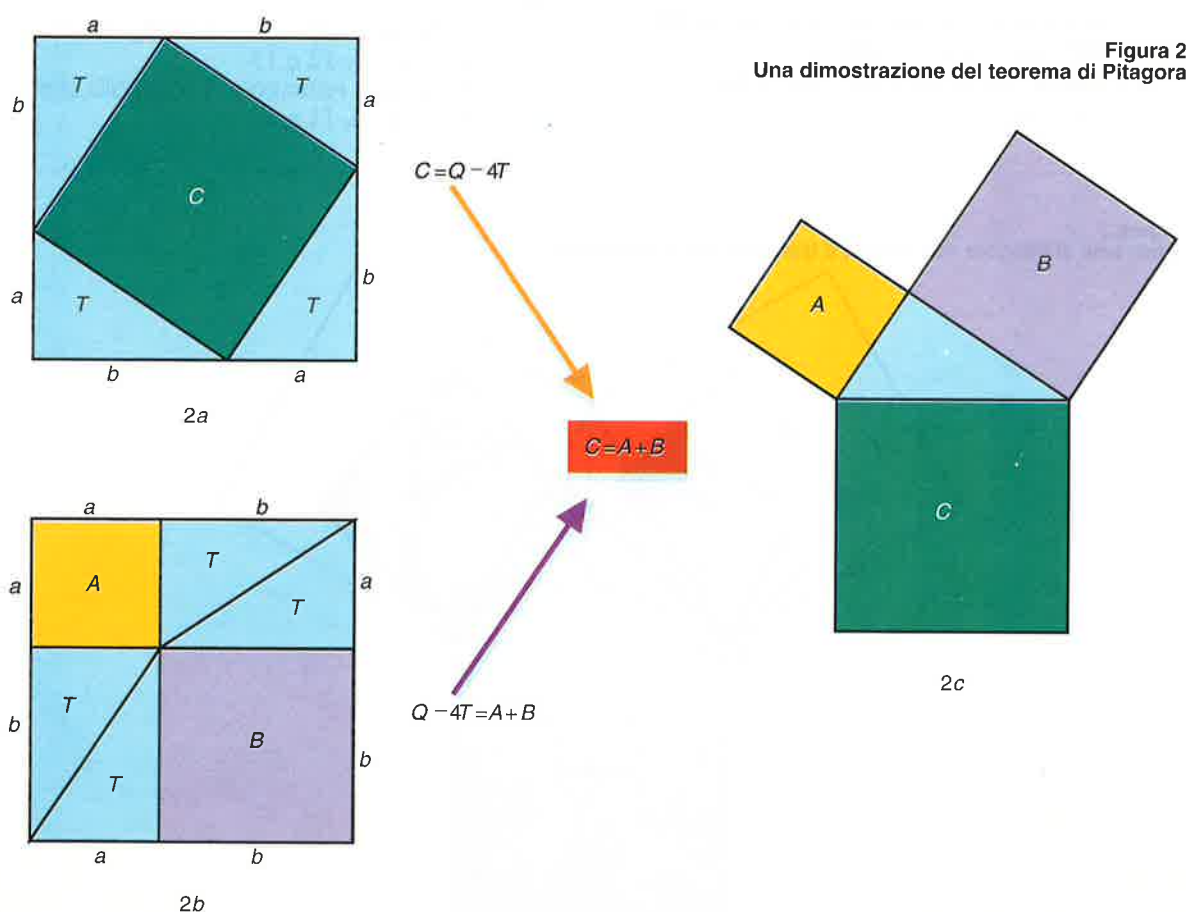


Figura 2  
Una dimostrazione del teorema di Pitagora

stessa base MN rappresentati in fig. 3:

- I. il triangolo MNP è rettangolo in P, perciò vale il teorema di Pitagora, cioè il quadrato di lato MN è equivalente alla somma dei quadrati di lati MP e NP;
- II. nel triangolo MNP', che ha l'angolo in P' ottuso, i lati MP' e NP' sono troppo piccoli, perciò la somma dei loro quadrati non riesce a raggiungere il quadrato di lato MN;
- III. nel triangolo MNP'', che ha l'angolo in P'' acuto, i lati MP'' e NP'' sono troppo grandi, perciò la somma dei loro quadrati supera il quadrato di lato MN.

### Riconoscere un triangolo rettangolo misurando i suoi lati

Il teorema di Pitagora caratterizza dunque un triangolo rettangolo; perciò, si può stabilire se un triangolo è rettangolo conoscendo solo la misura dei suoi lati. Ecco due esempi.

1. È rettangolo il triangolo MNP con i lati lunghi 8, 15 e 17 perché si ha che:
  - il quadrato costruito su MN ha area  $17^2 = 289$ ;
  - la somma dei quadrati costruiti su MP e NP vale  $8^2 + 15^2 = 289$ ;
  - risulta  $289 = 225 + 64$ , cioè si ha:  $17^2 = 15^2 + 8^2$

2. Invece, *non* è rettangolo il triangolo MNQ con i lati lunghi 9, 14 e 17 perché risulta:
 
$$17^2 = 289 \quad 14^2 + 9^2 = 196 + 81 = 277$$
 e perciò si trova:
 
$$17^2 \neq 14^2 + 9^2$$

In generale, un triangolo con i lati lunghi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  è rettangolo solo se risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Enunciare il teorema di Pitagora.
- ② Dimostrare il teorema di Pitagora.

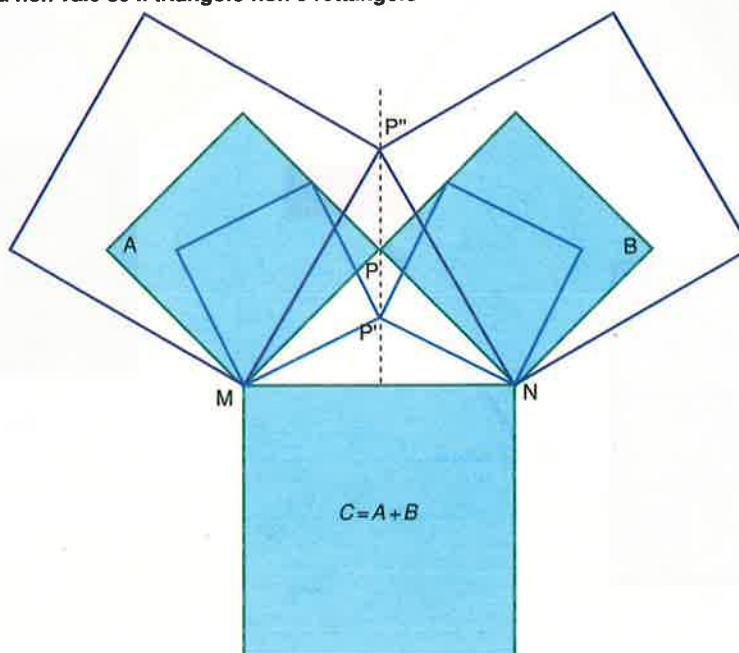
### Comprensione

- ① Portare qualche esempio di triangolo per cui non vale il teorema di Pitagora.
- ② Di un triangolo si sa soltanto che ha due lati lunghi 3 e 4; si può stabilire se il triangolo è rettangolo?

### Applicazioni

- ① Stabilire se è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 5, 12 e 13.
- ② Stabilire se è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 6, 11 e 13.

Figura 3  
Il teorema di Pitagora non vale se il triangolo non è rettangolo



## Il teorema di Pitagora prima di Pitagora

Non si sa quale dimostrazione abbia dato Pitagora del «suo» teorema, perché nulla è rimasto delle sue opere. Quello che si sa è che la proprietà era già nota in qualche caso particolare prima di Pitagora.

### La proprietà pitagorica al tempo degli antichi egiziani

Nell'antico Egitto, già nel 3000 a.C., si conosceva la proprietà pitagorica in qualche caso particolare. Il caso più noto era il triangolo rettangolo con i lati lunghi 3, 4 e 5, triangolo per cui risultava:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Gli antichi egiziani utilizzavano questa proprietà per costruire un angolo retto, in particolare per costruire la base quadrata delle piramidi. Ecco il metodo seguito (fig. 1).

Si prendeva una corda lunga 12 unità e la si divideva con dei nodi in 12 parti uguali (fig. 1a). Si tendeva la parte lunga 4 unità fra due paletti conficcati per terra e si tiravano le altre due parti, lunghe 3 e 5, fino a far incontrare i loro estremi (fig. 1b). Si aveva così sul terreno un triangolo rettangolo.

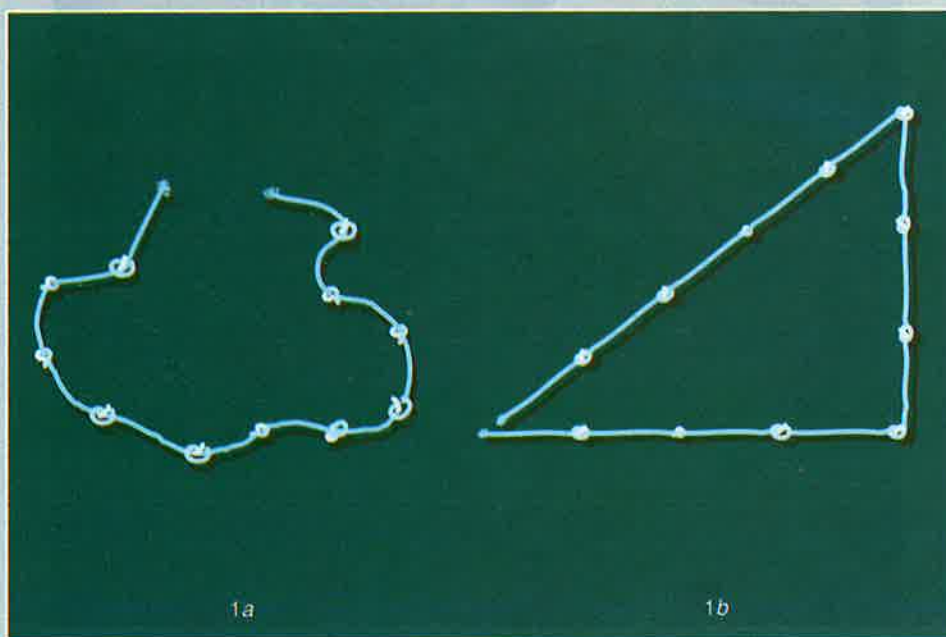


Figura 1  
Un metodo degli antichi egiziani per costruire triangoli rettangoli



### La proprietà pitagorica nelle tavolette babilonesi

Per gli egiziani dunque la proprietà pitagorica aveva un notevole interesse pratico. Sembra invece rivolta a studi geometrici più astratti una tavoletta babilonese del 2000-1800 a.C. (fig. 2), ritrovata, insieme ad altre, nella prima metà del nostro secolo durante scavi eseguiti nella zona dell'antica Babilonia e conservata oggi nel British Museum di Londra.

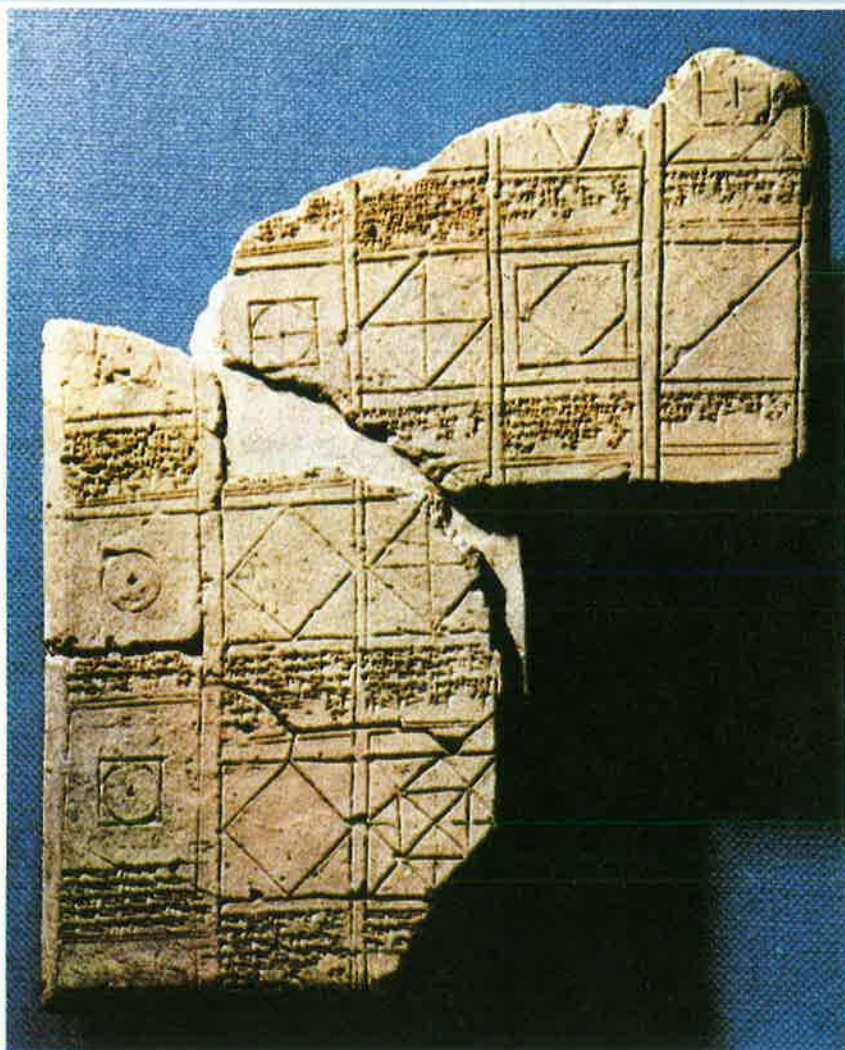
Un'altra tavoletta babilonese contiene un elenco di problemi proposti e risolti, fra i quali si trova il seguente (fig. 3a): «Un bastone lungo 30 unità è appoggiato ad un muro. In alto il bastone scivola di 6 unità. Di quanto si sarà allontanato dal muro il piede del bastone?»

Nella tavoletta al problema segue la soluzione:

- si deve elevare al quadrato 30;
- al quadrato di 30 si deve togliere il quadrato di 24 (che è il numero ottenuto togliendo 6 a 30);
- con queste operazioni si ottiene 324, che è il quadrato di 18;
- si conclude che 18 è il numero cercato, cioè il piede del bastone si allontana di 18 unità dalla base del muro.

I calcoli precedenti si scriverebbero, con i simboli matematici usati oggi, nel

**Figura 2**  
Una tavoletta babilonese  
contenente problemi  
matematici



modo seguente:

$$30^2 - 24^2 = 18^2 \quad \text{da cui} \quad \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

Così si osserva subito che i calcoli si basano sul fatto che, per il triangolo rettangolo di fig. 3b, si ha:

$$30^2 = 24^2 + 18^2$$

E questa è proprio la proprietà pitagorica, applicata però ad un particolare caso numerico: il triangolo rettangolo che ha i lati lunghi 18, 24 e 30.

Gli antichi babilonesi conoscevano dunque il teorema di Pitagora, ma era una conoscenza che riguardava dei particolari casi numerici.

### Le terne pitagoriche

I casi numerici per cui valeva la proprietà pitagorica furono oggetto di attento studio da parte dei babilonesi: in una tavoletta datata intorno al 1900-1600 a.C. si trova un elenco di terne di numeri come 3, 4 e 5, per cui risulta:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

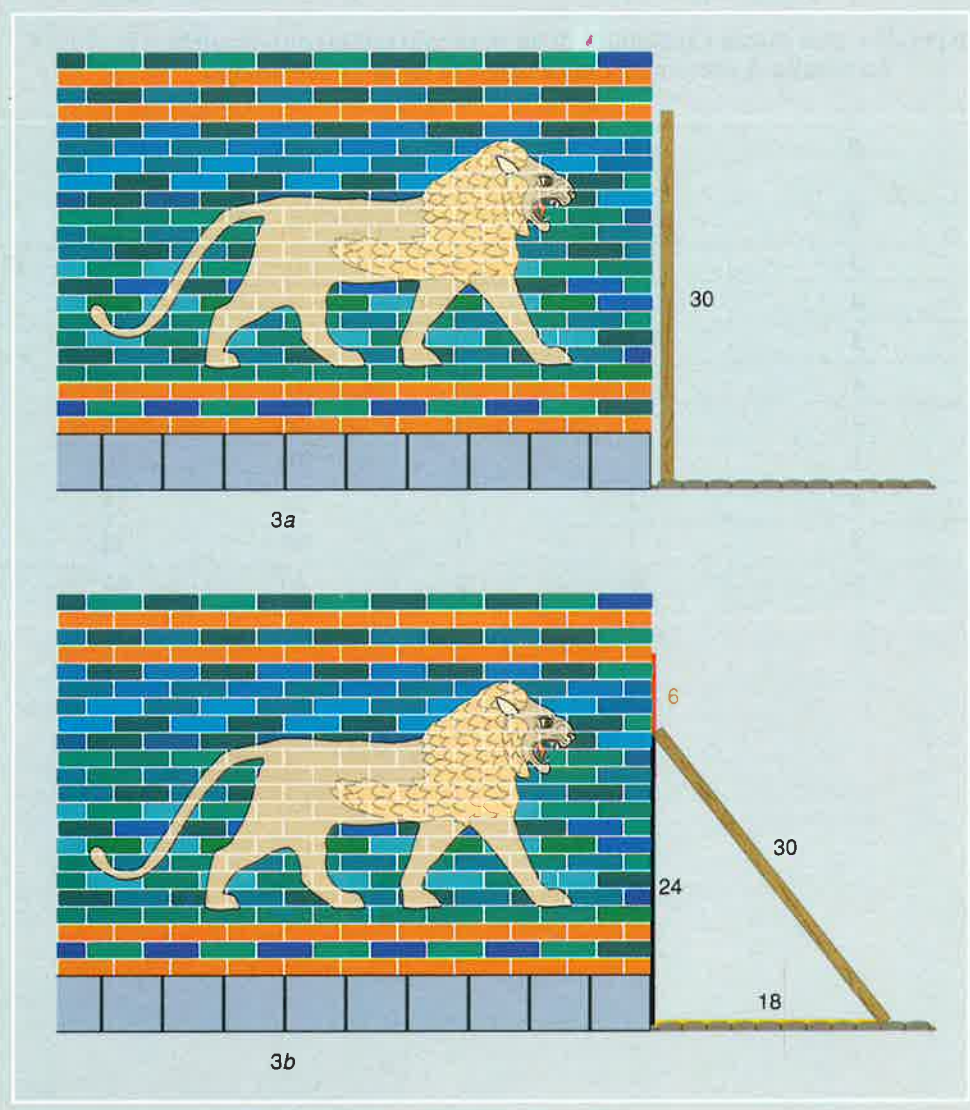


Figura 3  
Gli antichi babilonesi usavano il teorema di Pitagora per risolvere problemi particolari

A queste terne viene spesso dato il nome di *terne pitagoriche*, cioè terne di numeri che possono essere i tre lati di un triangolo rettangolo, caratterizzato dalla proprietà pitagorica.

Nella tavoletta non si dice come queste terne siano state trovate, ma si può ipotizzare un procedimento di questo tipo:

- si considerano due numeri interi positivi  $p, q$ , con  $p > q$  ;
- si forma una terna con i seguenti numeri:

$$a = p^2 - q^2 \quad b = 2pq \quad c = p^2 + q^2$$

Infatti, calcolando

$$a^2 = (p^2 - q^2)^2 = p^4 + q^4 - 2p^2q^2$$

$$b^2 = (2pq)^2 = 4p^2q^2$$

$$c^2 = (p^2 + q^2)^2 = p^4 + q^4 + 2p^2q^2$$

si trova che risulta sempre:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

e perciò  $c$  può essere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti  $a, b$ .

La tabella A presenta alcuni esempi di terne di questo tipo.

**Tabella A**  
Alcune terne pitagoriche  
e il procedimento per  
ottenerle

$p$	$q$	$p^2 - q^2$ $a$	$2pq$ $b$	$p^2 + q^2$ $c$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41



# Il primo teorema di Euclide

## Verso il primo teorema di Euclide

Il teorema di Pitagora suggerisce altre indagini sui triangoli rettangoli. Dato che risulta:

$$C = A + B \quad \text{ossia} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

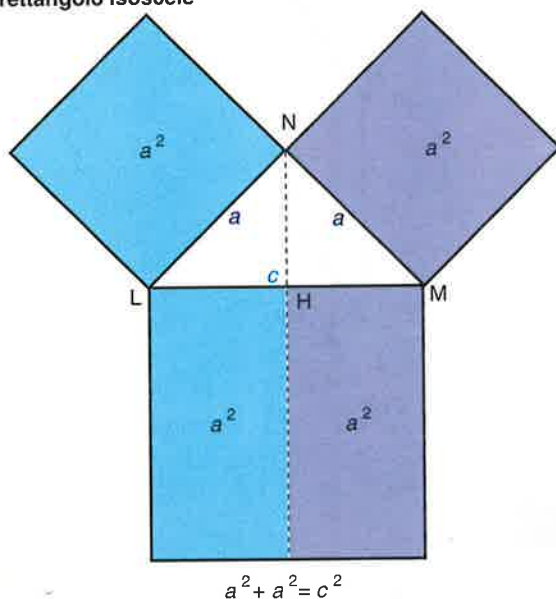
deve essere possibile dividere il quadrato di area  $c^2$  in due parti, una di area  $a^2$  e l'altra di area  $b^2$ .

C'è un caso particolare in cui questa suddivisione è immediata: il triangolo rettangolo isoscele; infatti, per questo triangolo (LMN in fig. 1) i due quadrati costruiti sui cateti hanno la stessa

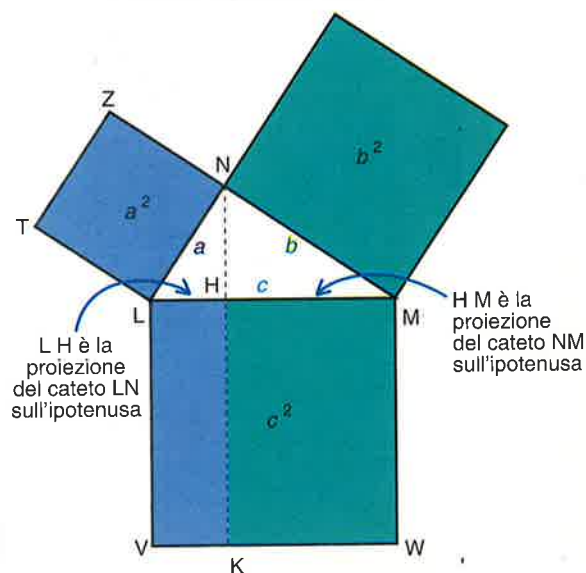
area  $a^2$ . In tal caso, prolungando l'altezza NH si divide il quadrato di area  $c^2$  in due parti uguali, ciascuna delle quali deve avere area  $a^2$ . Negli altri triangoli rettangoli, invece (fig. 2), prolungando l'altezza NH si divide il quadrato di area  $c^2$  in due parti disuguali e cioè:

- I. il rettangolo che ha come lati:
  - LV, uguale all'ipotenusa;
  - LH, proiezione sull'ipotenusa del cateto LN, lungo  $a$ .
- II. il rettangolo che ha come lati:
  - HK, uguale all'ipotenusa;

**Figura 1**  
Il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele



**Figura 2**  
Dividere il quadrato costruito sull'ipotenusa





- HM, *proiezione* sull'ipotenusa del cateto MN, lungo b.

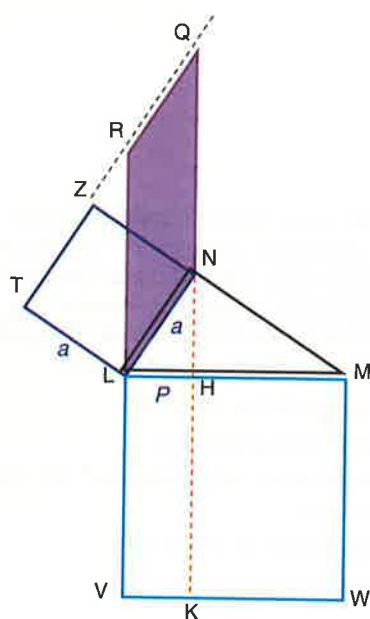
Un teorema, attribuito a Euclide (III sec. a.C.), stabilisce che il primo rettangolo ha sempre area  $a^2$  e il secondo rettangolo ha sempre area  $b^2$ .

Si tratta del *primo teorema di Euclide*, che afferma (fig. 2): in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

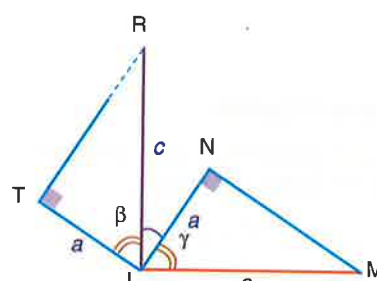
### Una dimostrazione del primo teorema di Euclide

Il teorema può essere dimostrato nel modo seguente (fig. 3):

- si prolungano i lati VL e KH fino ad incontrare la retta TZ in R e Q (fig. 3a); si ottiene così un «parallelogramma ausiliario» LNQR che ha il lato LN lungo  $a$  e il lato RL lungo  $c$  (fig. 3b);
- si calcola l'area  $S$  di LNQR in due modi diversi (fig. 3c).



3a



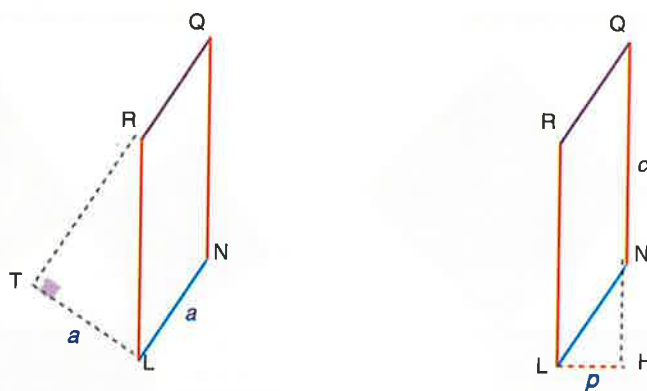
3b

Figura 3  
Dimostrazione del primo teorema di Euclide

Sono uguali  
i triangoli  
TLR e LNM  
perché:

- $TL=LN$
- $\hat{N}=\hat{T}=90^\circ$
- $\beta=\gamma$

Perciò risulta  
 $RL=LM=c$



$$S = a \cdot a = a^2$$

$$S = p \cdot c$$

$$a^2 = p \cdot c$$

3c

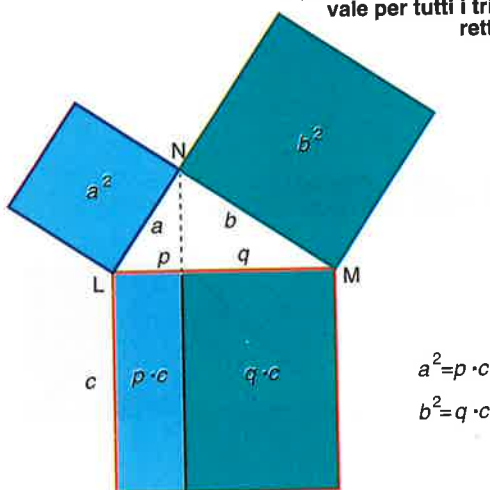
I. Si calcola l'area di LNQR considerando il lato  $LN = a$  e l'altezza relativa  $TL$ , che è pure lunga  $a$ ; l'area  $S$  è quindi:

$$S = a \cdot a = a^2 \quad (1)$$

II. Si calcola la stessa area  $S$ , considerando il lato  $NQ = c$  e l'altezza relativa  $LH$ , che è lunga  $p$ ; così si ottiene anche:

$$S = p \cdot c \quad (2)$$

**Figura 4**  
Il primo teorema di Euclide vale per tutti i triangoli rettangoli



Confrontando la (1) con la (2), si trova che deve essere:

$$a^2 = p \cdot c$$

dove (fig. 4):

- $a^2$  è l'area del quadrato costruito sul cateto  $LN$ ;
- $p \cdot c$  è l'area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto  $LN$  sull'ipotenusa.

Una dimostrazione del tutto analoga, ripetuta a partire dal cateto  $NM$ , porta a verificare che il primo teorema di Euclide esprime una proprietà valida per tutti i triangoli rettangoli (fig. 4).

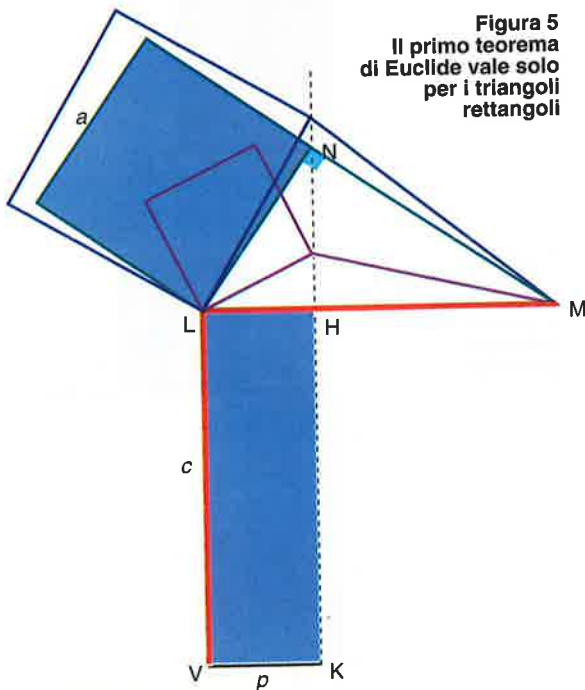
### Il primo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli

Il primo teorema di Euclide non vale se il triangolo non è rettangolo; per rendersene conto basta esaminare la fig. 5:

- solo nel caso del triangolo rettangolo  $LMN$  il quadrato costruito su  $LN$  è equivalente al rettangolo  $LHVK$ ; altrimenti il quadrato è troppo piccolo (nel caso dell'angolo  $\hat{N}$  ottuso) o troppo grande (nel caso dell'angolo  $\hat{N}$  acuto).

Il primo teorema di Euclide esprime dunque un'altra proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli.

**Figura 5**  
Il primo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli



## Verifiche

### Conoscenze

- ① Enunciare il primo teorema di Euclide
- ② Dimostrare il primo teorema di Euclide.

### Comprensione

- ① Su quali nozioni di geometria si basa la dimostrazione del primo teorema di Euclide data in questo paragrafo?

### Applicazioni

- ① Un triangolo  $LMN$  ha il lato  $LM$  lungo 12 e il lato  $LN$  lungo 6, che, proiettato su  $LM$ , dà un segmento  $LH$ , lungo 3; il triangolo è rettangolo?
- ② Un triangolo  $LMN$  ha il lato  $LM$  lungo 11 e il lato  $LN$  lungo 5, che, proiettato su  $LM$ , dà un segmento  $LH$  lungo 2; il triangolo è rettangolo?

# Il secondo teorema di Euclide

## Verso il secondo teorema di Euclide

Nel primo teorema di Euclide si considerano le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, ma, per ottenere queste proiezioni, bisogna costruire l'altezza relativa all'ipotenusa.

Così ancora una volta il caso particolare del triangolo rettangolo isoscele suggerisce di cercare nuove proprietà.

Nel triangolo rettangolo isoscele LMN (fig. 1) l'altezza NH divide l'ipotenusa in due parti uguali lunghe  $h$  e perciò anche il rettangolo LHKV si può dividere in due quadrati uguali di area  $h^2$ .

Negli altri triangoli rettangoli però (fig. 2) l'altezza NH divide l'ipotenusa in due parti disuguali lunghe  $p$  e  $q$ .

In tal caso il rettangolo LHKV può essere diviso in due parti disuguali:

- il quadrato di lato LH;
- il rettangolo che ha per lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Un secondo teorema attribuito ad Euclide stabilisce che questo ultimo rettangolo ha sempre area  $h^2$ .

Si tratta del secondo teorema di Euclide, che afferma: *in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

## Una dimostrazione del secondo teorema di Euclide

La dimostrazione di questo teorema può essere condotta nel modo seguente (fig. 3):

Figura 1  
L'altezza relativa all'ipotenusa  
in un triangolo rettangolo isoscele

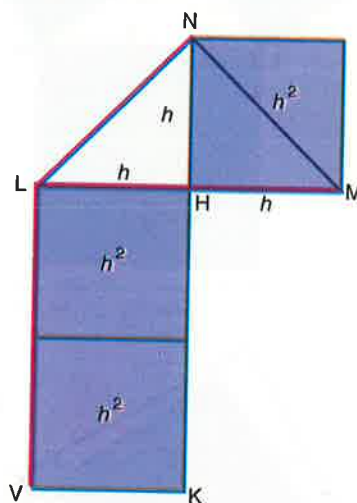
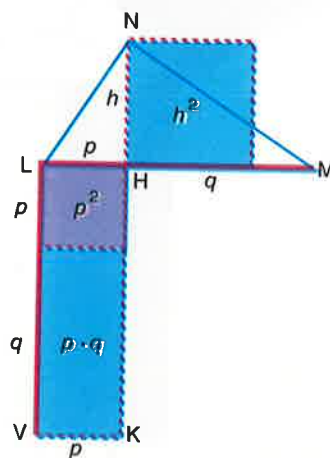


Figura 2  
L'altezza relativa  
all'ipotenusa  
in un triangolo  
rettangolo  
qualunque



- si applica ad un qualunque triangolo rettangolo LMN il primo teorema di Euclide (fig. 3a), ottenendo:

$$a^2 = c \cdot p \quad (1)$$

- tracciata l'altezza NH relativa all'ipotenusa, si applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo LHN (fig. 3b); si ha:

$$a^2 = p^2 + h^2 \quad (2)$$

- si confronta la (1) con la (2), ottenendo:

$$c \cdot p = p^2 + h^2 \quad (3)$$

- si osserva (fig. 3c) il rettangolo LHKV, di area  $p \cdot c$ , diviso in due parti:

- il quadrato di lato LH, che ha area  $p^2$ ;
- il rettangolo rimanente, che ha area  $p \cdot q$ ;

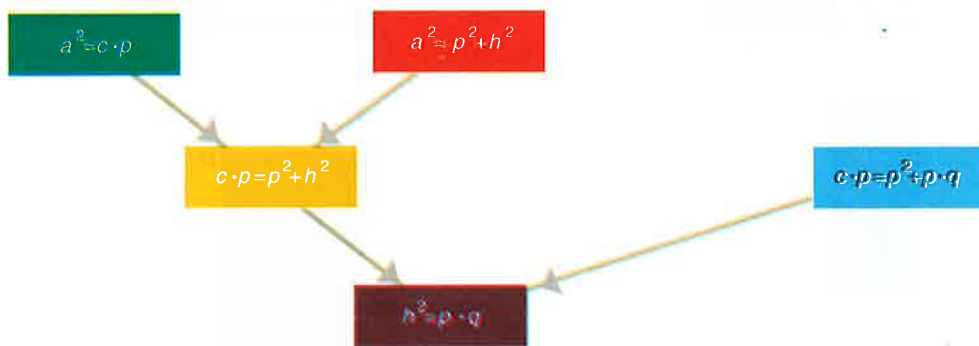
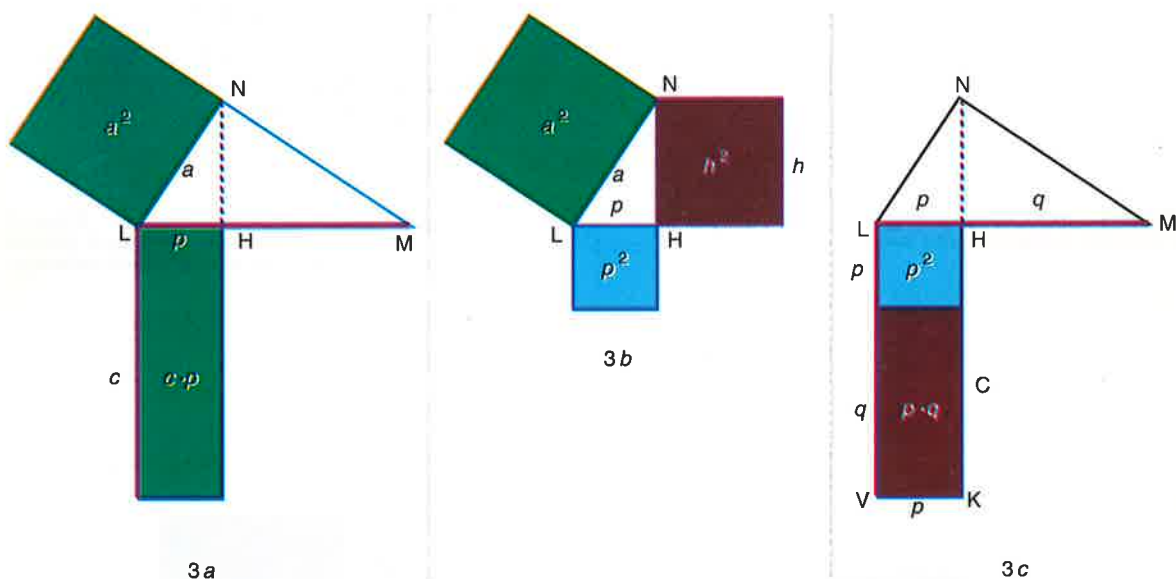
e si trova:

$$c \cdot p = p^2 + p \cdot q \quad (4)$$

- si confronta la (3) con la (4) ottenendo appunto:

$$h^2 = p \cdot q$$

**Figura 3**  
Dimostrazione del secondo teorema di Euclide





### Il secondo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli

Anche il secondo teorema di Euclide (fig. 4) non vale se il triangolo non è rettangolo; per rendersene conto basta osservare la fig. 5:

- solo nel caso del triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza NH è equivalente al rettangolo L'H'KV; altrimenti il quadrato è troppo piccolo (nel caso dell'angolo  $\hat{N}$  ottuso) o troppo grande (nel caso dell'angolo  $\hat{N}$  acuto).

Così, anche il secondo teorema di Euclide caratterizza i triangoli rettangoli.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Enunciare il secondo teorema di Euclide.
- ② Dimostrare il secondo teorema di Euclide.

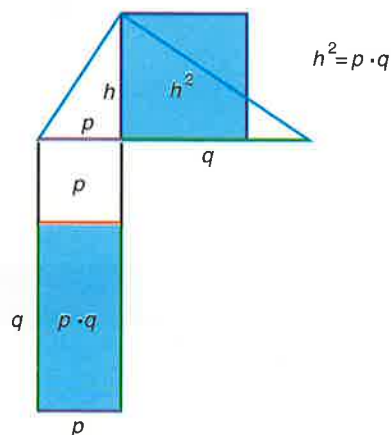
### Comprensione

- ① Su quali nozioni di geometria si basa la dimostrazione del secondo teorema di Euclide data in questo paragrafo?

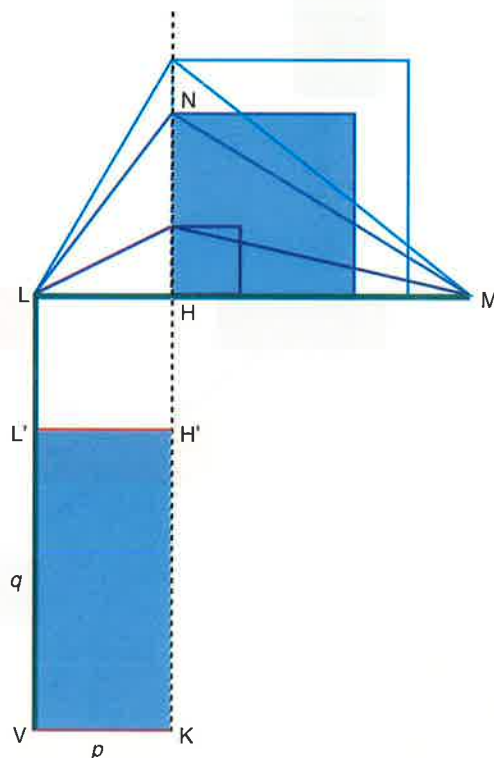
### Applicazioni

- ① Un triangolo LMN ha l'altezza NH lunga 2, che divide il lato LM in due parti lunghe 1 e 4; il triangolo è rettangolo?
- ② Un triangolo LMN ha l'altezza NH lunga 3, che divide il lato LM in due parti lunghe 2 e 5; il triangolo è rettangolo?

**Figura 4**  
Il secondo teorema di Euclide



**Figura 5**  
Il secondo teorema di Euclide  
vale solo per i triangoli rettangoli



## Applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide

### I teoremi di Pitagora e di Euclide

Nei paragrafi 1, 2 e 3 sono state presentate delle proprietà valide per un qualunque triangolo rettangolo (fig. 1):

- il teorema di Pitagora

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- il primo teorema di Euclide

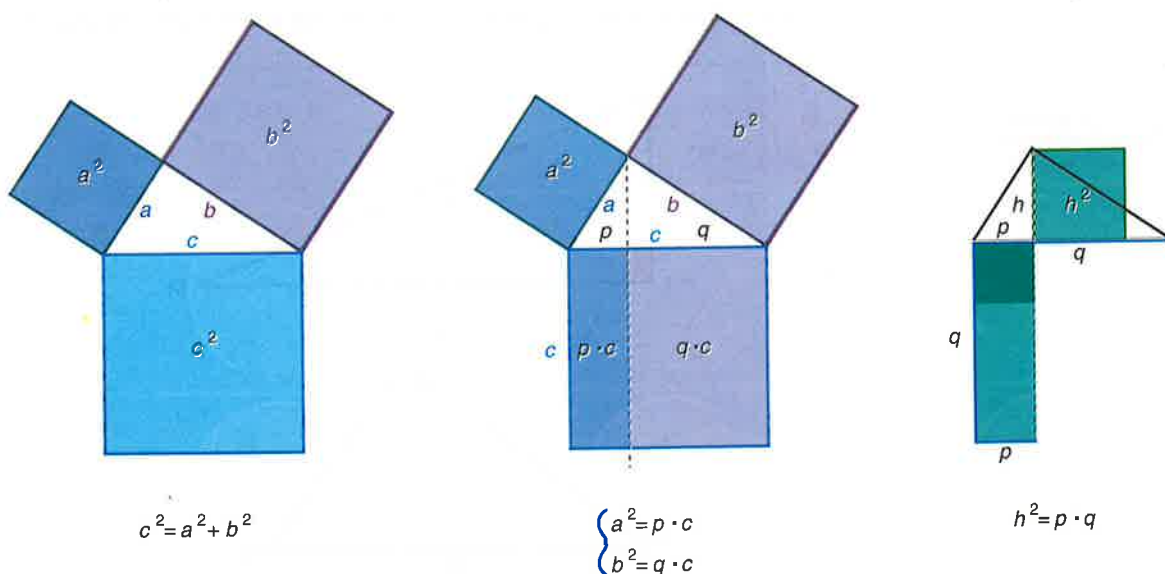
$$a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$$

- il secondo teorema di Euclide

$$h^2 = p \cdot q$$

Questi teoremi collegano dunque vari elementi di un triangolo rettangolo (lati,

**Figura 1**  
I teoremi di Pitagora e di Euclide



altezza relativa all'ipotenusa, proiezioni dei cateti sull'ipotenusa) e hanno molte applicazioni, fra le quali si segnalano le seguenti:

- A. dati alcuni elementi di un triangolo rettangolo, ricavarne altri;
- B. scoprire altre proprietà delle figure geometriche.

In questa scheda sono proposti degli esempi di queste applicazioni.

### A. Dati alcuni elementi di un triangolo rettangolo ricavarne altri

#### Attività 1

Disegnare il triangolo rettangolo LMN, che ha i due cateti lunghi 5 e 12 (fig. 2a); quanto è lunga l'ipotenusa?

*Indicata con  $x$  la lunghezza incognita dell'ipotenusa, si applica il teorema di Pitagora, che lega direttamente i tre lati del triangolo, e si scrive:*

$$x^2 = \dots\dots\dots$$

*Così si ottiene  $x^2$ , cioè il quadrato di  $x$ , e bisogna risalire al valore di  $x$ . In questo caso è facile calcolare  $x$  perché risulta:*

$$\dots\dots\dots = 13^2$$

*e perciò da*

$$x^2 = 13^2$$

*si ricava subito:*

$$x = 13$$

#### Attività 2

Disegnare il triangolo rettangolo PQR, che ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10 (fig. 2b); quanto è lungo l'altro cateto?

*Anche questo problema si risolve applicando il teorema di Pitagora; indicata con  $x$  la lunghezza incognita del cateto, si scrive:*

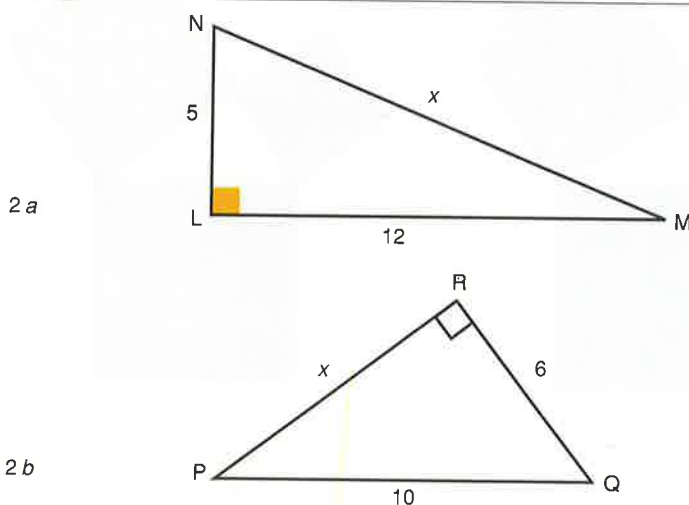
$$x^2 + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

*da cui si può ricavare*

$$x^2 = \dots\dots\dots$$

*Così si ottiene ancora una volta il quadrato di  $x$ , da cui però si può ricavare il*

**Figura 2**  
Applicare il teorema di Pitagora



valore di  $x$ , tenendo presente che risulta:

$$\dots\dots\dots = 8^2$$

e perciò da

$$x^2 = 8^2$$

si ottiene subito:

$$x = \dots\dots$$

### Attività 3

Disegnare il triangolo rettangolo LMN, che ha l'ipotenusa LM lunga 8 e la proiezione del cateto LN sull'ipotenusa lunga 2; quanto è lungo il cateto LN?

Ora conviene applicare il primo teorema di Euclide perché non sono dati i due lati del triangolo ma solo l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. Indicata con  $x$  la lunghezza incognita del cateto, si scrive:

$$x^2 = \dots\dots\dots \text{ da cui } x = 4$$

### Attività 4

Disegnare il triangolo rettangolo LMN che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 9 e 16; determinare l'altezza relativa all'ipotenusa e i lati del triangolo.

Altezza relativa all'ipotenusa

Conviene applicare il secondo teorema di Euclide, l'unico in cui compare questo elemento. Indicata con  $x$  la lunghezza incognita dell'altezza relativa all'ipotenusa, si scrive:

$$x^2 = \dots\dots\dots \text{ da cui } x = 12$$

Ipotenusa

È ovviamente la somma delle due proiezioni.

Cateti

Si hanno ora a disposizione almeno due alternative:

1. Applicare il primo teorema di Euclide (fig. 3a);
  2. Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli LHN e NHM (fig. 3b).
- Sviluppare i due procedimenti, verificando che i lati del triangolo sono lunghi 15, 20 e 25.

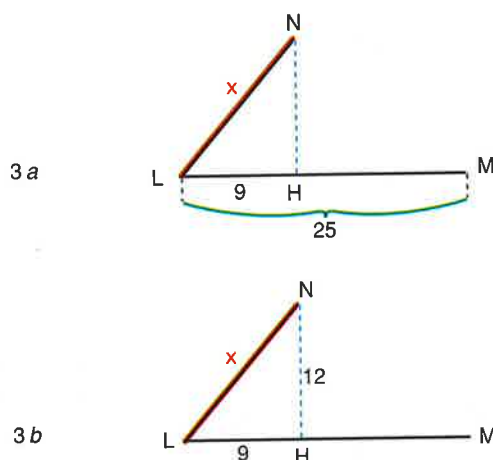


Figura 3  
Calcolare i cateti  
di un triangolo rettangolo

## B. Scoprire proprietà di triangoli non rettangoli

### Attività 5

Cercare una relazione fra i lati di un triangolo acutangolo.

Esaminare i due triangoli di fig. 4:

- LMN è rettangolo in N e quindi ha i lati lunghi  $a, b, c$  legati dal teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- LMN' ha l'angolo in N' acuto e quindi ha i lati lunghi  $m, n, c$  che *non* sono legati dal teorema di Pitagora.

Tuttavia, tracciando l'altezza LH si possono individuare, all'interno del triangolo LMN', due triangoli rettangoli a cui applicare il teorema di Pitagora (fig. 5):

- LN'H, che ha l'ipotenusa lunga  $m$  ed i cateti lunghi  $h$  e  $p$  e quindi risulta:

$$m^2 = \boxed{\phantom{000}} \quad (1)$$

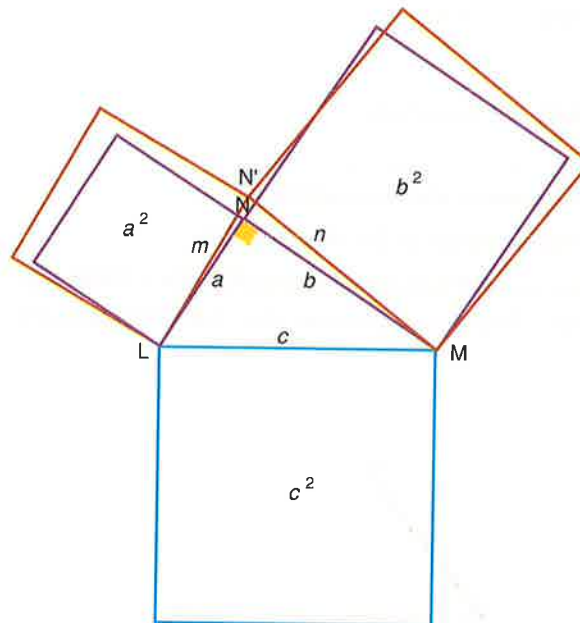
- LHM, che ha l'ipotenusa lunga  $c$  ed i cateti lunghi  $h$  e  $n-p$  e quindi si ha:

$$c^2 = \dots\dots\dots \text{ ossia } c^2 = \boxed{\phantom{000}} + \dots\dots\dots \quad (2)$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene

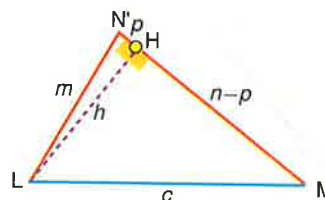
$$c^2 = m^2 + n^2 - 2np$$

Figura 4  
Il teorema di Pitagora  
non vale per i triangoli  
acutangoli



$c^2 = a^2 + b^2$   
per il triangolo rettangolo

Figura 5  
Una proprietà  
dei triangoli  
acutangoli



$c^2 = m^2 + n^2 - 2np$   
per un triangolo acutangolo

Si precisa così il risultato suggerito dalla fig. 4: nel caso del triangolo acutangolo i quadrati di area  $m^2$  e  $n^2$  sono troppo grandi e perciò la loro somma supera il quadrato di area  $c^2$ ; per ottenere  $c^2$  si deve togliere alla somma  $m^2 + n^2$  il rettangolo di area  $2np$ .

### Attività 6

Cercare una relazione fra i lati di un triangolo ottusangolo.

Esaminare i due triangoli di figura 6:

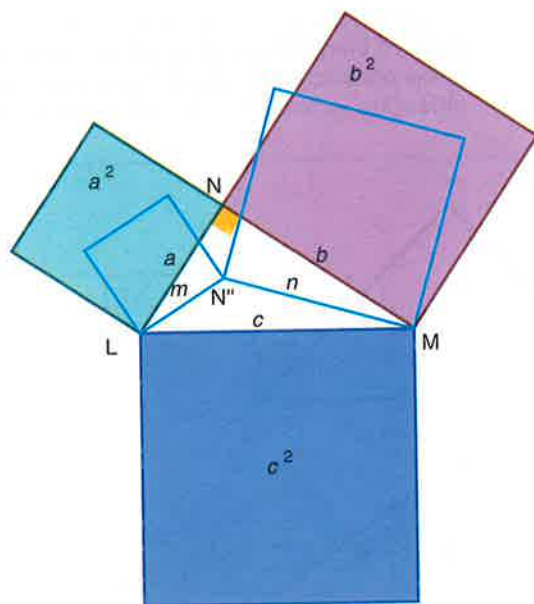
- LMN è rettangolo in N e perciò ha i lati legati dal teorema di Pitagora;
- LMN'' ha l'angolo in N'' ottuso e quindi ha i lati lunghi  $m$ ,  $n$ ,  $c$  che non sono legati dal teorema di Pitagora.

Nel triangolo LMN'' tracciare l'altezza LH (fig. 7) e applicare il teorema di Pitagora ai triangoli LHN'' e LHM.

Verificare che si ottiene:

$$c^2 = m^2 + n^2 + 2np$$

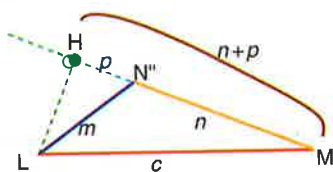
Anche in questo caso si precisa il risultato suggerito dalla fig. 6: nel caso del triangolo ottusangolo i quadrati di area  $m^2$  e  $n^2$  sono troppo piccoli e perciò la loro somma non raggiunge il quadrato di area  $c^2$ . Per ottenere  $c^2$  si deve aggiungere alla somma  $m^2 + n^2$  il rettangolo di area  $2np$ .



$$c^2 = a^2 + b^2$$

per un triangolo rettangolo

**Figura 6**  
Il teorema di Pitagora non vale per i triangoli ottusangoli



$$c^2 = m^2 + n^2 + 2np$$

per un triangolo ottusangolo

**Figura 7**  
Una proprietà valida per i triangoli ottusangoli



# Dalla geometria alla scoperta dei numeri irrazionali

## Due problemi di geometria che conducono a calcolare $\sqrt{2}$

Ecco due problemi di geometria che si risolvono applicando i teoremi di Pitagora e di Euclide.

1. Il triangolo rettangolo di fig. 1 ha i due cateti lunghi 1; quanto è lunga l'ipotenusa? Per ottenere la lunghezza  $x$  dell'ipotenusa basta applicare il teorema di Pitagora; si ottiene:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 = 2$$

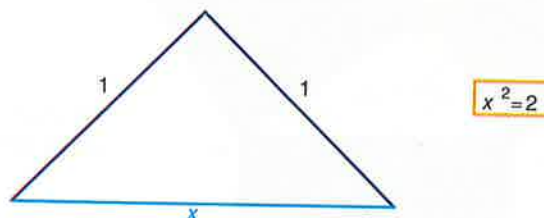
2. Il triangolo rettangolo di fig. 2 ha le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 2; quanto è lunga l'altezza relativa all'ipotenusa?

Per ottenere la lunghezza  $x$  dell'altezza relativa all'ipotenusa basta applicare il secondo teorema di Euclide; si ottiene:

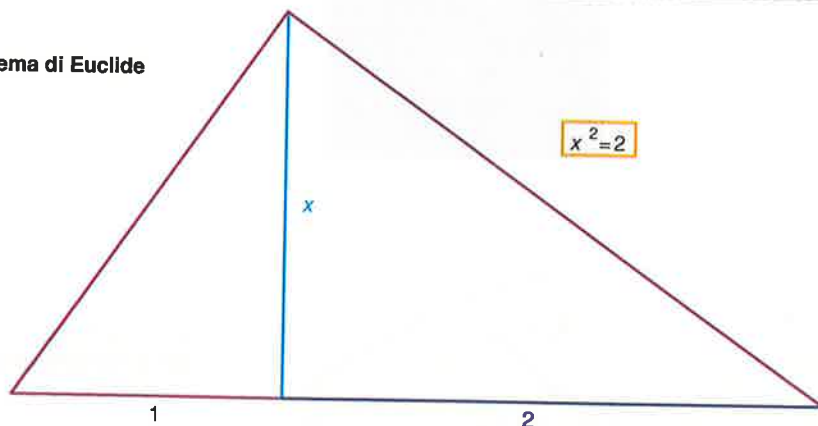
$$x^2 = 1 \cdot 2 \quad \text{cioè} \quad x^2 = 2$$

In questi casi non si trova subito qual è il numero che, elevato al quadrato, dà 2; per ottenerlo occorre un elaborato procedimento che è chiamato *estrazione di radice quadrata* ed è

**Figura 1**  
Un'applicazione del teorema di Pitagora



**Figura 2**  
Un'applicazione del secondo teorema di Euclide



indicato con il simbolo  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  o più spesso  $\sqrt{\phantom{x}}$ .  
Si ha dunque che:

$$\text{da } x^2 = 2 \quad \text{si ricava } x = \sqrt{2}$$

### Alla ricerca del risultato di $\sqrt{2}$

Per calcolare  $\sqrt{2}$  non vale la pena di eseguire il procedimento di estrazione di radice quadrata, visto che il risultato viene dato dalle tavole numeriche o da qualunque calcolatore tascabile:

- sulle tavole numeriche si trova il risultato 1,4142;
- alcuni calcolatori forniscono il risultato 1,4142136;
- altri calcolatori forniscono il risultato 1,414213562.

Ora, per riconoscere il risultato esatto c'è un ovvio procedimento: il risultato esatto, elevato al quadrato, deve dare 2.

Ecco invece che cosa si ottiene elevando al quadrato i numeri elencati prima:

$$(1,4142)^2 = 1,99996164$$

$$(1,4142136)^2 = 2,00000010642496$$

$$(1,414213562)^2 = 1,999999998944727844$$

Dunque, nessuno dei risultati è esatto, neanche quello con nove cifre dopo la virgola; quante cifre decimali avrà il risultato esatto?

Per studiare questa situazione si ricorda che i numeri razionali, scritti in forma decimale, danno luogo a due soli casi possibili:

I. decimali finiti (per esempio  $\frac{3}{4} = 0,75$ )

II. decimali infiniti ma periodici

(per esempio  $\frac{2}{3} = 0,(6)$ ).

Perciò, per il risultato di  $\sqrt{2}$ , si possono avere le seguenti situazioni:

- A. si tratta di un numero razionale, e allora si dovrà continuare a cercare la fine delle cifre dopo la virgola o il periodo, in modo da arrivare a scrivere il risultato esatto;
- B. si tratta di un nuovo tipo di numero che non è razionale, e allora è inutile continuare le ricerche.

### Perché $\sqrt{2}$ non può avere un risultato razionale

Risale agli antichi greci la conclusione delle

ricerche su  $\sqrt{2}$ : il numero che, elevato al quadrato, dà 2 non è razionale.

Ecco come si arriva a questa conclusione.

1. Si esclude che  $\sqrt{2}$  possa avere risultato intero

Infatti si ha che:

- $1^2 = 1$  e perciò 1 è troppo piccolo;
- $2^2 = 4$  e perciò 2 è troppo grande;
- non c'è nessun intero fra 1 e 2.

2. Si esclude che  $\sqrt{2}$  possa avere come risultato una frazione

Si può cominciare con un caso particolare, verificando, per esempio, che il risultato non può essere la frazione

$$\frac{14}{10}$$

Allora si procede così:

I. si riduce la frazione ai minimi termini, in modo da avere i due termini primi fra loro, cioè senza divisori comuni; si ha:

$$\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

con 7 e 5 che sono due numeri privi di divisori comuni.

II. si verifica se la frazione  $\frac{7}{5}$ , elevata al quadrato, dà 2; si ha:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$$

e non può risultare:

$$\frac{7^2}{5^2} = 2 \quad \text{ossia} \quad 7^2 = 2 \cdot 5^2$$

cioè  $49 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

perché 49, scomposto in fattori, non può presentare il fattore 2.

Questo stesso ragionamento si può ripetere per escludere che  $\sqrt{2}$  abbia come risultato una qualunque frazione  $\frac{p}{q}$  con  $p$  e  $q$

primi fra loro: non può risultare:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{ossia} \quad p^2 = 2q^2$$

perché  $p^2$  e  $q^2$  non possono avere il fattore 2 in comune.

## I numeri irrazionali sono decimali infiniti e non periodici

Il ragionamento precedente porta ad escludere che il risultato di  $\sqrt{2}$  sia razionale; quindi la corrispondente scrittura decimale non potrà essere né finita, né periodica. Si otterrà dunque un decimale con infinite cifre dopo la virgola e senza un periodo che si ripete. Il risultato ora ottenuto porta ad osservare la successione dei naturali, a cominciare dai numeri scritti qui sotto:

$1 = 1^2$	2	3	$4 = 2^2$	5
6	7	8	$9 = 3^2$	10
11	12	13	14	15
$16 = 4^2$	17	18	19	20

Si osserva subito che i quadrati perfetti sono pochi; si ha:

$$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4$$

Avranno invece un risultato decimale infinito e non periodico le radici quadrate di tutti gli altri numeri che non sono quadrati perfetti; per esempio, non sono razionali i risultati di:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{8}$$

Per convincersi di questo, basta ripetere il ragionamento che ha condotto ad escludere che  $\sqrt{2}$  è razionale.

Tutti questi numeri che non sono razionali prendono il nome di *numeri irrazionali*.

Più in generale, *sono irrazionali tutti i numeri decimali infiniti non periodici*.

Può sembrare difficile trovare dei numeri di questo tipo, perché le cifre decimali sono solo nove e, quindi, dovranno ricomparire. Invece è facile scrivere dei numeri in cui le cifre decimali ricompaiono, ma sempre in un ordine diverso; ecco qualche esempio:

1,234567891011121314151617181920...

2,46810121416182022242628303234...

13,579111315171921232527293133...

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Che cosa si intende con il termine «numero irrazionale»?
- ② Portare qualche esempio di numero irrazionale.

### Comprensione

- ① Spiegare perché il risultato di  $\sqrt{3}$  non può essere razionale.
- ② Spiegare perché il risultato di  $\sqrt{25}$  è razionale.

### Applicazioni

- ① Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 1 e 2; calcolare la lunghezza dell'ipotenusa. Il risultato è razionale o irrazionale?
- ② Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10; calcolare la lunghezza dell'altro cateto. Il risultato è razionale o irrazionale?
- ③ Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 1 e l'ipotenusa lunga 2; calcolare la lunghezza dell'altro cateto. Il risultato è razionale o irrazionale?
- ④ Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 6; calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa. Il risultato è razionale o irrazionale?

**Valori approssimati di  $\sqrt{2}$** 

Nel paragrafo precedente si è visto come il numero che, elevato al quadrato, dà 2 non può essere razionale.

Questo vuol dire che l'operazione di estrazione di radice quadrata non arriva mai a conclusione e potrebbe essere continuata indefinitamente: si potrebbero così trovare 10, 100, 1000 cifre dopo la virgola, ma non si troverebbe mai un periodo, né si arriverebbe mai a concludere l'operazione.

Dunque, con la scrittura decimale, non si riesce a rappresentare esattamente il risultato di  $\sqrt{2}$ .

Si dovranno allora riprendere i procedimenti di approssimazione introdotti nel primo volume (pp. 55-56) e procedere, per esempio, in uno dei modi seguenti:

- arrotondare il risultato alla prima cifra decimale (cioè a meno di  $0,1=10^{-1}$ ), scrivendo:

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

- arrotondare il risultato alla seconda cifra decimale (cioè a meno di  $0,01=10^{-2}$ ), scrivendo:

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

- arrotondare il risultato all'ottava cifra decimale (cioè a meno di  $10^{-8}$ ), scrivendo:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

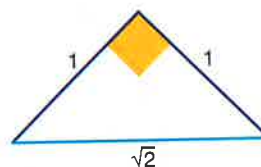
In ogni caso si dovrà sempre scrivere « $\approx$ », simbolo che si legge «circa uguale», perché il numero decimale non darà mai il risultato esatto, ma solo un valore approssimato.

**Il numero  $\sqrt{2}$** 

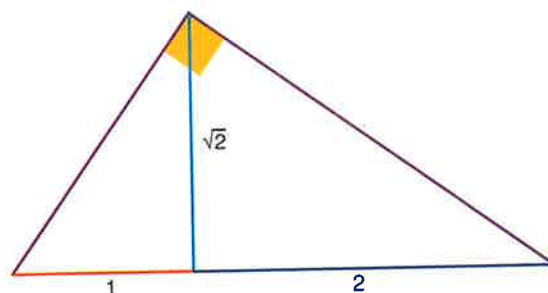
Con procedimenti geometrici è invece possibile disegnare un segmento lungo proprio  $\sqrt{2}$ .

- nel triangolo rettangolo di fig. 1 l'ipotenusa ha una lunghezza  $x$ , che dà esattamente  $x^2 = 2$ ;
- nel triangolo rettangolo di fig. 2 l'altezza relativa all'ipotenusa ha una lunghezza  $y$ , che dà esattamente  $y^2 = 2$ .

**Figura 1**  
Un triangolo la cui ipotenusa è lunga  $\sqrt{2}$



**Figura 2**  
Un triangolo la cui altezza relativa all'ipotenusa è lunga  $\sqrt{2}$





Proprio perché questo risultato esatto si riesce a vedere, ma non a scrivere in forma decimale, si è introdotto il simbolo

$$\sqrt{2}$$

(che si legge «radice di 2»): questo simbolo indica il numero che, elevato al quadrato, dà esattamente 2.

In questo modo il simbolo  $\sqrt{2}$  non indica più un'operazione di radice quadrata da eseguire, ma il risultato esatto dell'operazione; si ha dunque che:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

E invece si scrive:

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

cioè 1,41 è il valore approssimato del numero  $\sqrt{2}$ , dato che risulta:

$$(1,41)^2 = 1,9881$$

### I radicali

Il simbolo  $\sqrt{2}$ , che è scritto valendosi del segno di radice ( $\sqrt{\quad}$ ) prende anche il nome di *radicale*.

Ecco degli esempi di altri radicali ottenuti con semplici costruzioni geometriche.

#### 1. Applicare il teorema di Pitagora

In fig. 3 sono disegnati i seguenti triangoli rettangoli:

- il triangolo rettangolo ABC ha i cateti lunghi 1 e quindi l'ipotenusa BC lunga  $\sqrt{2}$ ;
- il triangolo rettangolo BCD ha i cateti lunghi 1 e  $\sqrt{2}$  e quindi l'ipotenusa BD ha una lunghezza  $x$  data da:

$$x^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 \quad \text{ossia} \quad x^2 = 3$$

da cui

$$x = \sqrt{3}$$

- il triangolo rettangolo BDE ha i cateti lunghi 1 e  $\sqrt{3}$  e quindi l'ipotenusa BE ha una lunghezza  $y$  data da:

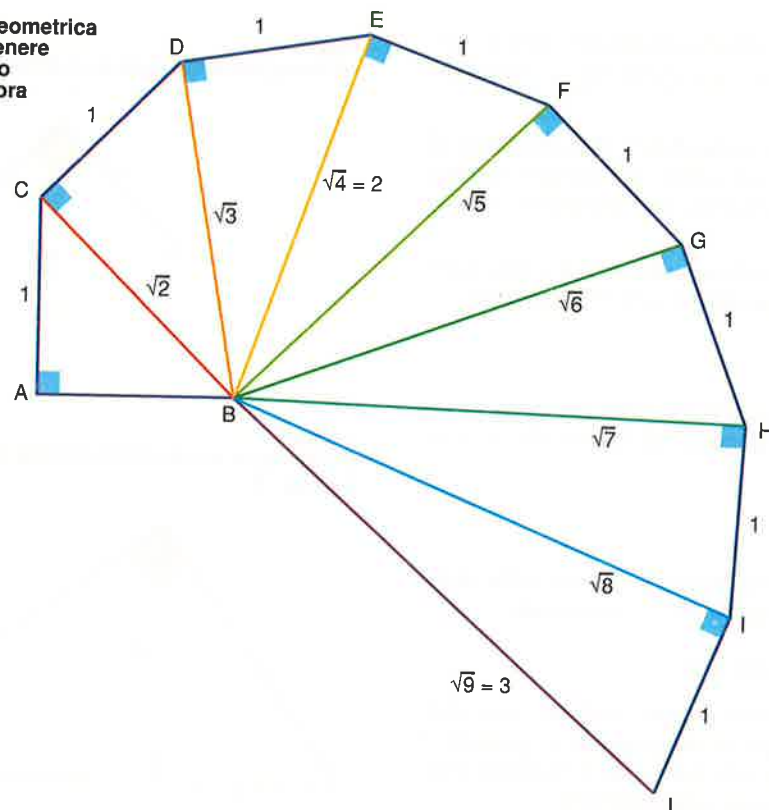
$$y^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 \quad \text{ossia} \quad y^2 = 4$$

da cui

$$y = 2$$

- il triangolo rettangolo BEF ha i cateti lunghi 1 e 2 e quindi l'ipotenusa BF ha una lunghez-

**Figura 3**  
Una costruzione geometrica che conduce a ottenere radicali, applicando il teorema di Pitagora



za  $z$  data da:

$$z^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 \quad \text{ossia} \quad z^2 = 5$$

$$\text{da cui } z = \sqrt{5}$$

E così si può continuare, trovando altri segmenti che permettono di visualizzare tanti altri numeri irrazionali scritti per mezzo di radicali; per esempio:

$$\sqrt{6} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{10}$$

## 2. Applicare il secondo teorema di Euclide

In fig. 4a si è effettuata la seguente costruzione:

- si è disegnato un segmento AB, composto di due parti: AH lunga 1 e HB lunga 2;
- si è disegnata la semiretta Hr, perpendicolare a AB in H;
- si è tracciata la semicirconferenza di diametro AB, individuando su r il punto C;
- si è costruito il triangolo ABC, che è rettangolo perché l'angolo in C è inscritto in una semicirconferenza (vedi il primo volume, p. 145);
- si è applicato al triangolo ABC il secondo teorema di Euclide, indicando con  $x$  la lun-

ghezza di HC ed ottenendo quindi:

$$x^2 = 2 \quad \text{da cui } x = \sqrt{2}$$

Si osserva che, per ottenere il segmento HC lungo  $\sqrt{2}$ , non c'è bisogno di disegnare il triangolo rettangolo: basta disegnare la semiretta Hr e la semicirconferenza di diametro AB.

Si ha così un procedimento di carattere generale per visualizzare un radicale  $\sqrt{a}$ , dove  $a$  è un numero positivo (fig. 4b):

- si disegna un segmento AB, composto di due parti: AH lunga 1 e HB lunga  $a$ ;
- si disegna la semiretta Hr, perpendicolare a AB in H;
- si traccia la semicirconferenza di diametro AB, individuando sulla semiretta il punto C;
- il segmento HC è lungo proprio  $\sqrt{a}$ .

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Quanto vale il quadrato di  $\sqrt{5}$ ?
- ② Spiegare perché le formule seguenti sono tutte sbagliate e correggere gli errori

$$\sqrt{2} = 1,41 \quad \sqrt{4} \cong 2$$

$$(\sqrt{2})^2 \cong 2 \quad (1,41)^2 = 2$$

### Comprensione

- ① Il quadrato di  $\sqrt{2}$  è un numero razionale o irrazionale?
- ② Sulle tavole numeriche si trova, in corrispondenza della radice quadrata di 52, il numero 7,2111; scegliere fra le seguenti formule quella corretta, spiegando perché le altre sono sbagliate:

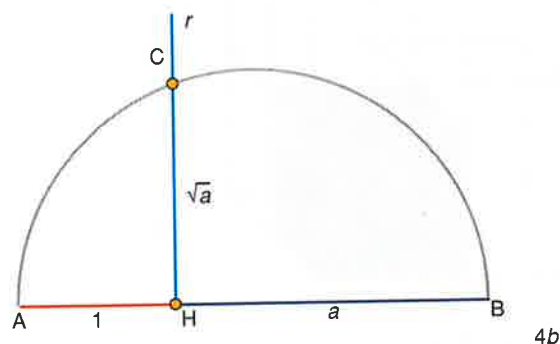
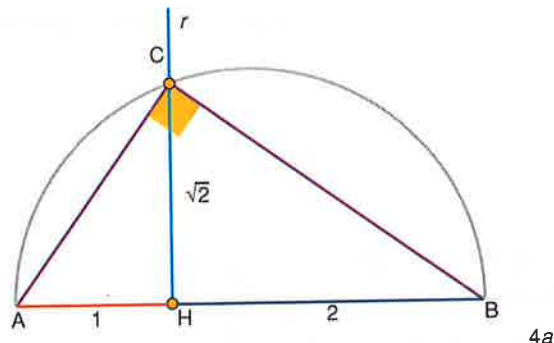
$$\sqrt{52} = 7,2111 \quad \sqrt{52} = 7,2(1)$$

$$\sqrt{52} \cong 7,2111$$

### Applicazioni

- ① Costruire due segmenti: uno lungo  $\sqrt{6}$  e l'altro lungo  $\sqrt{12}$ ; il secondo segmento è il doppio del primo?

**Figura 4**  
Una costruzione basata sul secondo teorema di Euclide per ottenere radicali



# I radicali: il caso generale

## Altri numeri irrazionali espressi con radicali

Ecco un problema che conduce a scoprire altri numeri irrazionali espressi con radicali.

In fig. 1 sono disegnati due cubi:

- il cubo che ha il lato lungo 1 e il volume  $V = 1^3 = 1$ ;
- il cubo che ha il lato lungo 2 e il volume  $V' = 2^3 = 8$ .

Quanto è lungo il lato del cubo di volume 2?

Il lato non può valere 2, perché in questo caso il volume vale 8; invece, indicata con  $x$  la lunghezza incognita del lato, deve essere:

$$x^3 = 2$$

Ora, il numero che, elevato al cubo, dà 2 non può essere razionale; per rendersene conto basta ripetere un ragionamento analogo a quel-

lo seguito nel paragrafo 4 a proposito di  $\sqrt{2}$ . Il numero che, elevato al cubo, dà *esattamente* 2 si indica allora con il simbolo  $\sqrt[3]{2}$  (che si legge «radice cubica di 2»). Così si scrive:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$

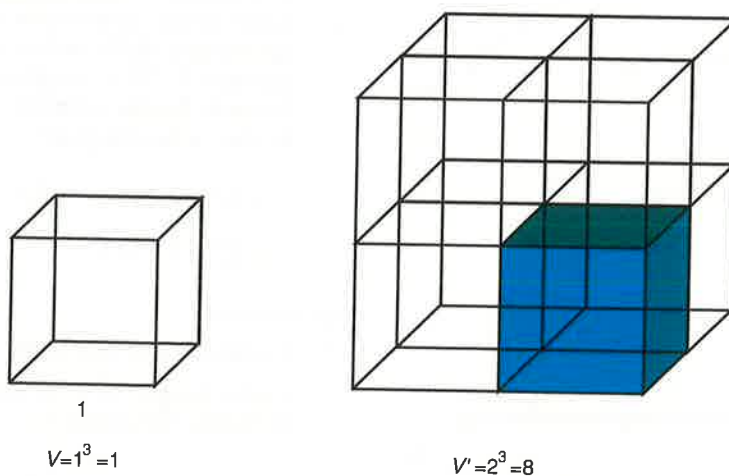
Il valore approssimato di questo numero è dato dalle tavole numeriche o dal calcolatore tascabile e è:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1,26$$

cioè 1,26 è il valore approssimato del numero  $\sqrt[3]{2}$ , dato che risulta:

$$(1,26)^3 = 2,000376$$

**Figura 1**  
Il cubo di lato 1 e il cubo di lato 2



Il risultato ora ottenuto porta ad osservare di nuovo la successione dei naturali, a partire dai numeri scritti qui sotto:

$1=1^3$	2	3	4	5	6	7
$8=2^3$	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	$27=3^3$	28

Si osserva che sono pochi i cubi di numeri naturali; si ha in questo elenco:

$$\sqrt[3]{1}=1 \quad \sqrt[3]{8}=2 \quad \sqrt[3]{27}=3$$

Hanno invece un risultato decimale infinito e non periodico le radici cubiche di tutti gli altri numeri; il risultato esatto di tali radici viene espresso per mezzo di radicali, scrivendo, per esempio:

$$\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{9} \quad \sqrt[3]{16}$$

Il valore approssimato di questi numeri è dato dalle tavole numeriche o dal calcolatore tascabile; si trova, considerando per esempio i decimali arrotondati con due cifre dopo la virgola:

$$\sqrt[3]{4} \approx 1,59 \quad \sqrt[3]{9} \approx 2,08 \quad \sqrt[3]{16} \approx 2,52$$

### I radicali

Osservando meglio i radicali scritti prima, si osserva che in molti casi il numero scritto sotto radice è una potenza; si ha per esempio:

$$4 = 2^2 \quad 9 = 3^2 \quad 16 = 2^4$$

perciò risulta:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} \quad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4}$$

Si è dunque arrivati a scrivere dei numeri irrazionali con le seguenti formule:

$$\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[3]{3^2} \quad \sqrt[3]{2^4}$$

Tutti questi numeri irrazionali sono caratterizzati dalla stessa proprietà: elevati ad esponente 3, riproducono esattamente il numero sotto radice. Si ha per esempio:

$$\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^3 = 2^4$$

Le formule finora ottenute sono del tipo:

$$\sqrt[n]{a^m}$$

e prendono sempre il nome di *radicali*, descritti generalmente mediante i seguenti termini:

- il numero  $n$  sopra la radice si chiama *indice del radicale*;
- il numero  $a^m$  sotto il segno di radice si chiama *radicando*, termine di origine latina, che significa «ciò di cui si deve estrarre la radice»;
- il numero  $m$ , esponente di  $a$ , è l'*esponente del radicando*.

I radicali sono caratterizzati dalla seguente proprietà: elevati a esponente  $n$  riproducono il numero sotto radice; risulta dunque:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$$

Così, per esempio, nella formula:

$$\sqrt[3]{2^4}$$

si ha che:

- l'indice del radicale è 3;
- il radicando è  $2^4$ ;
- l'esponente del radicando è 4;
- risulta:

$$\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^3 = 2^4$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Che cosa significa il simbolo  $\sqrt[n]{a^m}$ ?
- ② Esaminare il simbolo  $\sqrt[3]{7^2}$  e indicare:
  - l'indice del radicale;
  - il radicando;
  - l'esponente del radicando.

### Comprensione

- ① Spiegare la differenza fra:

$$\sqrt[3]{3^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{2^3}$$

### Applicazioni

- ① Quanto vale il volume del cubo di lato  $\sqrt[3]{5}$ ?
- ② È dato un cubo che ha il lato lungo 2; risolvere i seguenti quesiti:
  - a. calcolare il volume  $V$  del cubo;
  - b. calcolare il lato del cubo che ha volume  $W$  metà del cubo dato;
  - c. calcolare il volume  $V'$  del cubo che ha il lato metà del cubo dato.



# Potenze a esponente frazionario

## L'idea degli esponenti frazionari

Nel paragrafo precedente si sono ottenuti vari numeri irrazionali espressi sotto forma di radicale; per esempio:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4}$$

Le formule ottenute prima portano ad osservare meglio i casi in cui la radice cubica ha risultato intero; si ha per esempio:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

cioè:

$$\sqrt[3]{2^3} = 2^1 \quad (1)$$

La radice cubica ha dunque l'effetto di «trasformare» l'esponente del radicando: 3 «diventa» 1. D'altra parte questo stesso risultato si ottiene moltiplicando 3 per il suo reciproco  $\frac{1}{3}$ .

Si è così condotti a scrivere che risulta:

$$2^1 = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \quad (2)$$

Quest'ultima formula suggerisce di applicare una nota proprietà delle potenze, e cioè:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Così si scrive:

$$2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

e, quindi, sostituendo quest'ultima espressione nella (2), si ha:

$$2^1 = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

Perciò si può riscrivere la (1) nella forma seguente:

$$\sqrt[3]{2^3} = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

ossia:

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$$

In questo modo il radicale viene sostituito da una *potenza ad esponente frazionario*.

Forse sono state proprio considerazioni di questo tipo a suggerire al matematico fiammingo Simon Stevin di introdurre gli esponenti frazionari in una sua opera del 1585.

Gli esponenti frazionari si affiancano così al simbolo  $\sqrt{\quad}$ , introdotto circa quarant'anni prima dal matematico tedesco Michael Stifel.

I due simboli – radicali ed esponenti frazionari – si trovano entrambi nei successivi sviluppi della matematica: alcuni matematici hanno adottato prevalentemente i radicali, altri si valgono delle potenze ad esponente frazionario.

## Gli esponenti frazionari possono sostituire i radicali con indice 2 o 3

Gli esponenti frazionari possono dunque sostituire i radicali cubici finora introdotti; ecco qualche altro esempio.

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$$

Anche le radici quadrate possono essere sostituite da esponenti frazionari: il simbolo  $\sqrt{\quad}$  (abbreviazione di  $\sqrt[2]{\quad}$ ) può essere sostituito

dalla potenza con esponente  $\frac{1}{2}$ ; l'idea è suggerita dal fatto che risulta:

$$\sqrt{9} = 3$$

cioè

$$\sqrt[2]{3^2} = 3^1 = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}}$$

E perciò si è condotti a scrivere:

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$$

E analogamente si scrive per esempio:

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[4]{27} = 27^{\frac{1}{4}} \quad \sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}}$$

### Radicali con indice maggiore di 3 e loro significato

Si può ora applicare agli esponenti frazionari la proprietà delle potenze richiamata prima e cioè:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Ecco un esempio da esaminare:

$$\left(32^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 32^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 32^{\frac{1}{6}}$$

Qual è il significato del numero  $32^{\frac{1}{6}}$  così ottenuto?

Per capire meglio di che cosa si tratta si possono ripetere alcune considerazioni svolte nel paragrafo precedente. Elevando a esponente 6 il numero, si ha:

$$\left(32^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 32^{6 \cdot \frac{1}{6}} = 32^1$$

Questa stessa uguaglianza si esprime per mezzo di radicali, scrivendo:

$$\left(\sqrt[6]{32}\right)^6 = 32$$

Si trova dunque che:

$\sqrt[6]{32} = 32^{\frac{1}{6}}$  è il numero che, elevato ad esponente 6, dà 32.

Si può ora osservare che risulta:

$$32 = 2^5$$

e quindi

$$32^{\frac{1}{6}} = (2^5)^{\frac{1}{6}} = 2^{5 \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

Perciò si può dire che:

$\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$  è il numero che, elevato ad esponente 6, dà  $2^5$

I procedimenti seguiti conducono a risultati di carattere generale: indicati con  $a$ ,  $m$ ,  $n$  tre qualunque numeri interi positivi, si ha che:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  è il numero che, elevato ad esponente  $n$ , dà  $a^m$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato del simbolo  $a^{\frac{m}{n}}$ .

### Comprensione

- ① Esporre le considerazioni che hanno condotto a scrivere:

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$$

- ② Esporre le considerazioni che hanno condotto a scrivere:

$$\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$$

- ③ Spiegare la differenza fra le seguenti scritture:

$$3^{\frac{1}{3}} \quad 3 \cdot \frac{1}{3} \quad 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} \quad (3 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}$$

### Applicazioni

- ① Scrivere sotto forma di radicale le seguenti potenze a esponente frazionario:

$$4^{\frac{2}{5}} \quad 4^{\frac{5}{2}} \quad 21^{\frac{1}{7}} \quad 24^{\frac{3}{8}}$$

- ② Scrivere sotto forma di potenza a esponente frazionario i seguenti radicali:

$$\sqrt{5^3} \quad \sqrt[3]{2^4} \quad \sqrt[5]{3^4} \quad \sqrt[8]{2^7}$$

# Le radici con il calcolatore tascabile

## Il tasto con il simbolo $\sqrt{\square}$

Il tasto con il simbolo  $\sqrt{\square}$  serve per calcolare la radice quadrata di un numero e si usa nel modo seguente:

- I. si digitano le cifre che compongono il numero;
- II. si preme il tasto  $\sqrt{\square}$ .

### Attività 1

Conviene provare subito questo tasto, completando la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
$\sqrt{9}$	9 $\sqrt{\square}$	3.
$\sqrt{324}$	$\square \square \square \square$	
$\sqrt{2}$	$\square \square$	

Completando la tabella si osserva un fatto: *il calcolatore esegue subito l'estrazione di radice quadrata, senza aspettare il tasto  $=$ .*

## Calcolare le radici con il tasto $y^x$

Il tasto  $\sqrt{\square}$  permette di calcolare solo le radici quadrate; *per calcolare le radici con indice superiore a 2, si usa invece il tasto contrassegnato con il simbolo  $y^x$*  (o  $x^y$  o  $a^x$ ).

In tal caso bisogna ricordare:

- I. il significato delle potenze ad esponente frazionario (vedi i paragrafi 6 e 7 di questo capitolo);
- II. la priorità delle operazioni e il ruolo delle parentesi (vedi il primo volume, p. 36);
- III. come si usa il tasto  $y^x$  (vedi il primo volume, pp. 30-31).

## Attività 2

Conviene riprendere subito le nozioni indicate per completare la tabella seguente:

Calcolo	Tasti	Visualizzatore
$\sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}} = 243^{(1:5)}$	2 4 3 $y^x$ ( 1 ÷ 5 ) =	3.
$243^1 : 5$	2 4 3 $y^x$ 1 ÷ 5 =	48.6
$\sqrt[4]{16} =$	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	
	1 6 $y^x$ 1 ÷ 4 =	

La prima riga della tabella ricorda come usare il tasto  $y^x$ :

- I. si digitano le cifre che fissano la base della potenza;
- II. si preme il tasto  $y^x$ ;
- III. si introduce l'esponente;
- IV. si preme il tasto [=] per eseguire il calcolo.

Il passo (III) richiede ora di introdurre un esponente che è il risultato di una divisione; quindi, per esempio, per calcolare  $\sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}}$  si deve procedere nel modo seguente:

- prima calcolare il quoziente  $1:5 = 0,2$ ;
- successivamente calcolare la potenza  $243^{0,2}$ .

Questo significa che si deve alterare la priorità delle operazioni e perciò si debbono usare le parentesi.

La seconda riga della tabella mostra infatti il risultato che si ottiene omettendo le parentesi: si mantiene la priorità delle operazioni e perciò si calcola:

- prima la potenza  $243^1 = 243$ ;
- successivamente il risultato della divisione  $243:5 = 48,6$ .

## Le radici quadrate ripetute di un numero

Alcune radici di indice superiore a 2 si possono ottenere senza usare il tasto  $y^x$  e usando invece il tasto  $\sqrt{\quad}$  più volte. Ecco due esempi:

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[8]{5} = 5^{\frac{1}{8}} = 5^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \left[\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$$

Si osserva dunque che, ripetendo più volte l'estrazione di radice quadrata, si ottengono radicali che hanno i seguenti indici:

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

...



Questi esempi suggeriscono delle conclusioni di carattere generale:

- ripetendo più volte l'estrazione di radice quadrata, si ottengono radicali con l'indice che è una potenza di 2;
- viceversa, radicali con l'indice che è una potenza di 2 possono essere ottenuti con il calcolatore usando ripetutamente il tasto  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

### Attività 3

Digitare il numero 2 e poi premere tante volte il tasto  $\sqrt{\phantom{x}}$ ; ripetere l'attività a partire da altri numeri, per esempio 3 o 0,1.

Si otterrà, in tutti i casi, una successione di numeri che si avvicina sempre di più a 1 e, ad un certo punto, il visualizzatore mostrerà proprio 1.

Per capire questo risultato, completare la seguente tabella, in cui  $a$  indica un qualunque numero positivo.

Numero di volte che si preme il tasto $\sqrt{\phantom{x}}$	Potenza	Esponente
1	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5}$	0,5
2	$\sqrt[4]{a} =$	
3		
10		

Dunque, a partire da un qualunque numero positivo  $a$ , continuando a premere il tasto  $\sqrt{\phantom{x}}$  si ottengono esponenti che si avvicinano a 0; le corrispondenti potenze si avvicinano perciò al valore:

$$a^0 = 1$$

Ad un certo punto, il calcolatore arrotonderà l'esponente a 0 e darà proprio il risultato 1.

### Valori approssimati dati da un calcolatore tascabile

Un calcolatore tascabile lavora solo con numeri decimali finiti e perciò dà solo un valore approssimato dei numeri irrazionali.

Per capire come il calcolatore approssima i numeri irrazionali che provengono dall'estrazione di radice, si può esaminare la seguente tabella, dove sono indicati alcuni risultati dati dai tascabili più comuni.

Tasti	Visualizzatore	Espressione calcolata	Commenti
$2 \sqrt{\phantom{x}}$	1.4142136	$\sqrt{2}$	valore approssimato di $\sqrt{2}$
$x^2$	2.	$(\sqrt{2})^2$	è il quadrato del numero precedente
$- 2 =$	-3. -10	$(\sqrt{2})^2 - 2$	si ottiene $-3 \cdot 10^{-10} = -0,0000000003$

I risultati ottenuti nella seconda e terza riga destano delle perplessità per due motivi:

- I. elevando al quadrato 1,4142136 non si ottiene 2, come è indicato dal calcolatore; si ha invece, eseguendo i calcoli «a mano»:

$$(1,4142136)^2 = 2,00000010642496$$

e, dato che il calcolatore mostra 7 cifre dopo la virgola, ci si aspettava il risultato 2,0000001;

- II. nella seconda riga, invece, ci si aspettava il risultato;

$$2 - 2 = 0$$

Come si spiega il risultato con tante cifre dopo la virgola?

Tutto è dovuto al fatto seguente: mentre il visualizzatore mostra in tutto 8 cifre, i circuiti del calcolatore lavorano con numeri di 9 cifre; la nona cifra dunque è presente nei calcoli, ma non si può vedere sul visualizzatore.

Perciò, eseguendo  $\sqrt{2}$ , il calcolatore ottiene:

$$1,41421356 \quad (*)$$

ma mostra solo 7 cifre dopo la virgola, arrotondando il risultato; così sul visualizzatore compare:

$$1,4142136$$

Se ora si prova a calcolare «a mano» il quadrato del numero (\*) con nove cifre, si ottiene:

$$(1,41421356)^2 = 1,9999999932878736$$

numero che diventa proprio 2, quando viene arrotondato per mostrare solo 7 cifre dopo la virgola.

#### Attività 4

Completare la seguente tabella e commentare i risultati ottenuti.

Espressione da calcolare	Visualizzatore
$(\sqrt{6})^2 - 6$	
$(\sqrt{101})^2 - 101$	
$(\sqrt{1001})^2 - 1001$	

#### Attività 5

Completare la seguente tabella e commentare i risultati ottenuti.

Espressione da calcolare	Visualizzatore
$(\sqrt[3]{2})^3$	
$(\sqrt[3]{2})^3 - 2$	
$(\sqrt[4]{5})^4$	
$(\sqrt[4]{5})^4 - 5$	

# Proprietà delle potenze e calcoli con i radicali

## Elevare a potenza un radicale

L'elevazione a potenza di un radicale si esegue basandosi sulla proprietà delle potenze già richiamata nei paragrafi precedenti, e cioè:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (1)$$

dove ora al posto di  $m$  e  $n$  si possono trovare frazioni positive, mentre  $a$  indica un qualunque numero intero positivo.

Ecco qualche caso da esaminare.

$$1. \quad m = \frac{1}{p} \quad n = q$$

Per esempio:  $m = \frac{1}{3} \quad n = 4$

Applicando la proprietà (1), si ha:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4 = a^{\frac{1}{3} \cdot 4} = a^{\frac{4}{3}}$$

e in generale:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = a^{\frac{1}{p} \cdot q} = a^{\frac{q}{p}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^4 = \sqrt[3]{a^4}$$

e in generale:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$$

$$2. \quad m = \frac{1}{p} \quad n = \frac{1}{q}$$

Per esempio:  $m = \frac{1}{3} \quad n = \frac{1}{4}$

Applicando la proprietà (1), si ha:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$$

e in generale:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p \cdot q}}$$

Le stesse formule possono essere scritte valendosi dei radicali; si ha:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a}$$

e in generale:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$$

## Moltiplicare due radicali

Per moltiplicare due radicali ci si può basare sulla seguente proprietà delle potenze:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (2)$$

dove ora al posto di  $n$  si trova una frazione positiva, mentre  $a$  e  $b$  indicano due qualunque numeri interi positivi.

Il caso che si presenta più frequentemente è il seguente:

$$n = \frac{1}{q}$$

Per esempio:  $n = \frac{1}{3}$

Applicando la proprietà (2), si ha:

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \quad \text{e in generale:}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b} \quad \text{e in generale:}$$

$$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b}$$

Ecco due esempi di applicazione di questa regola:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Questi esempi fanno capire la differenza fra i calcoli svolti valendosi dei radicali e quelli svolti con i valori approssimati dei radicali.

Infatti, nei due casi precedenti i calcoli con i valori approssimati, per esempio arrotondati alla seconda cifra decimale, conducono ai seguenti risultati:

$$\sqrt{8} \approx 2,83 \quad \sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \approx 3,99$$

$$\sqrt[3]{5} \approx 1,71 \quad \sqrt[3]{25} \approx 2,92 \quad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} \approx 4,99$$

### Dividere due radicali

Per dividere due radicali ci si baserà invece sulla seguente proprietà delle potenze:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (3)$$

dove  $a$ ,  $b$  e  $n$  mantengono il significato indicato prima.

Il caso che si presenta più frequentemente è analogo a quello esaminato per moltiplicare due radicali:

$$n = \frac{1}{q}$$

Per esempio:  $n = \frac{1}{3}$

Applicando la proprietà (3), si ha:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e in generale:}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}} \quad \text{e in generale:}$$

$$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$$

Ecco un esempio di applicazione di questa regola:

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Anche in questo caso solo il calcolo con i radicali conduce al risultato esatto; altrimenti, il valore approssimato darebbe il seguente risultato:

$$\sqrt{18} \approx 4,24 \quad \sqrt{2} \approx 1,41 \quad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \approx 3,01$$

### Radicali con radicando frazionario

La divisione di due radicali con radicando intero porta a considerare radicali che hanno come radicando una frazione.

Ecco due esempi di radicali che hanno un valore razionale:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Il seguente radicale rappresenta invece un numero irrazionale:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}$$

Il valore approssimato di questo irrazionale si trova svolgendo i calcoli con i valori approssimati; per esempio, arrotondando alla seconda cifra decimale, si ottiene:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} \approx 1,71 : 1,82 \approx 0,94$$

Proprio eseguendo i calcoli precedenti si osserva che ci si vale due volte dell'approssimazione:

- I. approssimando i radicali;
  - II. approssimando il risultato della divisione.
- È per questo che risulta:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^3 = \frac{5}{6} = 0,8(3) \quad \text{ma} \quad 0,94^3 = 0,830584$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Completare la tabella A.

### Comprensione

- ① Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Il prodotto di due radicali è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi».
- ② Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Il quoziente di due radicali è un radicale che ha per indice lo

stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi».

- ③ Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Per elevare a potenza un radicale si eleva a potenza il radicando».
- ④ Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando e per indice il prodotto degli indici».

### Applicazioni

- ① Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è razionale.

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)^3 \quad \left(\sqrt{5^3}\right)^4 \quad \left(\sqrt[3]{2^2}\right)^5$$

- ② Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è irrazionale.

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \quad \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} \quad \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$$

- ③ Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è irrazionale.

$$\sqrt{\frac{25}{16}} \quad \sqrt{\frac{7}{5}} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$$

**Tabella A**  
Radicali e potenze a esponente frazionario

Proprietà delle potenze	Potenze ad esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = \dots\dots\dots$	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = \dots\dots\dots$	
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$(a \cdot b)^{\frac{1}{q}} = \dots\dots\dots$	
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \dots\dots\dots$	



# Potenze e prodotti di radicali

Questa «Attività» propone alcuni calcoli da svolgere sia valendosi dei radicali che delle potenze ad esponente frazionario; si avrà così l'occasione di confrontare i due simboli e di individuarne vantaggi e svantaggi. Per confrontare i due simboli occorre sempre ricordare che risulta:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

## Potenze di radicali

Per elevare a potenza un radicale ci si basa sulla seguente proprietà delle potenze:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

che, in particolare fornisce:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = a^{\frac{1}{p} \cdot q} = a^{\frac{q}{p}} \qquad \left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p \cdot q}} \qquad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$$

## Attività 1

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con esponenti frazionari	Calcoli con radicali
$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 3} = 2^{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$
$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
	$\sqrt[3]{\sqrt{7}} =$
$\left(11^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$	

### Semplificazione di radicali

La tabella conduce a valersi delle nozioni relative alle frazioni equivalenti per semplificare un radicale. Ecco un esempio che conduce ad una regola generale.

$$\sqrt[15]{13^6} = 13^{\frac{6}{15}}$$

Dato che risulta:  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

si ha pure:  $13^{\frac{6}{15}} = 13^{\frac{2}{5}}$

ed essendo:  $13^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{13^2}$

si conclude che risulta:

$$\sqrt[15]{13^6} = \sqrt[5]{13^2}$$

### Attività 2

Ripetere il procedimento precedente per completare la seguente tabella, dove si svolgono affiancati :

- i calcoli su un esempio numerico;
- i calcoli svolti in generale per ottenere risultati validi per qualunque valore intero positivo dato alle lettere  $a, p, q, m$ .

Esempio numerico	In generale
$\sqrt[10]{7^4} = 7^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[m \cdot q]{a^{m \cdot p}} = a^{\frac{mp}{mq}}$
$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$	$\frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$
$\frac{10}{7^4} = \frac{5}{7^2}$	$\frac{mp}{a^{mq}} = a^{\frac{p}{q}}$
$\sqrt[5]{7^2} = \sqrt[10]{7^4}$	$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[m \cdot q]{a^{m \cdot p}}$

### Moltiplicazione di radicali

La moltiplicazione si svolge basandosi anche sulla seguente proprietà:

$$a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{q}} \quad \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b} \quad (1)$$

### Attività 3

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con radicali	Calcoli con esponenti frazionari
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{11} \cdot \sqrt{3} =$	
	$7^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} =$

#### Portare un fattore fuori dalla radice

La proprietà (1), relativa alla moltiplicazione di radicali, può essere anche usata per ridurre il più possibile i numeri di cui calcolare la radice. Ecco un esempio che conduce ad una regola generale. Calcolare:

$$\sqrt{147}$$

In tal caso conviene procedere nel modo seguente:

- si scompone 147 in fattori, trovando che risulta:

$$147 = 7^2 \cdot 3 \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{147} = \sqrt{7^2 \cdot 3}$$

- si applica la proprietà (1), scrivendo:

$$\sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3}$$

- si ricorda che risulta:

$$\sqrt{7^2} = 7 \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3} = 7 \cdot \sqrt{3}$$

### Attività 4

Ripetere il procedimento precedente per completare la seguente tabella, dove si svolgono affiancati:

- i calcoli su un esempio numerico;
- i calcoli svolti in generale per ottenere risultati validi per qualunque valore intero positivo dato alle lettere  $a, b, q$ .

Esempio numerico	In generale
$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[q]{a^q \cdot b} = \sqrt[q]{a^q} \cdot \sqrt[q]{b}$
$\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[q]{a^q} \cdot \sqrt[q]{b} = a \cdot \sqrt[q]{b}$
$\sqrt[3]{250} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[q]{a^q \cdot b} = a \cdot \sqrt[q]{b}$

#### Divisioni di radicali

Esercizi e considerazioni svolte a proposito della moltiplicazione di radicali possono essere svolte per la divisione di radicali; operazione regolata dalla seguente proprietà:

$$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$$

### Attività 5

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con radicali	Calcoli con esponenti frazionari
$\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{22}{2}} = \sqrt{11}$	$\frac{22^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{22}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{1}{2}}$
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} =$	
	$\frac{15^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} =$

### Esponenti frazionari negativi

La divisione conduce a richiamare le potenze ad esponente intero negativo (vedi anche il primo volume, pp. 25-26), ricordando che risulta:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dove  $a$  e  $n$  indicano ora due qualunque numeri interi positivi.

Introducendo le potenze ad esponente negativo si può infatti sostituire la divisione con la moltiplicazione, scrivendo:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{e quindi} \quad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

L'idea dell'esponente negativo può essere estesa anche agli esponenti frazionari, come si può capire svolgendo l'attività seguente.

### Attività 6

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

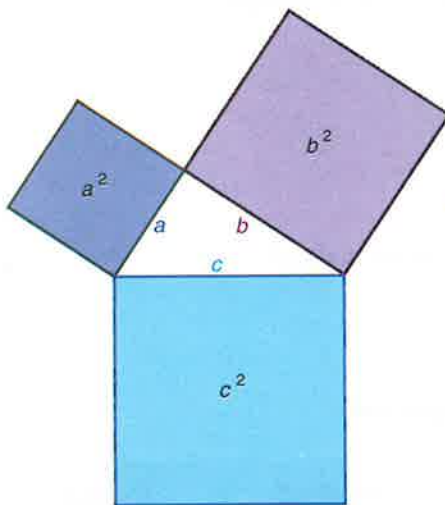
Calcoli con frazioni e radicali	Calcoli con esponenti negativi e frazionari	
$\sqrt[3]{\frac{1}{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$	$\left(\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\frac{1}{3}} = 5^{-2 \cdot \frac{1}{3}} = 5^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = 5^{-\frac{2}{3}}$
	$\left(\frac{1}{7^3}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
$\sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{\sqrt[q]{1}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$	$\left(\frac{1}{a^p}\right)^{\frac{1}{q}} = (a^{-p})^{\frac{1}{q}} = a^{-\frac{p}{q}}$	$\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = a^{-\frac{p}{q}}$

## Che cosa bisogna sapere

### Proprietà che caratterizzano i triangoli rettangoli

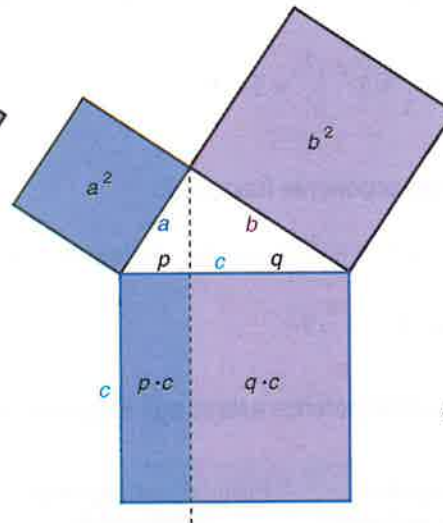
Il teorema di Pitagora:  $c^2 = a^2 + b^2$

I teoremi di Euclide:  
 (I)  $a^2 = c \cdot p$   
 (II)  $b^2 = p \cdot q$



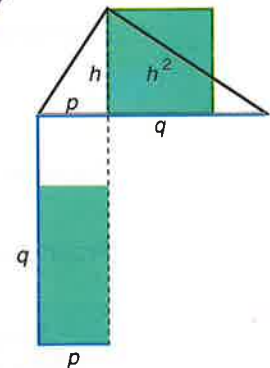
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Teorema di Pitagora



$$\begin{cases} a^2 = p \cdot c \\ b^2 = q \cdot c \end{cases}$$

Primo teorema di Euclide



$$h^2 = p \cdot q$$

Secondo teorema di Euclide

### Numeri irrazionali

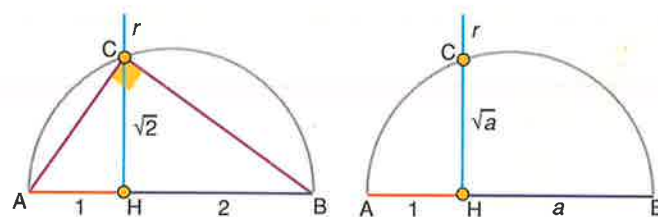
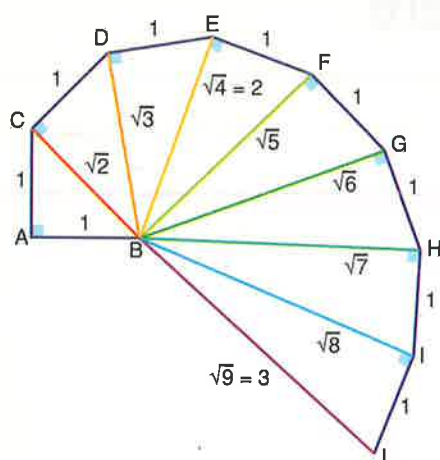
Si chiamano irrazionali i numeri che non sono razionali, cioè che non possono essere scritti sotto forma di frazione.

Scritti in forma decimale danno luogo a numeri decimali illimitati non periodici.

Esempi:  $0,1234567891011\dots$   $\sqrt{2} = 1,4142\dots$



Con il teorema di Pitagora ed il secondo teorema di Euclide si costruiscono segmenti che hanno lunghezza irrazionale.



## Radicali

Il simbolo  $\sqrt[n]{a^m}$  indica il numero che, elevato ad esponente  $n$ , dà  $a^m$ ; si ha dunque:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m \quad \text{con } a, m, n \text{ numeri interi positivi}$$

Esempio:  $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3 = 5^2$

## Potenze ad esponente frazionario

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  è il numero che, elevato ad esponente  $n$ , dà  $a^m$

Esempio:  $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

## Proprietà delle potenze estese agli esponenti frazionari

Proprietà delle potenze	Potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempi
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$	$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 = \sqrt[4]{5^3}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{pq}}$	$\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[12]{7}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{q}}$	$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{15}$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$	$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

## Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due argomenti, ben collegati fra loro:

- i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- i numeri irrazionali.

Le applicazioni di questi argomenti, che sono numerose e molto varie, sono state qui riunite in due gruppi:

- applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide per scoprire proprietà delle figure geometriche;
- eseguire calcoli con i radicali o con le potenze ad esponente frazionario.

**Figura 1**  
Il quadrato costruito sulla diagonale di un quadrato ABCD

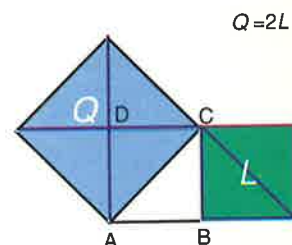
### A. Applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide per scoprire proprietà delle figure

#### Attività 1

Valersi del teorema di Pitagora per dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque quadrato ABCD il quadrato costruito sulla diagonale è equivalente al doppio del quadrato costruito sul lato.

La fig. 1 suggerisce di considerare il triangolo rettangolo ABC e di indicare con Q l'area del quadrato costruito sulla diagonale e con L l'area del quadrato costruito sul lato; si ha:

$$Q = \dots\dots\dots \text{ ossia } Q = 2L$$



#### Attività 2

Valersi del teorema di Pitagora per dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque triangolo equilatero ABC il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al triplo del quadrato costruito su metà lato.

La fig. 2 suggerisce di indicare con H l'area del quadrato costruito sull'altezza, con Q l'area del quadrato costruito su metà lato e con L l'area del quadrato costruito sul lato; si ha:

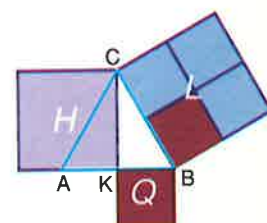
- applicando il teorema di Pitagora al triangolo CKB si ha:

$$L = \dots\dots\dots (1)$$

- esaminando i quadrati L e Q risulta:

$$L = 4Q (2)$$

**Figura 2**  
Il quadrato costruito sull'altezza di un triangolo equilatero



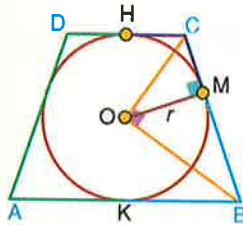
$$H = 3Q$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene appunto:

$$H = 3Q$$

### Attività 3

**Figura 3**  
Un trapezio isoscele  
circoscritto a un cerchio



$$OM^2 = CH \cdot KB$$

Dato un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad un cerchio di centro O e raggio  $r$ , dimostrare che il quadrato costruito sul raggio è equivalente al rettangolo che ha per lati metà delle basi AB e CD.

La fig. 3 ricorda due proprietà caratteristiche del trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza (vedi il primo volume, pp. 231-232):

- sono uguali i segmenti CH e CM, MB e KB;
- il triangolo COB è rettangolo in O;
- nel triangolo COB l'altezza relativa all'ipotenusa (OM) è il raggio della circonferenza.

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo COB si ottiene:

$$OM^2 = \dots\dots\dots \text{ e quindi } OM^2 = CH \cdot KB$$

## B. Eseguire calcoli con i radicali e con le potenze ad esponente frazionario

### Attività 4

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con esponenti frazionari	Calcoli con radicali
$\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{4} \cdot 2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^2 = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$
	$\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{7})^2 =$
$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$	
	$\frac{(\sqrt[4]{11})^5}{\sqrt[4]{11}} =$
	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^4}} =$



# L'INSIEME DEI NUMERI REALI

1.  
L'insieme dei numeri reali

**Scheda informativa.**  
Le frazioni continue

2.  
Valori approssimati di un numero reale

3.  
Le proprietà delle operazioni  
nell'insieme dei numeri reali

4.  
Calcoli con i numeri reali

**Attività.**  
Calcoli con frazioni, radicali e potenze  
a esponente frazionario

**Attività.**  
Calcoli con il calcolatore tascabile

**Scheda informativa.**  
Le approssimazioni e la propagazione  
degli errori

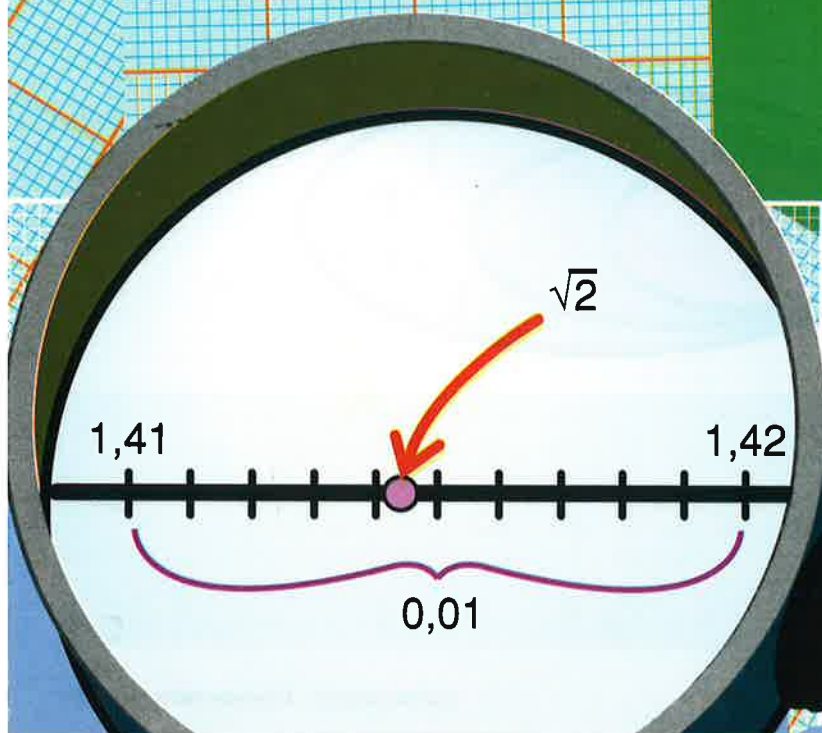
5.  
I numeri reali in geometria:  
il rapporto fra due segmenti

6.  
Il teorema di Talete

**Scheda storica.**  
I numeri reali nella storia

**Sintesi.**  
Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**  
Che cosa bisogna saper fare



# 1

## L'insieme dei numeri reali

### L'insieme dei numeri razionali

L'insieme  $Q$  dei numeri razionali è costituito da tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione; nell'insieme  $Q$  (fig. 1) si trovano:

- *numeri razionali positivi*, cioè numeri come:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{2}{3}$$

- *numeri razionali negativi*, cioè numeri come:

$$-\frac{1}{4} \quad -\frac{2}{7}$$

- *numeri interi*, cioè numeri come:

$$-1 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

- *numeri naturali* (o *interi positivi*), cioè numeri come:

$$0 \quad 1 \quad 4$$

I numeri razionali possono essere scritti in due forme:

- sotto forma di *frazione*, ad esempio:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{4}{3}$$

- in forma *decimale* e in tal caso si hanno due casi possibili:

• *numero decimale finito*, per esempio:

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

Figura 1  
L'insieme  $Q$  dei numeri razionali

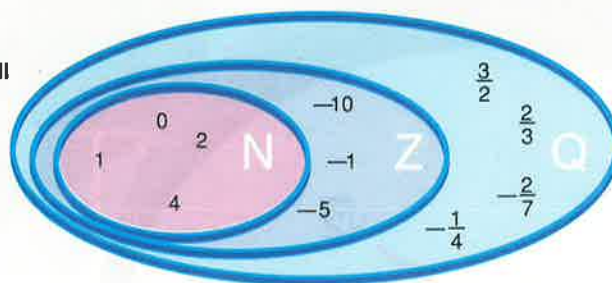
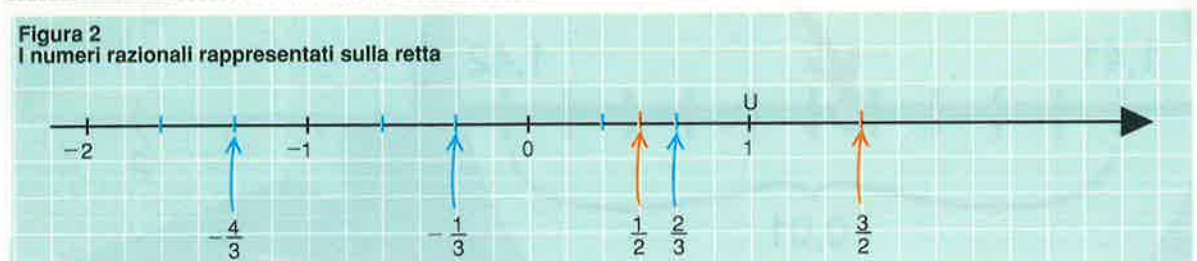


Figura 2  
I numeri razionali rappresentati sulla retta





- numero decimale infinito periodico, per esempio:

$$\frac{2}{3} = 0,(\overline{6})$$

L'insieme dei razionali è caratterizzato da una proprietà fondamentale: fra due numeri razionali si possono eseguire addizione, moltiplicazione, sottrazione con la sicurezza di trovare sempre un risultato razionale. Anche la divisione fra due razionali ha sempre un risultato razionale con un'unica eccezione: non si può dividere per 0.

### I numeri irrazionali non appartengono all'insieme dei razionali

La geometria e l'operazione di estrazione di radice hanno portato a scoprire dei numeri che non sono razionali e che perciò si chiamano numeri *irrazionali*.

I numeri irrazionali introdotti nel capitolo precedente possono essere scritti in due forme:

- sotto forma di *radicale*, per esempio

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{4};$$

- in forma *decimale*; in tal caso si ha che un numero irrazionale dà sempre luogo ad un decimale infinito non periodico.

Risulta, per esempio:

$$\sqrt{2} \cong 1,4142... \quad \sqrt[3]{4} \cong 1,5874...$$

I numeri irrazionali, ovviamente, si trovano al di fuori dell'insieme dei razionali.

### L'insieme dei razionali sulla retta

I numeri razionali si possono rappresentare con un diagramma di Venn come quello di fig. 1; ma si rappresentano anche sulla retta (fig. 2).

È proprio la rappresentazione sulla retta che mette in rilievo un'altra notevole proprietà dei razionali: l'insieme dei razionali è *denso*, cioè fra due razionali si può sempre trovare un altro razionale.

Sembra dunque che non ci sia sulla retta alcun posto libero. Invece, basta eseguire delle semplici costruzioni geometriche per scoprire che sulla retta ci sono ancora dei «posti vuoti».

### Sulla retta «c'è posto» per gli irrazionali

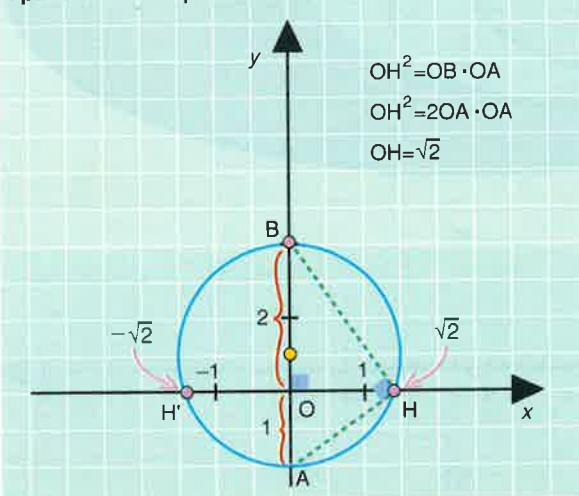
In fig. 3 si è applicato il secondo teorema di Euclide per costruire sulla retta il segmento OH che è lungo  $\sqrt{2}$ .

Ma  $\sqrt{2}$  è un numero irrazionale (vedi pp. 21-22) e perciò il punto H della retta non può corrispondere a un numero razionale; H è dunque «un posto lasciato libero dai razionali», posto che

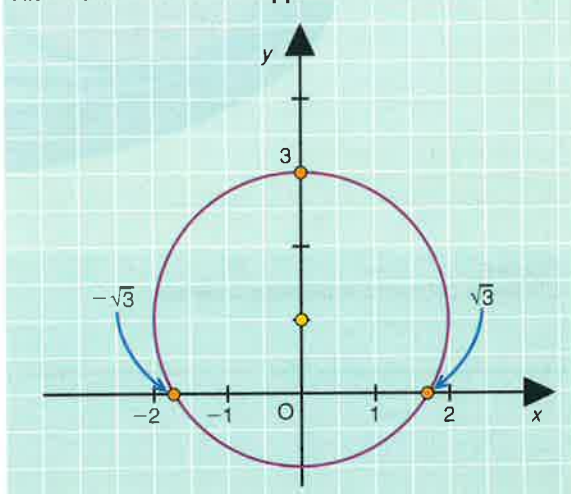
viene «riempito» dal numero irrazionale  $\sqrt{2}$ . Inoltre, la stessa costruzione mostra il punto H', che si trova a sinistra di O e delimita un segmento OH' che è ancora lungo  $\sqrt{2}$ ; a questo punto H' si farà corrispondere il numero negativo  $-\sqrt{2}$ .

Ora è facile ripetere la costruzione per rappresentare sulla retta altri numeri irrazionali come, per esempio (fig. 4)  $\sqrt{3}$  e  $-\sqrt{3}$ .

**Figura 3**  
I punti che corrispondono a  $\sqrt{2}$  e a  $-\sqrt{2}$



**Figura 4**  
Altri numeri irrazionali rappresentati sulla retta



## Numeri razionali e irrazionali costituiscono l'insieme dei numeri reali

Sulla retta si trovano così rappresentati sia i numeri razionali che i numeri irrazionali, senza distinguere gli uni dagli altri.

È per questo che numeri irrazionali e razionali sono stati riuniti in un unico insieme: *numeri razionali e irrazionali formano l'insieme **R** dei numeri reali*.

Il diagramma di fig. 5 conduce invece a distinguere i numeri razionali da quelli irrazionali, mettendo così in rilievo una distinzione che rimane nascosta dalla rappresentazione sulla retta.

## L'insieme dei numeri reali è ordinato

I numeri reali disposti sulla retta conducono a ritrovare una notevole proprietà, già scoperta per i numeri razionali (vedi il primo volume, p. 88): *l'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato*.

Questo significa che *dati due qualunque numeri reali, si può sempre dire se uno precede l'altro*.

Ma non sempre è facile ordinare dei numeri reali disponendoli sulla retta; per esempio, i numeri

$$\frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt[4]{7}$$

rappresentati sulla retta, sono tutti assai vicini fra loro e solo un disegno molto accurato per-

mette di ordinarli correttamente (vedi fig. 6).

Si è dunque condotti a cercare un altro metodo per confrontare due numeri reali; si ricorre, per esempio, alla rappresentazione decimale dei numeri reali. Ecco come si procede.

## Confrontare due numeri reali basandosi sulla scrittura decimale

Esprimendo in forma decimale i numeri reali indicati prima, si ottiene:

$$\frac{5}{3} = 1,6\overline{6} \quad \sqrt{3} \approx 1,73205...$$

$$\frac{8}{5} = 1,6 \quad \sqrt[4]{7} \approx 1,62657...$$

Così arrotondando i numeri alla 2<sup>a</sup> cifra decimale si trova che:

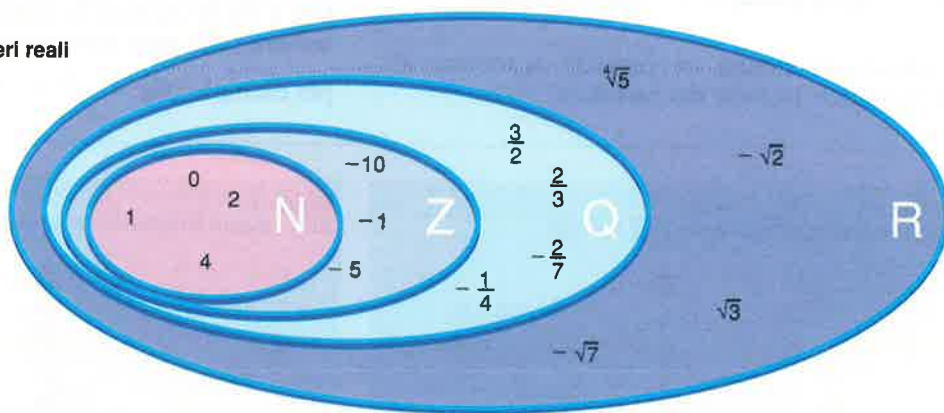
– il più piccolo è  $\frac{8}{5} = 1,60$

– segue  $\sqrt[4]{7} \approx 1,63 = 1,6 + 0,03$

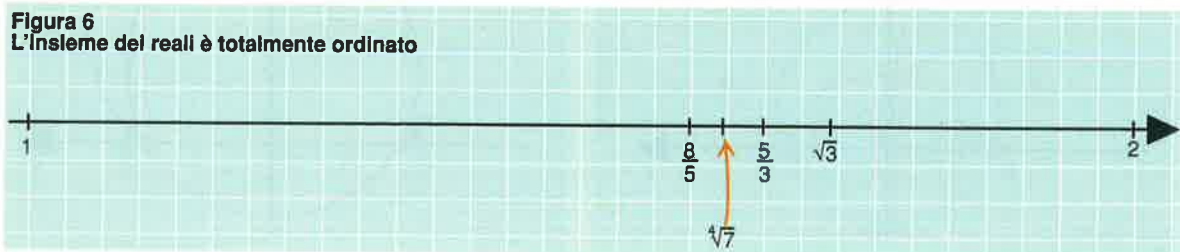
– segue  $\frac{5}{3} \approx 1,67 = 1,63 + 0,04$

– segue  $\sqrt{3} \approx 1,73 = 1,67 + 0,06$

**Figura 5**  
L'insieme **R** dei numeri reali



**Figura 6**  
L'insieme dei reali è totalmente ordinato



Risulta dunque:

$$1,6 < 1,63 < 1,67 < 1,73$$

e quindi:

$$\frac{8}{5} < \sqrt[4]{7} < \frac{5}{3} < \sqrt{3}$$

I confronti appena svolti suggeriscono un'osservazione: si è riusciti a ordinare i numeri perché si è scritto un adeguato numero di cifre dopo la virgola (due); se però ci si fosse fermati, per esempio, solo alla prima cifra decimale, la situazione sarebbe stata meno chiara.

Infatti i numeri precedenti, arrotondati alla prima cifra decimale, danno i seguenti risultati:

$$\frac{8}{5} = 1,6 \quad \sqrt[4]{7} \cong 1,6 \quad \frac{5}{3} \cong 1,7 \quad \sqrt{3} \cong 1,7$$

così non si riesce a stabilire se  $\frac{8}{5}$  precede o segue

$\sqrt[4]{7}$ , né se  $\frac{5}{3}$  precede o segue  $\sqrt{3}$ .

Dunque, per confrontare due numeri reali rappresentati in forma decimale, bisogna avere a disposizione le cifre dopo la virgola necessarie per distinguere un numero dall'altro.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato dei termini seguenti:
  - numero razionale;
  - numero irrazionale;
  - numero reale.
- ② Spiegare il significato della frase: «L'insieme dei reali è totalmente ordinato».

### Comprensione

- ① Portare un esempio di numero razionale e un esempio di numero reale, ma non razionale; si può trovare un numero razionale che non è reale?
- ② Spiegare quali difficoltà si possono incontrare confrontando due numeri reali scritti in forma decimale.

### Applicazioni

- ① Collocare i seguenti numeri in un diagramma come quello di fig. 5.

$$\sqrt{1} \quad \sqrt{8} \quad -\sqrt{8} \quad \sqrt{9} \quad -\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}$$

- ② Rappresentare sulla retta i numeri assegnati nell'esercizio precedente.
- ③ Disporre i seguenti numeri reali in ordine crescente:

$$1 \quad 2 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[4]{5} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{3}{2}$$

- ④ Disporre i seguenti numeri reali in ordine crescente:

$$-1 \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad -\sqrt[4]{5} \quad -\frac{7}{5} \quad -\frac{3}{2}$$

Collegamento con il capitolo precedente e con il primo volume

- ① Spiegare perché con il 2° teorema di Euclide si riesce a rappresentare esattamente sulla retta i numeri  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ .  
(vedi capitolo primo, paragrafo 4)
- ② Spiegare come si rappresentano sulla retta i numeri naturali.  
(vedi primo volume, p. 85)
- ③ Spiegare come si rappresentano sulla retta i numeri interi.  
(vedi primo volume, p. 86)
- ④ Spiegare come si rappresentano sulla retta le frazioni.  
(vedi primo volume, p. 86)

## Le frazioni continue

### I numeri reali che danno luogo a decimali infiniti

Rappresentando i numeri reali in forma decimale si trovano infinite cifre dopo la virgola in due casi:

1. *Si scrivono in forma decimale particolari numeri razionali.*

È il caso delle frazioni che, ridotte ai minimi termini non hanno il denominatore composto solo da 2 e 5 (vedi il primo volume, p. 56); in tal caso si ottiene sempre un numero periodico, per esempio si ha:

$$\frac{5}{3} = 1,6) \quad \frac{17}{11} = 1,54)$$

Questi esempi conducono anche a ricordare perché le infinite cifre dopo la virgola si ripetono sempre nello stesso ordine: il procedimento di divisione non ha mai termine; risulta infatti:

$$5 : 3 = 1,666666... \quad 17 : 11 = 1,545454...$$

Tuttavia i resti della divisione debbono necessariamente ripetersi, dato che sono minori del numeratore, e, insieme ai resti, si ripetono anche le cifre del quoziente.

2. *Si scrivono in forma decimale i numeri irrazionali.*

In tal caso si ottengono dopo la virgola infinite cifre che non si ripetono.

Questa scheda è dedicata ad un procedimento che permette di scrivere in forma limitata i decimali periodici e in forma illimitata, ma con delle visibili regolarità, i radicali quadratici.

Il procedimento è quello delle *frazioni continue*, studiate da un matematico italiano del Seicento, Pietro Antonio Cataldi, ma già presenti in opere molto più antiche.

### Lo sviluppo di un decimale periodico in frazione continua

Ecco un primo esempio che mostra come si organizza il procedimento delle frazioni continue.

Per rappresentare  $\frac{5}{3}$  si procede così:

A. si esegue la divisione  $5 : 3$ , ottenendo:

$$5 : 3 = 1 \quad \text{con resto} \quad 2$$

e quindi:

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$



B. si scrive:

$$\frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

C. si passa ad esaminare  $\frac{2}{3}$ , scrivendo:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

A<sub>1</sub>. si ripete il procedimento A, a partire da  $\frac{3}{2}$  ottenendo:

$$3 : 2 = 1 \quad \text{con resto } 1$$

$$\text{e quindi} \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1$$

B<sub>1</sub>. si scrive:

$$\frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

A questo punto il procedimento si ferma, dato che risulta:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{2}{1}}$$

e la divisione 2:1 ha resto 0.

Riunendo tutti i calcoli eseguiti in un'unica formula, si ottiene:

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Procedendo analogamente per la frazione  $\frac{17}{11}$ , si trova invece:

$$\frac{17}{11} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

È facile capire che un numero razionale dà sempre luogo ad una frazione continua limitata; basta ripetere il procedimento seguito prima valendosi delle lettere per indicare dei numeri interi positivi. Si considera dunque un qualunque numero razionale positivo espresso dalla frazione  $\frac{n}{d}$  e si procede nel modo seguente:

A. si esegue la divisione  $n : d$ , ottenendo:

$$n : d = q_1 \quad \text{con resto} \quad r_1 < d$$

e quindi:

$$n = q_1 \cdot d + r_1$$



Ora i casi possibili sono due:

I. risulta  $r_1 = 0$ ; il procedimento ha termine e si scrive:

$$\frac{n}{d} = q_1$$

II. risulta  $r_1 \neq 0$ ; si continua il procedimento:

B. si scrive:

$$\frac{n}{d} = \frac{q_1 \cdot d + r_1}{d} = q_1 + \frac{r_1}{d}$$

C. si passa ad esaminare  $\frac{r_1}{d}$ , scrivendo:

$$\frac{r_1}{d} = \frac{1}{\frac{d}{r_1}}$$

A<sub>1</sub>. si ripete il procedimento A, a partire da  $\frac{d}{r_1}$  ottenendo:

$$d : r_1 = q_2 \quad \text{con resto} \quad r_2 < r_1$$

e quindi:

$$d = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

B<sub>1</sub>. si scrive:

$$\frac{d}{r_1} = \frac{q_2 \cdot r_1 + r_2}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

Il procedimento si può ora ripetere a partire dalla frazione  $\frac{r_2}{r_1}$  e così di seguito; ma

i resti  $r_1, r_2 \dots$  sono dei numeri interi positivi che decrescono sempre, perciò si arriverà certamente ad un resto  $r = 0$  ed il procedimento avrà termine.

Si conclude dunque che *un numero razionale si può sempre esprimere con una frazione continua limitata.*

### Lo sviluppo di un radicale quadratico in frazione continua

Cominciamo anche in questo caso con un esempio: il radicale  $\sqrt{2}$ , di cui si conoscono le seguenti due caratteristiche:

$$(\sqrt{2})^2 = 2 \quad (1)$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \quad (2)$$

Le disuguaglianze (2) conducono a scrivere  $\sqrt{2}$  nella forma seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + r \quad \text{con} \quad r < 1$$

Così la (1) conduce a scrivere:

$$(1 + r)^2 = 2$$

Sviluppando il quadrato del binomio, si ottiene poi:

$$1 + 2r + r^2 = 2 \quad \text{cioè} \quad 2r + r^2 = 1$$

Nell'ultima espressione ottenuta si può raccogliere il fattore comune  $r$ ; si ha:

$$r(2 + r) = 1$$

da cui si può ottenere:

$$r = \frac{1}{2+r} \quad (3)$$

Il secondo membro della (3) fornisce un'espressione che può essere sostituita al posto della lettera  $r$ ; si può dunque scrivere:

$$r = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+r}}$$

Ora, si può continuare a sostituire a  $r$  il secondo membro della (3), ottenendo:

$$r = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\dots}}}$$

E, dato che risultava:

$$\sqrt{2} = 1 + r$$

si avrà pure:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\dots}}} \quad (4)$$

È chiaro che questo procedimento non può avere fine; si ottiene così lo sviluppo di  $\sqrt{2}$  in *frazione continua illimitata*.

La formula (4) ora ottenuta lega  $\sqrt{2}$  ai numeri interi in modo molto più espressivo dello sviluppo decimale, che non presenta alcuna regolarità nella successione delle sue cifre.

Procedendo in modo analogo, si può ottenere lo sviluppo di altri radicali quadratici. Per esempio, lo sviluppo di  $\sqrt{5}$  con una frazione continua fornisce:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4+\dots}}}$$

# Valori approssimati di un numero reale

## Approssimazioni per difetto e per eccesso

Rappresentando i numeri reali sulla retta, non si distinguono i numeri razionali da quelli irrazionali: un numero irrazionale è «circondato» da numeri razionali.

Per studiare i numeri razionali che «circondano» un irrazionale, consideriamo, per esempio,  $\sqrt{2}$ , numero per cui risulta:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Si può procedere allora nel modo seguente.

- Si esaminano i numeri interi e i loro quadrati e si trova:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
1	1
$\sqrt{2}$	2
2	4

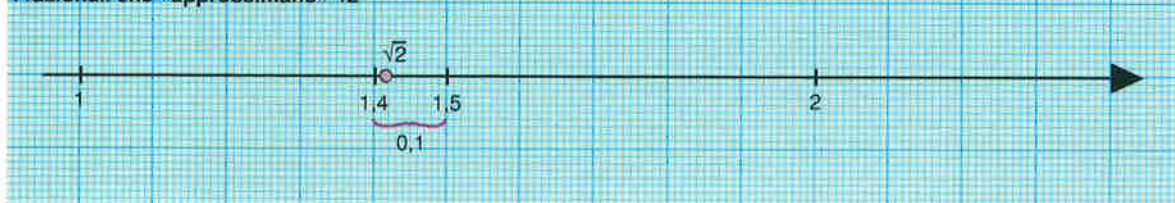
Così si individuano i due numeri interi che «circondano»  $\sqrt{2}$ :

- 1, che è più piccolo e perciò approssima  $\sqrt{2}$  per difetto;
- 2, che è più grande e perciò approssima  $\sqrt{2}$  per eccesso.

**Figura 1**  
Gli interi che «approssimano»  $\sqrt{2}$



**Figura 2**  
I razionali che «approssimano»  $\sqrt{2}$



Il numero  $\sqrt{2}$  si trova dunque all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1 e 2, intervallo che è ampio 1 (fig. 1).

- Si suddivide l'intervallo delimitato da 1 e 2 in 10 parti per «stringere»  $\sqrt{2}$  con decimali con una cifra dopo la virgola; considerando i quadrati di questi numeri, si trova:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
1,4	1,96
$\sqrt{2}$	2
1,5	2,25

Si conclude dunque che:

- 1,4 approssima  $\sqrt{2}$  *per difetto*;

- 1,5 approssima  $\sqrt{2}$  *per eccesso*.

Così il numero  $\sqrt{2}$  si trova all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1,4 e 1,5, intervallo che è ampio 0,1 (fig. 2).

E ora si può continuare, dividendo l'intervallo delimitato da 1,4 e 1,5 in dieci parti uguali e così via (fig. 3); fermandosi, per esempio, alla quarta cifra dopo la virgola, si ottengono le approssimazioni di  $\sqrt{2}$  elencate nella tabella A.

### Due successioni di numeri razionali che approssimano un irrazionale

Si trovano così due successioni di numeri razionali che approssimano il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  :

Tabella A  
Le approssimazioni di  $\sqrt{2}$

Per difetto	$\sqrt{2}$	Per eccesso	Intervallo
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	0,1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	0,01
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	0,001
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	0,0001

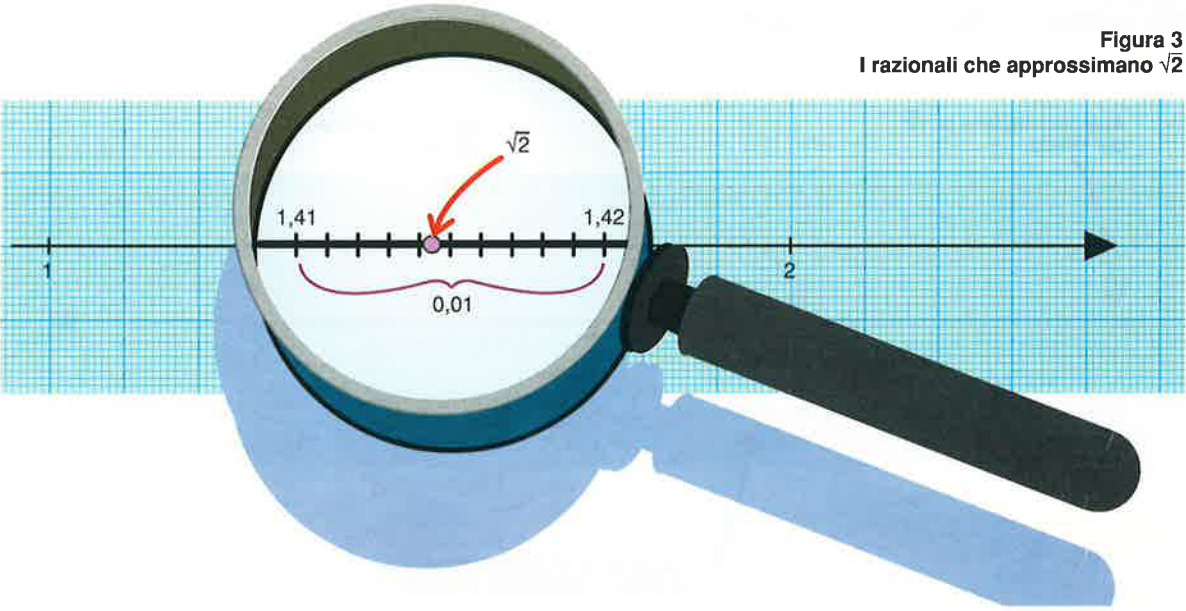


Figura 3  
I razionali che approssimano  $\sqrt{2}$



- una successione che approssima  $\sqrt{2}$  per difetto (prima colonna della tabella A);
- una successione che approssima  $\sqrt{2}$  per eccesso (terza colonna della tabella A).

Queste due successioni presentano delle particolari proprietà, fra le quali si segnalano le seguenti (fig. 4):

1. i numeri che approssimano per difetto vanno aumentando, mentre i numeri che approssimano per eccesso vanno diminuendo;
2. aumentando il numero di cifre dopo la virgola, diventa sempre più piccolo l'intervallo fra un'approssimazione per eccesso e quella per difetto.

Il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  rimane quindi «stretto» fra due successioni di numeri razionali che possono avvicinarsi a  $\sqrt{2}$  quanto si vuole, senza però riuscire a raggiungerlo.

E così non sarà certo la matita o l'occhio che potranno distinguere sulla retta il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  dai numeri razionali 1,4142135 e 1,4142136 che lo circondano: solo con il pensiero si può immaginare questo «foro invisibile» che rimane fra le due successioni di numeri razionali, «foro» che viene riempito con il numero irrazionale  $\sqrt{2}$ .

Le considerazioni ora svolte hanno carattere generale e possono essere ripetute a partire da altri numeri irrazionali come  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[3]{4}$ ,

suggerendo la seguente conclusione: *ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali.*

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato della frase seguente: «1,4 approssima  $\sqrt{2}$  per difetto».
- ② Spiegare il significato della frase seguente: «1,5 approssima  $\sqrt{2}$  per eccesso».

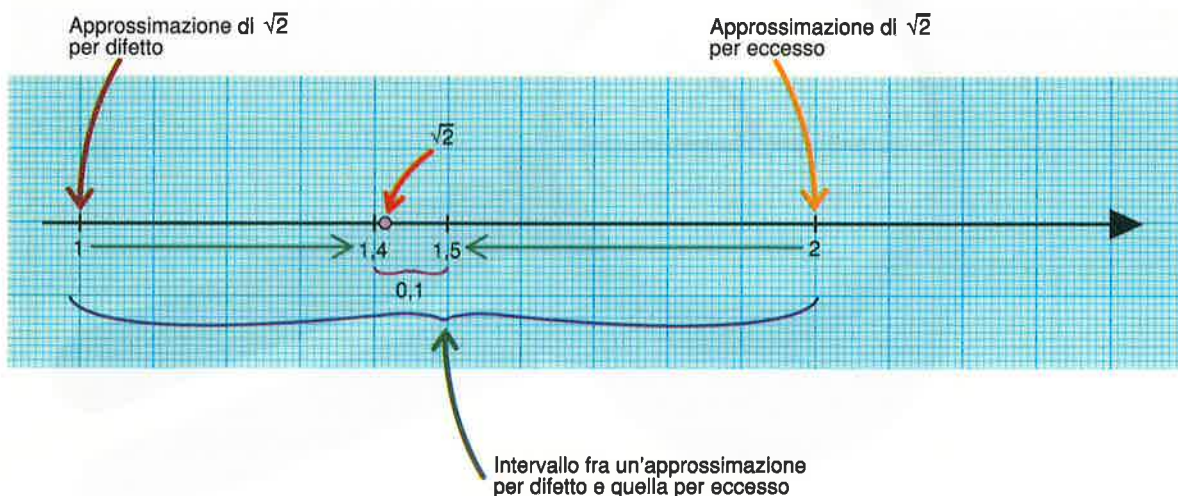
### Comprensione

- ① Esporre il procedimento seguito nel testo per approssimare  $\sqrt{2}$  con due successioni di numeri razionali.

### Applicazioni

- ① Approssimare  $\sqrt{2}$  con i due numeri decimali con cinque cifre dopo la virgola.
- ② Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano  $\sqrt{3}$  per difetto e per eccesso.
- ③ Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano  $\sqrt[3]{4}$  per difetto e per eccesso.

**Figura 4**  
Due successioni di razionali che approssimano  $\sqrt{2}$





# Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri reali

## Proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri razionali

L'insieme dei numeri reali è formato dai numeri razionali e dai numeri irrazionali. I calcoli con i soli numeri razionali sono stati esaminati nel primo volume, trovando in particolare che:

1. per l'addizione e la moltiplicazione valgono le proprietà indicate nella tabella A;
2. per l'elevazione a potenza ad esponente intero positivo valgono le seguenti proprietà:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Insieme a queste proprietà possono essere considerate le definizioni di potenza ad esponente 0 o negativo scritte nella forma seguente:

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{per qualunque } a \neq 0$$

3. quando si eseguono più operazioni, i calcoli debbono essere svolti secondo un ordine fisso che stabilisce una precisa priorità delle operazioni;
4. si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.

## Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

È l'operazione di estrazione di radice che «fa uscire» dall'insieme dei razionali e conduce ad

**Tabella A**  
Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Proprietà delle operazioni	Addizione $a + b$	Moltiplicazione $a \cdot b$
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva		$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente		$a \cdot 0 = 0$
Opposto e Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$

ampliare l'insieme di numeri disponibili, introducendo i numeri irrazionali.

Ma un numero irrazionale – si è visto nel paragrafo precedente – si può sempre approssimare quanto si vuole con dei numeri razionali e perciò *le regole di calcolo valide per i razionali si estendono agli irrazionali e diventano valide per l'insieme dei reali*.

Ora, però, lavorando anche con i numeri irrazionali si potrà pure eseguire l'estrazione di radice, operazione che equivale ad un'elevazione a potenza con esponente frazionario.

Si aggiunge quindi all'operazione di elevazione a potenza il caso in cui l'esponente è frazionario, ricordando che:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  è il numero che, elevato ad esponente  $n$ , dà  $a^m$

Perciò l'estrazione di radice ha la stessa priorità dell'elevazione a potenza.

Si conclude che:

- I. *per eseguire i calcoli con i numeri reali si deve tener presente il seguente ordine:*
  1. *si esegue l'elevazione a potenza (o l'estrazione di radice);*
  2. *si eseguono le moltiplicazioni (o le divisioni);*
  3. *si eseguono le addizioni (o le sottrazioni);*
- II. *si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.*

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Elencare le proprietà delle operazioni valide nell'insieme dei reali.
- ② Elencare le proprietà dell'elevazione a potenza.
- ③ Completare la tabella B come è indicato nella prima riga.

### Comprensione

- ① Portare qualche esempio di operazione fra numeri razionali che non ha risultato razionale.
- ② Portare qualche esempio di operazione fra numeri razionali che ha risultato reale, ma non razionale.

Tabella B

Esponente	Potenza	Esempio
$n$ intero positivo	$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ ( $n$ numero dei fattori uguali a $a$ )	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
0		
$-n$ intero negativo		
$\frac{m}{n}$ frazionario		$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

# Calcoli con i numeri reali

## Calcoli esatti e calcoli approssimati

Quando si eseguono i calcoli con numeri reali, si lavora con un insieme numerico molto ampio; si troveranno in particolare:

- numeri interi come  $-3, -1, 0, 1, 2$ ;
- numeri razionali come  $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ ;
- numeri irrazionali come  $\sqrt{3}, \sqrt[4]{2}$ .

I numeri reali possono essere anche scritti in forma decimale; in tal caso però si otterranno molto spesso solo delle approssimazioni dei numeri assegnati. In particolare si ha che:

- danno luogo a numeri decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, *non* hanno il denominatore composto esclusivamente da 2 o da 5 o da entrambi;
- danno luogo a decimali non periodici con infinite cifre dopo la virgola tutti i numeri irrazionali.

Perciò, quando si eseguono i calcoli con i numeri reali, si hanno due alternative:

- I. lavorare solo con i numeri decimali, sapendo che questo porta a lavorare in generale con valori approssimati e, quindi, ad ottenere risultati approssimati;
- II. lavorare con le frazioni e i radicali (o le potenze ad esponente frazionario), sapendo che questo richiede di conoscere ed applicare le corrispondenti regole di calcolo.

## Esempi di calcoli con i numeri reali

Per chiarire meglio le precedenti considerazioni conviene esaminare qualche esempio di calcolo con numeri reali.

### 1. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \quad 3 \cdot \sqrt{2} \quad (-3) \cdot \sqrt{2} \quad (-1) \cdot \sqrt{8}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{8} \approx 2,83$$

A partire da questi due valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \approx 3,99$$

$$3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,23$$

$$(-3) \cdot \sqrt{2} \approx -4,23$$

$$(-1) \cdot \sqrt{8} \approx -2,83$$

- Lavorando con i radicali si ha invece:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$(-3) \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

$$(-1) \cdot \sqrt{8} = -\sqrt{8}$$

Particolare attenzione meritano le ultime tre formule, in cui i radicali vengono trattati con le stesse convenzioni usate nel calcolo letterale: in particolare, il prodotto viene indicato scrivendo il numero razionale ed il radicale affiancati.

2. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \quad \frac{5}{7} \cdot \sqrt{3}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{3} \cong 1,73 \quad \frac{5}{7} \cong 0,71$$

A partire da questi valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \cong 1,73 \quad \frac{5}{7} \cdot \sqrt{3} \cong 1,23$$

- Lavorando con frazioni e radicali, si ha, nel primo caso:

$$3 = (\sqrt{3})^2$$

e perciò:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Si trova dunque:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Nel secondo caso si scriverà, con convenzioni analoghe a quelle indicate negli esempi precedenti:

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{7} \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$$

3. Esaminare i seguenti calcoli:

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \quad \sqrt{3} \cong 1,73$$

A partire da questi due valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$3 \cdot \sqrt{2} \cong 4,23 \quad 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \cong 5,64$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \cong 3,14$$

- Lavorando invece con le frazioni e i radicali, la prima espressione viene trattata nel seguente modo:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2}$$

[1 elemento neutro]

$$1 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = (1+3) \cdot \sqrt{2}$$

[proprietà distributiva]

$$(1+3) \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

[si esegue l'addizione]

In definitiva risulta:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Si osserva subito che nel procedimento è fondamentale la proprietà distributiva e, quindi, il fatto che è possibile raccogliere un fattore comune (che è  $\sqrt{2}$ ).

Rimarrà invece inalterata l'espressione:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

dato che non si riesce ad applicare la proprietà distributiva, non essendoci alcun *fattore* comune.

4. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} \quad \sqrt{4+9}$$

Il fatto che le due espressioni sono diverse si coglie meglio usando le potenze a esponente razionale; si ha infatti:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{4+9} = (4+9)^{\frac{1}{2}}$$

In questo modo, la presenza della parentesi chiarisce bene la differenza fra le due espressioni.

Nella *prima espressione* si debbono eseguire le operazioni nell'ordine seguente:

I. la potenza (cioè l'estrazione di radice);

II. l'addizione.

Si ha dunque:

$$4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} = 2 + 3 = 5$$

e quindi:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

Nella *seconda espressione* la presenza delle

parentesi obbliga a cambiare l'ordine delle operazioni eseguendole così:

- I. l'addizione;
  - II. la potenza (cioè l'estrazione di radice).
- Si ha dunque:

$$(4+9)^{\frac{1}{2}} = 13^{\frac{1}{2}}$$

e quindi:

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

5. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt[3]{7-15} \quad \sqrt{16-25}$$

Con considerazioni analoghe a quelle svolte prima si ottiene:

$$\sqrt[3]{7-15} = \sqrt[3]{-8} \quad \sqrt{16-25} = \sqrt{-9}$$

Qual è il significato dei due risultati ottenuti?

È facile rispondere, nel primo caso:  $\sqrt[3]{-8}$  è il numero che, elevato al cubo, dà  $-8$ . Risulta dunque:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{dato che } (-2)^3 = -8$$

Analogamente, nel secondo caso, si dice:  $\sqrt{-9}$  è il numero che, elevato al quadrato, dà  $-9$ . Ma si osserva subito che risulta:

$$3^2 = 9 \quad \text{e} \quad (-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Perciò, neanche nell'insieme dei reali, per quanto grande, si trova la radice quadrata del numero negativo  $-9$ .

### Operazioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali

Con lo stesso ragionamento seguito prima è facile concludere che *non* si trova nell'insieme dei reali il risultato delle seguenti operazioni:

$$\sqrt{-4} \quad \text{dato che } 2^2 = 4 \quad \text{e} \quad (-2)^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{-81} \quad \text{dato che } 3^4 = 81 \quad \text{e} \quad (-3)^4 = 81$$

$$\sqrt[6]{-64} \quad \text{dato che } 2^6 = 64 \quad \text{e} \quad (-2)^6 = 64$$

I casi elencati suggeriscono una regola generale: *non si trova il risultato di  $\sqrt[n]{a}$  quando:*  
- *il radicando  $a$  è un numero negativo e, con-*

*temporaneamente, l'indice  $n$  della radice è un numero pari.*

Questi calcoli che non hanno risultato si aggiungono a quelli che non avevano risultato nell'insieme dei razionali e che non trovano risultato neanche nel più vasto insieme dei reali.

Si conclude dicendo che *non hanno risultato nell'insieme dei numeri reali le seguenti operazioni:*

$$a:0 = \frac{a}{0} \quad 0^0 \quad 0^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{con } a < 0 \text{ e } n \text{ pari}$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Elencare i casi in cui si ottengono risultati approssimati eseguendo i calcoli con i numeri reali scritti in forma decimale.
- ② Elencare le operazioni fra numeri reali che non hanno risultato reale.

### Comprensione

- ① Scrivere le seguenti espressioni sostituendo alle radici le potenze a esponente frazionario.

$$\sqrt{4} \quad -\sqrt{4} \quad \sqrt{-4} \quad \sqrt[3]{-27}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. indicare l'espressione che non ha risultato nell'insieme dei reali;
- b. indicare il risultato delle altre espressioni;
- c. spiegare qual è la differenza fra la seconda e la terza espressione.

### Applicazioni

- ① Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{64-100} \quad \sqrt{64}-\sqrt{100}$$

$$\frac{8-2 \cdot 4}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{8-2 \cdot 4}$$

$$(6-2 \cdot 3)^0 \quad 6^0-2 \cdot 3^0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. indicare i calcoli che non hanno risultato nell'insieme dei numeri reali, motivando la scelta;
- b. determinare il risultato delle restanti espressioni.



# Calcoli con frazioni, radicali e potenze a esponente frazionario

## A. Calcoli con frazioni e radicali

### Attività 1

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga, elencando le proprietà da applicare.

Espressione data	Espressione scritta in forma più breve
$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{2} + 1\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
$\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$	
$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}$	
	$4\sqrt{5}$

### Attività 2

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga, elencando le proprietà da applicare.

$a$	$b$	$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	Risultato finale
$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{5}$	$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}$		
1	$\sqrt{3}$		
$\sqrt{3}$	-2		

### Attività 3

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga.

$a$	$b$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	Risultato finale
$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2$	$(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 4$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$		
$\sqrt{10}$	$\sqrt{8}$		

Trarre dalla tabella una regola generale per il risultato di espressioni del tipo:

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})$$

dove  $c$  e  $d$  sono due interi positivi.

Espressioni del tipo indicato possono avere risultato irrazionale?

### Rendere razionale il denominatore delle frazioni

Espressioni frazionarie che presentano dei radicali al denominatore vengono spesso trasformate in espressioni equivalenti, ma che presentano il denominatore razionale.

Il procedimento seguito è sempre lo stesso: si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione per un'opportuna espressione.

Ecco due esempi.

$$1. \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

In definitiva risulta:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$2. \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4}$$

In definitiva risulta:

$$\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

### Attività 4

Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni, basandosi sui procedimenti indicati prima.

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{5}{\sqrt{10} + \sqrt{5}}$$

### B. Calcoli con potenze a esponente frazionario

Espressioni in cui si trovano tutte le operazioni finora introdotte possono essere svolte valendosi di due simbolismi:

- frazioni e radicali;
- potenze ad esponente negativo e frazionario.

Per valersi correttamente dei due tipi di simboli bisogna ricordare che risulta:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^0 = 1$$

dove  $a, m, n$  indicano dei numeri interi positivi.

#### Attività 5

Completare la tabella seguente come è mostrato nella prima riga.

Frazioni e radicali	Esponenti negativi e frazionari
$\sqrt{\frac{3+1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$	$[(3+1)4^{-1}]^{\frac{1}{2}} = (4 \cdot 4^{-1})^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$
	$(3+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1} =$ $= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1} = 4^{\frac{1}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^{-1}$
$\frac{\sqrt{3+1}}{4} =$	
	$3^{\frac{1}{2}} + 4^{-1} =$
$\frac{\sqrt{3}}{4} + 1 =$	

#### Attività 6

Sviluppare le seguenti espressioni, valendosi:

- di frazioni e radicali;
- di potenze ad esponente negativo e frazionario.

$$\sqrt[3]{\frac{35-8}{8}} \quad \frac{\sqrt[3]{35-8}}{8} \quad \frac{35-\sqrt[3]{8}}{8} \quad 35-\frac{\sqrt[3]{8}}{8}$$

## Calcoli con il calcolatore tascabile

### Attività 1

Riprendere le indicazioni fornite nell'«Attività» di p. 30 a proposito dell'uso del tasto  $\sqrt{\square}$ ; valersi di un calcolatore tascabile per completare la seguente tabella come indicato dalla prima riga.

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Visualizzatore
$\sqrt{\frac{3+1}{9}}$	$[(3+1):9]^{\frac{1}{2}}$	$\langle \langle 3 + 1 \rangle \div 9 \rangle \sqrt{\square}$	0.6666667
$\frac{\sqrt{3+1}}{9}$			
$\frac{\sqrt{3}+1}{9}$			
$\sqrt{3} + \frac{1}{9}$			
$\frac{\sqrt{3}}{9} + 1$			

### Attività 2

Spiegare perché la sequenza di tasti:

$$\boxed{3} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{9} \boxed{\sqrt{\square}} \boxed{=}$$

calcola l'espressione seguente:

$$3 + \frac{1}{\sqrt{9}}$$

### Attività 3

Riprendere le indicazioni fornite nell'«Attività» di p. 30 a proposito dell'uso del tasto  $y^x$ ; valersi di un calcolatore tascabile per completare la seguente tabella come indicato dalla prima riga.

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti
$\sqrt[3]{\frac{9-1}{27}}$	$[(9-1):27]^{\frac{1}{3}}$	$\langle \langle 9 - 1 \rangle + 27 \rangle y^x \langle 1 \div 3 \rangle =$
$\frac{\sqrt[3]{9-1}}{27}$		
$\frac{\sqrt[3]{9}-1}{27}$		
$\sqrt[3]{9} - \frac{1}{27}$		
$\frac{\sqrt[3]{9}}{27} - 1$		

### Attività 4

Scrivere l'espressione che si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$9 - 1 \div 27 y^x 1 \div 3 =$$

### Attività 5

Svolgere con il calcolatore tascabile le seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{64-8}{200+43}} \quad \frac{\sqrt[3]{64-8}}{200+43} \quad \frac{\sqrt[3]{64-8}}{200} + 43 \quad 64 - \frac{8}{200} + \sqrt[3]{43}$$

Indicare quale espressione si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$64 - 8 \div 2000 + 43 y^x 1 \div 3 =$$

### Attività 6

Svolgere con il calcolatore tascabile le seguenti espressioni:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{64-8}{27 \cdot 9}\right)^3} \quad \frac{\sqrt[5]{(64-8)^3}}{27 \cdot 9} \quad \frac{\sqrt[5]{64-8^3}}{27} \cdot 9 \quad 64 - \frac{8}{27} \cdot \sqrt[5]{9^3}$$

Indicare quale espressione si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$64 - 8 \div 27 \times 9 y^x 3 \div 5 =$$



## Le approssimazioni e la propagazione degli errori

I numeri irrazionali, scritti in forma decimale, danno luogo ad infinite cifre dopo la virgola, cifre che non si ripetono periodicamente. Tuttavia, ogni numero irrazionale può essere approssimato quanto si vuole ai numeri razionali e è proprio con questi valori approssimati che si eseguono i calcoli nella pratica.

Questa scheda è destinata a precisare la nozione di valore approssimato, per vedere quanto può diventare complicato valutare l'approssimazione del risultato di calcoli eseguiti con valori approssimati.

### Valori approssimati e intervallo d'errore

Fissiamo l'attenzione su qualche numero irrazionale, per esempio:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{40} \quad \sqrt{250}$$

Ciascuno di questi numeri può essere «stretto» fra due numeri razionali:

- uno che approssima per difetto;
- l'altro che approssima per eccesso.

Per esempio si trova che:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad 2,8 < \sqrt{8} < 2,9$$

$$6,3 < \sqrt{40} < 6,4 \quad 15,8 < \sqrt{250} < 15,9$$

In questo modo gli irrazionali assegnati sono tutti compresi fra due razionali che delimitano un intervallo ampio 0,1 (fig. 1). L'ampiezza dell'intervallo è stata determinata calcolando la differenza fra il numero più grande (che approssima per eccesso) e quello più piccolo (che approssima per difetto); si ottiene:

$$1,5 - 1,4 = 0,1 \quad 2,9 - 2,8 = 0,1$$

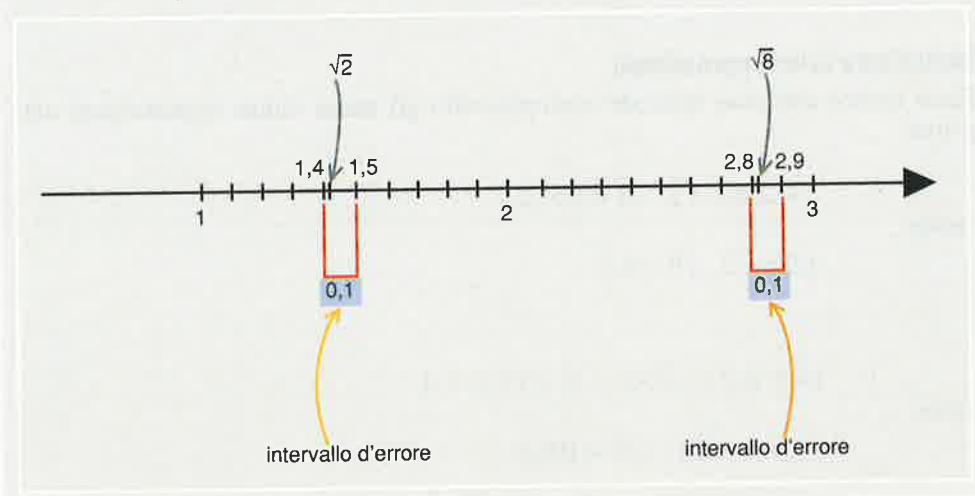


Figura 1  
L'intervallo d'errore  
di  $\sqrt{2}$  e di  $\sqrt{8}$

L'ampiezza 0,1 dell'intervallo ha un significato molto concreto, che si afferra subito con un esempio: sostituendo il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  con 1,4 (il numero razionale che lo approssima per difetto) si commette un errore che certamente non supera 0,1. Per questo l'intervallo delimitato dalle due approssimazioni per eccesso e per difetto prende anche il nome di *intervallo d'errore*.

### Addizionare valori approssimati

Vediamo ora che cosa succede addizionando due valori approssimati, per esempio i valori approssimati dei numeri irrazionali esaminati prima. Ecco che cosa si ottiene:

$$1,4 + 2,8 < \sqrt{2} + \sqrt{8} < 1,5 + 2,9$$

ossia:

$$4,2 < \sqrt{2} + \sqrt{8} < 4,4$$

$$15,8 + 6,3 < \sqrt{250} + \sqrt{40} < 15,9 + 6,4$$

ossia:

$$22,1 < \sqrt{250} + \sqrt{40} < 22,3$$

Si osserva subito che entrambe le somme sono contenute in un intervallo che è ampio 0,2, dato che risulta:

$$4,4 - 4,2 = 0,2 \quad \text{e} \quad 22,3 - 22,1 = 0,2$$

Per arrivare a un risultato di carattere generale, occorre valersi del calcolo letterale: si indicano con  $\alpha$  e  $\beta$  i due numeri irrazionali, con  $a$  e  $b$  i razionali che li approssimano per difetto, con  $h$  l'ampiezza dell'intervallo. Così risulta:

$$a < \alpha < a + h \quad b < \beta < b + h$$

e quindi:

$$a + b < \alpha + \beta < a + b + h + h$$

Si trova così che, *addizionando due valori approssimati, si ha una somma che è ancora approssimata, ma con un errore che è la somma degli errori dei singoli addendi*.

È chiaro che questo risultato si estende immediatamente alla somma di più di due addendi.

### Moltiplicare valori approssimati

Ecco invece che cosa succede moltiplicando gli stessi valori approssimati dati prima:

$$1,4 \cdot 2,8 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} < 1,5 \cdot 2,9$$

ossia:

$$3,9 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} < 4,3$$

$$15,8 \cdot 6,3 < \sqrt{250} \cdot \sqrt{40} < 15,9 \cdot 6,4$$

ossia:

$$99,5 < \sqrt{250} \cdot \sqrt{40} < 101,8$$

Si osserva subito che l'ampiezza dell'intervallo non è la stessa nei due casi; si ha:

$$4,3 - 3,9 = 0,4 \quad \text{e} \quad 101,8 - 99,5 = 2,3$$

Qual è ora il risultato generale?

Valendosi degli stessi simboli introdotti prima, si trova:

$$a \cdot b < \alpha \cdot \beta < (a + h) \cdot (b + h)$$

ossia:

$$a \cdot b < \alpha \cdot \beta < ab + ah + bh + h^2$$

Ora l'ampiezza dell'intervallo è data da:

$$ab + ah + bh + h^2 - ab = ah + bh + h^2$$

Abitualmente in questo risultato si trascura  $h^2$ , che è molto piccolo rispetto agli altri addendi, e si considera come ampiezza dell'intervallo il valore:

$$ah + bh = h(a + b)$$

Si arriva dunque alla seguente conclusione: *moltiplicando due valori approssimati si ha un prodotto approssimato, con un errore che è dato dall'errore dei singoli fattori moltiplicato per la somma dei fattori.*

Questa conclusione generale spiega i risultati ottenuti prima; per esempio si è ottenuto:

$$3,9 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} < 4,3$$

risultato contenuto in un intervallo ampio 0,4, dato che risulta:

$$0,4 \cong 4,2 - 0,1$$

e 4,2 era appunto la somma dei fattori.

### La propagazione degli errori

Le considerazioni finora svolte fanno capire come, eseguendo i calcoli con valori approssimati contenuti in un certo intervallo d'errore, si ottengono generalmente dei risultati che sono contenuti in un intervallo d'errore più ampio.

Questo vuol dire che l'errore massimo che si commette considerando il valore approssimato per difetto del risultato dei calcoli è generalmente più grande dell'analogo errore massimo per i singoli numeri calcolati.

Si dice in questo caso che *gli errori si propagano*, come una specie di insetti molesti che si moltiplica a partire da pochi individui.

Si capisce dunque che la propagazione degli errori può diventare un fenomeno complicato da seguire quando le operazioni sono numerose e varie; tuttavia l'idea fondamentale rimane la stessa: *eseguendo dei calcoli con valori approssimati, l'errore che si commette considerando il valore approssimato per difetto del risultato è generalmente più grande dell'analogo errore relativo ai singoli numeri da cui si era partiti.*

# I numeri reali in geometria: il rapporto fra due segmenti

## Rapporto intero fra due segmenti

In fig. 1 è raffigurata la retta sulla quale sono rappresentati i numeri interi: il segmento  $OU$  è l'unità di misura e perciò  $U$  rappresenta 1; il punto  $A$  rappresenta 2 perché il segmento  $OA$  è costruito riportando 2 volte  $OU$ .

Questa situazione si può descrivere dicendo che  $OA$  contiene 2 parti uguali a  $OU$ ; si scrive:

$$OA = 2OU$$

Ma si può anche dire che  $OU$  è contenuto 2 volte in  $OA$ ; in tal caso si scrive:

$$\frac{OA}{OU} = 2$$

Il simbolo  $\frac{OA}{OU}$  è chiamato *rapporto fra i due segmenti  $OA$  e  $OU$*  e indica il numero di seg-

menti uguali a  $OU$  contenuti in  $OA$ . In generale, si scrive:

$$\frac{OA}{OU} = m, \text{ con } m \text{ numero intero positivo}$$

per dire che in  $OA$  è contenuto  $m$  volte  $OU$ .

## Rapporto razionale fra due segmenti

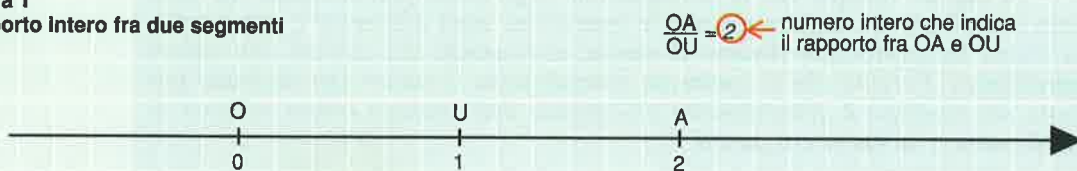
Fissiamo ora l'attenzione sul punto  $B$  di fig. 2:

$B$  rappresenta il numero razionale  $\frac{1}{3}$  perché è

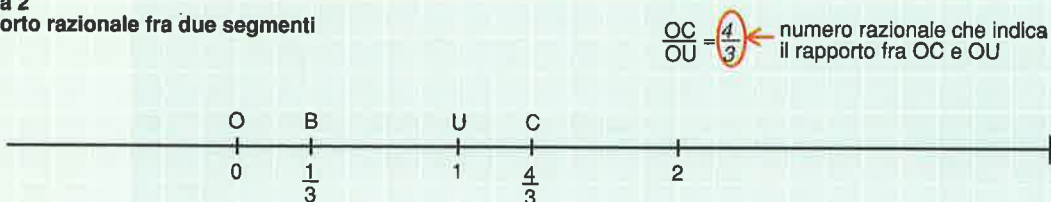
stato ottenuto nel modo seguente:

- si è diviso  $OU$  in tre segmenti uguali;
- si è indicato il punto  $B$  all'estremo del primo segmento.

**Figura 1**  
Rapporto intero fra due segmenti



**Figura 2**  
Rapporto razionale fra due segmenti





In questo caso si scrive dunque:

$$OB = \frac{1}{3} OU \quad \text{o anche} \quad \frac{OB}{OU} = \frac{1}{3}$$

E così il punto C di fig. 2 rappresenta  $\frac{4}{3}$  perché è stato ottenuto nel modo seguente:

- si è diviso OU in tre segmenti uguali;
- si è indicato il punto C riportando 4 volte il segmento  $\frac{1}{3} OU$ .

In questo caso si scrive allora:

$$OC = 4 \cdot \frac{1}{3} OU \quad \text{o anche} \quad OC = \frac{4}{3} OU$$

oppure:

$$\frac{OC}{OU} = \frac{4}{3}$$

In generale, si scrive:

$$\frac{OC}{OU} = \frac{p}{q}$$

per dire che in OC è contenuto  $p$  volte il segmento  $\frac{1}{q} OU$ .

Quando il rapporto fra due segmenti è un numero razionale si dice che i segmenti sono *commensurabili*.

### Rapporto irrazionale fra due segmenti

Il punto D di fig. 3 rappresenta  $\sqrt{2}$ , che è un numero irrazionale, cioè un numero che non

può essere scritto sotto forma di frazione. In questo caso che cosa si può dire del rapporto

porto  $\frac{OD}{OU}$  ?

Visto che  $\sqrt{2}$  non può essere scritto sotto forma di frazione, non si potrà mai scrivere

$$\frac{OD}{OU} = \frac{p}{q}$$

Questo vuol dire che non si può esaurire il segmento OD con  $p$  segmenti del tipo  $\frac{1}{q} OU$ .

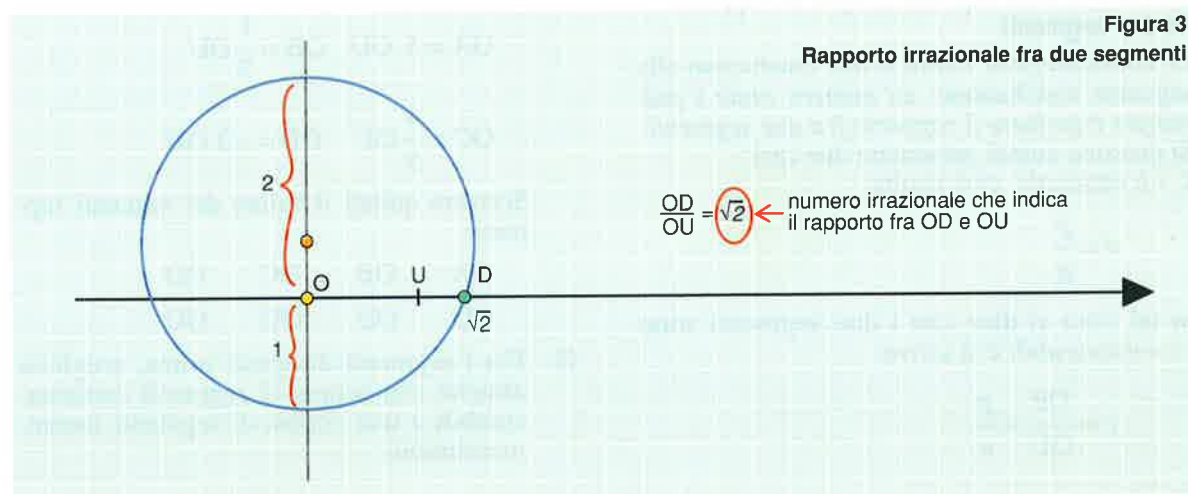
In questo caso si dice che OU e OD sono *incommensurabili*.

In generale, si dicono *incommensurabili due segmenti che non hanno rapporto razionale*.

Resta da interpretare geometricamente la proprietà esaminata nel paragrafo 2 (pp. 55-56): ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali, una che approssima per difetto e l'altra che approssima per eccesso.

Ecco un esempio: si è detto (p. 55) che  $\sqrt{2}$  è approssimato dalle seguenti successioni di razionali:

Per difetto	Per eccesso
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415





Questi stessi razionali possono essere scritti in forma di frazione, ottenendo:

Per difetto	Per eccesso
1	2
$\frac{14}{10}$	$\frac{15}{10}$
$\frac{141}{100}$	$\frac{142}{100}$
$\frac{1414}{1000}$	$\frac{1415}{1000}$

Si capisce allora che:

- OU è contenuto in OD più di 1 volta e meno di 2;
- $\frac{1}{10}$  OU è contenuto in OD più di 14 volte e meno di 15;
- $\frac{1}{100}$  OU è contenuto in OD più di 141 volte e meno di 142.

Si può continuare a suddividere OU in parti sempre più piccole, ma si ha la certezza che non si riuscirà mai ad esaurire il segmento OD (anche se la parte che si trascurava diventa, agli effetti pratici, trascurabile).

Considerazioni analoghe possono essere ripetute a partire da altri punti P della retta che raffigura i numeri reali, nel caso in cui P rappresenta un numero irrazionale.

### Un numero reale esprime sempre un rapporto fra due segmenti

Le considerazioni finora svolte conducono alla seguente conclusione: *un numero reale r può sempre esprimere il rapporto fra due segmenti*. Si possono quindi presentare due casi:

1. *r è razionale*, cioè risulta:

$$r = \frac{p}{q}$$

in tal caso si dice che i due segmenti sono *commensurabili* e si scrive:

$$r = \frac{OP}{OU} = \frac{p}{q}$$

2. *r è irrazionale*

In questo caso si scrive sempre:

$$r = \frac{OP}{OU}$$

ma si dice che i due segmenti sono *incommensurabili*.

## Verifiche

### Conoscenze

① Spiegare il significato delle seguenti uguaglianze:

$$\frac{OP}{OU} = 4 \quad \frac{OP}{OU} = \frac{1}{4} \quad \frac{OP}{OU} = \frac{3}{4}$$

② Spiegare il significato delle seguenti frasi:  
a. «Due segmenti sono commensurabili»;  
b. «Due segmenti sono incommensurabili».

### Comprensione

- ① Spiegare perché le seguenti affermazioni sono errate e correggere gli errori:  
a. « $OP = 4 \cdot OU$  vuol dire che OP è contenuto quattro volte in OU»;  
b. «Il rapporto  $\frac{OP}{OU}$  indica sempre quante volte il segmento OP è contenuto in OU».
- ② Disegnare una coppia di segmenti commensurabili ed una coppia di segmenti incommensurabili.

### Applicazioni

① Disegnare prima un segmento OU e poi i segmenti seguenti:

$$OA = 5 \cdot OU \quad OB = \frac{1}{5} OU$$

$$OC = \frac{4}{5} OU \quad OD = \sqrt{3} OU$$

Scrivere quindi il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OA}{OU} \quad \frac{OB}{OU} \quad \frac{OC}{OU} \quad \frac{OD}{OU}$$

② Fra i segmenti disegnati prima, scegliere almeno una coppia di segmenti commensurabili e una coppia di segmenti incommensurabili.

# Il teorema di Talete

## Il rapporto fra due segmenti e il rapporto fra un oggetto e la sua ombra

Il rapporto fra due segmenti si può osservare tutti i giorni: un'asticella forata è illuminata dai raggi del sole a mezzogiorno (fig. 1a) e poi in un altro momento della giornata (fig. 1b). Le distanze tra i fori sono diverse nell'asticella e nell'ombra ma, osservando meglio, si trova qualcosa che rimane immutato:

- i segmenti AB e BC, che sono uguali sull'asticella, diventano nell'ombra i due segmenti A'B' e B'C' ancora uguali fra loro, cioè risulta:

$$AB = BC \quad \text{e} \quad A'B' = B'C'$$

- i segmenti AC e AB, che sono uno doppio dell'altro sull'asticella, diventano nell'ombra i due segmenti A'C' e A'B' che sono ancora uno doppio dell'altro; si trova dunque:

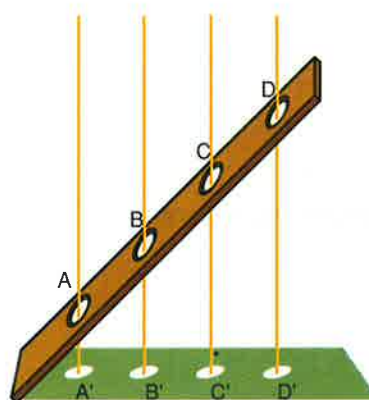
$$AC = 2AB \quad \text{e} \quad A'C' = 2A'B'$$

ossia:

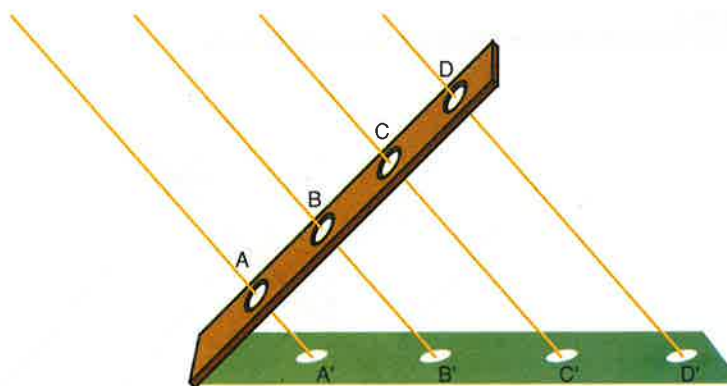
$$\frac{AC}{AB} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{A'C'}{A'B'} = 2$$

Sembra che osservazioni di questo tipo abbiano condotto Talete, matematico greco vissuto intorno al 600 a.C., a scoprire un famoso teorema che porta il suo nome.

Figura 1  
Il rapporto fra due segmenti nella realtà



1a



1b

## Il teorema di Talete

Si arriva alla proprietà scoperta da Talete basandosi su di un disegno che idealizza l'esperienza descritta prima (fig. 2):

- i raggi del sole diventano più rette parallele (per esempio  $a, b, c, d$ );
- l'asticella e la sua ombra diventano due rette ( $t$  e  $t'$ ), dette *trasversali*, che tagliano le parallele;
- i segmenti sull'asticella e le corrispondenti ombre diventano i segmenti tagliati da  $t$  e da  $t'$  su due stesse rette e sono detti *segmenti corrispondenti*; per esempio sono coppie di segmenti corrispondenti  $AB$  e  $A'B'$ ,  $BC$  e  $B'C'$ ,  $CD$  e  $C'D'$ ;
- si è quindi condotti a confrontare il rapporto fra due segmenti su una trasversale (per esempio  $CD$  e  $BC$  su  $t$ ) con il rapporto fra i segmenti corrispondenti sull'altra trasversale ( $C'D'$  e  $B'C'$  su  $t'$ ), ottenendo:

$$\frac{CD}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{C'D'}{B'C'}$$

Il teorema di Talete afferma che si verifica sempre:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{C'D'}{B'C'}$$

come si era visto in qualche caso particolare, osservando l'ombra dell'asticella. Il teorema di Talete può dunque essere enunciato nel modo seguente: *se più rette parallele sono intersecate da due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti.*

## L'idea fondamentale per dimostrare il teorema di Talete

Tutta la dimostrazione è basata sul risultato che si ottiene esaminando il caso più semplice (fig. 3): due segmenti  $AB$  e  $BC$  su una trasver-

Figura 2  
Il teorema di Talete

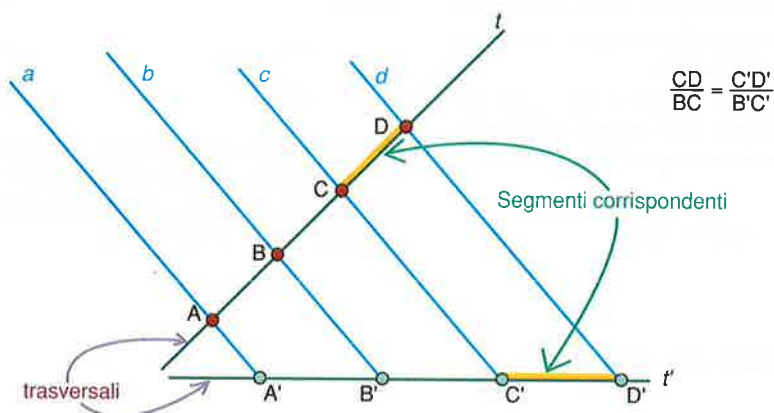
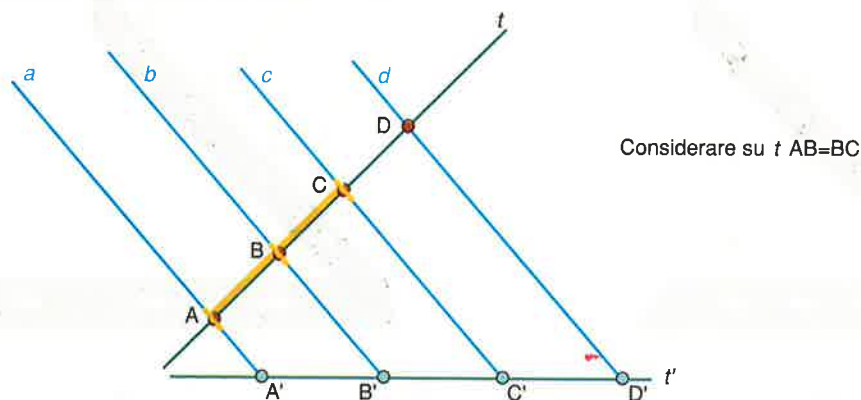


Figura 3  
L'idea fondamentale per dimostrare il teorema di Talete



sale hanno il rapporto che vale 1, cioè sono uguali; si ha dunque:

$$\frac{AB}{BC} = 1 \quad \text{ossia} \quad AB = BC$$

I segmenti corrispondenti sull'altra trasversale ( $A'B'$  e  $C'D'$ ) sono certamente diversi da  $AB$  e  $CD$ , ma sembrano ancora uguali fra loro. Ecco il ragionamento da seguire per convincersi che  $A'B'$  e  $C'D'$  sono uguali fra loro (fig. 4).

- Si tracciano a partire da  $A'$  e da  $B'$  le rette  $r$  e  $s$  entrambe parallele a  $t$ , ottenendo i parallelogrammi  $AA'H$  e  $BB'K$  (fig. 4a).

- Si ricorda che i lati opposti di un parallelogramma sono uguali fra loro e perciò risulta:

$$A'H = AB \quad \text{e} \quad B'K = BC$$

e quindi anche:

$$A'H = B'K$$

- Si considerano i triangoli  $A'HB'$  e  $B'KC'$  che sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli, dato che hanno:

• i lati  $A'H$  e  $B'K$  uguali;

• gli angoli  $\hat{H}A'B'$  e  $\hat{K}B'C'$  uguali perché corrispondenti rispetto alle parallele  $r$  e  $s$  intersecate da  $t'$  (fig. 4b).

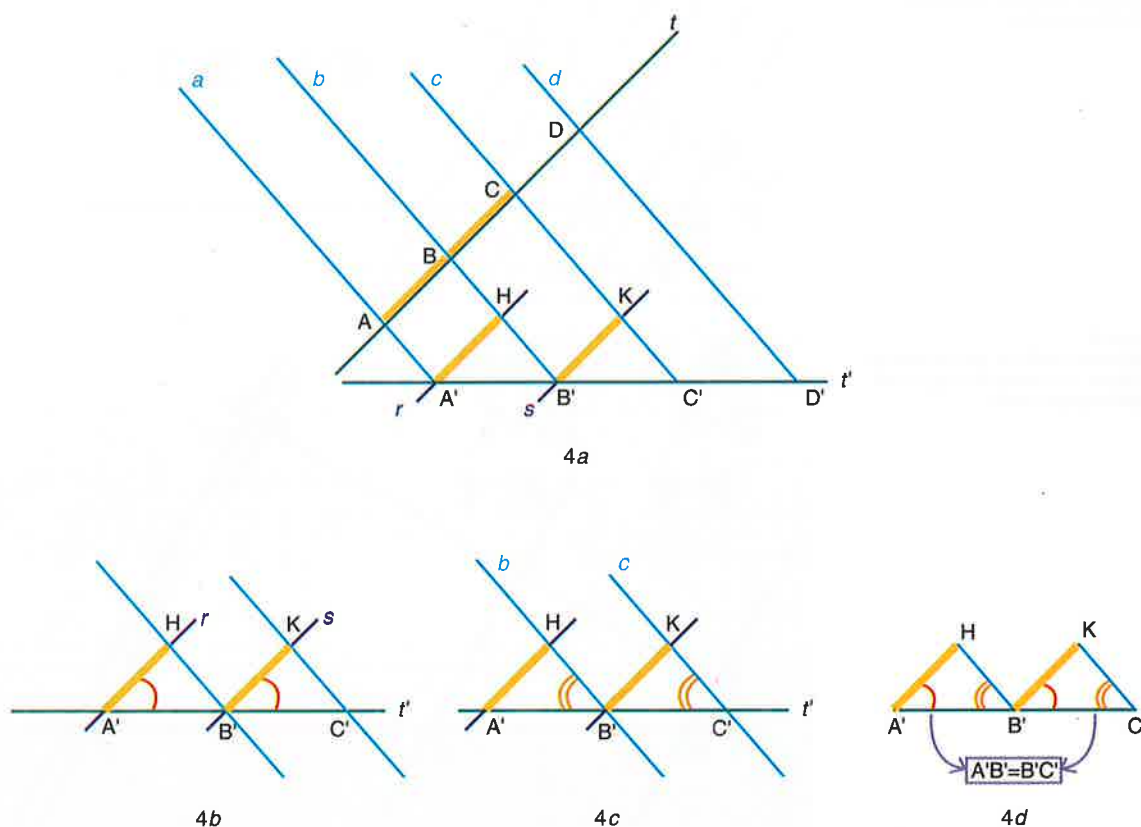
• gli angoli  $\hat{A}'B'H$  e  $\hat{B}'C'K$  uguali perché corrispondenti rispetto alle parallele  $b$  e  $c$  intersecate da  $t'$  (fig. 4c);

- Si conclude che, essendo i triangoli uguali, risulta (fig. 4d):

$$A'B' = B'C'$$

Questa prima conclusione può essere sintetizzata nel modo seguente: *se più rette parallele tagliano due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono sull'altra trasversale segmenti che sono ancora uguali fra loro.*

**Figura 4**  
Le costruzioni per dimostrare che risulta anche  $A'B' = B'C'$





### La dimostrazione del teorema di Talete

Si può ora esaminare un caso più generale in cui due segmenti sulla trasversale  $t$  non sono uguali (fig. 5): si considerano, per esempio,

BC e CD che hanno rapporto  $\frac{3}{2}$ .  
Risulta dunque:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{3}{2} \quad \text{ossia} \quad CD = \frac{3}{2} BC$$

Si ottiene CD nel modo seguente:

- si divide BC in 2 segmenti uguali (BF, FC);
- si riportano 3 di questi segmenti (CG, GH e HD) a partire da C.

Con questa costruzione si ottengono sulla retta  $t$  tanti segmenti tutti uguali fra loro; si possono allora tracciare dai punti F, G, H le parallele alle rette  $b, c, d$ , ottenendo le rette  $f, g, h$ , che tagliano sulla retta  $t'$  dei segmenti certamente uguali fra loro.

Si è perciò ricondotti al caso precedente: anche C'D' si ottiene dividendo B'C' in due parti uguali e riportandone tre a partire da C'; questo vuol dire che risulta:

$$C'D' = \frac{3}{2} B'C' \quad \text{ossia} \quad \frac{C'D'}{B'C'} = \frac{3}{2}$$

Questo stesso ragionamento si può sempre ripetere quando sono assegnati su una trasversale due segmenti BC e CD commensurabili, cioè due segmenti il cui rapporto è espresso da

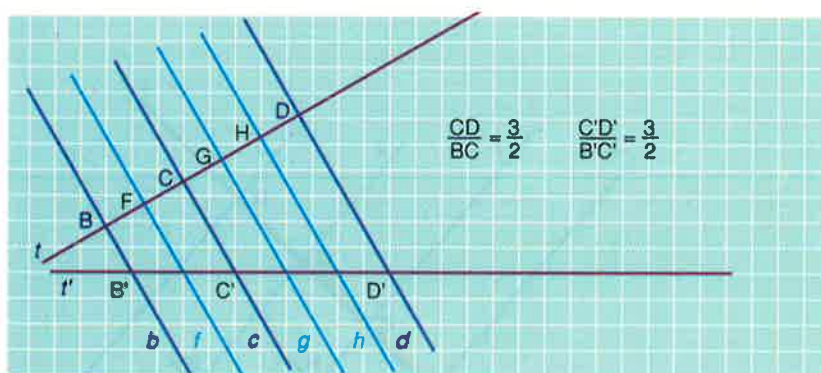
un numero razionale dato da  $\frac{p}{q}$ ; si otterrà dunque che:

$$\text{dato } \frac{CD}{BC} = \frac{p}{q} \text{ risulta sempre } \frac{C'D'}{B'C'} = \frac{p}{q}$$

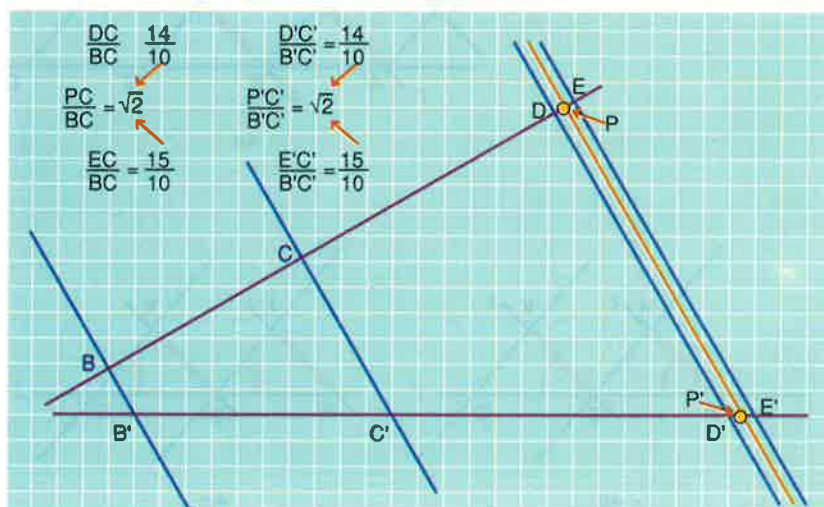
Rimane ora un'ultima situazione da esaminare: sono dati su una trasversale due segmenti incommensurabili, cioè due segmenti BC e CP che hanno il rapporto espresso da un numero irrazionale  $r$ . Anche in questo caso si trova che:

$$\text{dato } \frac{CP}{BC} = r \text{ risulta sempre } \frac{C'P'}{B'C'} = r$$

**Figura 5**  
La dimostrazione del teorema di Talete nel caso di segmenti commensurabili



**Figura 6**  
La dimostrazione del teorema di Talete nel caso di segmenti incommensurabili





Per convincersi del risultato, basta ricondursi al caso in cui il rapporto fra i due segmenti è razionale, considerando i valori approssimati per difetto e per eccesso del numero irrazionale  $r$  (fig. 6).

### Un'applicazione immediata del teorema di Talete

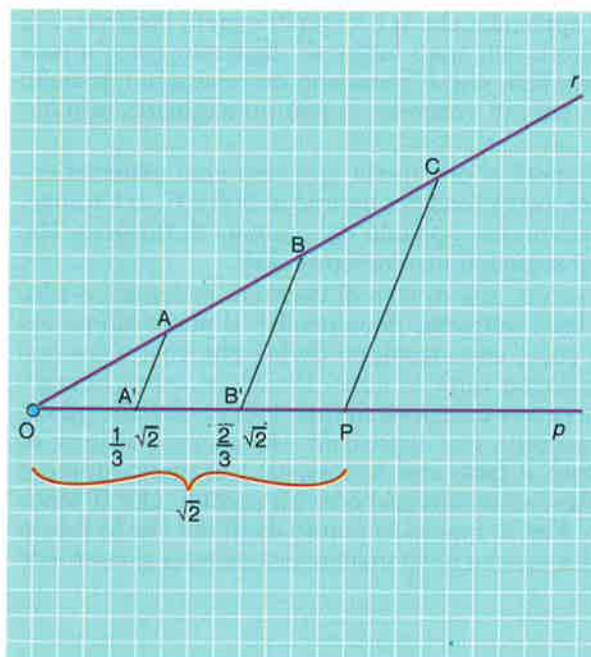
Il teorema di Talete è, insieme al teorema di Pitagora, uno dei teoremi fondamentali della geometria: lo studio della similitudine, che è sviluppato nel capitolo terzo, è basato sul teorema di Talete.

Ma il teorema di Talete ha anche applicazioni immediate per risolvere problemi di tipo grafico-costruttivo come il seguente: suddividere un dato segmento in parti uguali. In fig. 7 si trova un esempio di questo problema: si vuole dividere in tre parti uguali il segmento  $OP$ , che è lungo  $\sqrt{2}$ .

Ecco come si procede:

- si disegna una semiretta qualunque  $Or$ ;
- su  $Or$ , a partire da  $O$ , si riportano tre segmenti uguali  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ;

**Figura 7**  
Un'applicazione del teorema di Talete



- si congiunge  $P$  con  $C$ ;
- da  $B$  e da  $A$  si tracciano le parallele a  $PC$ , fino ad incontrare  $OP$  in  $A'$  e in  $B'$ .

Il teorema di Talete garantisce che, in questo modo, il segmento  $OP$  è diviso in tre parti uguali; così si ottengono, in particolare, i segmenti:

- $OA'$ , che è lungo  $\frac{1}{3} \sqrt{2}$ ;
- $OB'$ , che è lungo  $\frac{2}{3} \sqrt{2}$ ;

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Costruire almeno quattro rette parallele tagliate da due trasversali e indicare almeno due coppie di segmenti corrispondenti.
- ② Enunciare il teorema di Talete, basandosi anche sul disegno tracciato per rispondere al quesito precedente.

### Comprensione

- ① Spiegare come si organizza la dimostrazione del teorema di Talete; dicendo in particolare:
  - qual è l'idea fondamentale su cui si basa tutta la dimostrazione;
  - perché il caso dei segmenti commensurabili può essere ricondotto al caso dei segmenti uguali;
  - perché il caso dei segmenti incommensurabili può essere ricondotto al caso dei segmenti commensurabili.

### Applicazioni

- ① Basarsi sul teorema di Talete per suddividere un segmento lungo  $\sqrt{3}$  in quattro parti uguali e indicare sul disegno i segmenti che hanno le seguenti lunghezze:

$$\frac{1}{4} \sqrt{3} \quad \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

# I numeri reali nella storia

## I segmenti incommensurabili e la nascita della matematica astratta

La scoperta dei segmenti incommensurabili ha segnato una crisi nella storia della matematica; una crisi che ha significato un avanzamento nella scienza.

Riflettiamo: che cosa vuol dire, per esempio, che la diagonale ed il lato del quadrato sono due segmenti fra loro incommensurabili (fig. 1)?

Vuol dire che non si riesce a trovare una parte del lato, anche piccolissima, che, riportata più volte, riesca ad esaurire la diagonale.

Questo fatto porta ad una conseguenza: il lato e la diagonale del quadrato non sono formati con gli stessi punti «messi in fila», perché altrimenti sarebbe il punto la parte piccolissima necessaria per esaurire la diagonale. Perciò non esiste il «punto-granello», il «punto-atomo» con cui si può pensare di formare tutte le figure geometriche: il punto in matematica è qualcosa senza dimensioni.

È proprio questa conclusione che segna un distacco fra due concezioni della matematica: la matematica applicata, che si occupa di oggetti concreti, e la matematica astratta, per cui le figure non sono materiali. Secondo quest'ultima concezione, il punto non ha dimensioni, non è nemmeno un minuscolo granello di sabbia; e, non rappresentando nulla di concreto, si può immaginarlo infinitamente piccolo.

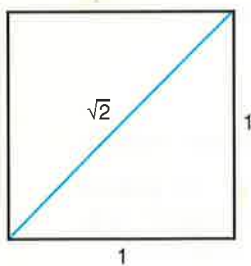
Proprio su queste considerazioni si era aperta una vera crisi matematico-filosofica nella scuola che Pitagora aveva fondato, intorno al 500 a.C., a Crotone, antica colonia greca. Una crisi determinata appunto dal teorema di Pitagora, che aveva fatto scoprire l'esistenza dei segmenti incommensurabili.

E la polemica, nel mondo greco, non fu solo di carattere matematico-filosofico, ma segnò addirittura una crisi religiosa. Ecco perché: il punto-atomo era considerato l'essenza di tutte le cose, una creazione divina che costituiva non solo le figure geometriche, ma anche tutte le cose. Il vedere «sbriciolarsi» l'atomo significava che non esisteva una creazione divina, voleva dire che gli dei non esistevano. La leggenda racconta che Ippaso di Metaponto, allievo di Pitagora, non seppe tener nascosto il fatto che non esisteva il punto-atomo e divulgò questa «verità scandalosa», sconvolgendo così gli uomini, che si sentirono privati dell'appoggio divino. Perciò Ippaso fu punito dagli dei che lo fecero naufragare nel mare di Crotone. La nascita della matematica astratta si confonde dunque con la leggenda.

## I numeri irrazionali come «casi eccezionali»

Con la scoperta di  $\sqrt{2}$  nasce dunque la matematica astratta e quel «rapporto infamante» non viene certamente considerato un numero, ma un modo di descrivere una particolare situazione geometrica. E così per Euclide (IV-III secolo

Figura 1  
Diagonale e lato del  
quadrato sono fra loro  
incommensurabili



a.C.)  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  sono interpretati come rapporti di segmenti, come «simboli» che si possono costruire con riga e compasso.

I secoli scorrono e quei pochi simboli come  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  non sono mai considerati come numeri. Ancora nel 1544 il matematico tedesco Stifel scrive: «Da una parte saremmo portati ad asserire che sono dei numeri perché, quando non bastano i numeri razionali, questi “simboli” li sostituiscono; d'altra parte, però, ci sembra che non siano dei numeri perché non si possono scrivere con precisione in forma decimale, e sembrano nascondersi nelle nuvole dell'infinito».

Con queste vedute incerte e titubanti – gli irrazionali sono o non sono numeri? – si arriva a epoche relativamente recenti.

È solo nel secolo scorso che viene data chiarezza ai numeri irrazionali, vedendoli inseriti fra due successioni di numeri razionali.

Si rimane però con l'idea che i numeri irrazionali siano ben pochi, in confronto alla vastità dei numeri razionali. È proprio così? Gli irrazionali costituiscono davvero delle eccezioni?

### I numeri irrazionali costituiscono la maggior parte dell'insieme dei reali

Per capire la situazione ci si può basare sul teorema di Talete e realizzare il disegno di fig. 2:

- sulla semiretta  $Or$  sono rappresentati solo i razionali; per esempio, a 1 corrisponde il punto  $U$ , a 2 corrisponde  $A$ , a  $\frac{5}{2}$  corrisponde  $B$  e così via;
- sulla semiretta  $Os$  sono invece rappresentati solo i numeri irrazionali, in particolare è indicato il punto  $P$ , che corrisponde a  $\sqrt{2}$ ;
- si congiunge il punto  $P$  con il punto  $U$ , ottenendo la retta  $a$ ;
- si tracciano le rette parallele ad  $a$ , a partire dai punti come  $A$  e  $B$ , determinando su  $Os$  i corrispondenti punti  $A'$  e  $B'$ .

In base al teorema di Talete, si trova che i punti  $A'$  e  $B'$  rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

$$2\sqrt{2} \quad \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

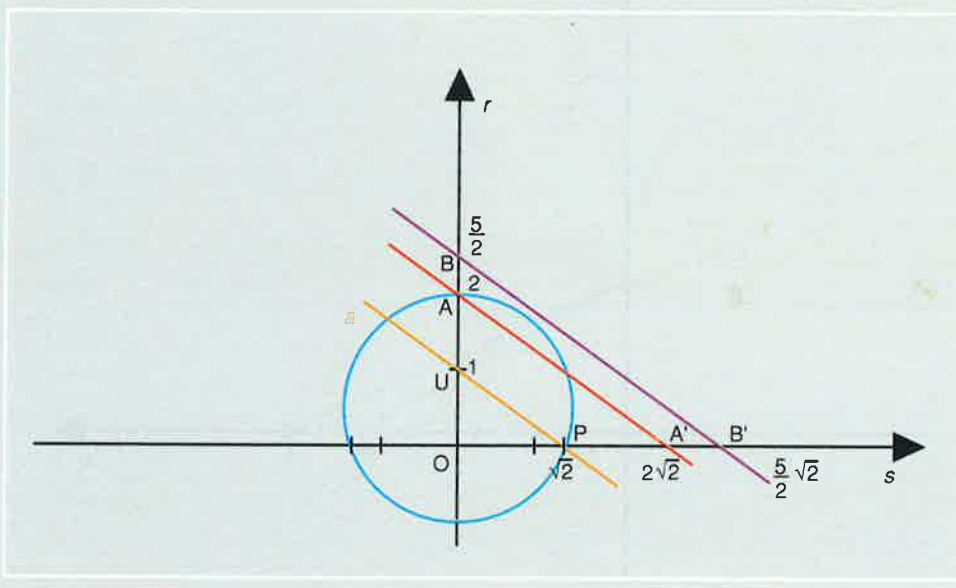


Figura 2  
Una costruzione  
geometrica per indagare  
sul rapporto fra i razionali  
e gli irrazionali

Possiamo ripetere la costruzione a partire dal punto Q che, su  $Os$ , rappresenta  $\sqrt{3}$  (fig. 3); sulla semiretta  $Os$  si trovano allora i punti  $A''$  e  $B''$  che rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

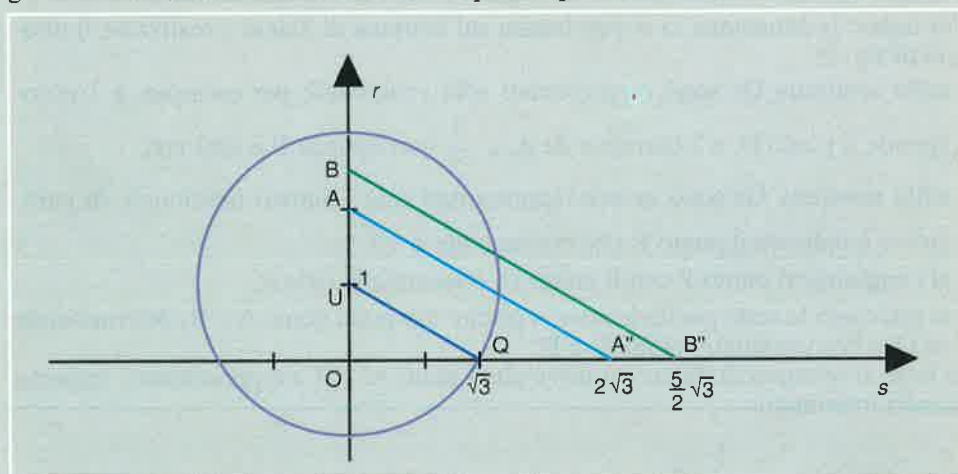
$$2\sqrt{3} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Così, continuando, ci si rende conto che ad ognuno dei punti della semiretta  $r$ , punti che rappresentavano i razionali, corrisponde, sulla semiretta  $Os$ , un'infinità di numeri irrazionali (fig. 4).

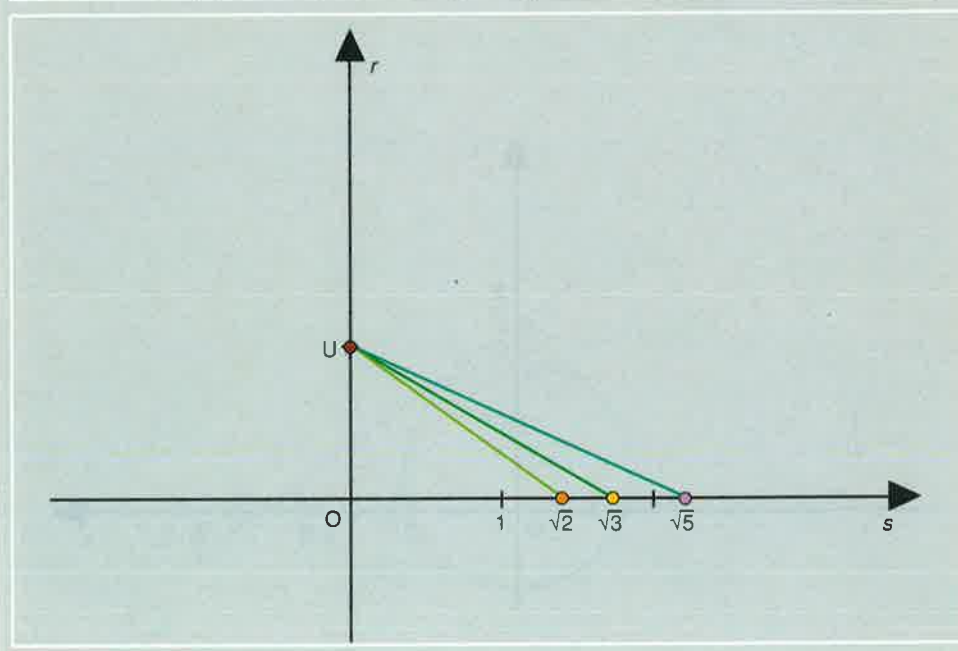
Si capisce allora che sono i numeri razionali a costituire un insieme «povero» e che ancora più «povero» è l'insieme degli interi. La maggior parte dei numeri reali è invece costituita da numeri irrazionali.

Si arriva così ad una conclusione sorprendente: per secoli i numeri irrazionali non riuscirono ad imporsi perché non erano considerati numeri; poi diventarono dei numeri, ma casi eccezionali; infine, si è scoperto che sono proprio loro, gli irrazionali, che costituiscono il caso più frequente fra i numeri reali.

**Figura 3**  
La costruzione ripetuta:  
agli stessi punti A e B  
corrispondono ora due  
irrazionali diversi



**Figura 4**  
A ogni razionale  
corrispondono infiniti  
irrazionali





## Che cosa bisogna sapere

### L'insieme dei numeri reali

L'insieme dei numeri reali (R) è costituito da (fig. 1):

- numeri *irrazionali*, cioè numeri come  $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{3}$ ;
- numeri *razionali*, cioè numeri come  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{3}{4}$ , 0, 2, -3.

### I numeri reali possono essere rappresentati sulla retta

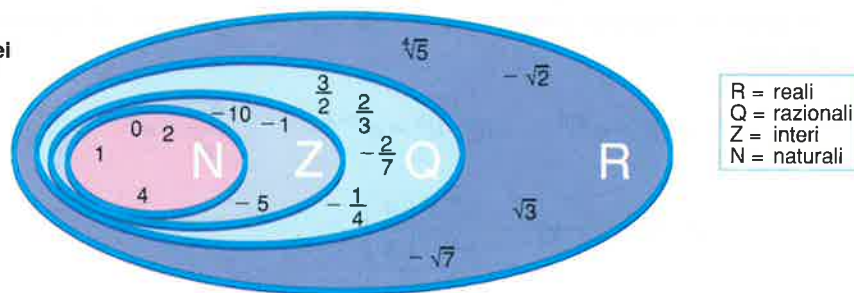
In fig. 2 si trovano rappresentati, per esempio,  $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 2, -2.

### L'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato

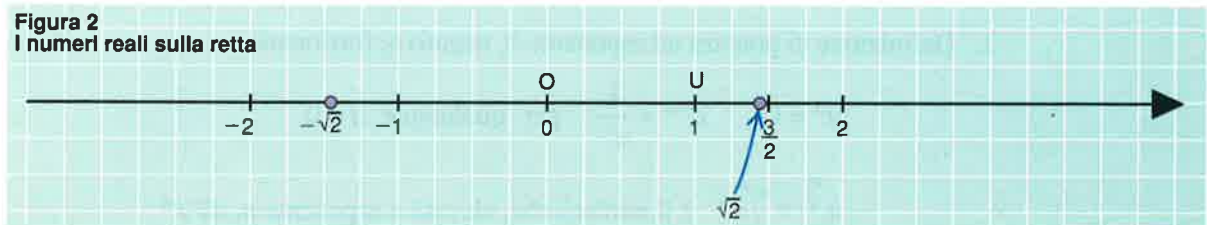
Dati due qualunque numeri reali si può sempre dire se uno precede l'altro (fig. 2).

Esempi:  $\sqrt{2} < 2$      $-\sqrt{2} > -2$      $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$

**Figura 1**  
L'insieme dei numeri reali



**Figura 2**  
I numeri reali sulla retta





### Approssimare un numero irrazionale con numeri razionali

Ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali:

- approssimanti per difetto (cioè minori del numero irrazionale);
- approssimanti per eccesso (cioè maggiori del numero irrazionale).

Esempio:

Per difetto	$\sqrt{2}$	Per eccesso	Intervallo
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	0,1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	0,01
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	0,001

### Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

1. Valgono le seguenti proprietà per l'addizione e la moltiplicazione:

Proprietà delle operazioni	Addizione $a + b$	Moltiplicazione $a \cdot b$
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva		$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente		$a \cdot 0 = 0$
Opposto e inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (con $a \neq 0$ )

2. Valgono le seguenti proprietà per l'elevazione a potenza ad esponente intero positivo:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3. Definizione di potenza ad esponente 0, negativo, frazionario:

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{per qualunque } a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{è il numero che, elevato a esponente } n, \text{ dà } a^m$$

### Calcoli con i numeri reali

Per eseguire i calcoli con i numeri reali si deve tener presente il seguente ordine:

1. si esegue l'elevazione a potenza (o l'estrazione di radice);
2. si eseguono le moltiplicazioni (o le divisioni);
3. si eseguono le addizioni (o le sottrazioni).

Si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.

### Rapporto fra due segmenti

Un numero reale  $r$  può sempre esprimere il rapporto fra due segmenti OA e OU e si scrive:

$$r = \frac{OA}{OU}$$

Si possono presentare due casi:

1.  $r$  è irrazionale; in tal caso i due segmenti si dicono *incommensurabili*,
2.  $r$  è razionale, cioè risulta:

$$r = \frac{p}{q}$$

I due segmenti si dicono in tal caso *commensurabili* e si scrive (fig. 3):

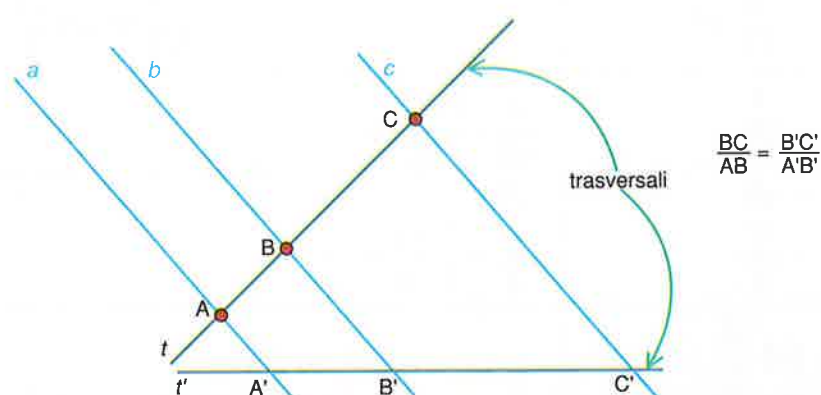
$$\frac{OA}{OU} = \frac{p}{q}$$

che significa: in OA è contenuto  $p$  volte un segmento lungo  $\frac{1}{q}$  OU.

### Teorema di Talete

Se più rette parallele tagliano due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti (fig. 3).

Figura 3  
Teorema di Talete



## Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due argomenti collegati fra loro:

- l'insieme dei numeri reali ed i calcoli con i numeri reali;
- il rapporto fra due segmenti ed il teorema di Talete.

Le applicazioni di questi argomenti, molto numerose e relative a vari campi scientifici, sono qui riunite in due gruppi:

- A. calcoli con i numeri reali;
- B. risoluzione di problemi che richiedono di svolgere i calcoli con numeri reali.

### A. Calcoli con i numeri reali

#### Attività 1

Completare la tabella come è indicato nella prima riga per determinare il risultato delle operazioni indicate.

Calcolo dato	Calcoli eseguiti	Risultato
$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 5^2}$		$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 5^2} = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \dots\dots$	
$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots\dots$	
$\frac{5 \cdot 5 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$		

## B. Risoluzione di problemi

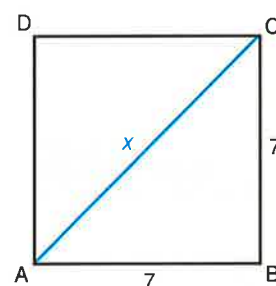
### Attività 2

Determinare la lunghezza della diagonale del quadrato che ha il lato lungo 7.

Indicando con  $x$  la lunghezza della diagonale e applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $ABC$  di fig. 1, si ha:

$$x^2 = \dots\dots\dots \text{ ossia } x^2 = 2 \cdot 7^2 \quad \text{da cui } x = 7\sqrt{2}$$

Figura 1  
La diagonale  
del quadrato



### Attività 3

Ripetere il procedimento seguito prima, indicando con  $b$  la lunghezza del lato del quadrato e con  $d$  la lunghezza della diagonale.

Si ottiene:

$$d = b \sqrt{2}$$

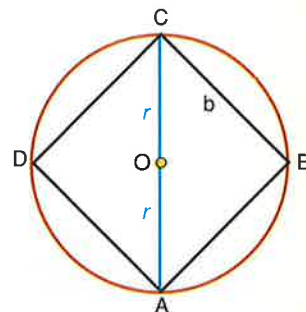
### Attività 4

Determinare il lato del quadrato inscritto in un cerchio di raggio  $r$ .

Nel quadrato  $ABCD$  di fig. 2 la diagonale  $AC$  è lunga  $2r$ ; si ha quindi:

$$2r = b\sqrt{2} \quad \text{da cui } b = \dots\dots\dots \text{ e quindi } b = r\sqrt{2}$$

Figura 2  
Il quadrato inscritto in  
un cerchio



### Attività 5

Determinare l'altezza del triangolo equilatero che ha il lato lungo 5.

Calcolare l'area  $S$  del triangolo.

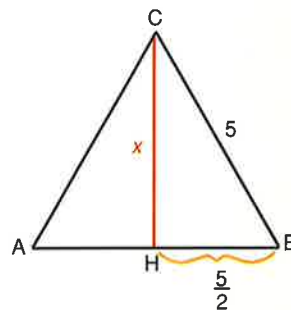
Indicando con  $x$  la lunghezza dell'altezza e applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $CHB$  di fig. 3, si ha:

$$5^2 = \dots\dots\dots \text{ da cui } x^2 = \frac{3}{4} \cdot 5^2 \quad \text{e quindi } x = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'area  $S$  è data da:

$$S = \frac{5x}{2} \quad \text{e quindi } S = \dots\dots\dots = 5^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Figura 3  
L'altezza del triangolo  
equilatero



### Attività 6

Ripetere i procedimenti seguiti per eseguire l'«Attività 5», indicando con  $b$  la lunghezza del lato del triangolo equilatero e con  $h$  la lunghezza dell'altezza.

Si ottiene:

$$h = b \frac{\sqrt{3}}{2} \quad S = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

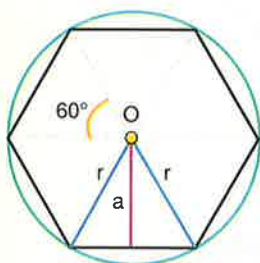
### Attività 7

Determinare l'apotema  $a$  e l'area  $S$  dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio  $r$ .

Esaminare la fig. 4: l'esagono si compone di 6 triangoli equilateri uguali con il lato che è ..... Si ha quindi:

$$a = r \frac{\sqrt{3}}{2} \quad S = 6r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

**Figura 4**  
L'esagono regolare  
inscritto in un cerchio



### Attività 8

Determinare il lato  $b$  e l'area  $S$  del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio  $r$ .

Esaminare la fig. 5: l'angolo alla circonferenza CAH è ampio  $30^\circ$ , il corrispondente angolo al centro è ampio ..... (vedi il primo volume, p. 145). Si trova quindi che (fig. 5a):

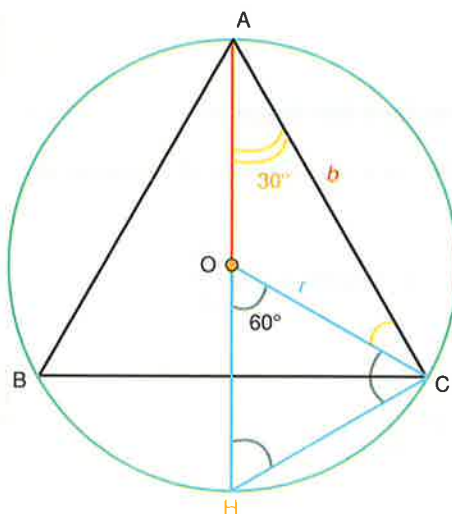
$\widehat{ACH}$  è ampio .....  $CH$  è lungo .....  $AH$  è lungo .....  
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC, si trova (fig. 5b):

$$b = r\sqrt{3}$$

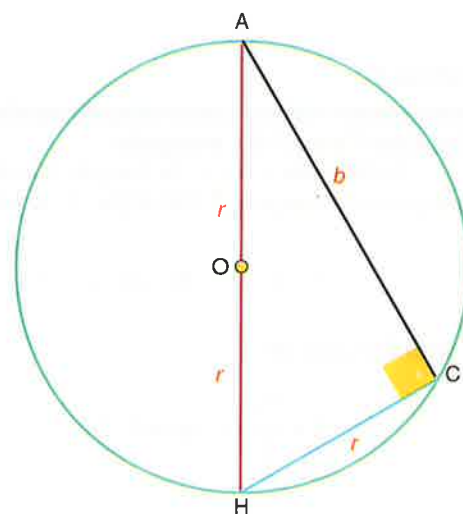
L'area  $S$  è data da:

$$S = (\dots)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ e quindi } S = 3r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

**Figura 5**  
Il triangolo equilatero  
inscritto in un cerchio



5a



5b



# DAI TRIANGOLI SIMILI ALLA TRIGONOMETRIA

1.

Poligoni simili

**Scheda informativa.**

Poligoni omotetici e poligoni simili

2.

Triangoli simili

3.

I criteri di similitudine dei triangoli

**Attività.**Bisettrici, altezze e aree  
di triangoli simili**Scheda applicativa.**

La similitudine nella natura

4.

Relazioni fra lati e angoli  
di un triangolo rettangolo

5.

Le funzioni trigonometriche

**Scheda applicativa.**

La rifrazione della luce

**Scheda storica.**

Come è nata la trigonometria

6.

Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

**Attività.**

Risolvere problemi di trigonometria

**Scheda informativa.**

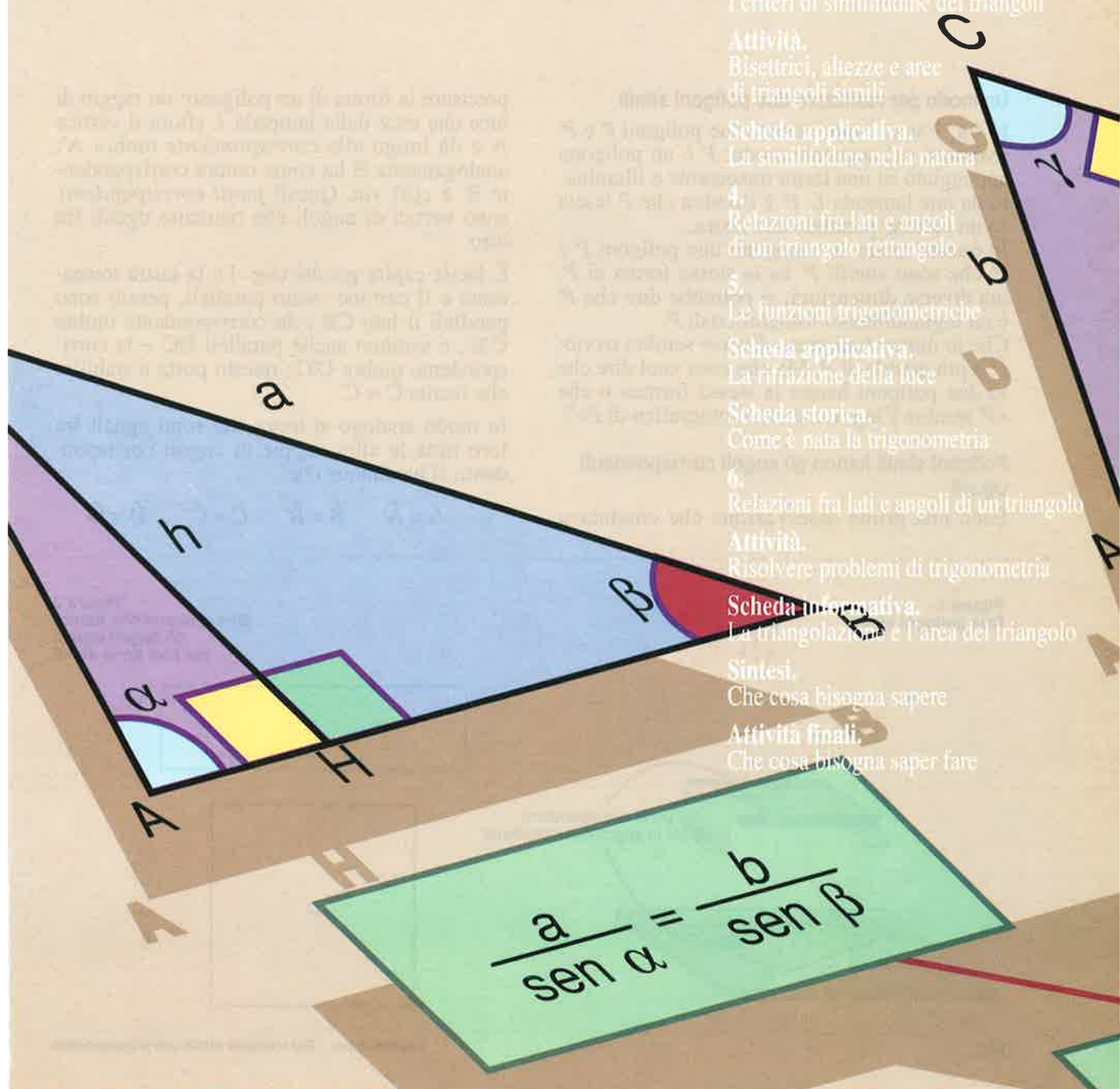
La triangolazione e l'area del triangolo

**Sintesi.**

Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**

Che cosa bisogna saper fare



# 1

## Poligoni simili

### Un modo per realizzare due poligoni simili

In fig. 1 sono rappresentati due poligoni  $P$  e  $P'$  realizzati nel seguente modo:  $P$  è un poligono appoggiato su una lastra trasparente e illuminato da una lampada  $L$ ,  $P'$  è l'ombra che  $P$  lascia su un cartone parallelo alla lastra.

In questo modo si ottengono due poligoni  $P$  e  $P'$  che sono *simili*:  $P'$  ha la stessa forma di  $P$ , ma diverse dimensioni; si potrebbe dire che  $P'$  è un ingrandimento fotografico di  $P$ .

Che le dimensioni siano diverse sembra ovvio:  $P'$  è più grande di  $P$ . Ma che cosa vuol dire che «i due poligoni hanno la stessa forma» o che « $P'$  sembra l'ingrandimento fotografico di  $P$ »?

### Poligoni simili hanno gli angoli corrispondenti uguali

Ecco una prima osservazione che conduce a

precisare la forma di un poligono: un raggio di luce che esce dalla lampada  $L$  sfiora il vertice  $A$  e dà luogo alla *corrispondente* ombra  $A'$ ; analogamente  $B$  ha come ombra corrispondente  $B'$  e così via. Questi *punti corrispondenti* sono vertici di angoli che risultano uguali fra loro.

È facile capire perché (fig. 1): la lastra trasparente e il cartone sono paralleli, perciò sono paralleli il lato  $CB$  e la corrispondente ombra  $C'B'$ , e saranno anche paralleli  $DC$  e la corrispondente ombra  $D'C'$ ; questo porta a stabilire che risulta  $\hat{C} = \hat{C}'$ .

In modo analogo si trova che sono uguali fra loro tutte le altre coppie di angoli corrispondenti; si ha dunque che:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}'$$

Figura 1  
Due poligoni simili

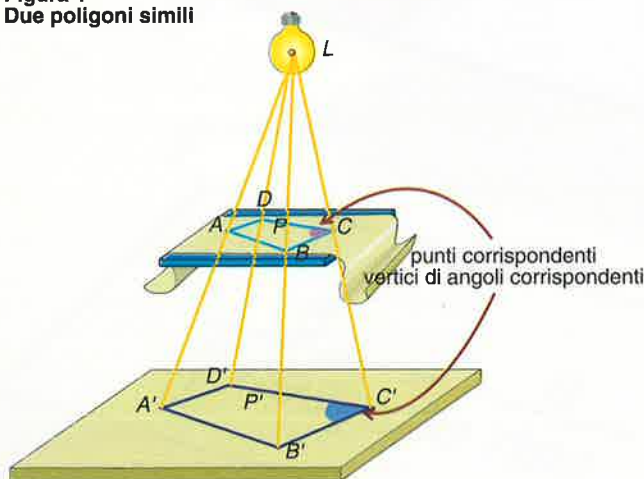
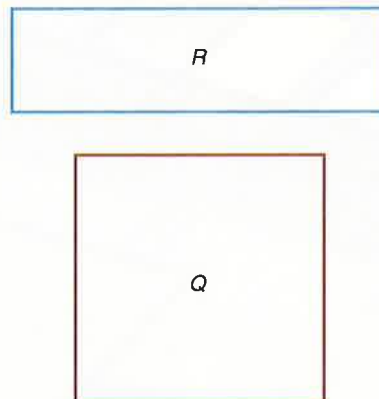


Figura 2  
Due poligoni che hanno  
gli angoli uguali  
ma non sono simili



## È fisso il rapporto fra i lati corrispondenti di poligoni simili

La precedente osservazione, e cioè che gli angoli corrispondenti sono uguali, non basta a precisare «la forma» di due poligoni: il quadrato  $Q$  e il rettangolo  $R$  di fig. 2 hanno gli angoli corrispondenti uguali fra loro, ma certamente  $R$  non si può ottenere proiettando  $Q$  su un piano parallelo.

È il teorema di Talete che conduce a scoprire l'altra proprietà che caratterizza due poligoni simili: *in due poligoni simili è costante il rapporto fra i lati corrispondenti, risulta cioè:*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

Per esempio se  $A'B'$  è doppio di  $AB$ , anche  $B'C'$  è doppio di  $BC$ , e così via.

Ecco come si può ragionare per arrivare a questa conclusione, basandosi sulla fig. 3a, che idealizza l'esperienza di fig. 1: i raggi di luce si possono considerare come delle trasversali ( $LA'$ ,  $LB'$ , etc.) che tagliano coppie di rette parallele come  $AB$  e  $A'B'$ ; si ha allora, per il teorema di Talete:

$$\frac{LA'}{LA} = \frac{LB'}{LB}$$

Si ha pure, considerando le rette  $B'C'$  e  $BC$ , tagliate  $LB'$  e  $LC'$ :

$$\frac{LB'}{LB} = \frac{LC'}{LC}$$

E, così continuando, si trova ancora una catena

di rapporti tutti uguali, e cioè:

$$\frac{LA'}{LA} = \frac{LB'}{LB} = \frac{LC'}{LC} = \frac{LD'}{LD} \quad (1)$$

Ma in questa catena di rapporti non compaiono i lati corrispondenti dei due poligoni; per questo bisogna fissare l'attenzione sulla fig. 3b: nel triangolo  $LA'B'$  si è tracciata da  $B$  la parallela a  $LA'$ ; considerando le trasversali  $B'L$  e  $B'A'$ , che tagliano le parallele  $LA'$  e  $BK$  si ha, sempre in base al teorema di Talete:

$$\frac{LB'}{LB} = \frac{A'B'}{A'K}$$

Infine, essendo  $A'K=AB$  perché lati opposti di un parallelogramma (fig. 3c), si arriva a scrivere:

$$\frac{LB'}{LB} = \frac{A'B'}{AB}$$

Ripetendo questo procedimento a partire dagli altri triangoli  $L'B'C'$ ,  $LC'D'$ ,  $LD'A'$  si trova che:

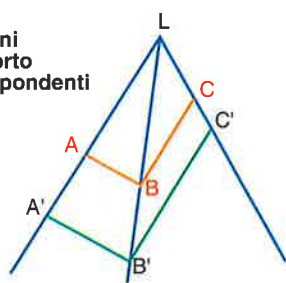
$$\frac{LC'}{LC} = \frac{B'C'}{BC} \quad \frac{LD'}{LD} = \frac{C'D'}{CD} \quad \frac{LA'}{LA} = \frac{D'A'}{DA} \quad (2)$$

Infine, confrontando le (1) con le (2), si ottiene proprio:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

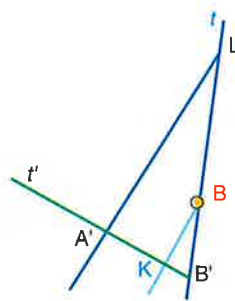
È dunque costante il rapporto fra i lati corrispondenti; in questo caso si dice anche che *i lati corrispondenti sono proporzionali o in proporzione.*

**Figura 3**  
In due poligoni simili il rapporto dei lati corrispondenti è costante



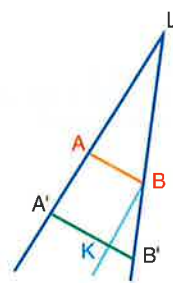
$$\frac{LA'}{LA} = \frac{LB'}{LB}$$

3 a



$$\frac{LB'}{LB} = \frac{A'B'}{A'K}$$

3 b



$$AB = A'K$$

3 c

$$\frac{LB'}{LB} = \frac{A'B'}{AB}$$

### Per stabilire se due poligoni sono simili bisogna confrontare sia i lati che gli angoli

Si è già detto che non basta confrontare gli angoli per caratterizzare la forma di due poligoni: il quadrato e il rettangolo di fig. 2 hanno gli angoli ordinatamente uguali, ma non sono simili.

Ma non basta neppure il solo rapporto fra i lati corrispondenti per precisare la forma di due poligoni: in fig. 4 è rappresentato un quadrato  $Q$  e un rombo  $R$  che ha i lati doppi del quadrato. Le due figure non hanno certamente la stessa forma:  $R$  non si potrebbe mai ottenere proiettando  $Q$  su un piano parallelo.

Sono invece entrambe le condizioni – uguaglianza degli angoli corrispondenti e uguaglianza dei rapporti fra lati corrispondenti – che riescono a precisare la nozione intuitiva di «poligoni con la stessa forma», suggerita dall'ingrandimento fotografico.

Si è così condotti alla seguente definizione: *si dicono simili due poligoni che hanno ordinatamente uguali gli angoli e il rapporto fra i lati corrispondenti.*

### Come esaminare due poligoni per riconoscere se sono simili

Raramente due poligoni da esaminare sono dati nella posizione illustrata in fig. 1, posizione che rende molto facile la ricerca di elementi corrispondenti (sono gli elementi del poligono  $P$  e le corrispondenti ombre). Ecco un esempio su cui riflettere.

In fig. 5 è rappresentata la seguente situazione: dopo aver disegnato sul piano di cartone l'ombra  $P'$ , si è appoggiato anche  $P$  sullo stesso piano in una posizione qualunque.

I due poligoni  $P$  e  $P'$  sono ovviamente ancora simili, ma ora in che modo si riescono ad individuare gli elementi corrispondenti?

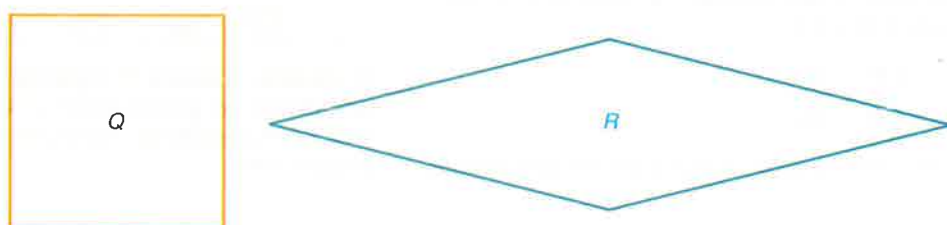
Convieni procedere nel modo seguente:

#### 1. Esaminare gli angoli:

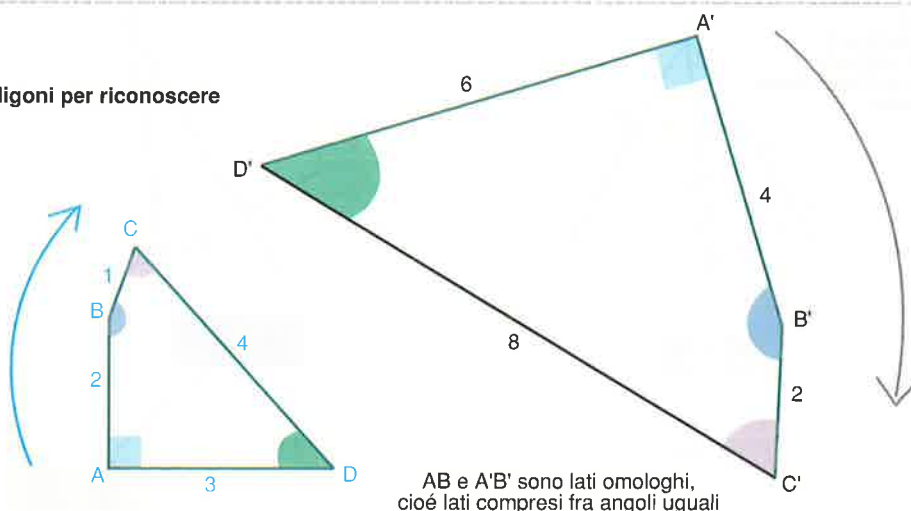
- si fissa l'attenzione su una coppia di angoli certamente uguali, per esempio  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$ ;
- si percorre ordinatamente il perimetro dei due poligoni, verificando che anche gli altri angoli corrispondenti siano uguali; nel caso dei poligoni di fig. 5, percorrendo il perimetro dei due poligoni in senso antiorario si trova:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}'$$

**Figura 4**  
Due poligoni che hanno costante il rapporto dei lati corrispondenti, ma non sono simili



**Figura 5**  
Esaminare due poligoni per riconoscere se sono simili





## 2. Esaminare il rapporto fra coppie di lati omologhi:

- si fissa l'attenzione su una coppia di lati che sono nella stessa posizione rispetto a coppie di angoli uguali; per esempio AB (compreso fra  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ) e A'B' (compreso fra  $\hat{A}'$  e  $\hat{B}'$ ) e se ne calcola il rapporto, dato da:

$$\frac{A'B'}{AB}$$

Il valore ottenuto è il *rapporto fra due lati omologhi*, cioè fra due lati che si trovano nella stessa posizione;

- si percorre ordinatamente il perimetro dei due poligoni, verificando che il rapporto di tutte le coppie di lati omologhi sia costante; per i due poligoni di fig. 5 si ottiene per esempio:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = 2$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Qual è il procedimento per stabilire se due poligoni sono simili?
- ② In due poligoni simili come si trovano le coppie di lati omologhi?

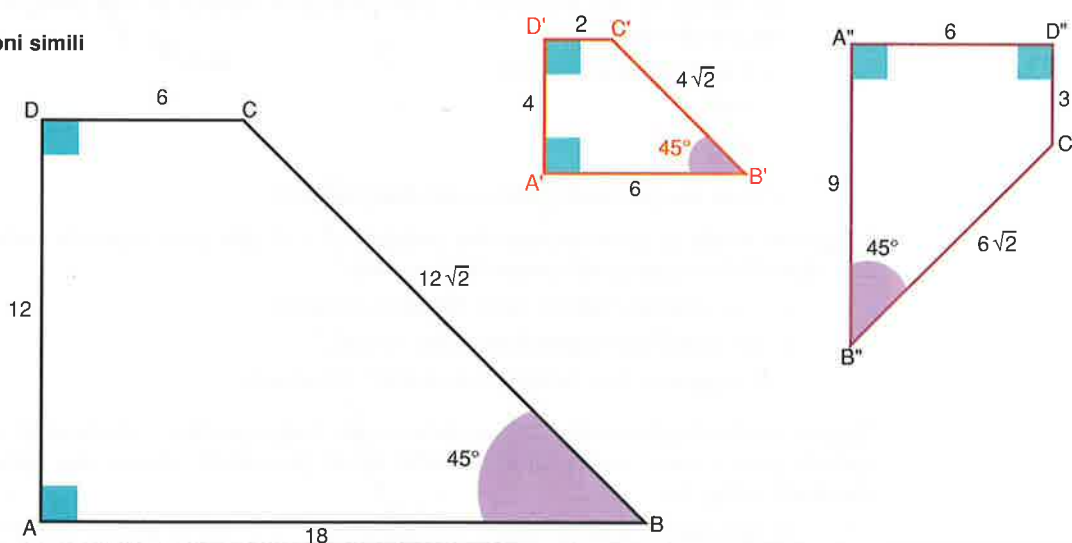
### Comprensione

- ① Spiegare perché non basta confrontare gli angoli di due poligoni per decidere se i poligoni sono simili; portare un esempio diverso da quello portato dal testo.
- ② Spiegare perché non basta confrontare i lati di due poligoni per decidere se i poligoni sono simili; portare un esempio diverso da quello portato dal testo.

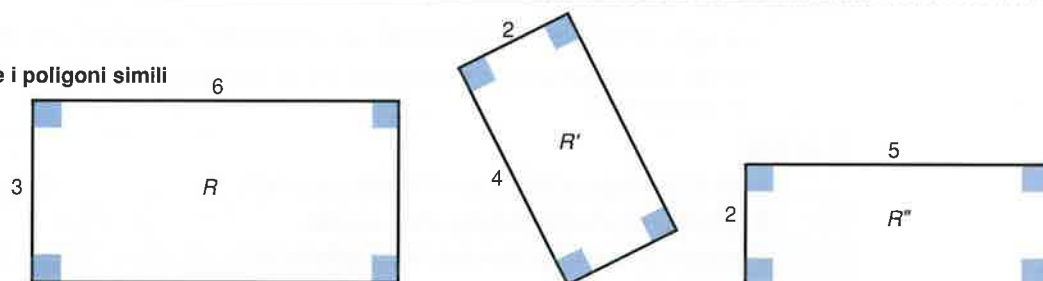
### Applicazioni

- ① Esaminare i poligoni rappresentati in fig. 6 e verificare che sono simili, spiegando il procedimento seguito.
- ② Esaminare i poligoni di fig. 7 e stabilire quali sono simili fra loro, spiegando il procedimento seguito.

**Figura 6**  
Tre poligoni simili



**Figura 7**  
Riconoscere i poligoni simili



1. Poligoni simili



## Poligoni omotetici e poligoni simili

### Poligoni omotetici

In fig. 1a è ripreso in altro modo l'esperimento descritto nel paragrafo precedente:

- su un foglio trasparente  $f$  è appoggiato un poligono  $P$  di vertici  $A, B, C, D$ ;
- quattro bastoncini, che passano per uno stesso punto  $O$ , bucano il foglio trasparente in  $A, B, C, D$ ;
- un cartoncino, disposto parallelamente a  $f$ , viene bucato dai bastoncini in  $A', B', C', D'$ , determinando un poligono  $P'$ .

Il collegamento fra i due poligoni  $P$  e  $P'$  può essere precisato nel modo seguente:

- al vertice  $A$  del poligono  $P$  corrisponde il vertice  $A'$  del poligono  $P'$  in modo che risulta:
  - $A$  e  $A'$  allineati con  $O$ ;
  - $\frac{OA'}{OA} = r$ ;
- al vertice  $B$  del poligono  $P$  corrisponde il vertice  $B'$  del poligono  $P'$  in modo che risulta:
  - $B$  e  $B'$  allineati con  $O$ ;
  - $\frac{OB'}{OB} = r$ ;
- e così via per tutti i vertici dei due poligoni.

In questo modo si costruiscono due poligoni  $P$  e  $P'$  che presentano le caratteristiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

- a. i lati corrispondenti sono fra loro paralleli;
- b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
- c. il rapporto fra i lati corrispondenti è costante.

Si può ora immaginare di «schiacciare» tutto l'apparecchio sul piano di cartone; questo può essere realizzato in molti modi possibili, alcuni dei quali sono mostrati in fig. 1b.

In tutti questi casi si hanno due poligoni  $P$  e  $P'$  ed un punto  $O$ , che presentano le stesse caratteristiche:

- ad ogni vertice di  $P$  corrisponde un vertice di  $P'$  allineato con  $O$ ;
- ha un valore costante  $r$  il rapporto fra le distanze di vertici corrispondenti dal punto  $O$ .

E quindi:

- a. i lati corrispondenti sono fra loro paralleli;
- b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
- c. vale  $r$  il rapporto fra i lati corrispondenti.

I due poligoni  $P$  e  $P'$  si dicono allora *omotetici*, da un termine greco che significa «stessa posizione».

### Poligoni simili

Si può ora riprendere dal paragrafo precedente un'osservazione: il poligono  $P'$ , che è omotetico a  $P$ , è ruotato come in fig. 2, fino a occupare la posizione  $P''$ ; viene allora a mancare la proprietà (a), cioè i lati di  $P''$  non sono più paralleli a quelli del poligono  $P$ , ma rimangono sempre le altre due proprietà, cioè:

- b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
- c. vale  $r$  il rapporto fra i lati corrispondenti.

In questo caso i due poligoni  $P$  e  $P''$  si dicono *simili*.

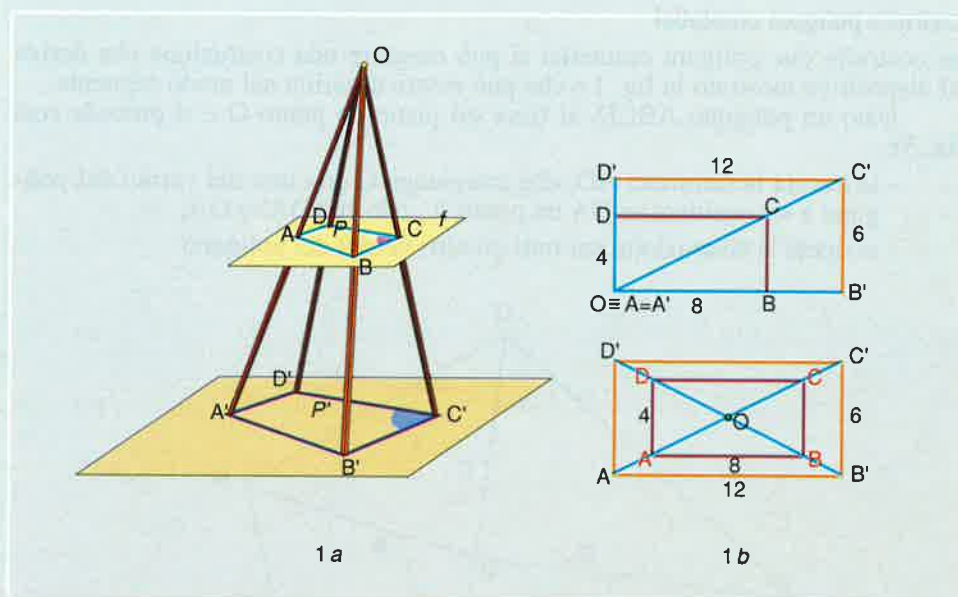


Figura 1  
Poligoni omotetici

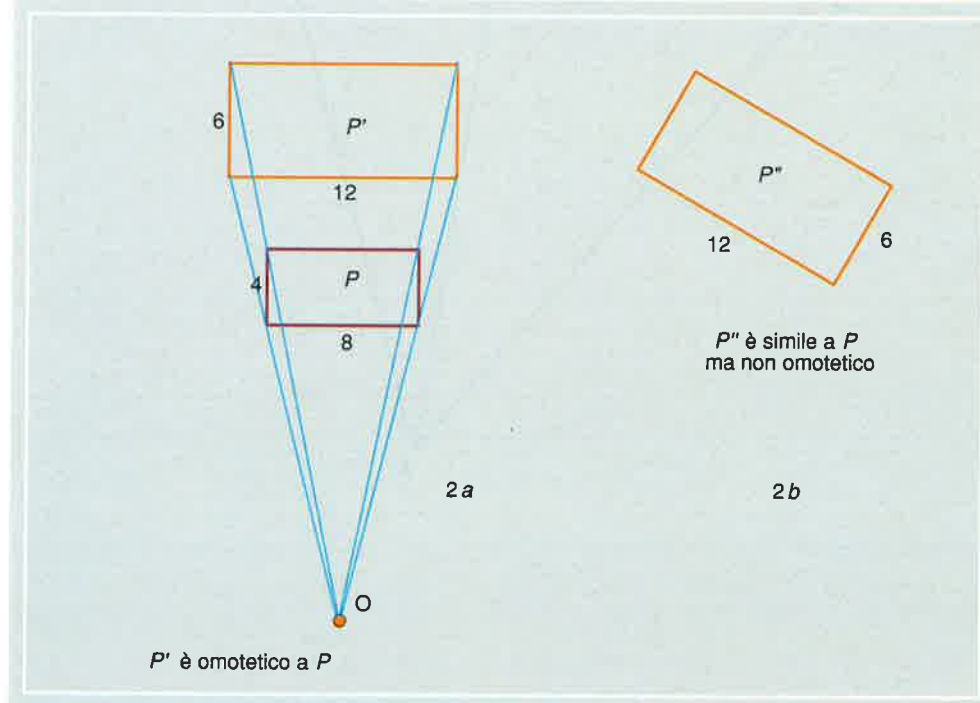


Figura 2  
Poligoni omotetici  
e poligoni simili

Si può quindi dire che:

- Due poligoni omotetici hanno stessa forma e stessa posizione, perché risulta che:
  - a. i lati corrispondenti sono fra loro paralleli;
  - b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
  - c. vale  $r$  il rapporto fra i lati corrispondenti.
- Due poligoni simili hanno solo la stessa forma, perché risulta che:
  - b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
  - c. vale  $r$  il rapporto fra i lati corrispondenti.

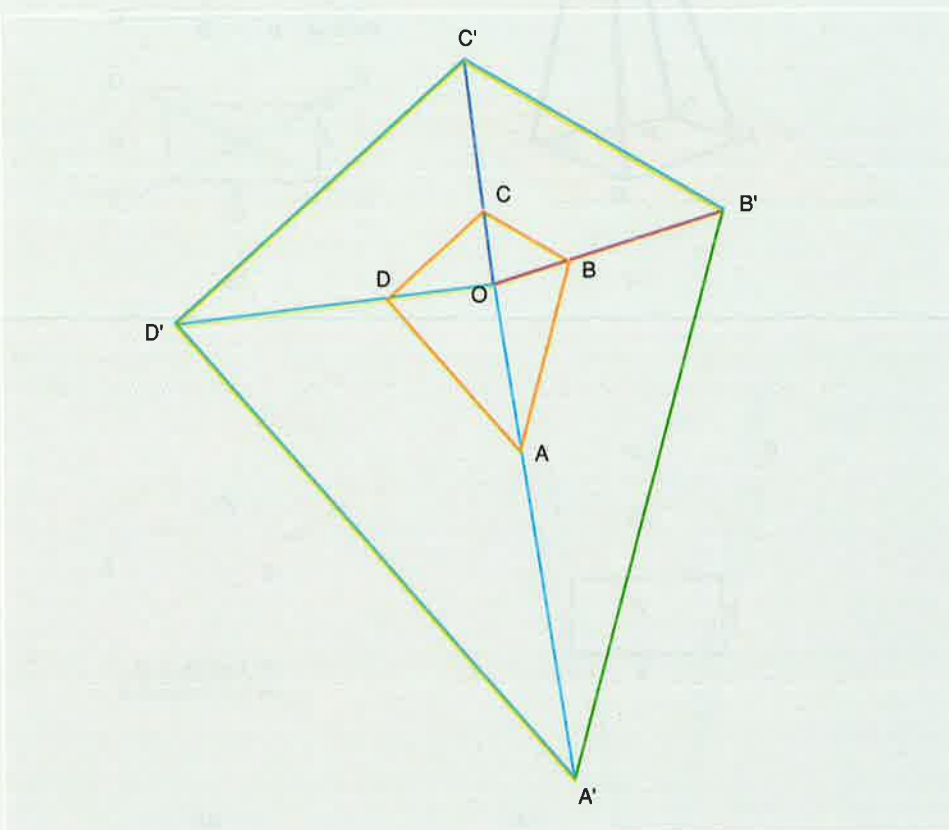
### Costruire poligoni omotetici

Per costruire due poligoni omotetici si può eseguire una costruzione che deriva dal dispositivo mostrato in fig. 1 e che può essere descritta nel modo seguente.

Dato un poligono ABCD, si fissa sul piano un punto O e si procede così (fig. 3):

- si traccia la semiretta AO, che congiunge O con uno dei vertici del poligono e si considera su OA un punto A', tale che  $OA' = r \cdot OA$ ;
- si ripete la costruzione per tutti gli altri vertici del poligono.

**Figura 3**  
Costruire poligoni omotetici



# Triangoli simili

## Triangoli simili

I triangoli sono i poligoni più semplici; si ha dunque che *due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati omologhi che mantengono lo stesso rapporto*.

Per esempio sono simili i due triangoli di fig. 1, dato che risulta:

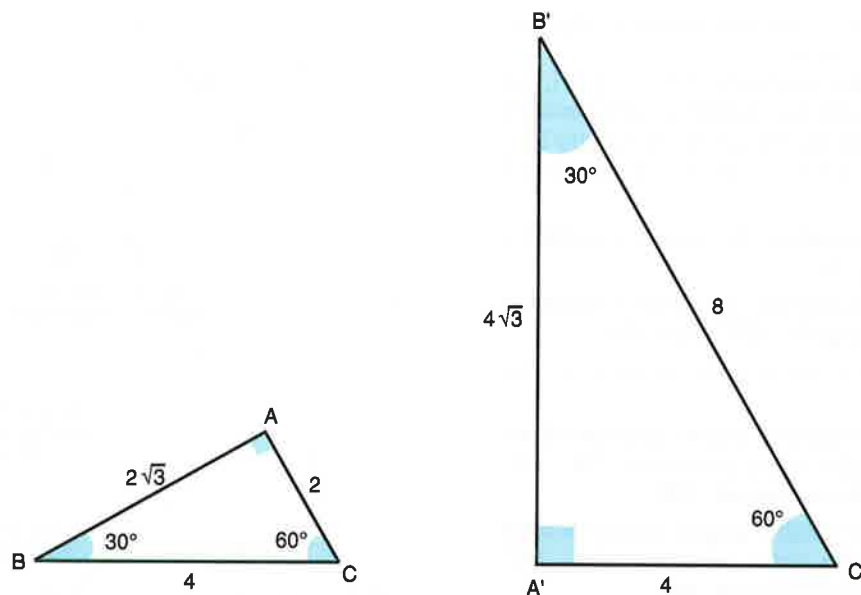
$$\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \quad \hat{B} = \hat{B}' = 30^\circ \quad \hat{C} = \hat{C}' = 60^\circ$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2} \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2} \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

Per scoprire se due triangoli sono simili bisognerebbe dunque confrontare gli angoli e, inoltre, valutare il rapporto delle tre coppie di lati omologhi. Per i triangoli però non è necessario eseguire tutti questi calcoli; appositi criteri permettono di verificare se due triangoli sono simili con procedimenti più brevi.

Questi criteri, che sono presentati nel paragrafo seguente, sono tutti basati su due teoremi che verranno ora richiamati: il primo per riconoscere angoli uguali e il secondo per riconoscere segmenti proporzionali.

**Figura 1**  
Due triangoli simili



## Due teoremi fondamentali per la similitudine

Il primo teorema, presentato già nel primo volume, p. 195 («Applicazioni», n. 2), fornisce un criterio per riconoscere angoli uguali, ed è il seguente (fig. 2):

1. Due rette parallele tagliate da una trasversale formano:

- angoli alterni interni uguali;
- angoli alterni esterni uguali;
- angoli corrispondenti uguali.

Il secondo teorema, che fornisce il criterio per riconoscere segmenti proporzionali, è il teorema di Talete, presentato nel capitolo secondo, p. 73, di questo volume e cioè (fig. 3):

2. Se più rette parallele sono intersecate da due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti.

È opportuno sottolineare che in questi due teoremi si usa l'aggettivo «corrispondenti» con diversi significati:

- angoli corrispondenti sono una particolare coppia di angoli uguali formati da due rette parallele tagliate da una trasversale (fig. 2);
- segmenti corrispondenti sono segmenti tagliati sulle due trasversali dalle stesse parallele (fig. 3).

## Un procedimento per costruire un triangolo simile a uno dato

I due teoremi precedenti conducono, in particolare, a scoprire un procedimento per disegnare un triangolo che è sicuramente simile ad un triangolo dato. Il procedimento è organizzato nel modo seguente.

Dato un qualunque triangolo ABC (fig. 4), dal punto D del lato AB si conduce la retta parallela al lato BC, fino ad incontrare AC nel punto E.

Il triangolo ADE così costruito è simile ad ABC.

Ecco come si dimostra che questo risultato è sempre vero (fig. 5).

1. ADE ha certamente gli angoli uguali a quelli del triangolo ABC, dato che:

- l'angolo  $\hat{A}$  è un angolo comune ai due triangoli;
- risulta  $\hat{D} = \hat{B}$  perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele DE, BC, tagliate dalla trasversale AB;
- risulta  $\hat{E} = \hat{C}$  perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele DE, BC, tagliate dalla trasversale AC.

2. ADE ha i lati proporzionali ad ABC dato che (fig. 5a):

$$\text{- risulta } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ per il teorema di Talete;}$$

- tracciando da D la parallela a AC, fino a incontrare BC in K, si può applicare di nuovo il teorema di Talete (fig. 5b), trovando:

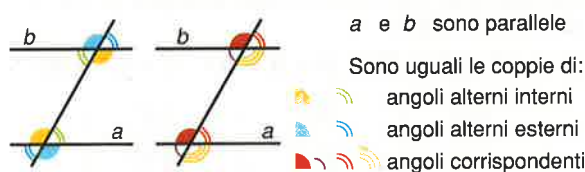
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{KC}$$

- risulta  $KC = DE$  come lati opposti di un parallelogramma e perciò si trova:

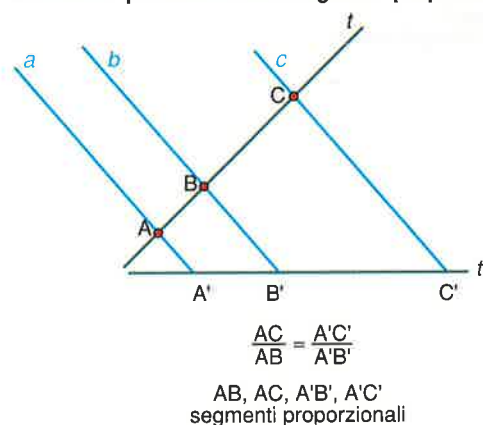
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

In fig. 6 si trova un'applicazione di questo procedimento. Nel triangolo ABC, si è scelto il punto D in modo che risulti:

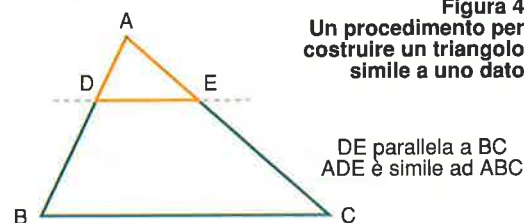
**Figura 2**  
Un teorema per riconoscere angoli uguali



**Figura 3**  
Il teorema per riconoscere segmenti proporzionali



**Figura 4**  
Un procedimento per costruire un triangolo simile a uno dato





$$\frac{AB}{AD} = 3 \quad \text{ossia} \quad AB = 3AD$$

Da D si è tracciata la parallela al lato BC fino ad incontrare AC in E, costruendo il triangolo ADE. La precedente dimostrazione assicura che risulta anche:

$$\frac{AC}{AE} = 3 \quad \text{ossia} \quad AC = 3AE$$

$$\frac{BC}{DE} = 3 \quad \text{ossia} \quad BC = 3DE$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Quali sono i due teoremi fondamentali per

lo studio della similitudine, e in particolare per lo studio dei triangoli simili?

- ② Quale procedimento si può seguire per costruire un triangolo simile ad uno dato?

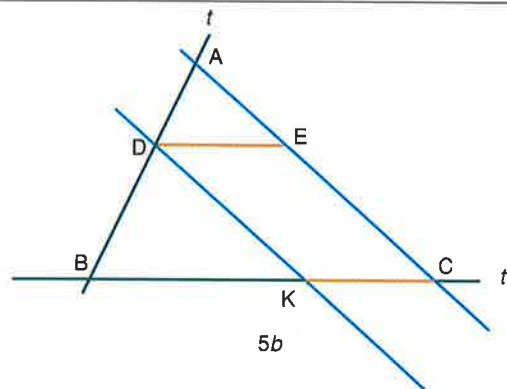
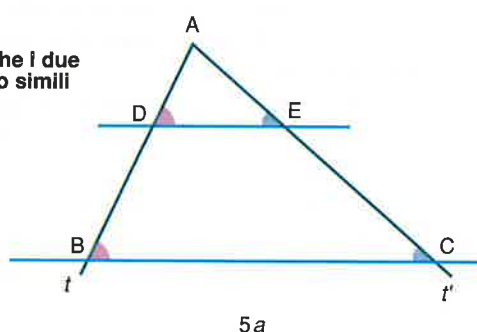
### Comprensione

- ① Spiegare perché il procedimento indicato nel testo per costruire un triangolo simile ad uno dato è certamente valido.  
② Dato un triangolo ABC qualunque, come si potrebbe costruire un triangolo simile ma con i lati tripli?

### Applicazioni

- ① Disegnare un qualunque triangolo ABC e costruire un triangolo ad esso simile e che abbia i lati lunghi  $\frac{1}{4}$  di quelli del triangolo dato.

**Figura 5**  
Dimostrare che i due triangoli sono simili



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

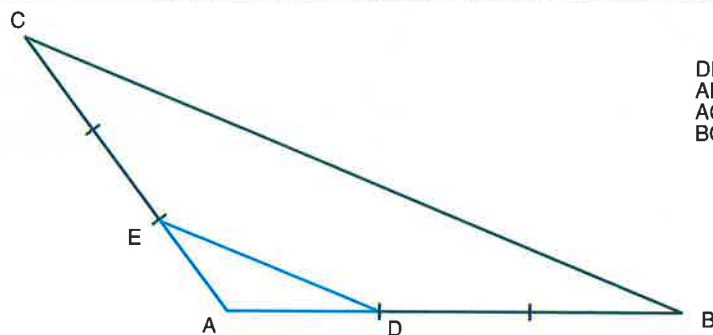
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{KC}$$

$$KC = DE$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

**Figura 6**  
Due triangoli simili



DE parallelo BC  
AB = 3AD  
AC = 3AE  
BC = 3ED

# I criteri di similitudine dei triangoli

## I tre criteri di similitudine

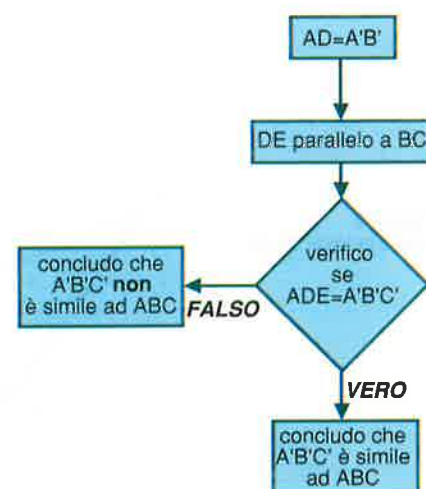
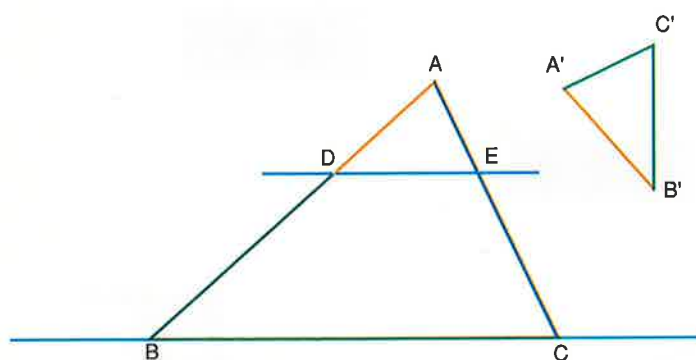
Per stabilire se due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono simili si può procedere così (fig. 1):

- si considera sul lato  $AB$  un segmento  $AD$  uguale a  $A'B'$  e da  $D$  si conduce la parallela a  $BC$ , fino a formare il triangolo  $ADE$ ; questo triangolo è simile ad  $ABC$ , come si è visto nel paragrafo precedente;
- si verifica se il triangolo  $ADE$  è uguale ad  $A'B'C'$ ; in caso affermativo, si può essere sicuri che  $A'B'C'$  è simile ad  $ABC$ .

In questo modo, invece di verificare se i due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono simili, si verifica se i due triangoli  $A'B'C'$  e  $ADE$  sono uguali. Per effettuare quest'ultima verifica ci si vale dei 3 criteri di uguaglianza dei triangoli richiamati qui sotto:

1. Due triangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso;
2. Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli e il lato fra essi compreso;

**Figura 1**  
Il procedimento per riconoscere se due triangoli sono simili



3. Due triangoli sono uguali se hanno uguali i tre lati.

Così, a partire dai 3 criteri di uguaglianza si ottengono i seguenti 3 criteri di similitudine:

1. Due triangoli sono simili se hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale;
2. Due triangoli sono simili se hanno ordinatamente uguali gli angoli;
3. Due triangoli sono simili se hanno i lati in proporzione.

### Dimostrazione del primo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e A'B'C' (fig. 2), che hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale.

Per esempio si ha (fig. 2a):

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 3$$

Si avrà dunque:

$$AB = 3A'B' \quad (1)$$

$$AC = 3A'C' \quad (2)$$

Si costruisce il triangolo ADE con il procedimento che è già stato descritto nel paragrafo precedente (fig. 2b); risulta dunque:

- AD = A'B'

e quindi per la (1):

$$AB = 3AD$$

- DE parallela a BC

e quindi per il teorema di Talete:

$$AC = 3AE$$

Confrontando con la (2) si ricava allora che deve essere anche:

$$AE = A'C'$$

Così il primo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che sono uguali A'B'C' e ADE, perché hanno uguali due lati (A'B'=AD e A'C'=AE) e l'angolo fra essi compreso  $\hat{A} = \hat{A}'$ .

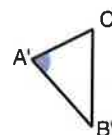
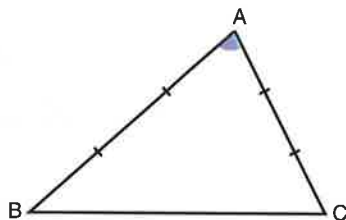
Questo porta a concludere che sono certamente simili i due triangoli assegnati ABC e A'B'C'.

È chiaro che la stessa dimostrazione si può ripetere qualunque sia il valore del rapporto costante fra i due lati del triangolo e, dunque, dal primo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il primo criterio di similitudine.

### Dimostrazione del secondo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e A'B'C' (fig. 3), che hanno gli angoli ordinatamente uguali. Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo vale  $180^\circ$ , basta fissare l'attenzione solo su due coppie di angoli.

Figura 2  
Dimostrazione del primo  
criterio di similitudine

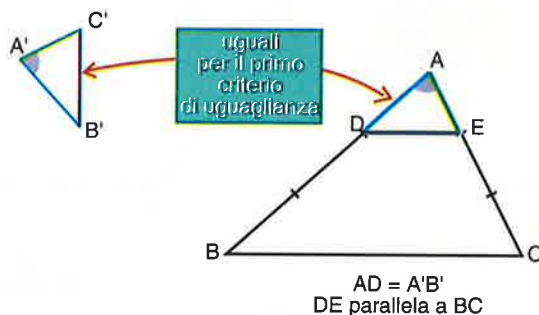


2a

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$AB = 3A'B'$$

$$AC = 3A'C'$$



2b

Per esempio si ha (fig. 3a):

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad (3)$$

$$\hat{B} = \hat{B}' \quad (4)$$

e quindi anche:

$$\hat{C} = \hat{C}' \quad (5)$$

Si costruisce il triangolo ADE con il procedimento che è stato descritto nel paragrafo precedente (fig. 3b); risulta dunque:

-  $AD = A'B'$ ;

- DE parallela a BC e quindi  $\hat{D} = \hat{B}$ , che sono angoli uguali perché le rette DE, BC sono parallele e tagliate dalla trasversale AB.

Confrontando con la (4) si ricava allora che deve essere anche  $\hat{D} = \hat{B}'$ .

Così il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che sono uguali  $A'B'C'$  e  $ADE$ , perché hanno uguali due angoli ( $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{D} = \hat{B}'$ ) e il lato fra essi compreso ( $AD = A'B'$ ). Questo porta a concludere che sono simili i due triangoli assegnati ABC e  $A'B'C'$  e, dunque, dal secondo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il secondo criterio di similitudine.

### Dimostrazione del terzo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e  $A'B'C'$  (fig. 4), che hanno i tre lati in proporzione; per esempio si ha (fig. 4a):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 3$$

Si avrà dunque:

$$AB = 3A'B' \quad (6)$$

$$AC = 3A'C' \quad (7)$$

$$BC = 3B'C' \quad (8)$$

Si costruisce ora il triangolo ADE con il procedimento descritto nel paragrafo precedente; risulta dunque (fig. 4b):

-  $AD = A'B'$ , quindi per la (6)  $AB = 3AD$ ;

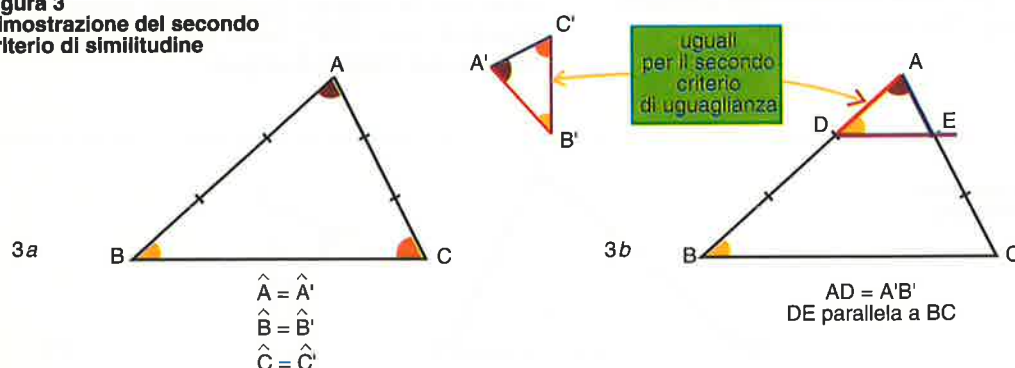
- DE parallela a BC, perciò ABC simile a ADE.

Basandosi in particolare sull'applicazione illustrata in fig. 6 di p. 97, si trova che:

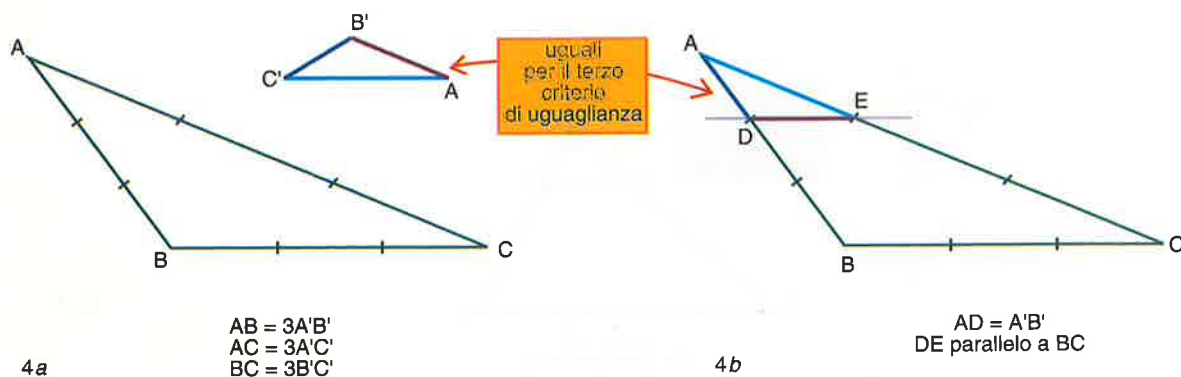
$$AC = 3AE \quad (7')$$

$$BC = 3DE \quad (8')$$

**Figura 3**  
Dimostrazione del secondo criterio di similitudine



**Figura 4**  
Dimostrazione del terzo criterio di similitudine



Confrontando poi le relazioni (7) e (7') si ha:

$$AE = A'C'$$

Infine, confrontando (8) e (8'), si ricava:

$$DE = B'C'$$

Così si trova che  $A'B'C'$  e  $ADE$  hanno i tre lati uguali e perciò il terzo criterio di uguaglianza garantisce che questi due triangoli sono uguali. Questo porta a concludere che sono certamente simili i due triangoli assegnati  $ABC$  e  $A'B'C'$ . È chiaro che la stessa dimostrazione si può ripetere qualunque sia il valore del rapporto costante fra i due lati del triangolo e, dunque, dal terzo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il terzo criterio di similitudine.

### Criteri di uguaglianza e di similitudine

La tabella A riassume le condizioni richieste dai criteri di uguaglianza e di similitudine, per riconoscere se due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono uguali o simili. Si osserva così che si passa da un criterio di uguaglianza all'analogo criterio di similitudine togliendo una condizione.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Esporre i tre criteri di similitudine dei triangoli.

### Comprensione

- ① Spiegare come è organizzata la dimostrazione dei tre criteri di similitudine dei triangoli.
- ② Spiegare perché da ogni criterio di uguaglianza scaturisce un criterio di similitudine dei triangoli.

### Applicazioni

- ① Due triangoli rettangoli hanno i cateti in proporzione; questo basta per dire che i due triangoli sono simili?
- ② Due triangoli isosceli hanno gli angoli al vertice uguali; questo basta per dire che i due triangoli sono simili?

**Tabella A**  
I criteri di uguaglianza e di similitudine

Criteri di uguaglianza	Criteri di similitudine
<p>1. Un angolo uguale e i lati che lo comprendono uguali</p> <p>3 condizioni <math>\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{cases}</math></p>	<p>1. Un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione</p> <p>2 condizioni <math>\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \end{cases}</math></p>
<p>2. Uguali due angoli e il lato fra essi compreso</p> <p>3 condizioni <math>\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ AB = A'B' \end{cases}</math></p>	<p>2. Uguali due angoli</p> <p>2 condizioni <math>\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases}</math></p>
<p>3. I tre lati uguali</p> <p>3 condizioni <math>\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}</math></p>	<p>3. I tre lati in proporzione</p> <p>2 condizioni <math>\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}</math></p>



# Bisettrici, altezze e aree di triangoli simili

## Le bisettrici di due triangoli simili

### Attività 1

In fig. 1 sono rappresentati due triangoli simili ABC e A'B'C'; l'angolo  $\hat{B}$  è stato diviso in due parti uguali, tracciando la bisettrice BK; analogamente, nel triangolo A'B'C', si è tracciata la bisettrice B'K'.

Osservando la figura, completare le seguenti frasi:

- Dato che i due triangoli ABC, A'B'C' sono ....., risulta:

$$\hat{A} = \dots\dots\dots \quad \dots\dots = \hat{C}' \quad \dots\dots = \dots\dots$$

- Anche i due triangoli ABK e A'B'K' sono ..... per il ..... criterio di similitudine, perché hanno:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{perché } \dots\dots\dots$$

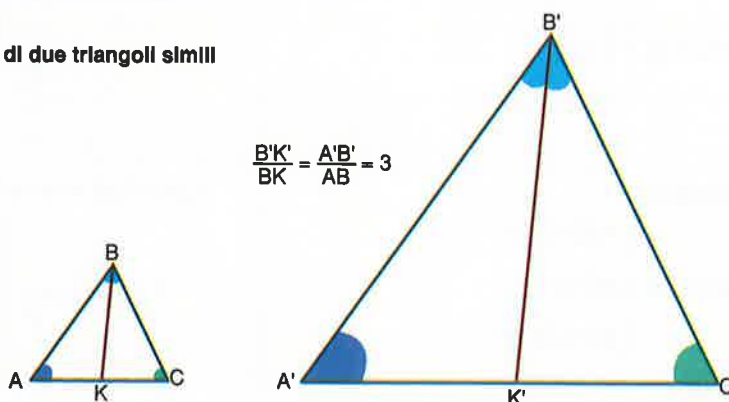
$$\hat{B}K = \hat{B}'K' \quad \text{perché } \dots\dots\dots$$

- Dato che i due triangoli ABK e A'B'K' sono simili, avranno i ..... in proporzione; perciò risulta:

$$\frac{B'K'}{BK} = \frac{A'B'}{AB} = 3$$

- In fig. 1, il triangolo A'B'C' ha i lati tripli di quelli del triangolo ABC; perciò anche la bisettrice B'K' è ..... della bisettrice BK.

**Figura 1**  
Le bisettrici di due triangoli simili



## Le altezze di due triangoli simili

### Attività 2

In fig. 2 sono rappresentati due triangoli simili ABC e A'B'C'; dal vertice B si è tracciata l'altezza BH nel triangolo ABC e, nel triangolo A'B'C', si è tracciata l'altezza B'H'.

Osservando la figura, completare le seguenti frasi:

- Dato che i due triangoli ABC, A'B'C' sono ....., risulta:

$$\hat{A} = \dots\dots\dots \dots\dots = \hat{C}' \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

- Anche i due triangoli ABH e A'B'H' sono ..... per il ..... criterio di similitudine, perché hanno:

$$\hat{A} = \dots\dots\dots \text{ perché } \dots\dots\dots$$

$$\hat{H} = \dots\dots\dots \text{ perché } \dots\dots\dots$$

- Dato che i due triangoli ABH e A'B'H' sono simili, avranno i ..... in proporzione; perciò risulta:

$$\frac{B'H'}{BH} = \frac{A'B'}{AB} = 3$$

- In fig. 2, il triangolo A'B'C' ha i lati tripli di quelli del triangolo ABC; perciò anche l'altezza B'H' è ..... dell'altezza BH.

## Le aree di triangoli simili

### Attività 3

Esaminare i triangoli ABC e A'B'C' di fig. 2 e indicare:

- con  $b$  la lunghezza di AC e con  $b'$  la lunghezza di A'C';
- con  $h$  la lunghezza di BH e con  $h'$  la lunghezza di B'H'.

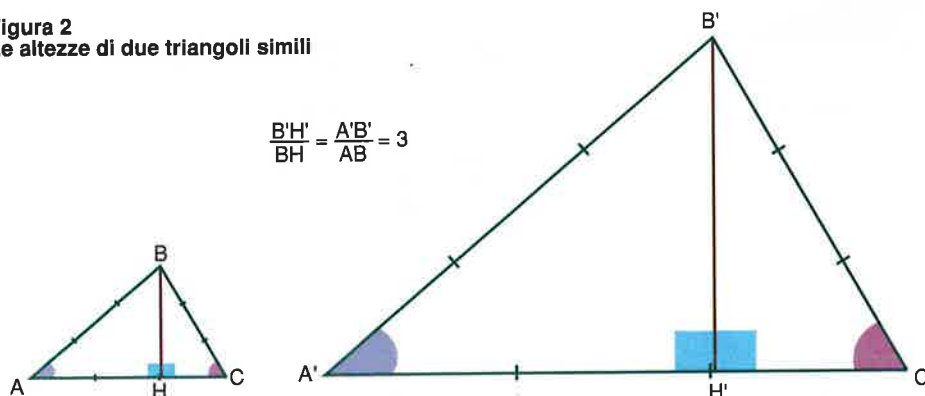
Completare le seguenti frasi:

- l'area  $S$  di ABC è  $S = \frac{1}{2} bh$ ;
- l'area  $S'$  di A'B'C' è  $S' = \dots\dots\dots$ ;
- risulta  $b' = 3b$  e  $h = \dots\dots\dots$

Si ha dunque:

$$S' = \frac{1}{2} 3b \cdot 3h \quad \text{cioè } S' = \dots\dots\dots$$

**Figura 2**  
Le altezze di due triangoli simili



In definitiva si ha:

$$S' = 3^2 S$$

Generalizzare il risultato ottenuto al caso di due triangoli simili ABC e A'B'C', in cui A'B'C' ha i lati che sono  $r$  volte quelli di ABC.

Si troverà che risulta:

$$S' = r^2 S \quad \text{ossia} \quad \frac{S'}{S} = r^2$$

#### Attività 4

In fig. 3 sono disegnati due triangoli simili ABC e A'B'C'; A'B'C' ha i lati tripli di ABC. Il lato A'B' è stato diviso in tre parti uguali e dai punti di divisione sono state condotte le parallele ai lati B'C' e A'C'; analogamente EL e GM sono parallele ad A'B'.

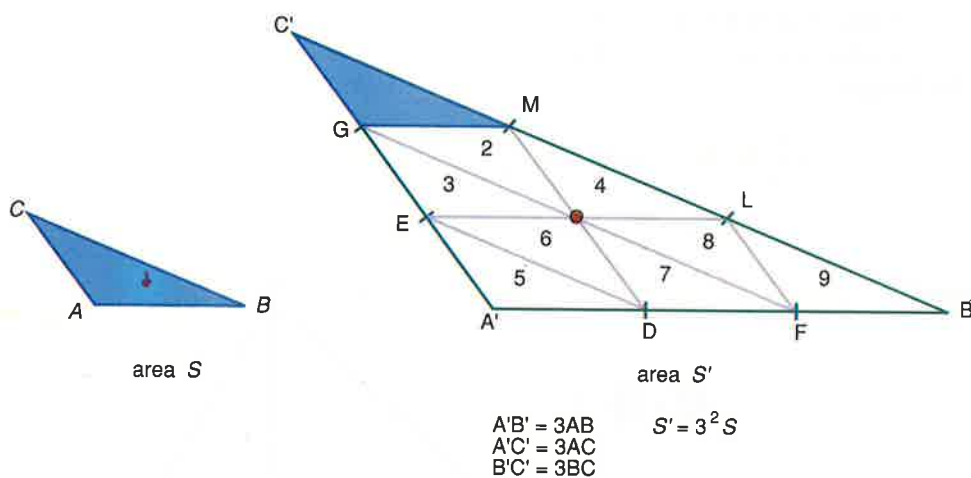
- Esaminare la figura e spiegare perché in questo modo il triangolo A'B'C' è stato diviso in 9 parti tutte uguali ad ABC.
- Ripetere una costruzione analoga a partire da un altro triangolo A''B''C'', simile ad ABC, ma con i lati quadrupli; contare quanti triangoli uguali ad ABC sono contenuti in A''B''C''.

#### Segmenti e aree nei triangoli simili

Il lavoro svolto conduce a due conclusioni di carattere generale:

1. in due triangoli simili tutte le coppie di segmenti corrispondenti hanno lo stesso rapporto  $r$ , chiamato anche rapporto di similitudine;
2. il rapporto delle aree di due triangoli simili è  $r^2$ , cioè è il quadrato del rapporto di similitudine.

**Figura 3**  
Le aree di due triangoli simili



## La similitudine nella natura

### L'uomo non cresce mantenendo la stessa forma

L'essere umano non cresce mantenendo la stessa forma: il neonato non è simile all'uomo adulto. Questa esperienza comune viene precisata dalla fig. 1, in cui è riprodotto il corpo di un uomo a varie età, a 2, 12 e 25 anni.

Si vede subito che la forma cambia durante la crescita; per esempio, la lunghezza della testa è circa  $\frac{1}{4}$  di tutto il corpo nel bambino piccolo, ma questa

proporzione cambia notevolmente nell'uomo adulto, diventando circa  $\frac{1}{8}$ .

La crescita non avviene dunque per similitudine e questo vuol dire che il numero delle cellule non aumenta in modo uniforme nelle varie parti del corpo.

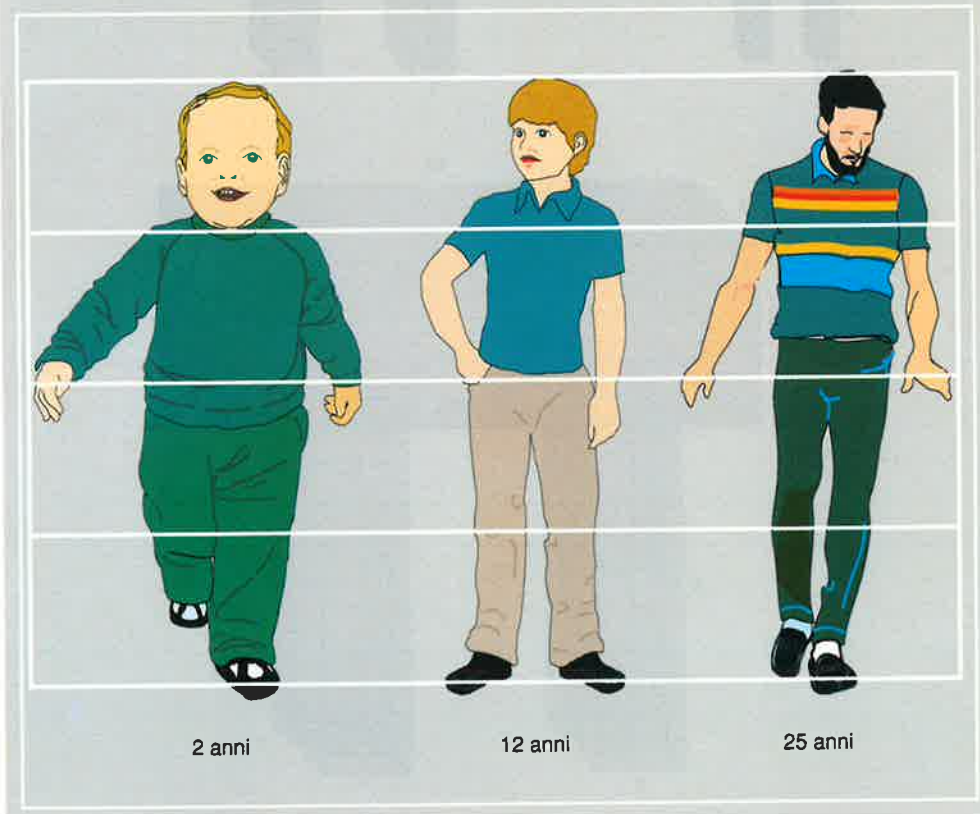


Figura 1  
Come cambia la  
forma dell'uomo  
durante la crescita

### Molti animali non crescono mantenendo la stessa forma

Analogamente, non accade che un cane, un gatto o un cavallo crescano per similitudine. Perché questa mancanza di similitudine, che sembrerebbe il più armonioso dei modi di crescere?

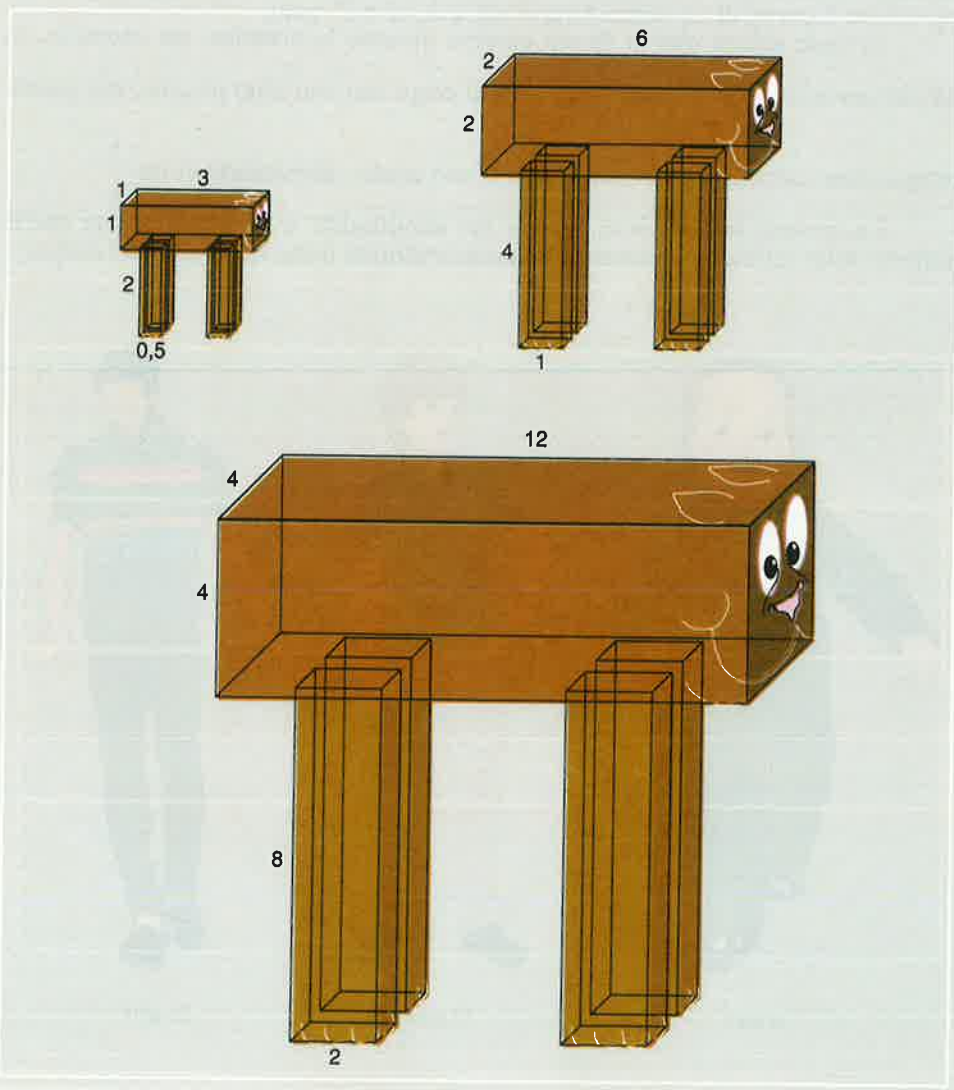
Per capire le «scelte» della natura, si può provare a costruire un modello di un animale a varie età, supponendo che la crescita avvenga per similitudine. In fig. 2 si trovano questi modelli: il corpo e le quattro zampe sono schematizzati con parallelepipedi vuoti a base quadrata; si ha che:

1. nell'animale neonato il corpo ha dimensioni 1, 1 e 3 e le quattro zampe tutte uguali hanno dimensioni 0,5, 0,5 e 2;
2. nell'animale giovane tutte le dimensioni sono raddoppiate;
3. nell'animale adulto le dimensioni sono di nuovo tutte raddoppiate, diventando quindi quadruple rispetto a quelle del neonato.

Riempiendo di sabbia i tre «animali» si osserva che:

- l'animale neonato è ben stabile;
- l'animale giovane sembra già piuttosto malfermo sulle zampe;
- l'animale adulto crolla a terra, perché le zampe non riescono a reggere il peso del corpo.

**Figura 2**  
Un modello per capire  
perché molti animali  
non crescono  
mantenendo  
la stessa forma





Per capire meglio questo fenomeno basta calcolare, in ogni caso, il volume  $V$  del parallelepipedo-corpo e la superficie  $A$  del quadrato-base della zampa; ecco che cosa si ottiene:

$$\begin{array}{ll} 1. V_1 = 1^2 \cdot 3 = 3 & A_1 = 0,5^2 = 0,25 \\ 2. V_2 = 2^2 \cdot 6 = 24 & A_2 = 1^2 = 1 \\ 3. V_3 = 4^2 \cdot 12 = 192 & A_3 = 2^2 = 4 \end{array}$$

Si può dunque pensare che, una volta riempito di sabbia, il peso del corpo si distribuirà sulle quattro zampe, secondo i seguenti rapporti:

$$\frac{V_1}{4 \cdot A_1} = \frac{3}{1} = 3 \quad \frac{V_2}{4 \cdot A_2} = \frac{24}{4} = 6 \quad \frac{V_3}{4 \cdot A_3} = \frac{192}{16} = 12$$

Si vede così che i rapporti non sono sempre costanti e questo vuol dire che un peso via via più grande premerà sulle zampe, che non aumentano abbastanza per poterlo sostenere.

Sulla crescita negli animali c'è una bella pagina di Galileo Galilei nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (1638); Galileo dice fra l'altro: «La natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, né un gigante dieci volte più alto di un uomo se non miracolosamente o con l'alterare assai le proporzioni delle membra e in particolare delle ossa, ingrossandole molto sopra la simmetria delle ossa comuni».

La natura dunque – dice Galileo – non potrebbe produrre animali molto grandi, se tutte le loro membra aumentassero in proporzione: l'animale non riuscirebbe a sostenersi sulle zampe.

È per questo che il più grande animale vivente, la balena, vive nell'acqua; è per questo, si dice, che il più grande dei dinosauri poteva vivere solo immerso parzialmente nell'acqua, che sosteneva parte del suo peso.

### Le foglie di una pianta crescono mantenendo la stessa forma

Nelle piante, invece, si può trovare la crescita per similitudine; l'esempio più comune si trova rappresentato in fig. 3: sono cinque foglie di rosa prese dallo stesso ramo, cioè sottoposte alle stesse condizioni ambientali. Ci sono foglie piccole, cioè molto giovani, e foglie più grandi, cioè più anziane.

In queste foglie si osserva una notevole analogia nella forma; per precisare queste osservazioni, per ogni foglia si è misurata la lunghezza massima  $y$  e la larghezza massima  $x$  e si è calcolato il rapporto delle dimensioni corrispondenti; ecco alcuni risultati ottenuti:

$$\begin{array}{l} 1^a \text{ foglia: } x_1 = 2,1 \text{ e } y_1 = 2,8 \\ 2^a \text{ foglia: } x_2 = 2,6 \text{ e } y_2 = 3,5 \\ 3^a \text{ foglia: } x_3 = 3,2 \text{ e } y_3 = 4,0 \\ 4^a \text{ foglia: } x_4 = 3,8 \text{ e } y_4 = 4,8 \\ 5^a \text{ foglia: } x_5 = 4,2 \text{ e } y_5 = 5,5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_2}{x_1} \cong 1,2 \quad \frac{y_2}{y_1} \cong 1,2 \\ \frac{x_3}{x_1} \cong 1,5 \quad \frac{y_3}{y_1} \cong 1,4 \\ \frac{x_4}{x_1} \cong 1,7 \quad \frac{y_4}{y_1} \cong 1,7 \\ \frac{x_5}{x_1} \cong 2,0 \quad \frac{y_5}{y_1} \cong 2,0 \end{array} \right.$$

Anche per le altre misure, si trova che le dimensioni lineari della foglia aumentano, ma mantenendo sempre lo stesso rapporto (vengono moltiplicate per uno stesso numero entrambe).

Dunque, la foglia di rosa e di molte altre piante cresce per similitudine; dal punto di vista biologico questo vuol dire che il numero delle cellule aumenta uniformemente in tutte le direzioni.

**Figura 3**  
Foglie di una rosa che crescono mantenendo la stessa forma



# Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Per i triangoli – si è detto nel paragrafo 3 – si trova una situazione particolare: un criterio di similitudine assicura che due triangoli con gli angoli uguali sono simili; questo vuol dire che bastano gli angoli a determinare la forma di un triangolo.

Ci deve allora essere una relazione fra i lati e gli angoli di un triangolo, relazione che «obbliga» un triangolo ad assumere una data forma, quando ne siano fissati gli angoli.

## I triangoli rettangoli metà di un triangolo equilatero

Ecco come si può trovare questa relazione a partire dai triangoli rappresentati in fig. 1a, che sono tutti rettangoli e simili fra loro, perché hanno l'angolo  $\hat{B}$  ampio  $30^\circ$  e, quindi, l'altro angolo acuto ampio  $60^\circ$ .

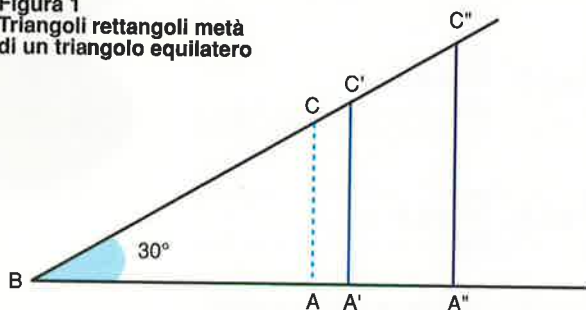
Si può osservare che ogni triangolo è metà di un triangolo equilatero, e per questo si può sempre calcolare la lunghezza dei cateti non appena si conosce la lunghezza dell'ipotenusa. Per esempio, il triangolo ABC (fig. 1b), che ha l'ipotenusa BC lunga 2, ha il cateto AC che è la metà di BC e perciò è lungo 1, mentre il cateto AB si può ricavare applicando il teorema di Pitagora (vedi p. 2); si trova dunque che il triangolo ha i seguenti lati:

$$AB = \sqrt{3} \quad AC = 1 \quad BC = 2$$

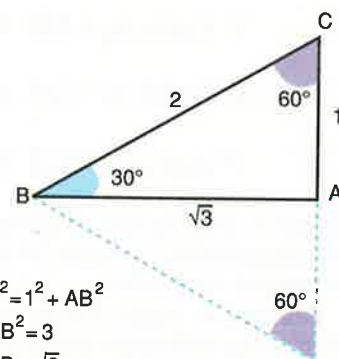
Confrontando i lati AC e A'C', BC e BC' dei triangoli simili ABC e A'BC', si troverà allora (fig. 1a):

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad \text{cioè} \quad \frac{A'C'}{1} = \frac{BC'}{2}$$

Figura 1  
Triangoli rettangoli metà di un triangolo equilatero



1a



$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + AB^2 \\ AB^2 &= 3 \\ AB &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

1b

da cui si ha:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{1}{2}$$

Analogamente, considerando le altre coppie di lati omologhi, si trova:

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{A'C'}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il procedimento si può ripetere per gli altri triangoli simili A"BC" e così via; si troveranno per tutti questi triangoli rettangoli che sono «metà di un triangolo equilatero» i seguenti risultati:

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### Seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°

Si sono così individuati dei rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo, rapporti che rimangono costanti una volta fissato un angolo acuto del triangolo. Questi rapporti non dipendono dalla lunghezza dei lati, ma solo dall'ampiezza dell'angolo acuto; per questo ai tre rapporti è stato dato un nome particolare, che li collega direttamente all'angolo: seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°. Si scrive (fig. 2):

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \text{sen } 30^\circ$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \text{cos } 30^\circ$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ} = \text{tg } 30^\circ$$

Si ha dunque:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I simboli ora introdotti si leggono così:

- *sen 30°* si legge «seno dell'angolo di 30°» o «seno di 30°»;
- *cos 30°* si legge «coseno dell'angolo di 30°» o «coseno di 30°»;
- *tg 30°* si legge «tangente dell'angolo di 30°» o «tangente di 30°».

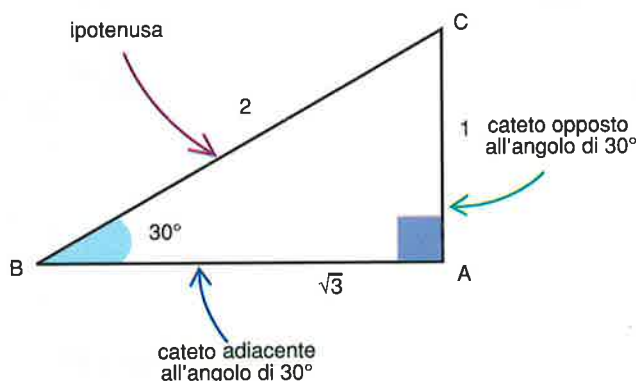
### Relazioni fra lati ed angoli dei triangoli metà di un triangolo equilatero

Per tutti i triangoli che sono «metà di un triangolo equilatero» si scriverà quindi (fig. 2):

$$\frac{AC}{BC} = \text{sen } 30^\circ \quad \frac{AB}{BC} = \text{cos } 30^\circ \quad \frac{AC}{AB} = \text{tg } 30^\circ \quad (1)$$

Si sono così trovate delle relazioni che legano lati ed angoli di un triangolo rettangolo; sono relazioni non immediate a scoprirsi e che richiedono di usare questi simboli: *sen 30°*, *cos 30°*, *tg 30°*.

Figura 2  
Seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°



$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} = \text{sen } 30^\circ$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{cos } 30^\circ$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg } 30^\circ$$



A questo proposito è importante un'osservazione: nel calcolo letterale un'espressione come

$abc30$

indica abitualmente un monomio, risultato della moltiplicazione del monomio  $abc$  per il numero 30. Invece l'espressione  $\text{sen } 30^\circ$  non indica un prodotto.

Si tratta piuttosto di una sigla, destinata a ricordare in modo conciso il procedimento per determinare il seno di un angolo.

Invece di fissare l'attenzione sull'angolo di  $30^\circ$  si può ovviamente considerare l'altro angolo acuto complementare, ampio  $60^\circ$ . In tal caso si scrive (fig. 3):

$$\frac{AB}{BC} = \text{sen } 60^\circ \quad \frac{AC}{BC} = \cos 60^\circ \quad \frac{AB}{AC} = \text{tg } 60^\circ \quad (2)$$

Si ha dunque:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

### L'origine storica dei nomi seno, coseno, tangente

Il nome «seno di un angolo» ha un'origine curiosa, perché è legato a un errore di traduzione: in un'antica opera indiana, scritta in sanscrito intorno al 400 d.C., si collegava il segmento AH, metà corda di un cerchio, con la metà dell'angolo al centro sotteso dalla corda (fig. 4).

Il nome dato alla lunghezza di AH era una

parola che significava appunto «corda»; ma in sanscrito non si scrivono le vocali e perciò, quando l'opera fu tradotta prima in arabo e poi in latino, nella parola vennero inserite vocali diverse da quelle originali e con queste nuove vocali si formò la parola *sinus*, che in latino significa «baia, insenatura». E così è rimasto in matematica il termine «seno di un angolo». Il nome «coseno» invece è l'abbreviazione di «seno dell'angolo complementare» e deriva dal confronto delle relazioni (1) e (2); si trova infatti:

$$\frac{AB}{BC} = \cos 30^\circ \quad \text{e} \quad \frac{AB}{BC} = \text{sen } 60^\circ$$

Cioè:

coseno di  $30^\circ$  = seno del complementare di  $30^\circ$

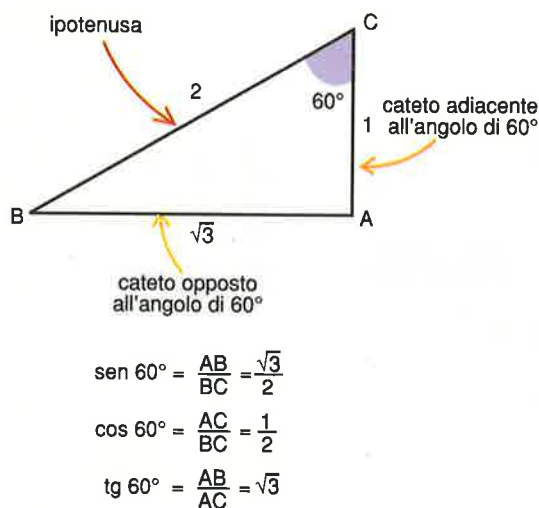
Infine, più semplice è l'origine del termine «tangente di un angolo»: gli arabi avevano l'abitudine di ottenere la tangente di un angolo a partire dalla retta tangente ad un cerchio di raggio unitario (fig. 5).

### Relazioni fra lati ed angoli di un qualunque triangolo rettangolo

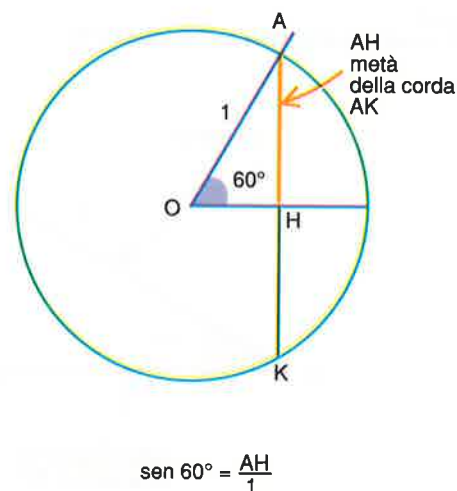
Il procedimento seguito finora sembra valido solo per i triangoli rettangoli che sono metà di un triangolo equilatero; e per gli altri triangoli rettangoli che cosa si può dire?

Fissare gli angoli significa sempre fissare la forma del triangolo, ma in generale non si riesce a calcolare la lunghezza dei lati con procedimenti geometrici; si potranno però ricavare

**Figura 3**  
Seno, coseno e tangente dell'angolo di  $60^\circ$



**Figura 4**  
L'origine del termine «seno di un angolo»



queste informazioni misurando direttamente gli elementi del triangolo. Così, per esempio, nel triangolo di fig. 6 si trova:

$\hat{B} = 70^\circ$   $BC = 5$   $AB = 1,71$   $AC = 4,70$   
Si può quindi scrivere:

$$\frac{AC}{BC} = \sin 70^\circ \quad \frac{AB}{BC} = \cos 70^\circ \quad \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 70^\circ$$

e risulta:

$$\sin 70^\circ = \frac{4,70}{5} = 0,94$$

$$\cos 70^\circ = \frac{1,71}{5} = 0,34$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{4,70}{1,71} = 2,75$$

Quest'ultimo è un procedimento di carattere generale; dato un triangolo rettangolo ABC con:

$\hat{B} = \beta$   $AC = b$   $AB = c$   $BC = a$   
si scrive:

$$\frac{AC}{BC} = \sin \beta \quad \frac{AB}{BC} = \cos \beta \quad \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} \beta$$

e risulta:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \beta = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Disegnare un triangolo rettangolo con un angolo di  $30^\circ$  e scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.
- ② Disegnare un triangolo rettangolo che ha  $\hat{B} = \beta$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.

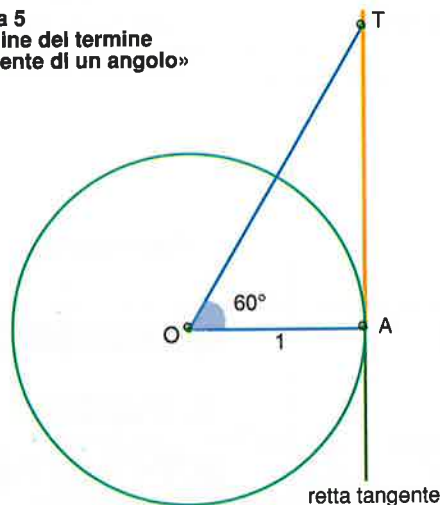
### Comprensione

- ① Disegnare un triangolo rettangolo che ha  $\hat{C} = \gamma$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.

### Applicazioni

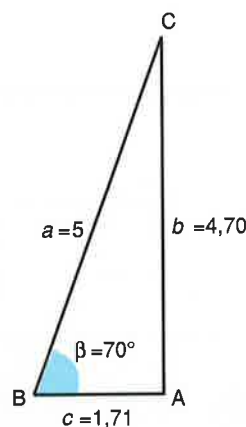
- ① Disegnare un triangolo rettangolo isoscele; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo e calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo di  $45^\circ$ .
- ② Riprendere il triangolo di fig. 6 e scrivere le relazioni che legano i lati del triangolo al seno, coseno e tangente dell'angolo di  $20^\circ$ ; calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo di  $20^\circ$ .

**Figura 5**  
L'origine del termine  
«tangente di un angolo»



$$\operatorname{tg} 60^\circ = AT$$

**Figura 6**  
Seno, coseno e tangente  
di un angolo



$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{b}{a} \\ \cos \beta &= \frac{c}{a} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{b}{c} \end{aligned}$$



# Le funzioni trigonometriche

## Come si calcolano seno, coseno e tangente di un angolo

Nel paragrafo precedente si è determinato il valore di seno, coseno e tangente dell'angolo di  $70^\circ$ , calcolando i rapporti fra le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo.

È chiaro che un'analogia costruzione permette di determinare seno, coseno e tangente di qualunque altro angolo acuto. Ma è certo inutile ripetere tante volte questo metodo costruttivo che richiede tempo e precisione; si può farlo una volta per tutte scrivendo i risultati ottenuti in una tabella.

Oggi tabelle di questo tipo sono inserite in tutti i calcolatori tascabili per uso scientifico, che sono molto facili da usare, purché si tenga presente qualche semplice avvertenza, in particolare le due seguenti.

1. I calcolatori hanno la possibilità di esprimere la misura degli angoli con unità differenti, fra le quali si trovano:

- il *grado sessagesimale*, usato in questo testo e indicato con DEG, abbreviazione del termine inglese *degree*; in questo modo l'angolo giro misura  $360^\circ$  e l'angolo retto  $90^\circ$ ;
- il *grado centesimale*, indicato con GRAD, abbreviazione del termine inglese *grade*; con questa unità di misura l'angolo giro misura  $400^\circ$  e l'angolo retto  $100^\circ$ .

2. I tasti per calcolare seno, coseno e tangente di un angolo sono contrassegnati dai simboli seguenti:

sen o sin      cos      tg o tan

Comunque, per usare correttamente il calcolatore è sempre opportuno leggere le relative istruzioni per l'uso. Dopo aver accertato che il calcolatore sia predisposto a misurare i gradi sessagesimali, si può calcolare seno, coseno e tangente di un angolo valendosi delle indicazioni della tabella A.

**Tabella A**

Il calcolo di seno, coseno e tangente col calcolatore tascabile

Valore richiesto	Sequenza dei tasti	Visualizzatore
sen $70^\circ$	7 0 sen	0.9396926
cos $70^\circ$	7 0 cos	0.3420201
tg $70^\circ$	7 0 tan	2.7474774
tg $60^\circ$	6 0 tan	1.7320508

## Seno, coseno e tangente di un angolo sono generalmente numeri irrazionali

Conviene fissare l'attenzione sull'ultimo risultato della tabella A. Nel paragrafo precedente si era trovato che risultava:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Si sa che  $\sqrt{3}$  è un numero irrazionale, di cui il calcolatore fornisce solo un valore approssimato, in genere con 7 cifre dopo la virgola; si scriverà quindi:

$$\operatorname{tg} 60^\circ \approx 1,7320508$$

Di questo si deve tener conto quando si risolvono i problemi, dato che la precisione richiesta dipende proprio dal tipo di questione esaminata. Per esempio, il seno dell'angolo di rientro nell'atmosfera di una capsula spaziale deve essere calcolato con almeno 8 cifre decimali, se non si vuole rischiare di distruggere il veicolo.

Le considerazioni svolte conducono ad una conclusione di carattere generale: *seno, coseno e tangente di un angolo sono rapporti fra segmenti generalmente incommensurabili e quindi sono generalmente dei numeri irrazionali.*

Si è detto *generalmente*, perché in alcuni casi si trovano dei risultati razionali; si ha per esempio:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

## Come varia il seno di un angolo al variare dell'angolo

Usando il calcolatore tascabile è facile compilare una tabella come quella presentata in fig. 1,

dove si trova il valore del seno di alcuni angoli fornito dal calcolatore, ma arrotondato in modo da avere solo quattro cifre decimali.

Nella stessa figura la tabella è visualizzata dai triangoli rettangoli con l'ipotenusa BC lunga 1 e con l'angolo  $\beta$  crescente; in questo modo il valore di  $\operatorname{sen} \beta$  è visualizzato dalla lunghezza del cateto AC opposto all'angolo, dato che risulta:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{AC}{BC}$$

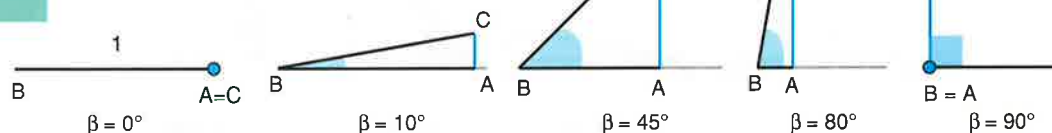
La figura e la tabella mettono in evidenza due fatti:

1. l'angolo  $\beta$  deve essere acuto, cioè variare fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ;
2. il corrispondente valore di  $\operatorname{sen} \beta$  aumenta da 0 a 1 mentre l'angolo cresce da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , e, in particolare:
  - il valore minimo è  $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$ ;
  - il valore massimo è  $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ .

Per capire meglio la situazione la tabella può essere arricchita, usando il calcolatore tascabile, come è indicato nello schema seguente:

Angolo $\beta$	Tasto	$\operatorname{sen} \beta$
$2^\circ$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">sin</div>	0,035
$15^\circ$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">sin</div>	0,259
$78^\circ$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">sin</div>	0,978

$\beta$	$\operatorname{sen} \beta$
$0^\circ$	0
$10^\circ$	0,1736
$30^\circ$	0,5
$45^\circ$	0,7071
$60^\circ$	0,8660
$80^\circ$	0,9848
$90^\circ$	1



**Figura 1**  
Come varia il seno di un angolo al variare dell'angolo

Si è così individuato un procedimento che permette di associare a un angolo  $\beta$  un valore del seno di quell'angolo.  
La corrispondenza:

$$\beta \xrightarrow{\sin} \sin \beta$$

è una *funzione*, cioè una legge che fa corrispondere ad ogni valore di  $\beta$ , compreso fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , un solo numero reale compreso fra 0 e 1, numero che prende il nome di  $\sin \beta$ .

### Come varia il coseno di un angolo al variare dell'angolo

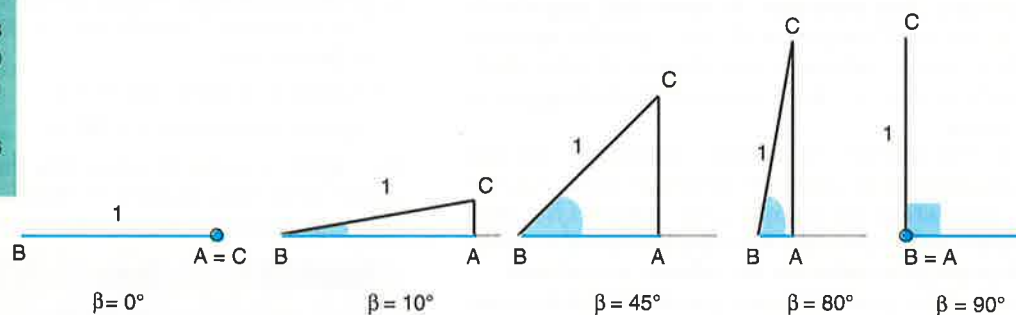
Considerazioni analoghe possono essere ripetute a partire dalla fig. 2, dove si è riportato (nella tabella) qualche angolo  $\beta$  ed il corrispondente valore di  $\cos \beta$ , visualizzato dalla lunghezza del cateto adiacente all'angolo  $\beta$  in un triangolo rettangolo con l'ipotenusa unitaria.

Anche in questo caso si trova che:

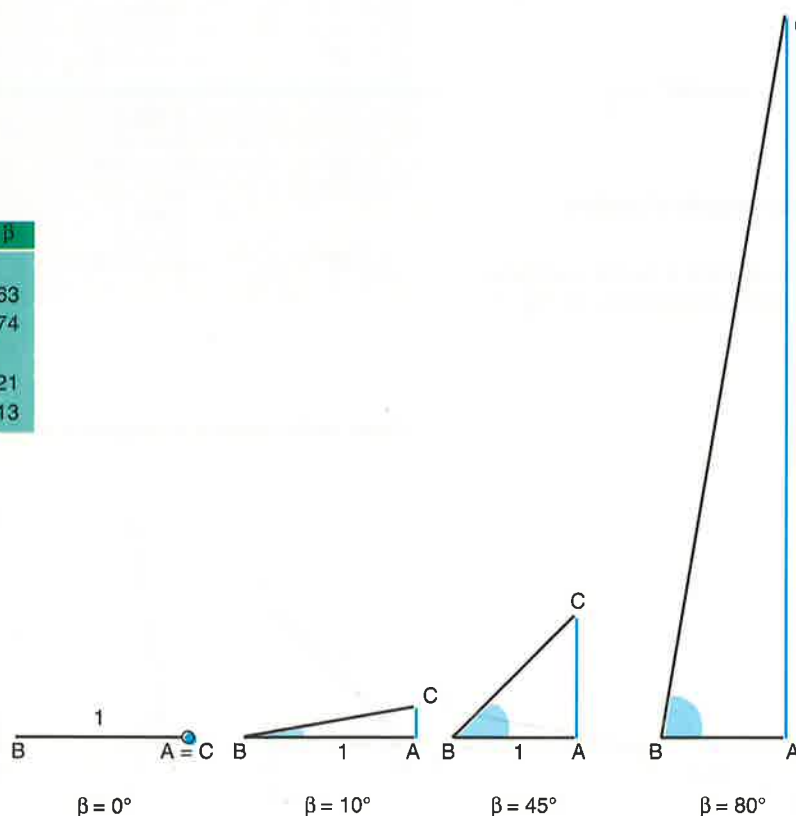
1. l'angolo  $\beta$  deve essere acuto, cioè variare fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ;

ma ora il precedente punto 2 deve essere così riformulato:

$\beta$	$\cos \beta$
$0^\circ$	1
$10^\circ$	0,9848
$30^\circ$	0,8660
$45^\circ$	0,7071
$60^\circ$	0,5
$80^\circ$	0,1736
$90^\circ$	0



$\beta$	$\tan \beta$
$0^\circ$	0
$10^\circ$	0,1763
$30^\circ$	0,5774
$45^\circ$	1
$60^\circ$	1,7321
$80^\circ$	5,6713



2. il corrispondente valore di  $\cos \beta$  diminuisce da 1 a 0 mentre l'angolo cresce da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , e in particolare:

- il valore massimo è  $\cos 0^\circ = 1$ ;
- il valore minimo è  $\cos 90^\circ = 0$ .

### Come varia la tangente di un angolo al variare dell'angolo

Infine, la fig. 3 è dedicata alla tangente di un angolo  $\beta$ , visualizzata costruendo dei triangoli rettangoli con il cateto AB unitario; così si ha che:

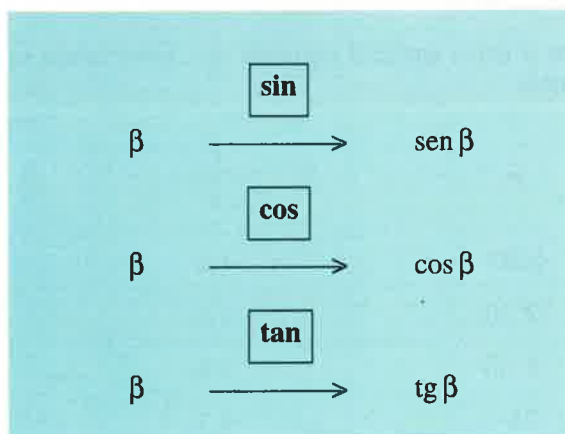
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{AB}$$

viene visualizzata dalla lunghezza del cateto AC, mentre nella tabella sono riportati alcuni valori di  $\operatorname{tg} \beta$  al variare dell'angolo  $\beta$ . Ora si trova ancora una volta che:

1. l'angolo  $\beta$  deve essere acuto, cioè varia fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ;  
però si ha che:
2. mentre l'angolo cresce da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , il corrispondente valore di  $\operatorname{tg} \beta$  aumenta a partire dal valore minimo  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ , ma non si trova un valore massimo;  $\operatorname{tg} \beta$  può diventare grande quanto si vuole, perché il cateto opposto all'angolo può diventare anche molto più grande del cateto adiacente.

### Le funzioni trigonometriche

Le tre funzioni ora esaminate, e cioè:



prendono il nome di *funzioni trigonometriche*, per ricordare che la legge di corrispondenza è costruita basandosi su misure relative a triangoli (dal greco *trigonon* = «triangolo», *metron* = «misura»).

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Che cosa si intende con il termine «funzioni trigonometriche»?
- ② Come si calcolano il seno, il coseno e la tangente di un angolo?

### Comprensione

- ① Spiegare perché il seno ed il coseno di un angolo non possono superare 1, mentre la tangente può diventare grande quanto si vuole.
- ② Disegnare l'angolo  $\alpha$  il cui seno vale  $\frac{1}{3}$ .
- ③ Disegnare l'angolo  $\beta$  il cui coseno vale  $\frac{1}{3}$ .
- ④ Disegnare l'angolo  $\gamma$  la cui tangente vale 3.

### Applicazioni

- ① Completare la seguente tabella valendosi di un calcolatore tascabile.

Angolo $\beta$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta$
$15^\circ$			
$30^\circ$			
$45^\circ$			
$60^\circ$			
$75^\circ$			

### Collegamento col paragrafo precedente

- ① Nella tabella precedente indicare quali sono i valori esatti di seno, coseno e tangente degli angoli di  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .



## La rifrazione della luce

### La rifrazione della luce

Il fenomeno fisico della rifrazione avviene quando la luce passa da un mezzo trasparente ad un altro di diversa densità: per esempio, quando la luce passa dall'aria all'acqua o dall'aria al vetro; in tal caso la luce, passando da un mezzo all'altro, cambia direzione.

In fig. 1 è rappresentato l'apparecchio che si può usare per studiare questo fenomeno: un sottile raggio di luce si propaga nell'aria sfiorando un cerchio graduato; quindi attraversa una spessa lastra di vetro e cambia direzione.

### Lo studio della rifrazione

Per descrivere il fenomeno si traccia la perpendicolare  $p$  alla superficie di separazione  $s$  dei due mezzi e si misura l'angolo di incidenza  $\hat{i}$  e l'angolo di rifrazione  $\hat{r}$  (fig. 2).

L'esperienza mostra subito che i due angoli non sono ovviamente uguali, ma all'aumentare di  $\hat{i}$  aumenta pure  $\hat{r}$ ; perciò si pensa subito che i due angoli siano direttamente proporzionali.

Così pensarono gli scienziati medievali e così pensò anche il grande Keplero, fermando la sua attenzione su piccoli valori di  $\hat{i}$ .

Invece, misurando  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$  in un adeguato numero di casi si trovano i risultati esposti nella tabella seguente, dove si trova anche il rapporto  $\frac{\hat{i}}{\hat{r}}$ , arrotondato in modo da avere una sola cifra decimale.

$\hat{i}$	$\hat{r}$	$\frac{\hat{i}}{\hat{r}}$
10°	6°30'	1,5
20°	12°30'	1,6
30°	18°30'	1,6
40°	24°	1,7
50°	29°	1,7
60°	33°30'	1,8
70°	36°30'	1,9



La tabella mostra subito che  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$  non sono direttamente proporzionali, dato che il loro rapporto non si mantiene costante.

Ma allora quale relazione lega i due angoli  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$ ?

### La legge della rifrazione

Solo nel XVII secolo si è trovata la formulazione corretta della legge della rifrazione; sembra infatti che questa legge sia stata trovata per la prima volta nel 1621 dall'olandese Willebrod Snell, che però non pubblicò i suoi risultati. Fu successivamente formulata in modo strettamente empirico da Isaac Voss e, finalmente, fu pubblicata da Cartesio.

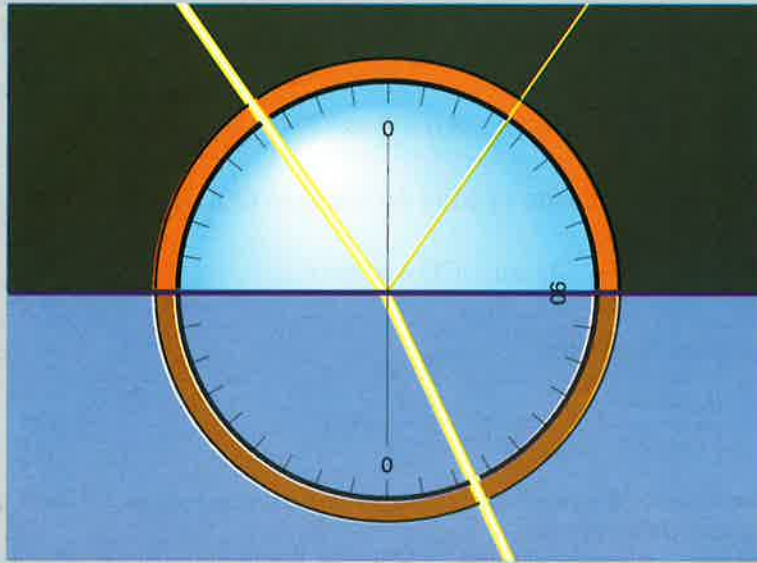


Figura 1  
Un esperimento per studiare la rifrazione della luce

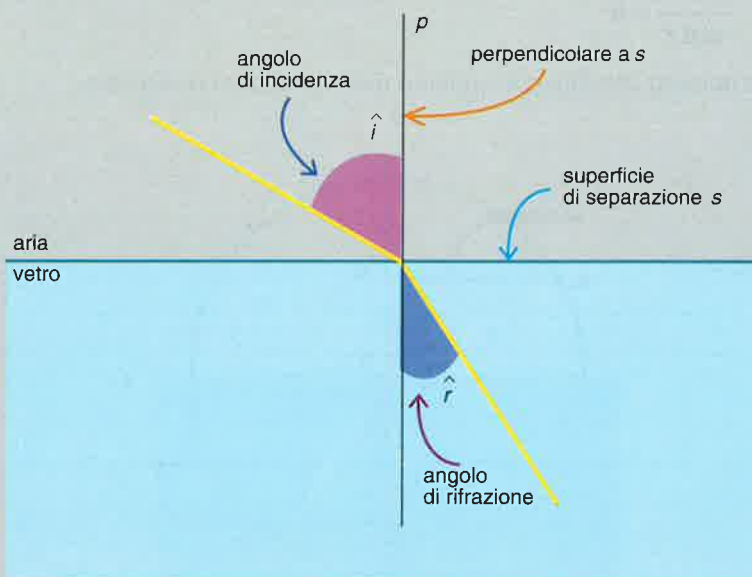


Figura 2  
Angolo di incidenza e angolo di rifrazione

È facile spiegare la legge di Snell aiutandosi con un cerchio graduato come quello di fig. 3: misurando le semicorde AB e CD, relative a diverse ampiezze di  $\hat{i}$  e di  $\hat{r}$ , si osserva che, nel passaggio della luce dall'aria al vetro, risulta sempre:

$$\frac{AB}{CD} = 1,5 \quad (1)$$

Si scopre così che sono le semicorde AB e CD a essere direttamente proporzionali.

Questa legge non è però del tutto soddisfacente, perché non lega gli angoli  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$  ma le relative semicorde. Bisogna valersi delle funzioni trigonometriche per arrivare ad una legge pienamente soddisfacente. Ecco come si può ragionare.

Indicato con  $b$  il raggio del cerchio, si osserva che nel triangolo rettangolo AOB la semicorda AB è il cateto opposto all'angolo  $\hat{i}$  e il raggio AO è l'ipotenusa; perciò risulta (fig. 3):

$$\text{sen } \hat{i} = \frac{AB}{b} \quad \text{da cui} \quad AB = b \cdot \text{sen } \hat{i}$$

Analoghe considerazioni, fatte a partire dal triangolo COD, conducono a scrivere:

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{CD}{b} \quad \text{da cui} \quad CD = b \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Così la relazione (1) diventa:

$$\frac{b \cdot \text{sen } \hat{i}}{b \cdot \text{sen } \hat{r}} = 1,5 \quad \text{ossia} \quad \frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = 1,5$$

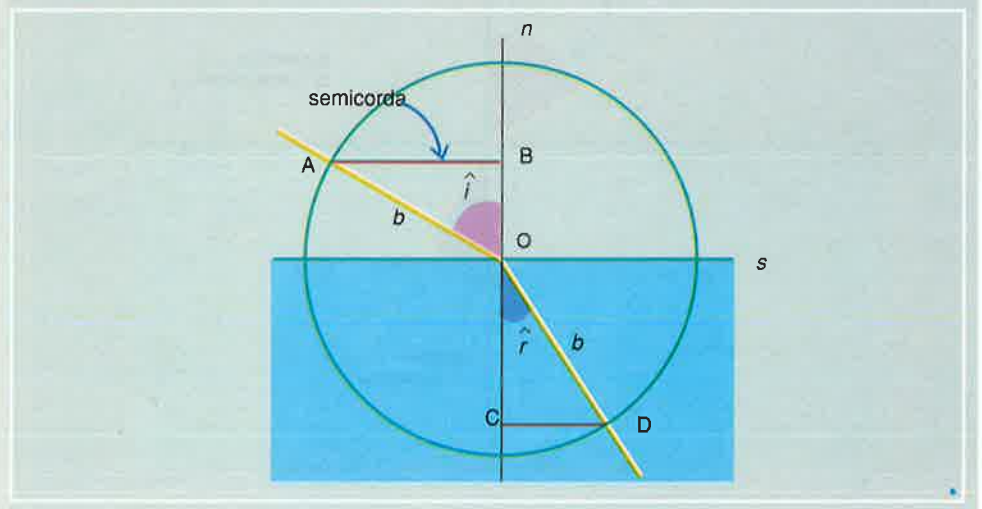
*Nel fenomeno della rifrazione sono dunque direttamente proporzionali non gli angoli, ma i seni degli angoli.*

Ripetendo l'esperimento con la luce che passa dall'aria ad altri mezzi di densità diversa si trova la seguente legge della rifrazione:

$$\frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = n$$

dove  $n$  è un numero che dipende appunto dalle sostanze considerate.

**Figura 3**  
La legge  
della rifrazione



## Come è nata la trigonometria

### La trigonometria nasce insieme all'astronomia

Nel paragrafo 5 si è parlato delle funzioni trigonometriche, che sono alla base della *trigonometria*, parola di origine greca che sta a indicare la «misura degli elementi di un triangolo». Dunque la trigonometria è il ramo della matematica che si occupa delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo.

Ma le origini della trigonometria si confondono con le origini dell'astronomia.

Non è certo strano che sia stata l'astronomia ad aver eccitato la fantasia degli uomini fin dai tempi più remoti e in tanti paesi diversi. Il sorgere del Sole, l'alternarsi dei giorni e delle notti, il succedersi sempre uguale delle fasi della Luna sono fenomeni che non potevano sfuggire neanche all'occhio meno attento.

Sulla volta celeste due sono gli astri che colpiscono maggiormente l'attenzione: il Sole e la Luna. Quanto distano dalla Terra? Quanto sono grandi? È con queste domande che ha inizio l'astronomia, ma anche la trigonometria.

L'astronomo greco Aristarco di Samo (III secolo d.C.) affronta il seguente problema (fig. 1):

«Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?»



Figura 1  
Il problema  
di Aristarco

Il problema così descritto sembra di difficile comprensione soprattutto perché al tempo di Aristarco non era usata la misura degli angoli in gradi sessagesimali. Questa suddivisione del cerchio in  $360^\circ$  sembra invece fosse nota all'astronomo greco Ipparco di Nicea (II secolo d.C.) che, probabilmente, aveva preso l'idea, come i babilonesi, dal ciclo delle stagioni di 360 giorni.

Questa suddivisione si trova poi nelle opere di Tolomeo d'Alessandria (II secolo d.C.) che, riprendendo l'uso babilonese, suddivise il grado in 60 *partes minutae primae* e ciascuna di queste in 60 *partes minutae secundae*.

Ed è da queste espressioni latine che i traduttori derivarono le espressioni «primo» e «secondo» ancora oggi in uso.

Traducendo dunque in linguaggio attuale il problema di Aristarco, si ha che:

- il quadrante è un angolo di  $90^\circ$ ;
- un trentesimo di quadrante è un angolo ampio  $\frac{90^\circ}{30} = 3^\circ$ ;
- l'angolo «inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante» è ampio un quadrante meno un trentesimo e cioè è di  $87^\circ$ .

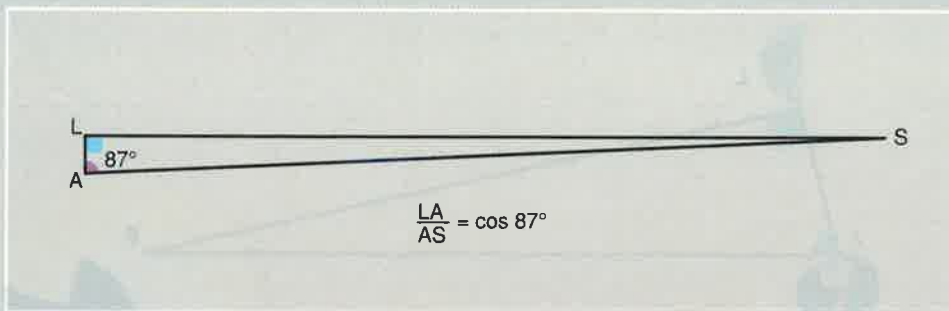
Perciò il problema può essere schematizzato con il triangolo rettangolo LAS (fig. 2), di cui si conosce l'angolo  $\hat{A} = 87^\circ$  e si vuole calcolare il rapporto  $\frac{LA}{AS}$ , rapporto che è legato all'angolo da una funzione trigonometrica; si ha infatti:

$$\frac{LA}{AS} = \cos 87^\circ$$

Ma le investigazioni di Aristarco non erano «nate dal nulla»; risentivano certamente di osservazioni e di studi condotti, lungo molti secoli, dagli egizi e dai babilonesi.

Rimane però ben poco delle ricerche trigonometriche di questi popoli e, del resto, nulla rimane direttamente delle opere di Aristarco e di Ipparco; è solo attraverso gli scritti dell'astronomo Tolomeo d'Alessandria (fig. 3) che si sa qualcosa delle ricerche dei due astronomi greci.

Figura 2  
La soluzione  
del problema  
di Aristarco



### La trigonometria si sviluppa nella cultura islamica

Dopo Tolomeo occorre fare un salto di secoli per giungere, con la rivoluzione islamica dell'VIII secolo, a nuove ricerche nel campo della trigonometria.

La cultura islamica riuscì ad assorbire la scienza greca, ormai in piena decadenza, e a svilupparne alcuni importanti settori. Il territorio dove si diffuse questa cultura era immenso: dall'India ai Pirenei, un territorio dunque ancor più vasto di quello che era stato l'impero romano.

È proprio in questo mondo musulmano, dove s'incrociavano correnti cul-



turali provenienti da paesi tanto diversi come la Grecia, la Siria, la Persia e l'India, che lo studio della trigonometria raggiunse un alto livello. E sono queste conoscenze che, attraverso la Spagna, mediante numerose traduzioni in arabo (fig. 4), arrivarono in Europa nell'XI secolo.

### La trigonometria arriva in Europa

Passarono altri secoli prima che l'Europa assorbisse compiutamente la cultura araba, fino a saper produrre dei lavori originali. Si deve al matematico tedesco Johann Müller, detto il Regiomontano (fig. 5), il primo libro dedicato esclusivamente alla trigonometria: è *De triangulis omnimodis*, scritto nel 1464; la trigonometria troverà poi il suo assetto definitivo con Eulero, nel XVIII secolo (fig. 6).

Ma già alla fine del Cinquecento lo sviluppo dell'algebra, e cioè la nascita del simbolo per sostituire un segno a una parola e una formula ad una frase, conduce i matematici ad unificare varie scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse. Furono così messe in rilievo le idee fondamentali che erano alla base della trigonometria e che vengono ancora oggi applicate per risolvere i problemi più vari.



Figura 3 (a sinistra)  
Il frontespizio di un'edizione cinquecentesca di un libro di Tolomeo d'Alessandria



Figura 4 (a destra)  
Una pagina di un trattato arabo del 1297



Figura 5 (a sinistra)  
Il frontespizio di un'opera del Regiomontano (1496)

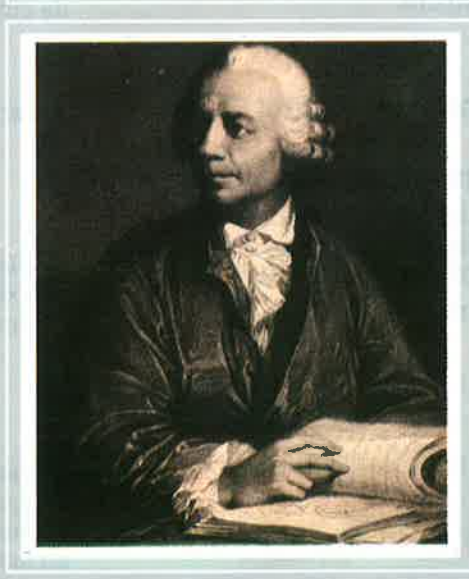


Figura 6 (a destra)  
Ritratto del matematico svizzero Leonardo Eulero



# Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

Nel paragrafo 4 si sono trovate delle relazioni che collegano lati ed angoli di un triangolo rettangolo; in particolare (fig. 1):

$$\frac{b}{a} = \sin \beta \quad \frac{c}{a} = \cos \beta$$

Ci si chiede ora: si può trovare una via per estendere queste relazioni anche ai triangoli acutangoli o ottusangoli?

Una prima idea che viene in mente è quella di dividere un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli, tracciando un'altezza; si potranno così applicare le relazioni note per trovarne altre più generali. Ma per seguire meglio il procedimento conviene separare i due casi che si possono presentare e cioè:

- A. triangolo acutangolo;
- B. triangolo ottusangolo.

## A. TRIANGOLO ACUTANGOLO

### Il teorema dei seni nel triangolo acutangolo

Si disegna un qualunque triangolo acutangolo ABC, si traccia l'altezza CH, lunga  $h$ , e si considerano i due triangoli rettangoli ottenuti (fig. 2a).

- Considerando il triangolo CHA, si ha:

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha \quad \text{da cui} \quad h = b \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

- Considerando il triangolo CHB, si ha:

$$\frac{h}{a} = \sin \beta \quad \text{da cui} \quad h = a \cdot \sin \beta \quad (2)$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene dunque:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

ossia:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad (3)$$

Questa relazione lega fra loro due lati e due angoli dello stesso triangolo; ma è facile ottenere una formula in cui intervengano anche il terzo lato e il terzo angolo: basta tracciare un'altra altezza.

Se, ad esempio, si conduce l'altezza AK, lunga  $k$ , si ottiene (fig. 2b):

$$k = b \cdot \sin \gamma \quad (\text{dal triangolo AKC})$$

$$k = c \cdot \sin \beta \quad (\text{dal triangolo AKB})$$

da cui:

$$b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$$

ossia:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \quad (4)$$

Confrontando infine le relazioni (3) e (4), si può scrivere che, *per qualunque triangolo acutangolo*, vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Questa relazione, detta *teorema dei seni*, si enuncia nel modo seguente: *in un qualunque triangolo acutangolo è costante il rapporto fra un lato ed il seno dell'angolo opposto.*

## Il teorema del coseno nel triangolo acutangolo

Il teorema del coseno si limita ad aggiungere il punto di vista della trigonometria ad un teorema già trovato come generalizzazione del teorema di Pitagora (vedi p. 18): in un triangolo acutangolo ABC (fig. 3a) risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bp \quad (5)$$

Basta ora osservare il triangolo rettangolo BHC (fig. 3b), per ricavare che deve essere:

$$\frac{p}{a} = \cos \gamma \quad \text{e quindi} \quad p = a \cdot \cos \gamma$$

Sostituendo l'ultima espressione ottenuta nella (5), si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

in cui compaiono l'angolo  $\gamma$ , che è opposto al lato  $c$ , ed i lati  $a, b$ , che comprendono l'angolo  $\gamma$ . È chiaro che si può ripetere il procedimento a partire da un'altra altezza del triangolo ABC; si scopre così che, per un qualunque triangolo acutangolo, valgono le tre relazioni seguenti:

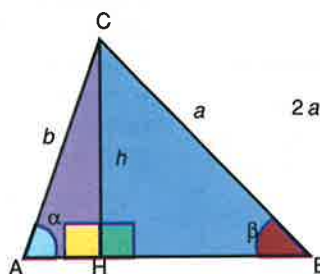
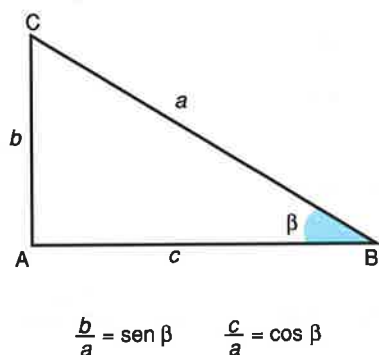
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

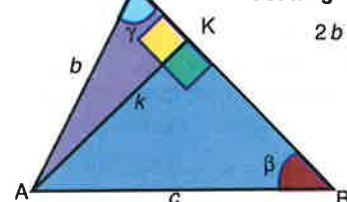
Queste tre relazioni costituiscono il *teorema del coseno*, che si enuncia nel modo seguente: *in un qualunque triangolo acutangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso*.

**Figura 1**  
Relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo



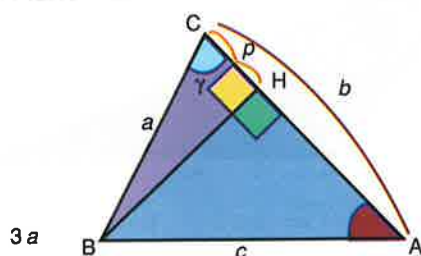
$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$

**Figura 2**  
Il teorema dei seni per un triangolo acutangolo

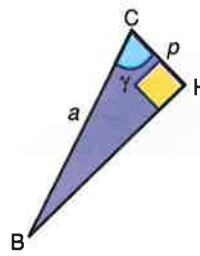


$$\frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bp$$



$$p = a \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

**Figura 3**  
Il teorema del coseno per un triangolo acutangolo

## B. TRIANGOLO OTTUSANGOLO

### Il teorema dei seni nel triangolo ottusangolo

Si disegna un qualunque triangolo ottusangolo ABC, che ha l'angolo di vertice A ottuso, si traccia l'altezza CH, lunga  $h$ , e si considerano i due triangoli rettangoli ottenuti (fig. 4a):

- CHB, in cui BC è l'ipotenusa e CH è il cateto opposto all'angolo  $\beta$ ;
- CHA, in cui AC è l'ipotenusa e CH è il cateto opposto all'angolo  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ .

Si potrà quindi ripetere lo stesso procedimento seguito per i triangoli acutangoli (vedi fig. 4b), arrivando a scrivere:

$$\frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{con } \alpha' = 180^\circ - \alpha$$

### Il teorema del coseno nel triangolo ottusangolo

Riprendendo la generalizzazione del teorema di Pitagora (vedi p. 19) nel caso del triangolo ottusangolo, si trova che, in un triangolo ABC con l'angolo  $\gamma$  ottuso (fig. 5a), risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma \quad (6)$$

Ora, nel triangolo rettangolo BHC (fig. 5b), l'ipotenusa è sempre BC, ma BH è il cateto opposto all'angolo  $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ ; si avrà quindi:

$$\frac{p}{a} = \cos \gamma' \quad \text{e quindi} \quad p = a \cdot \cos \gamma'$$

Sostituendo l'ultima espressione nella (5), si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma' \quad \text{con } \gamma' = 180^\circ - \gamma$$

Rimangono invece invariate le altre due relazioni, ottenute a partire da triangoli rettangoli che hanno come angolo acuto uno dei due angoli acuti del triangolo; si trovano quindi, per un triangolo ottusangolo qualunque, le relazioni seguenti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma' \quad \text{con } \gamma' = 180^\circ - \gamma$$

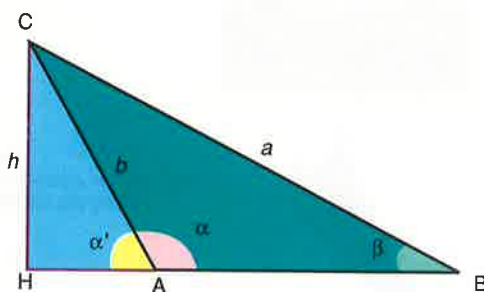
### Il teorema dei seni e il teorema del coseno valgono per tutti i triangoli

È importante osservare che i due teoremi dei seni e del coseno valgono anche per i triangoli rettangoli. Consideriamo, per esempio un triangolo ABC in cui è dato:

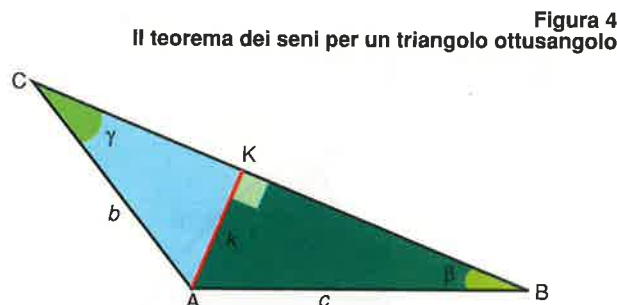
$$\alpha = 90^\circ \quad \text{e quindi} \quad \sin \alpha = 1 \quad \cos \alpha = 0$$

- Il teorema dei seni diventa:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



4 a



4 b

$$\frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Figura 4  
Il teorema dei seni per un triangolo ottusangolo

da cui si ricavano le note relazioni:

$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

- Il teorema del coseno fornisce, in questo caso particolare:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Si ritrova cioè il teorema di Pitagora.

Si conclude dunque che *il teorema dei seni e il teorema del coseno forniscono delle relazioni fra lati e angoli che sono valide per qualunque triangolo.*

Applicando questi due teoremi, in particolare, ad un triangolo rettangolo, si ha che:

- con il teorema dei seni si ritrovano le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo;
- con il teorema del coseno si ritrova il teorema di Pitagora.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Disegnare un triangolo acutangolo, indicare con opportune lettere le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli e scrivere le relazioni contenute nel teorema dei seni e nel teorema del coseno.

- ② Disegnare un triangolo ottusangolo, indicare con opportune lettere le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli e scrivere le relazioni contenute nel teorema dei seni e nel teorema del coseno.

### Comprensione

- ① Spiegare qual è la principale differenza fra il teorema dei seni per triangoli acutangoli e quello per triangoli ottusangoli.
- ② Spiegare qual è la principale differenza fra il teorema del coseno per triangoli acutangoli e quello per triangoli ottusangoli.
- ③ Spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema del coseno e il teorema dei seni a un triangolo rettangolo.

### Applicazioni

- ① Di un triangolo acutangolo ABC sono dati i seguenti elementi:

$$a = 10 \quad b = 20 \quad \gamma = 60^\circ$$

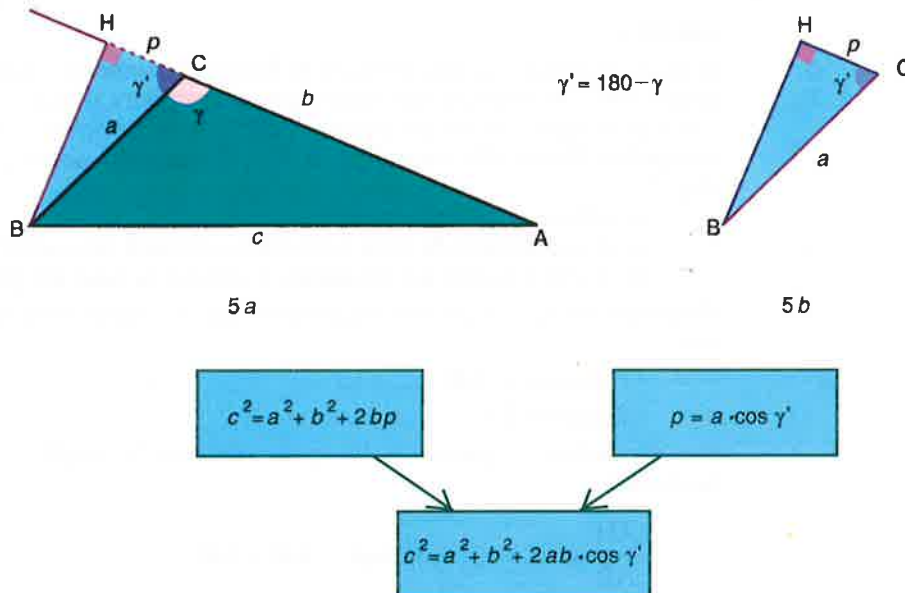
Applicare il teorema del coseno per calcolare la lunghezza del terzo lato.

- ② Di un triangolo ottusangolo ABC sono dati i seguenti elementi:

$$a = 10 \quad b = 20 \quad \gamma = 120^\circ$$

Applicare il teorema del coseno per calcolare la lunghezza del terzo lato.

**Figura 5**  
Il teorema del coseno per un triangolo ottusangolo



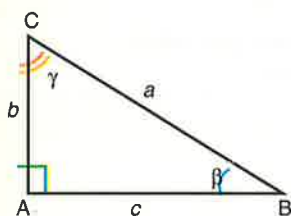
# Risolvere problemi di trigonometria

La trigonometria è nata e si è sviluppata per risolvere problemi nei campi più vari.

Questa «Attività» è destinata appunto alla risoluzione di problemi, che sono divisi in due grandi categorie:

- A. problemi sui triangoli rettangoli;
- B. problemi sui triangoli non rettangoli.

**Figura 1**  
Gli elementi di un  
triangolo rettangolo



## A. Problemi sui triangoli rettangoli

Tutti i problemi sui triangoli rettangoli si risolvono applicando opportunamente le seguenti relazioni, valide per qualunque triangolo ABC che abbia retto l'angolo di vertice A (fig. 1):

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 90^\circ & a^2 &= b^2 + c^2 \\ \frac{b}{a} &= \sin \beta & \frac{c}{a} &= \cos \beta & \frac{b}{c} &= \tan \beta \end{aligned}$$

### Attività 1

Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di  $10^\circ$  inferiore rispetto alla latitudine del luogo; trovandosi Roma alla latitudine di  $41^\circ$ , il pannello dovrà essere inclinato di  $31^\circ$  (fig. 2).

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. A che altezza da terra arriverà la sommità del pannello?
- b. A che distanza dal parapetto si troverà la base del pannello?

Osservare la fig. 2 e fissare l'attenzione sul triangolo rettangolo AHB, di cui sono noti:

- l'ipotenusa  $AB = \dots\dots\dots$
- l'angolo  $\beta = \dots\dots\dots$

Per rispondere al quesito a, bisogna calcolare la lunghezza di AH, tenendo presente che:

$$\frac{AH}{AB} = \dots\dots\dots \text{ e quindi } AH = AB \cdot \dots\dots\dots$$



Si ottiene:

$$AH \cong 1,5 \text{ m}$$

Per rispondere al quesito b, bisogna calcolare la lunghezza di HB, tenendo presente che:

$$\frac{BH}{AB} = \dots\dots\dots \text{ e quindi } BH = AB \cdot \dots\dots\dots$$

Si ottiene:

$$BH \cong 2,6 \text{ m}$$

### Attività 2

La fig. 3 rappresenta una strada che sale di 20 m su una distanza orizzontale di 100 m; in questo caso si dice che la pendenza è del 20%.

Quanto vale l'angolo di inclinazione  $\beta$  della strada?

Osservare la fig. 3 ed esaminare il triangolo rettangolo ABC, che ha:

- il cateto adiacente all'angolo  $\beta$ , cioè AB = .....

- il cateto opposto all'angolo  $\beta$ , cioè BC = .....

Per rispondere al quesito, basta ricordare che:

$$\frac{BC}{AB} = \dots\dots\dots \text{ e quindi } \operatorname{tg} \beta = 0,2$$

Per determinare  $\beta$  con il calcolatore tascabile si preme la sequenza di tasti:



o sequenze analoghe usate da un calcolatore tascabile per invertire la funzione tangente, cioè per avere l'angolo a partire dal valore della tangente.

Si ottiene:

$$\beta \cong 11^\circ$$

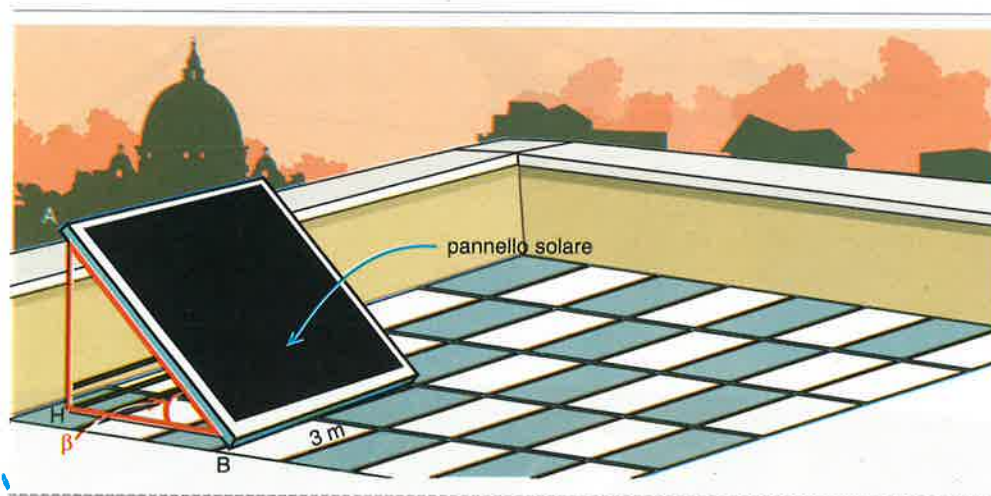


Figura 2  
L'installazione  
di un pannello solare

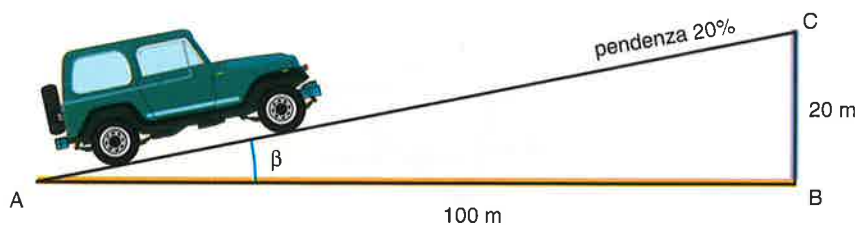
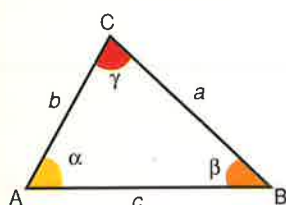


Figura 3  
La pendenza  
di una strada

**Figura 4**  
Gli elementi di un  
triangolo acutangolo



## B. Problemi sui triangoli non rettangoli

Risolviamo due problemi sui triangoli acutangoli, che si risolvono applicando opportunamente le seguenti relazioni, valide per qualunque triangolo acutangolo ABC (fig. 4):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{cases}$$

### Attività 3

Per guidare un missile antiaereo, la stazione radar da terra deve valutare, in ogni istante, la distanza fra l'aereo da colpire e il missile (fig. 5a). Il radar, disposto in R, misura la distanza RA dell'aereo e quella RM del missile M; misura inoltre l'angolo  $\alpha$  fra queste due direzioni, ottenendo per esempio:

$$RA = b = 12 \text{ km}$$

$$RM = c = 20 \text{ km}$$

$$\alpha = 65^\circ$$

Quanto vale la distanza AM?

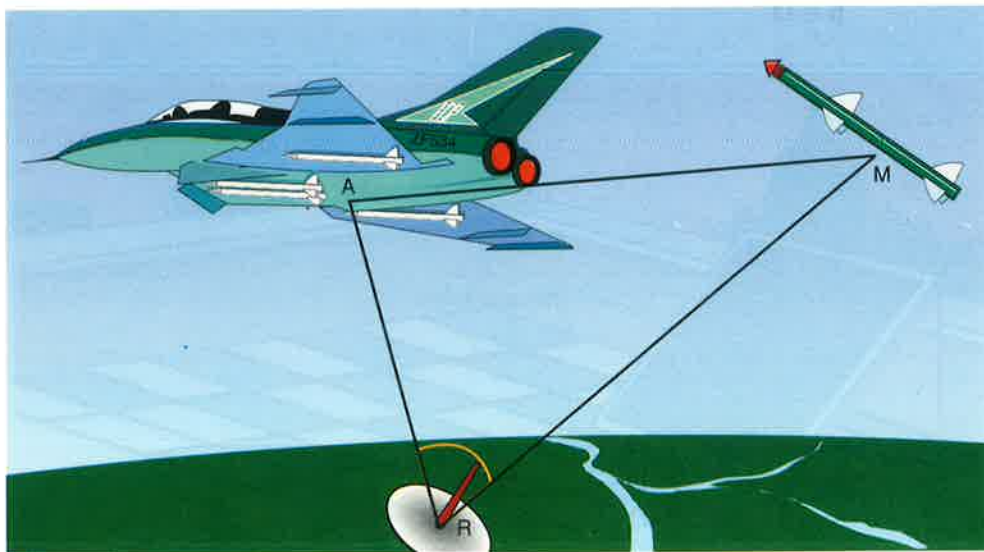
Il problema è schematizzato in fig. 5b: del triangolo RAM sono noti due lati e l'angolo compreso e si vuole calcolare il terzo lato; per questo, basta valersi del teorema del coseno. Indicare con x la lunghezza incognita di AM e completare il seguente procedimento:

$$x^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2 - 2 \cdot (\dots) \cdot (\dots) \cdot \cos \dots \cong \dots$$

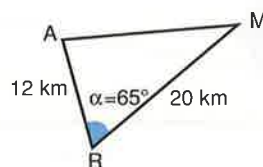
Si ottiene quindi:

$$x = \sqrt{\dots} \cong 18,5 \text{ km}$$

**Figura 5**  
La guida  
di un missile  
antiaereo



5a



5b

#### Attività 4

Una nave N avverte di trovarsi in difficoltà (fig. 6a) e il segnale viene ricevuto da due capitanerie di porto, A e B, che distano fra loro 40 km in linea d'aria.

Con un apposito strumento (il radiogoniometro) le due capitanerie rilevano gli angoli  $\alpha = 85^\circ$  e  $\beta = 50^\circ$ .

Quanto dista la nave da A e da B?

*Il problema è schematizzato in fig. 6b: del triangolo ABN sono noti due angoli e il lato compreso, cioè si ha:*

$$\alpha = 85^\circ \quad \beta = 50^\circ \quad AB = c = 40$$

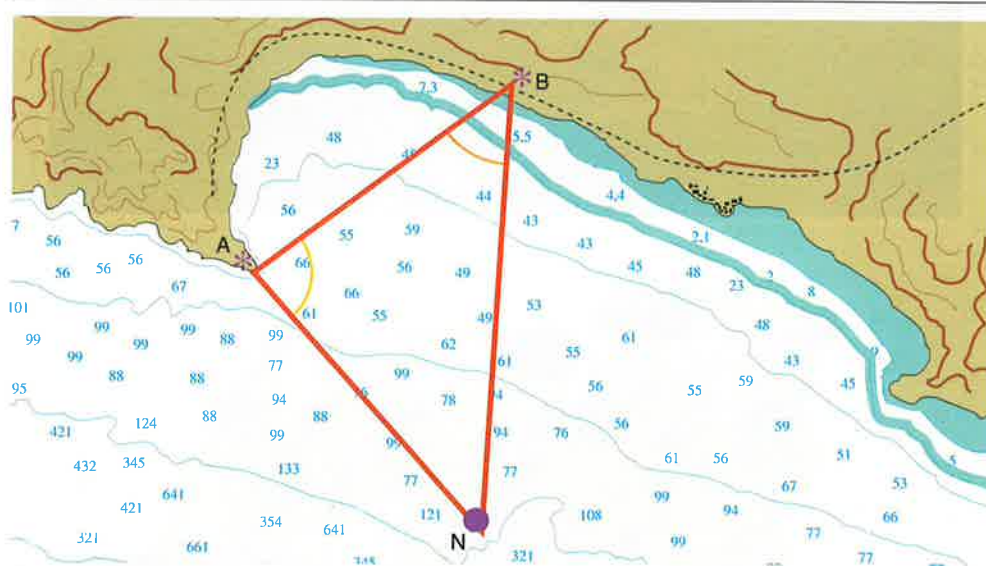
*e si vogliono calcolare gli altri due lati.*

*Per questo, bisogna valersi del teorema dei seni. Indicare con x la lunghezza incognita di AN, con y la lunghezza incognita di BN e completare il seguente procedimento:*

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \dots\dots\dots \quad \text{cioè} \quad \gamma = 45^\circ \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{40}{\text{sen} \dots\dots} &= \frac{x}{\text{sen} \dots\dots} \\ \frac{40}{\text{sen} \dots\dots} &= \frac{y}{\text{sen} \dots\dots} \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \\ \frac{y}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{aligned}$$

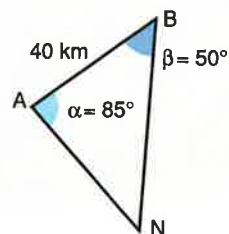
*Si ottiene in definitiva:*

$$AN = x \cong 43 \text{ km} \quad BN = y \cong 56 \text{ km}$$



**Figura 6**  
Come calcolare  
la distanza  
di una nave  
in difficoltà

6a



6b



## La triangolazione e l'area del triangolo

### La triangolazione

La foto da satellite di fig. 1 mostra una parte dei Paesi Bassi, e in particolare l'isola artificiale di Flevoland, ottenuta mediante il prosciugamento di antiche paludi. Ci si chiede come si potrebbe misurare l'area della zona in questione, che ha la forma di un poligono irregolare.

Un problema analogo può presentarsi anche in altre circostanze, per esempio quando si vuole valutare l'estensione di un terreno o di un parco.

**Figura 1**  
L'area di un poligono  
irregolare in una foto  
da satellite



**Figura 2**  
La triangolazione  
effettuata  
sulla pianta topografica  
di un parco pubblico



In questi casi l'area richiesta si ottiene ricoprendo la zona con una rete di triangoli i cui vertici siano dei punti ben determinati: nel caso del parco, ad esempio, un albero, una pietra, un cartello o altro (fig. 2). In questo modo si effettua una *triangolazione* e il problema si riduce al calcolo dell'area di tanti triangoli, di cui bisogna misurare lati e angoli direttamente sul terreno.

Queste misure, dette *rilevamenti topografici*, spesso non sono tutte possibili: qualche volta è facile misurare gli angoli ed è addirittura impossibile riuscire a misurare tutti i lati, mentre altre volte è più facile misurare i lati.

Si è perciò condotti ad affrontare il seguente problema: determinare l'area di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi.

I casi che si presentano più frequentemente sono i seguenti:

- A. Area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso;
- B. Area di un triangolo di cui sono noti due angoli e il lato compreso;
- C. Area di un triangolo di cui sono noti i tre lati.

Questa scheda è dedicata appunto ad affrontare i tre casi indicati.

### Area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso

Del triangolo ABC di fig. 3 sono noti:

- le lunghezze  $b, c$  di due lati;
- l'ampiezza  $\alpha$  dell'angolo compreso fra i due lati.

Ma l'area  $S$  del triangolo è data da:

$$S = \frac{1}{2} ch$$

e perciò bisogna calcolare la lunghezza  $h$  dell'altezza CH.

In questo caso basta esaminare il triangolo rettangolo ACH per ricavare:

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha \quad \text{da cui} \quad h = b \cdot \sin \alpha$$

L'area  $S$  è dunque data da:

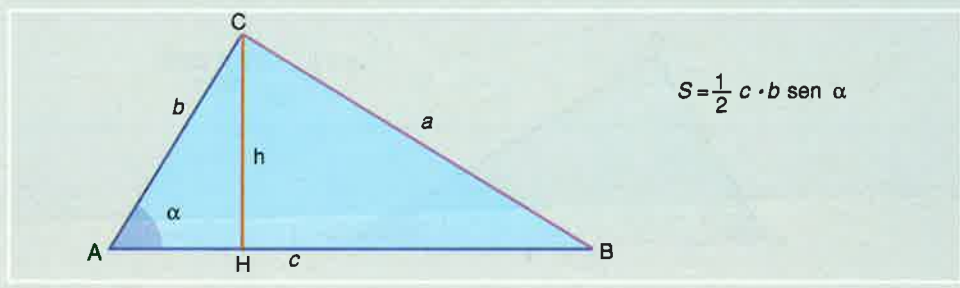
$$S = \frac{1}{2} cb \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

E così, per esempio, il triangolo di cui sono noti:

$$c = 4 \quad b = 5 \quad \alpha = 30^\circ \quad \text{e quindi} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

ha l'area  $S$  data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$$



**Figura 3**  
L'area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso



### Area di un triangolo di cui sono noti due angoli e il lato compreso

Del triangolo ABC di fig. 4 sono noti:

- la lunghezza  $c$  di un lato;
- le ampiezze  $\alpha$  e  $\beta$  degli angoli che comprendono il lato.

Si osserva subito che del triangolo si conosce pure il terzo angolo, dato che risulta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{e quindi} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Però non si conosce l'altezza  $h$  e nemmeno l'altro lato  $b$ , perciò non si può applicare la formula (1) appena trovata.

Viene allora l'idea di calcolare il lato  $b$  valendosi del teorema dei seni; si ha, in particolare:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{da cui} \quad b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

Sostituendo l'ultima espressione ottenuta nella (1), si trova:

$$S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (2)$$

Ecco un'applicazione immediata di questa formula: per il triangolo che ha i seguenti elementi:

$$c = 2 \quad \alpha = 50^\circ \quad \beta = 70^\circ \quad \text{e quindi} \quad \gamma = 60^\circ$$

l'area  $S$  è data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \cong 1,66$$

### Area di un triangolo di cui si conoscono i tre lati

Del triangolo di fig. 5 sono note le lunghezze dei tre lati; come calcolare l'area  $S$ ?

Convienne cominciare a lavorare su un esempio numerico. Il triangolo di cui sono noti i seguenti elementi:

$$a = 58 \quad b = 28 \quad c = 64$$

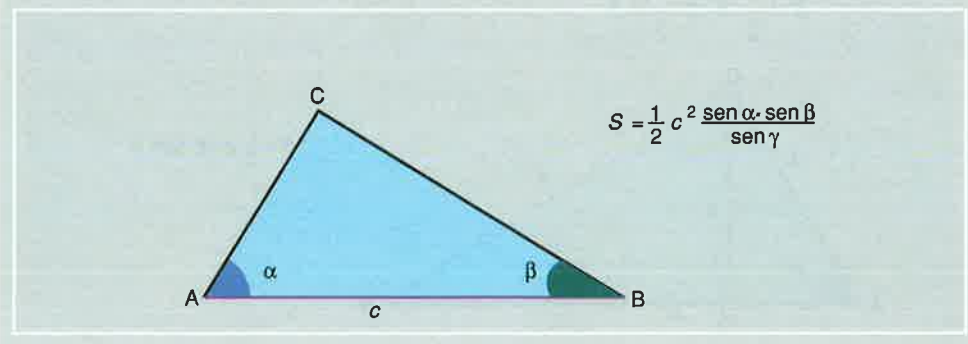
Si osserva subito che converrebbe applicare la formula (1), ma manca l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$ , che si potrebbe però ricavare basandosi sul teorema del coseno; risulta infatti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

e cioè, nel caso assegnato:

$$58^2 = 28^2 + 64^2 - 2 \cdot 28 \cdot 64 \cdot \cos \alpha$$

**Figura 4**  
L'area di un triangolo  
di cui sono dati  
due angoli  
e il lato compreso



Da qui si può ricavare:

$$\cos \alpha = \frac{28^2 + 64^2 - 58^2}{2 \cdot 28 \cdot 64} \cong 0,423 \quad \text{e quindi} \quad \alpha \cong 65^\circ$$

Ora si può finalmente applicare la formula (1), trovando che l'area  $S$  è data da:

$$S \cong \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 28 \cdot \sin 65^\circ \cong 811,052$$

Si osserva subito che in questo procedimento si ricorre più volte ai calcoli approssimati, e cioè:

- nel calcolo dei  $\cos \alpha$  come risultato di una divisione;
- nel calcolo del corrispondente valore di  $\alpha$ ;
- nel calcolo di  $\sin \alpha$ .

Si può però trovare un altro procedimento che fornisce l'area di un triangolo di lati noti con migliore precisione: si tratta della *formula di Erone*, dovuta al matematico alessandrino Erone, attivo intorno al 100 d.C.

### La formula di Erone

Erone trovò per via geometrica la seguente formula per calcolare l'area  $S$  di un triangolo di lati noti:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove:

- $a, b, c$  sono le misure dei lati;
- $2p = a + b + c$  è la misura del perimetro.

Applicando questa formula al precedente triangolo si trova:

$$2p = 58 + 28 + 64 \quad \text{da cui} \quad p = 75$$

e quindi:

$$S = \sqrt{75(75-58)(75-28)(75-64)} \cong 811,896$$

### La dimostrazione della formula di Erone

Per ricavare la formula che da lui prese il nome, Erone si basò su un sottile ragionamento geometrico, che può essere notevolmente abbreviato dall'uso della trigonometria e del calcolo letterale, restando tuttavia piuttosto lungo e complicato rispetto alla formula finale, semplice ed elegante.

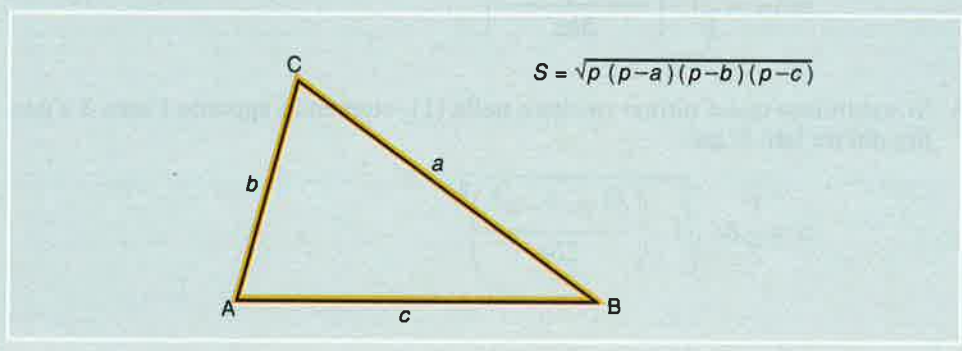


Figura 5  
L'area  
di un triangolo  
di cui sono noti  
i tre lati

Ecco come si può procedere per calcolare l'area  $S$  di un triangolo  $ABC$ , di cui si conoscono solo i lati (fig. 6), valendosi della formula:

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

1. Si ricava il valore del coseno dell'angolo  $\alpha$ , valendosi del teorema del coseno; si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad \text{da cui} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2. Per ricavare il seno dell'angolo  $\alpha$ , si esamina il triangolo rettangolo  $CAH$  di fig. 5, trovando che risulta:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad (\sin \alpha)^2 = \frac{h^2}{b^2}$$

e quindi anche:

$$\cos \alpha = \frac{p}{b} \quad (\cos \alpha)^2 = \frac{p^2}{b^2}$$

da cui, addizionando membro a membro le due uguaglianze, si può ricavare:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{h^2 + p^2}{b^2}$$

Dato che, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo  $CAH$ , risulta:

$$h^2 + p^2 = b^2 \quad \text{e quindi} \quad \frac{h^2 + p^2}{b^2} = 1$$

si avrà pure:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \quad \text{da cui} \quad (\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$$

e finalmente:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$$

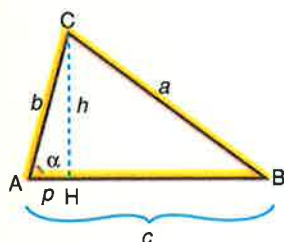
che, nel caso esaminato, diventa:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2}$$

3. Si sostituisce quest'ultimo risultato nella (1), ottenendo appunto l'area  $S$  a partire dai tre lati; si ha:

$$S = \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2}$$

Figura 6  
La dimostrazione della  
formula di Erone



L'espressione ora ottenuta sembra molto lontana dall'elegante formula di Erone, cui però ci si può ricondurre con i seguenti non brevi, ma semplici, passaggi di calcolo letterale.

4. Si sviluppa il radicando, svolgendo alcune delle operazioni indicate; si ha:

$$1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2}$$

e quindi:

$$S = \frac{1}{2} bc \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc} = \frac{1}{4} \sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \quad (3)$$

5. Si lavora sul nuovo radicando così ottenuto, tenendo in particolare presenti le seguenti identità, esposte nel primo volume, rispettivamente alle pp. 267, 269 e 273:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \quad (6)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= \\ &= [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)] = \text{per la (4)} \\ &= [2bc - b^2 - c^2 + a^2][2bc + b^2 + c^2 - a^2] = \\ &= [a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)][(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2] = \\ &= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] = \text{per la (5) e la (6)} \\ &= [a - (b - c)][a + (b - c)][b + c + a][b + c - a] \text{ per la (4)} \end{aligned}$$

Si ottiene infine:

$$(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a + c - b)(a + b - c)(a + b + c)(b + c - a)$$

Indicato poi

$$2p = a + b + c$$

si ha:

$$a + c - b = a + c + b - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

e analogamente:

$$a + b - c = 2(p - c) \quad b + c - a = 2(p - a)$$

Risulta perciò:

$$(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$$

e quindi:

$$\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = 4 \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella (3), si ottiene appunto la formula di Erone:

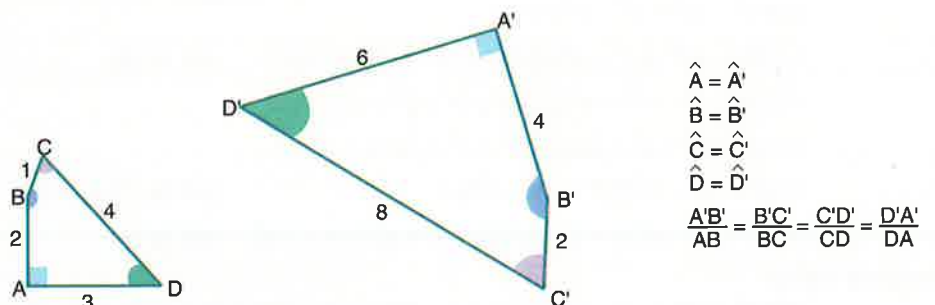
$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

# Che cosa bisogna sapere

## A. Similitudine

### Poligoni simili

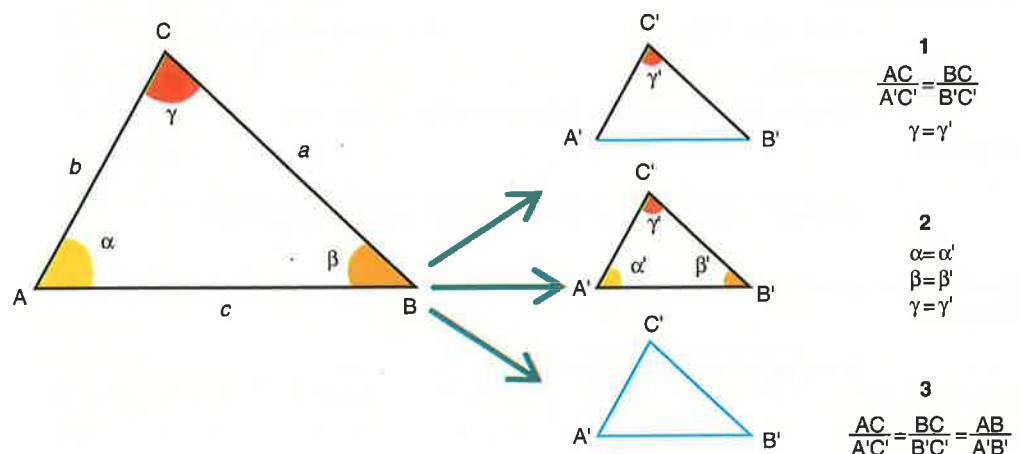
Si dicono simili due poligoni che hanno ordinatamente uguali gli angoli e il rapporto dei lati corrispondenti.



### Criteri di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se hanno:

1. due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale;
2. i tre angoli uguali;
3. i tre lati in proporzione.



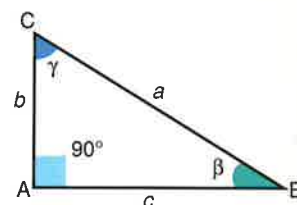


## B. Trigonometria

### Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Per un triangolo ABC, rettangolo in A, e con i lati lunghi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e gli angoli acuti ampi  $\alpha$  e  $\beta$ , valgono le seguenti relazioni:

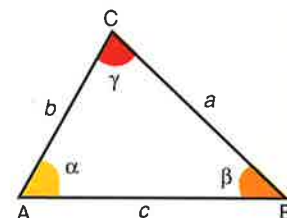
$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \sin \beta & \frac{c}{a} &= \cos \beta & \frac{b}{c} &= \tan \beta \\ \frac{c}{a} &= \sin \gamma & \frac{b}{a} &= \cos \gamma & \frac{c}{b} &= \tan \gamma \end{aligned}$$



### Relazioni fra lati e angoli di un triangolo acutangolo

Per un triangolo acutangolo ABC, con i lati lunghi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e gli angoli ampi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , valgono le seguenti relazioni:

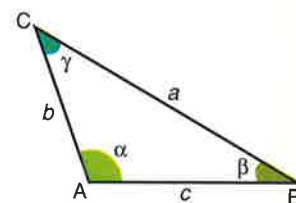
$$\begin{aligned} \text{teorema dei seni} \quad & \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \\ \text{teorema del coseno} \quad & \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{cases} \end{aligned}$$



### Relazioni fra lati e angoli di un triangolo ottusangolo

Per un triangolo ABC, ottusangolo in A, con i lati lunghi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e gli angoli acuti ampi  $\beta$  e  $\gamma$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{teorema dei seni} \quad & \frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} & \text{con } \alpha' = 180^\circ - \alpha \\ \text{teorema del coseno} \quad & \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha' \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{cases} & \text{con } \alpha' = 180^\circ - \alpha \end{aligned}$$



# Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due temi:

- A. le figure simili;
- B. le relazioni fra lati e angoli di un triangolo.

Le applicazioni di questi temi sono molto numerose e varie e possono essere riunite in due grandi categorie:

- I. scoperta di proprietà delle figure;
- II. risoluzione di problemi.

Ecco qualche esempio su cui lavorare.

## A. Figure simili

### I. Scoprire proprietà delle figure

#### Attività 1

In fig. 1 è rappresentato un qualunque triangolo ABC, a partire dal quale si è eseguita la seguente costruzione:

- si è tracciata la bisettrice AD dell'angolo BÂC;
- da C si è tracciata la parallela a AD, fino ad incontrare la retta AB in E.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. Dimostrare che il triangolo EAC è isoscele sulla base EC;
- b. Dimostrare che vale la proporzione:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

- c. Dimostrare che vale la seguente proprietà: in un qualunque triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto all'angolo in parti proporzionali ai lati.

*Quesito (a)*

*Per dimostrare che il triangolo EAC è isoscele sulla base EC, bisogna dimostrare che sono uguali gli angoli .....*

*Esaminando le due parallele AD e EC, tagliate dalla trasversale AC, si trova che sono uguali gli angoli alterni interni e perciò risulta:*

$$\widehat{E\hat{C}A} = \dots\dots\dots$$

Esaminando le due parallele  $AD$  e  $EC$ , tagliate dalla trasversale  $BE$ , si trova che sono uguali gli angoli corrispondenti e perciò risulta:

$$\widehat{A\hat{E}C} = \dots\dots\dots$$

Il triangolo è dunque isoscele e perciò risulta:

$$AE = AC \quad (2)$$

**Quesito (b)**

Considerare le due parallele  $AD$  e  $EC$ , tagliate dalle trasversali  $BC$  e  $BE$ , e applicare il teorema di Talete.

**Quesito (c)**

Considerare insieme la (1) e la (2).

## II. Risoluzione di problemi

### Attività 2

Il triangolo rettangolo  $ABC$  di fig. 2 ha i cateti lunghi 6 e 15. Nel triangolo si vuole inscrivere un rettangolo che abbia il perimetro lungo 24; quanto debbono essere lunghi i lati del rettangolo?

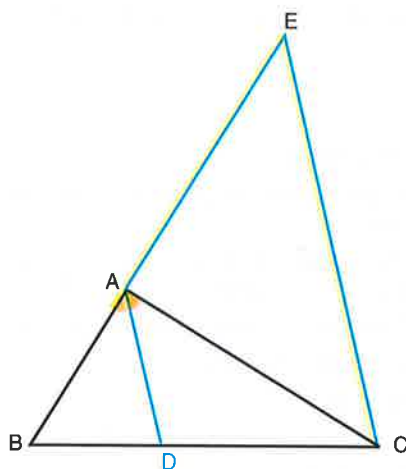
Eseguito il disegno, si passa a:

1. scelta delle incognite e loro limitazione; si può scegliere, per esempio:

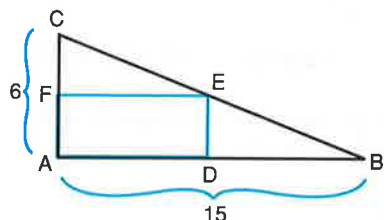
$$AF = x \quad \text{con} \quad \dots\dots\dots < x < \dots\dots\dots$$

$$FE = y \quad \text{con} \quad \dots\dots\dots < y < \dots\dots\dots$$

2. Essendo due le incognite, occorrono due relazioni che leghino queste due incognite.



**Figura 1**  
La bisettrice  
di un triangolo



**Figura 2**  
Inscrivere  
un rettangolo  
in un triangolo

- La prima è data direttamente dal problema:

$$2x + 2y = \dots\dots\dots \text{ ossia } x + y = \dots\dots\dots$$

- La seconda si può ricavare osservando che sono simili i triangoli ABC e CFE, che hanno  $\dots\dots\dots$  e perciò si ha:

$$\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{FE} \quad \text{cioè} \quad \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

che conviene scrivere nella forma:

$$2y = \dots\dots\dots$$

3. Per determinare le due incognite bisogna dunque risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = \dots\dots\dots \\ 5x + 2y = \dots\dots\dots \end{cases}$$

4. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$$

## B. Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

### I. Scoprire proprietà delle figure

#### Attività 3

Dimostrare il seguente *teorema della corda*: la lunghezza  $L$  di una corda AB di un cerchio è sempre data da:

$$L = 2r \cdot \sin \alpha$$

dove:

- $r$  è il raggio della circonferenza;
- $\alpha$  è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza acuti che insistono sulla corda AB.

In fig. 3a sono rappresentate una corda AB di una circonferenza di centro O e raggio  $r$  e il diametro AC che passa per uno degli estremi della corda.

- Il triangolo ABC ha l'angolo di vertice B retto, perché  $\dots\dots\dots$
- Esaminando il triangolo ABC, si trova che:
  - l'angolo  $\widehat{ACB}$  è ampio  $\alpha$ ;
  - l'ipotenusa è  $\dots\dots\dots$ ;
  - il cateto opposto all'angolo  $\alpha$  è  $\dots\dots\dots$

Perciò risulta:

$$\sin \alpha = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \text{e quindi} \quad AB = 2r \cdot \sin \alpha$$

La dimostrazione del teorema si conclude osservando la fig. 3b, dove sono rappresentati altri angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB; tutti questi angoli sono uguali, perché  $\dots\dots\dots$  (vedi il primo volume, p. 146).

#### Attività 4

Dimostrare il seguente teorema: in un qualunque triangolo acutangolo il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto.

Esaminare la fig. 4 e osservare che, nel triangolo ABC, si ha che  $c$  è la lunghezza della corda su cui insiste l'angolo ampio  $\gamma$ , perciò si ha:

$$c = 2r \cdot \sin \gamma \quad \text{ossia} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \dots\dots\dots$$

Esaminare in modo analogo le altre coppie lato-seno dell'angolo opposto.

## II. Risoluzione di problemi

#### Attività 5

Si sta progettando una galleria rettilinea che deve collegare due paesi A e B situati su due versanti opposti di una montagna. Per prevedere la lunghezza della galleria si può procedere così (fig. 5):

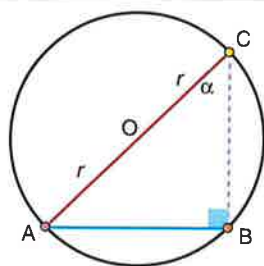
- si fissa una località C facile da raggiungere;
- si misurano le distanze  $CA = 1,125$  km e  $CB = 2,456$  km;
- si misura l'angolo  $\hat{ACB} = 50^\circ 30'$ ;
- si calcola la lunghezza della galleria AB valendosi del teorema del coseno.

Per usare il calcolatore tascabile, tenere presente che:

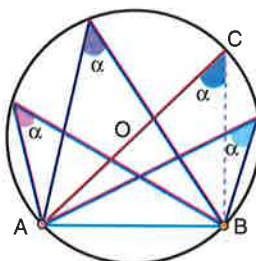
$$50^\circ 30' = 50^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = (50,5)^\circ$$

Si ottiene:

$$AB \cong 1,945 \text{ km}$$

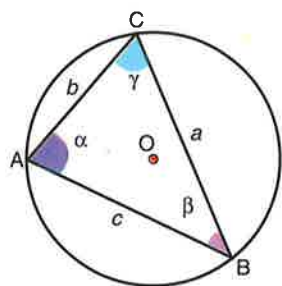


3a



3b

**Figura 3**  
Il teorema della corda



**Figura 4 (a sinistra)**  
Il diametro del cerchio circoscritto a un triangolo acutangolo

**Figura 5 (a destra)**  
Calcolare la lunghezza di una galleria





# INTRODUZIONE ALLA LOGICA

## Attività.

Esaminare frasi che esprimono una condizione

1.

Proposizioni condizionali.  
L'implicazione

2.

La doppia implicazione

## Scheda informativa.

L'implicazione e gli insiemi

3.

L'implicazione nell'enunciato dei teoremi

4.

Vari modi di enunciare un teorema

5.

Definizioni e termini primitivi, teoremi e assiomi

## Scheda informativa.

Qualche idea sulle geometrie non-euclidee

## Scheda storica.

La logica nella storia

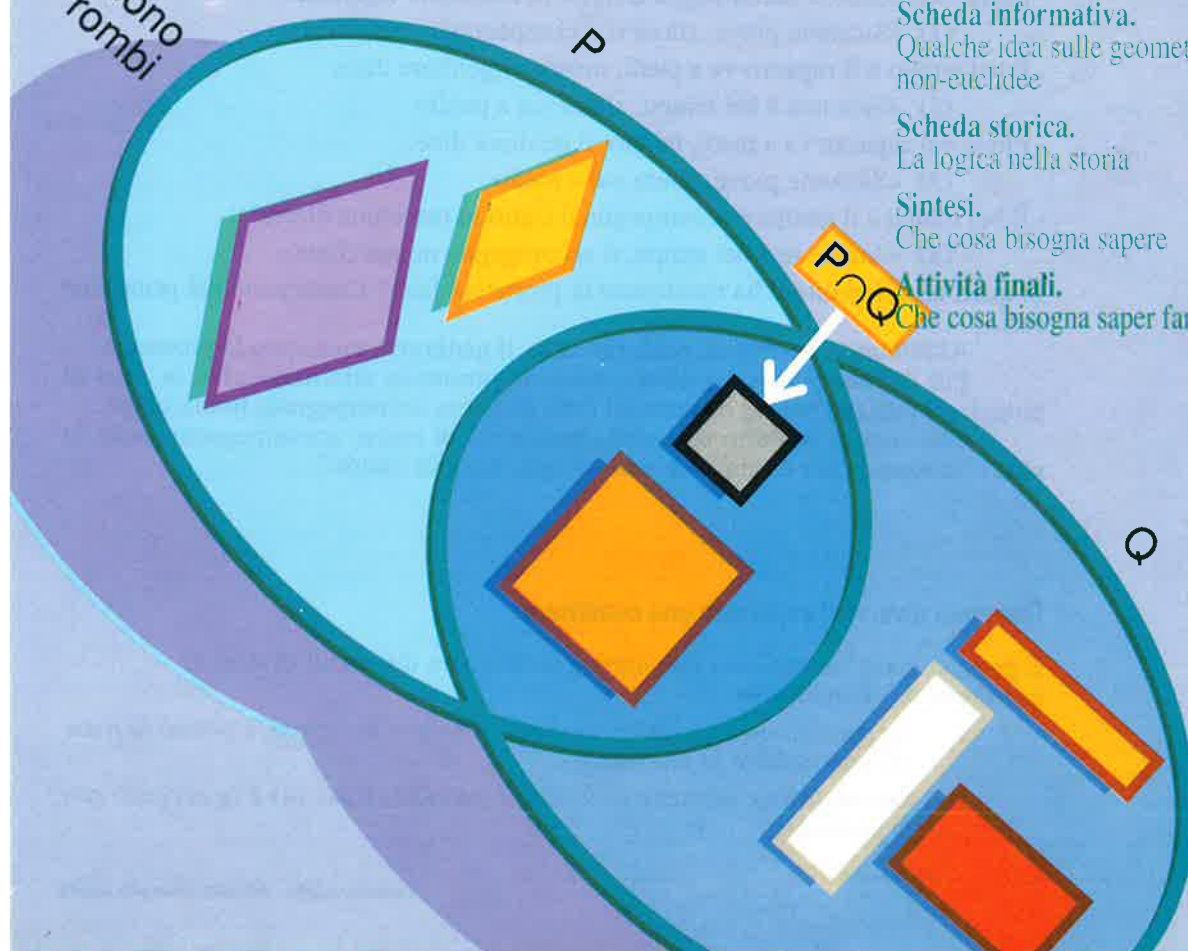
## Sintesi.

Che cosa bisogna sapere

## Attività finali.

Che cosa bisogna saper fare

Quadrati sono  
poligoni rombi



## Esaminare frasi che esprimono una condizione

### Esempi di frasi in cui è espressa una condizione

Nel linguaggio comune si trovano spesso delle frasi che esprimono una promessa soggetta ad una condizione; ecco due esempi:

«Domani mattina, se piove ti accompagno a scuola in macchina»;

«Se sei promosso alla fine dell'anno, ti compro il motorino».

Fermiamoci sul primo esempio, pensando che la frase sia stata detta da un genitore al figlio una sera ed esaminiamo le varie situazioni che si possono presentare il mattino dopo.

- Piove, e il genitore accompagna il figlio in macchina dicendo:

(1) «Siccome piove, allora ti accompagno in macchina».

- È bel tempo e il ragazzo va a piedi, mentre il genitore dice:

(2) «Siccome è bel tempo, allora vai a piedi».

- Piove e il ragazzo va a piedi, mentre il genitore dice:

(3) «Siccome piove, allora vai a piedi».

- È bel tempo e il genitore accompagna il figlio in macchina dicendo:

(4) «Anche se è bel tempo, ti accompagno in macchina».

In quali casi il genitore ha mantenuto la promessa fatta? Certamente nei primi due casi.

Altrettanto certamente, nel terzo caso, il genitore ha mancato la promessa.

Più dubbio invece è l'ultimo caso: la promessa affermava che, in caso di pioggia, il ragazzo poteva contare sul fatto di essere accompagnato in macchina.

Che cosa si può dire però della possibilità di essere accompagnato anche in altre circostanze, per esempio se è bel tempo, ma è in ritardo?

### Due modi diversi di esprimere una condizione

È proprio quest'ultimo caso che porta a distinguere due modi diversi di esprimere una condizione.

- I. *La condizione è tassativa, cioè non ammette eccezioni, e perciò la frase (4) contraddice la promessa.*
- II. *La condizione ammette eccezioni e perciò la frase (4) è in accordo con la promessa.*

### Per esprimere una condizione si compongono due frasi

Le quattro affermazioni (1), (2), (3), (4) hanno senz'altro qualcosa in comune: sono tutte composte solo con le seguenti frasi:

«piove», «è bel tempo»;

«ti accompagno in macchina», «vai a piedi».

Anzi, esaminando meglio le prime due frasi, si nota che «è bel tempo» è un modo per dire «è falso che piove». E così, per le ultime due frasi, «vai a piedi» è un modo per dire «è falso che ti accompagno in macchina».

In definitiva, le quattro affermazioni sono tutte costruite con le due frasi:

«piove», che può essere vera o falsa;

«ti accompagno in macchina», che può essere vera o falsa.

### Descrivere una condizione che ammette eccezioni

#### Attività 1

Esaminare la promessa che ammette eccezioni, completando lo schema seguente in cui sono riassunte le varie situazioni che si possono presentare.

A.	«piove»	<b>vera</b>	} (1)	«Siccome piove, allora	<b>vera</b>
	«ti accompagno»	<b>vera</b>		ti accompagno in macchina»	
B.	«piove»	<b>falsa</b>	} (2)	.....	<b>vera</b>
	«ti accompagno»	<b>falsa</b>			
C.	«piove»	<b>vera</b>	} (3)	.....	<b>falsa</b>
	«ti accompagno»	<b>falsa</b>			
D.	«piove»	<b>falsa</b>	} (4)	.....	<b>vera</b>
	«ti accompagno»	<b>vera</b>			

### Descrivere una condizione che non ammette eccezioni

#### Attività 2

Organizzare uno schema analogo a quello dell'attività 1, per esaminare la promessa espressa con la condizione che non ammette eccezioni.

### Come scoprire se una condizione è tassativa o no

Confrontando i due schemi ottenuti nelle attività 1 e 2, si osserva che solo l'ultima situazione (D) distingue la condizione tassativa da quella che ammette eccezioni.

Perciò, per chiarire il significato della promessa «Se piove, ti accompagno in macchina», bisogna chiedere, per esempio:

«Mi accompagni in macchina anche se è bel tempo?».

Solo così si può scoprire se la condizione è tassativa o no.

Le osservazioni finora svolte conducono alle seguenti conclusioni:

- si esprime una condizione componendo due frasi mediante parole del tipo «se... allora...»;
- la condizione può essere tassativa o no.

# 1





## Proposizioni condizionali. L'implicazione

### Esempi di proposizioni in cui è espressa una condizione

In matematica si trovano spesso delle proposizioni che esprimono una proprietà soggetta ad

una condizione. Ecco due esempi: 1.«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali»; 2.«Se due triangoli sono uguali, allora hanno i lati uguali».

**Tabella A**  
I quattro casi possibili in cui la frase condizionale è vera o falsa

$p$	$q$	Se $p$ allora $q$
<b>VERA</b> I due triangoli sono uguali	<b>VERA</b> I due triangoli hanno gli angoli uguali	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno gli angoli uguali» 
<b>FALSA</b> I due triangoli sono disuguali	<b>FALSA</b> I due triangoli hanno gli angoli disuguali	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome i due triangoli sono disuguali, hanno gli angoli disuguali» 
<b>VERA</b> I due triangoli sono uguali	<b>FALSA</b> I due triangoli hanno gli angoli disuguali	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è falso): «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno gli angoli disuguali» 
<b>FALSA</b> I due triangoli sono disuguali	<b>VERA</b> I due triangoli hanno gli angoli uguali	<b>VERA</b> Si può dire: «Anche se i due triangoli sono disuguali, hanno gli angoli uguali» 



Le due proposizioni esprimono una *condizione* mediante le parole «se... allora...», perciò prendono il nome di *proposizioni condizionali*.

### Il valore di verità di una proposizione condizionale

Le parole «se... allora...» sono ben conosciute: anche nel linguaggio comune vengono usate per costruire frasi composte, a partire da frasi più semplici (vedi l'Attività di p. 144). Si tratta ora di chiarirne l'uso e il significato in campo matematico; in questo paragrafo viene esaminata in particolare la prima proposizione, mentre la seconda verrà esaminata nel paragrafo 2.

La proposizione «Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali» è formata dalle seguenti due proposizioni semplici:

$p$ : «i due triangoli sono uguali»;

$q$ : «i due triangoli hanno gli angoli uguali».

Ogni proposizione semplice può essere vera o falsa, perciò si possono presentare quattro casi, che sono riassunti nella tabella A.

In conclusione, quando si conoscono i valori di verità di  $p$  e di  $q$ , si riesce a determinare il valore di verità della proposizione condizionale; si ha che *la proposizione condizionale è falsa in un solo caso: quando  $p$  è vera e  $q$  è falsa*.

### Implicazione

Dalla tabella A si capisce che le due proposizioni semplici hanno un ruolo differente e perciò bisogna distinguerle:

- la proposizione  $p$ , scritta subito dopo la parola «se», si chiama *premessa* (o antecedente);
- l'altra proposizione  $q$  si chiama *conseguenza* (o conseguente).

La proposizione composta da due proposizioni  $p$  e  $q$  secondo uno schema come quello illustrato dalla tabella si chiama *implicazione*; si indica brevemente così:

$$p \Rightarrow q$$

e si legge « $p$  implica  $q$ ».

Il simbolo « $\Rightarrow$ » prende il nome di *connettivo di implicazione*.

L'effetto del connettivo di implicazione viene riassunto nella tabella seguente:

Premessa $p$	Conseguenza $q$	Implicazione $p \Rightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

In questa tabella, la lettera V indica che la proposizione è vera, mentre la lettera F indica che la proposizione è falsa.

Riassumendo:

- un'implicazione è una proposizione composta da due proposizioni  $p$  e  $q$  mediante le parole «se... allora...»;
- la proposizione  $p$ , scritta subito dopo la parola «se», si chiama *premessa* (o antecedente), la proposizione  $q$  si chiama *conseguenza* (o conseguente);
- un'implicazione è falsa solo se la premessa  $p$  è vera e la conseguenza  $q$  è falsa;
- un'implicazione si esprime brevemente con la formula  $p \Rightarrow q$ , che si legge « $p$  implica  $q$ ».

### Il significato della parola «implicazione»

La parola «implicazione» proviene dal verbo latino «implicare» che significa «racchiudere», «contenere in sé». Perciò la frase « $p$  implica  $q$ » ricorda che «la premessa  $p$  vera contiene in sé la conseguenza  $q$  vera».

È questo un significato del verbo implicare che si trova anche nel linguaggio comune; si dice per esempio: «L'amicizia implica la fiducia reciproca».

## V e r i f i c h e

#### Conoscenze

- ① Che cos'è un'implicazione?
- ② Con quale simbolo si rappresenta il connettivo di implicazione?
- ③ In quale caso un'implicazione è falsa?

#### Applicazioni

- ① Ripetere le considerazioni svolte in questo paragrafo per esaminare la proposizione: «Se un poligono è regolare, allora ha tutti i lati uguali»

#### Collegamenti con il primo volume

- ① Che cosa si intende in logica con il termine «proposizione»? (Vedere il capitolo 7, p. 300)
- ② Che cosa si intende in logica con il termine «proposizione composta»? (Vedi il capitolo 7, p. 300)

#### Vocabolario

- ① Cercare sul vocabolario i termini «implicare», «condizionale» e «condizioni» ed esaminarne i vari significati.

# 2

## La doppia implicazione

### Un altro tipo di proposizione condizionale

Esaminiamo ora la seconda proposizione indicata all'inizio del paragrafo 1 e cioè: «Se due triangoli sono uguali, allora hanno i lati uguali». La proposizione è composta da due propo-





sizioni semplici e cioè:

$p$ : i due triangoli sono uguali;

$q$ : i due triangoli hanno i lati uguali.

Anche in questo caso le due proposizioni sono collegate con le parole «se... allora...».

**Tabella A**  
I quattro casi possibili in cui la frase condizionale è vera o falsa

$p$	$q$	Se $p$ allora $q$
<b>VERA</b> I due triangoli sono uguali	<b>VERA</b> I due triangoli hanno i lati uguali	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno i lati uguali» 
<b>FALSA</b> I due triangoli sono disuguali	<b>FALSA</b> I due triangoli hanno i lati disuguali	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome i due triangoli sono disuguali, hanno i lati disuguali» 
<b>VERA</b> I due triangoli sono uguali	<b>FALSA</b> I due triangoli hanno i lati disuguali	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è falso): «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno i lati disuguali» 
<b>FALSA</b> I due triangoli sono disuguali	<b>VERA</b> I due triangoli hanno i lati uguali	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è falso): «Anche se i due triangoli sono disuguali, hanno i lati uguali» 

Eppure questa proposizione condizionale presenta una notevole differenza rispetto a quella esaminata nel paragrafo 1, che era:

«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».

Per rendersene conto basta esaminare i casi riassunti nella tabella A.

È nell'ultimo caso della tabella A la novità di questa proposizione condizionale: non si riesce a disegnare due triangoli disuguali, ma con i lati uguali; un criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che questo non è possibile.

Per mettere in rilievo questa notevole differenza conviene modificare le parole «se... allora...», caratteristiche dell'implicazione, e dire invece: «due triangoli sono uguali se e solo se hanno i lati uguali».

### La doppia implicazione

Esaminando la tabella, si conclude che la proposizione composta è falsa quando una sola delle due proposizioni semplici è falsa, mentre è vera se sono entrambe vere o entrambe false. In questo caso la proposizione composta prende il nome di doppia implicazione; si scrive:

$$p \Leftrightarrow q$$

e si legge « $p$  implica  $q$  e viceversa».

Il simbolo « $\Leftrightarrow$ » prende il nome di *connettivo di doppia implicazione*.

L'effetto di questo connettivo è riassunto nella tabella seguente.

Premessa	Conseguenza	Doppia implicazione
$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

Riassumendo:

- una doppia implicazione è una proposizione composta da due proposizioni  $p$  e  $q$  mediante le parole «... se e solo se...»;

- una doppia implicazione è falsa quando una sola delle due proposizioni è falsa;

- una doppia implicazione si esprime brevemente con la formula

$$p \Leftrightarrow q$$

che si legge « $p$  implica  $q$  e viceversa».

### Il significato del termine «doppia implicazione»

Nel paragrafo precedente si è detto che «implicare» significa «racchiudere», «contenere in sé». Perciò la frase « $p$  implica  $q$  e viceversa» significa che «la proposizione  $p$  vera contiene la verità dell'altra proposizione  $q$  e, viceversa, la proposizione  $q$  vera contiene la verità dell'altra proposizione  $p$ ».

Dunque, nel caso della doppia implicazione, le due proposizioni  $p$  e  $q$  si garantiscono a vicenda: sapere che è vera una garantisce che è vera anche l'altra senza possibilità di eccezioni.

### Implicazione e doppia implicazione a confronto

È importante a questo punto confrontare i due tipi di frasi condizionali introdotti: l'implicazione e la doppia implicazione.

Per questo sono riunite qui sotto in un'unica tabella le due tavole di verità che descrivono l'effetto dei due connettivi « $\Rightarrow$ » (implicazione) e « $\Leftrightarrow$ » (doppia implicazione).

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V
F	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F

La tabella suggerisce due osservazioni:

1. è solo l'ultima riga che distingue l'implicazione dalla doppia implicazione;
2. le formule « $p \Rightarrow q$ » e « $p \Leftrightarrow q$ » distinguono l'implicazione dalla doppia implicazione senza possibilità di errore.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Che cos'è una doppia implicazione?
- ② Con quale simbolo si rappresenta la doppia implicazione?
- ③ In quali casi una doppia implicazione è vera e in quali è falsa?

### Applicazioni

- ① Stabilire se è una doppia implicazione la proposizione: «Se due triangoli sono simili, allora hanno gli angoli uguali»
- ② Stabilire se è una doppia implicazione la proposizione: «Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».



## L'implicazione e gli insiemi

### I connettivi «e», «o», «non» e gli insiemi

Nel primo volume (pp. 303-305) si è visto come usare i connettivi logici per descrivere le operazioni fra due insiemi; ecco alcuni degli esempi che erano stati esaminati.

A. Si considera l'insieme P dei quadrilateri con i lati uguali (cioè l'insieme dei rombi) e l'insieme Q dei quadrilateri con gli angoli uguali (cioè l'insieme dei rettangoli); si osserva che i due insiemi hanno una parte in comune (in colore in fig. 1), che è detta *intersezione* dei due insiemi ed è indicata con il simbolo:

$$P \cap Q$$

L'intersezione, in cui si trovano i quadrati, può essere descritta dalla seguente proposizione: «I quadrati sono rettangoli *e* rombi».

B. Dati l'insieme R dei divisori di 10 e l'insieme S dei divisori di 6, si considera l'*unione* dei due insiemi, indicata con il simbolo:

$$R \cup S$$

L'unione può essere descritta dalla seguente proposizione (fig. 2): «L'unione è formata dai numeri che sono divisori di 6 *o* di 10».

Figura 1  
Il connettivo «e» e gli insiemi

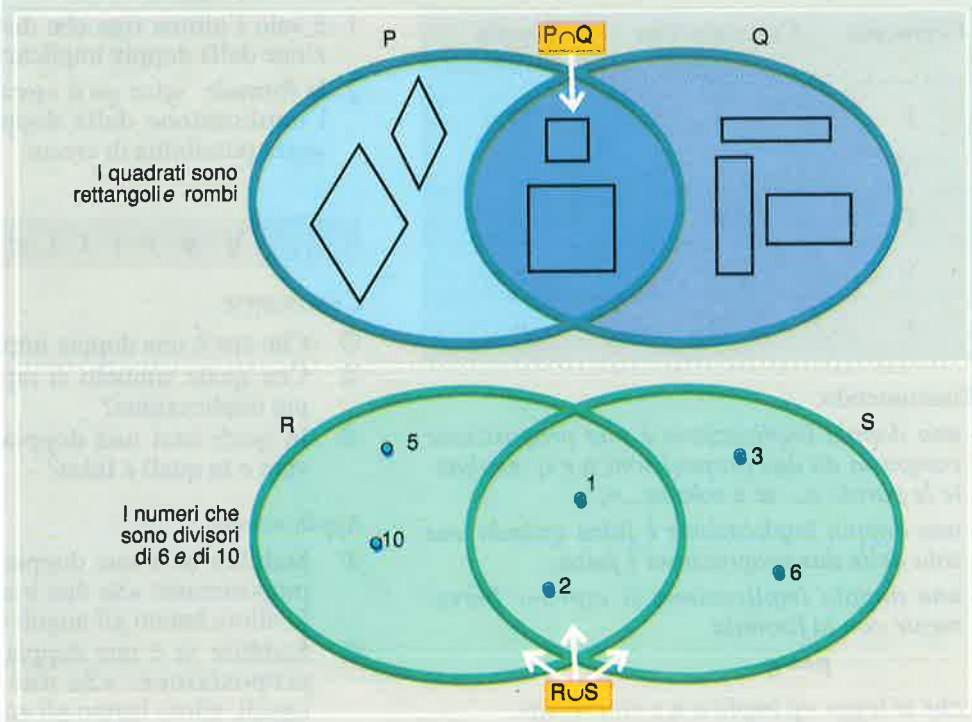


Figura 2  
Il connettivo «o» e gli insiemi

C. Si considera l'insieme R dei divisori di 10 «immerso» nell'insieme universo U, che è l'insieme dei naturali, e si considera il *complementare* di R, indicato col simbolo:

$$\bar{R}$$

Il complementare può essere descritto con la seguente frase (fig. 3): «Il complementare di R è formato dai naturali che *non* sono divisori di 10».

In questo modo i connettivi logici «e», «o», «non» compaiono in molte frasi che descrivono operazioni fra insiemi.

### L'implicazione e gli insiemi

Il connettivo di implicazione introdotto nel paragrafo 1 è invece collegato alla situazione descritta in fig. 4; l'insieme A dei quadrati è *contenuto* nell'insieme P dei rombi e si scrive:

$$A \subset P$$

dove il simbolo « $\subset$ » si legge «è contenuto in» o anche «è un sottoinsieme di».

La situazione può essere infatti descritta dalla seguente proposizione: «Se un poligono appartiene all'insieme A, allora appartiene anche all'insieme P».

Usando il connettivo d'implicazione e il simbolo « $\in$ » al posto del verbo «appartiene», l'ultima frase può essere sintetizzata dalla seguente formula:

$$\text{poligono} \in A \Rightarrow \text{poligono} \in P \quad (1)$$

Questa formula, una volta imparato stabilmente il significato dei simboli, non può dare luogo a equivoci.

Possono essere invece meno chiare frasi come quelle seguenti, che pure traducono la formula (1):

- «Se scelgo un poligono in A, sono sicuro che è contenuto in P»;
- «Se un poligono è un quadrato, allora è certamente un rombo».

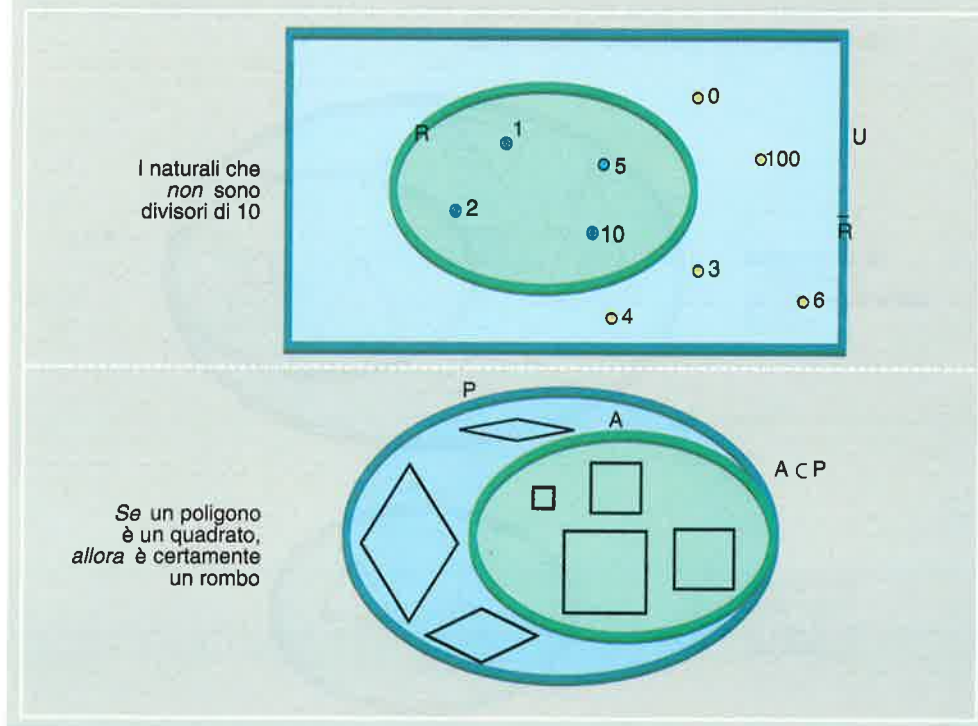


Figura 3  
Il connettivo «non» e gli insiemi

Figura 4  
Il connettivo di implicazione e gli insiemi



## Gli insiemi e la doppia implicazione

L'ultima frase scritta prima dà spesso luogo a obiezioni; forse perché si pensa che il quadrato ha «qualche cosa in più» che non viene detta, visto che oltre che un rombo è anche un rettangolo particolare.

In questo caso, come in molti altri, le obiezioni sono legate al fatto che le parole «se... allora...» sono interpretate erroneamente come doppia implicazione.

Ecco un altro esempio per chiarire meglio l'idea: in fig. 5 è rappresentato l'insieme I dei triangoli isosceli e, al suo interno, l'insieme E dei triangoli equilateri; si ha dunque:

$$E \subset I$$

Anche in questo caso la frase: «Se un triangolo è equilatero, allora è certamente isoscele» lascia qualche volta perplessi, mentre risulta fuori discussione la formula:

$$\text{triangolo} \in E \Rightarrow \text{triangolo} \in I$$

Non desta invece perplessità la frase: «Se un triangolo è equilatero, allora è equiangolo»; ma, in questo caso, le parole «se... allora...» descrivono una doppia implicazione (non si trovano triangoli che siano equiangoli senza essere equilateri).

Questo vuol dire che l'insieme F dei triangoli equiangoli *coincide* con l'insieme E dei triangoli equilateri (fig. 6), situazione che si descrive con la formula:

$$E \equiv F$$

dove il simbolo « $\equiv$ » si legge «coincide con».

In tal caso si scrive:

$$\text{triangolo} \in E \Leftrightarrow \text{triangolo} \in F$$

Si conclude dunque che:

- il connettivo di implicazione viene usato per descrivere situazioni che conducono a un insieme contenuto in un altro;
- il connettivo di doppia implicazione viene usato per descrivere situazioni che conducono a insiemi coincidenti.

Figura 5  
Un altro esempio  
del connettivo di  
implicazione

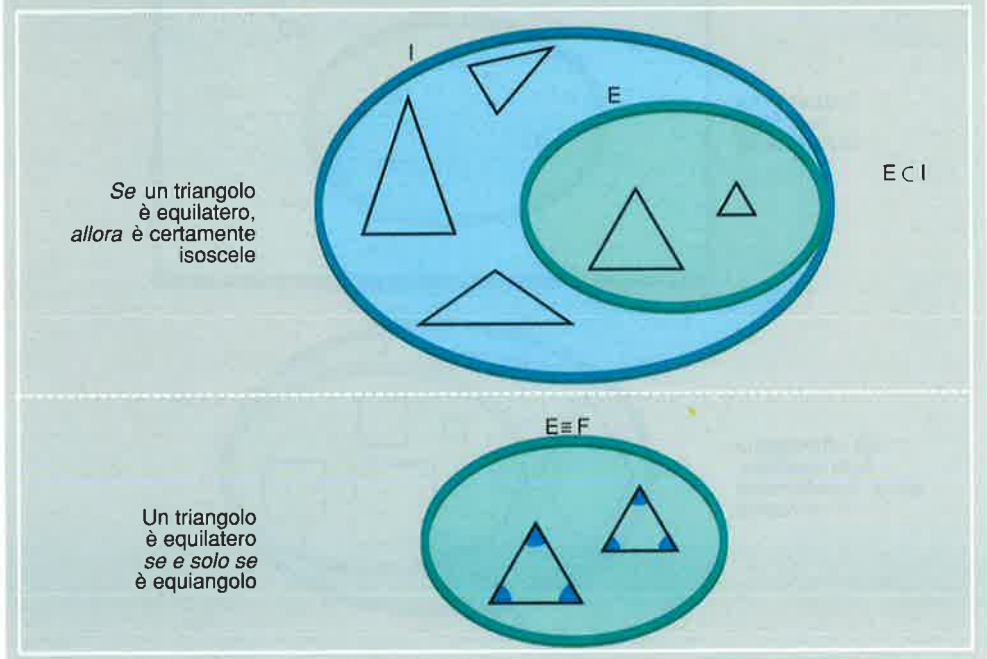


Figura 6  
Il connettivo di  
doppia implicazione  
e gli insiemi

# L'implicazione nell'enunciato dei teoremi

## Ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema

In questo volume si trovano tante proprietà che riguardano le figure geometriche o i numeri; molte di queste proprietà sono teoremi ricavati basandosi su altre proprietà che erano già note. Ecco un esempio tratto dalla geometria (vedi il capitolo terzo, p. 99): «**Se** due triangoli hanno gli angoli uguali, **allora** hanno i lati in proporzione».

Il teorema è espresso dunque sotto forma di una proposizione condizionale:

- la *premessa* è «i due triangoli hanno gli angoli uguali»;
- la *conseguenza* è «i due triangoli hanno i lati in proporzione».

Proprio dalla geometria, oggetto di studio degli antichi greci, provengono dei termini tradizionalmente usati per descrivere questo tipo di proposizioni condizionali:

- la *premessa* viene chiamata «*ipotesi*», dal termine greco *hypothesis*, che significa «quello che sta alla base» e si indica spesso con *H*;
- la *conseguenza* si chiama «*tesi*», cioè «quello che si ricava» e si indica con *T*;
- l'implicazione prende il nome di *enunciato del teorema*.

Così, nell'esempio considerato, si ha che:

- l'*ipotesi H* è: «i due triangoli hanno gli angoli uguali»;
- la *tesi T* è: «i due triangoli hanno i lati in proporzione»;
- l'*enunciato* è: è vera l'implicazione:

$$H \Rightarrow T \quad (1)$$

## Il teorema inverso di un dato teorema

Stabilito un teorema, ci si chiede se, insieme alla (1), vale anche l'implicazione:

$$T \Rightarrow H \quad (2)$$

Nell'esempio considerato, si è dunque condotti ad esaminare l'implicazione, in cui:

- la *premessa* è «i due triangoli hanno i lati in proporzione»;
- la *conseguenza* è «i due triangoli hanno gli angoli uguali».

Perciò l'enunciato del teorema è: «**Se** due triangoli hanno i lati in proporzione, **allora** hanno gli angoli uguali».

Si ottiene così un altro teorema, che è stato dimostrato nel capitolo terzo (p. 100). I due teoremi così ottenuti e cioè:

- è vera l'implicazione  $H \Rightarrow T$

- è vera l'implicazione  $T \Rightarrow H$

sono detti uno *l'inverso* dell'altro; si dice anche che *la tesi di un teorema diventa l'ipotesi del teorema inverso e viceversa*.

## Un teorema e il suo inverso riuniti in una doppia implicazione

L'enunciato di due teoremi l'uno inverso dell'altro può riunirsi in un unico enunciato, che prende allora la forma di una doppia implicazione. Riprendendo gli esempi esaminati prima, per riunire i due teoremi, l'uno inverso dell'altro, si scrive: è vera la doppia implicazione:

$$H \Leftrightarrow T$$

L'enunciato diventa allora: «Due triangoli hanno i lati in proporzione *se e solo se* hanno gli angoli uguali».

### Esaminare l'enunciato di un teorema

Spesso l'enunciato di un teorema non mostra chiaramente l'ipotesi e la tesi e perciò non si coglie subito l'implicazione.

Un esempio immediato è il teorema di Pitagora: «In un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».

In questo caso, per analizzare l'enunciato del teorema si può osservare che vi sono presenti due proposizioni:

$p$ : «il triangolo è rettangolo»;

$q$ : «la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».

Si hanno allora tre modi di leggere l'enunciato:

1. È noto che il triangolo è rettangolo e si vuole ricavare che la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa; in tal caso si ha che:  
 $H$ : «il triangolo è rettangolo»;

$T$ : «la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa»;

l'enunciato si può scrivere nella forma:

$$H \Rightarrow T$$

cioè: «Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa»;

2. È noto che la somma dei quadrati di due lati è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato e si vuole ricavare che il triangolo è rettangolo.

Si ha allora il teorema inverso del precedente e cioè: «Se in un triangolo la somma dei quadrati costruiti su due lati è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato, allora il triangolo è rettangolo».

3. Si vogliono riunire entrambi i teoremi, l'uno inverso dell'altro, in un unico teorema, che si può scrivere nella forma:

$$H \Leftrightarrow T$$

L'enunciato diventa allora: «Il triangolo è

rettangolo *se e solo se* la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».

Di questi tre enunciati è l'ultimo ad essere esaminato nelle pp. 2-4, dove infatti si trova che:

1. dal fatto che il triangolo è rettangolo si ricava che vale la proprietà pitagorica;
2. dal fatto che vale la proprietà pitagorica si ricava che un triangolo è rettangolo.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato dei termini seguenti:
  - ipotesi e tesi di un teorema;
  - enunciato di un teorema;
- ② Che cosa vuol dire che due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro?

### Comprensione

- ① Che differenza c'è fra l'ipotesi e la tesi di un teorema?

### Applicazioni

- ① Esaminare il primo teorema di Euclide, enunciato a p. 10, e cioè: «In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa», e rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. individuare le due proposizioni che vi sono presenti;
  - b. individuare i modi possibili di leggere l'enunciato;
  - c. qual è l'enunciato considerato a p. 10?
- ② Ripetere l'esercizio precedente a partire dal secondo teorema di Euclide, enunciato a p. 12 e cioè:
 

«In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa».

# Vari modi di enunciare un teorema

## Condizioni sufficienti

Lo studio delle proprietà dei numeri e delle figure geometriche si è sviluppato lungo molti secoli, perciò i teoremi non si trovano espressi sempre nella stessa forma.

Per capire il significato di alcuni enunciati che spesso ricorrono in matematica conviene riprendere la tavola di verità dell'implicazione presentata nel paragrafo 1 (p. 147) e tenere presente che, enunciando un teorema, si ha che:

- la premessa è l'ipotesi  $H$ ;
- la conseguenza è la tesi  $T$ ;
- l'enunciato del teorema asserisce che l'implicazione è vera.

Si debbono allora considerare solo tre righe della tabella di p. 147: quelle in cui l'implicazione è vera.

Si ottiene dunque una tabella come quella seguente:

Ipotesi $H$	Tesi $T$	Implicazione $H \Rightarrow T$
V	V	V
F	F	V
F	V	V

La tabella suggerisce un'osservazione: sapere che  $H$  è vera porta a selezionare la sola prima riga della tabella, riga in cui anche  $T$  è vera.

Si può dunque dire che:

«È **sufficiente** sapere che  $H$  è vera per essere certi che  $T$  è vera».

Riprendiamo un teorema esaminato nel paragrafo 1 e cioè:

«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».

In questo teorema si ha che:

- l'ipotesi  $H$  è  
«i due triangoli sono uguali»
- la tesi  $T$  è  
«i due triangoli hanno gli angoli uguali»
- l'enunciato è  
«è vera l'implicazione  $H \Rightarrow T$ »

Questo teorema si può enunciare nella forma seguente:

- a. Basta sapere che due triangoli sono uguali per essere certi che i triangoli hanno gli angoli uguali.

## Condizioni necessarie

Sapere che  $T$  è vera porta invece ad escludere la seconda riga della tabella A, e cioè si esclude solo che  $T$  sia falsa; questo è necessario per lasciare aperta la possibilità che  $H$  sia vera, anche se non basta per garantirlo.

Si può dunque dire che: «È **necessario** sapere che  $T$  è vera per stabilire se  $H$  è vera».

O, più precisamente: «Sapere che  $T$  è vera è **necessario, ma non sufficiente**, per stabilire che  $H$  è vera»

Ecco lo stesso teorema (a), espresso in altra forma.

- b. È necessario sapere che due triangoli hanno gli angoli uguali per stabilire se i triangoli sono uguali.



## Vari modi di esprimere un teorema

Ecco allora (fig. 1) alcune forme che può assumere l'enunciato di un teorema del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

1. - «È sufficiente sapere che  $H$  è vera per essere certi che  $T$  è vera»;
  - «La verità di  $H$  è sufficiente per asserire la verità di  $T$ »;
  - « $H$  è condizione sufficiente per  $T$ ».
2. - «È necessario sapere che  $T$  è vera per stabilire se  $H$  è vera»;
  - «La verità di  $T$  è necessaria per asserire la verità di  $H$ »;
  - « $T$  è condizione necessaria per  $H$ ».

## Condizioni necessarie e sufficienti

Analogamente, la verità della doppia implicazione:

$$H \Leftrightarrow T$$

si trova enunciata nei modi seguenti:

- «È necessario e sufficiente sapere che  $H$  è vera per essere certi che  $T$  è vera»;
- «La verità di  $H$  è necessaria e sufficiente per asserire la verità di  $T$ »;
- « $H$  è condizione necessaria e sufficiente per  $T$ ».

E così, per esempio, invece di dire «Se due triangoli hanno gli angoli uguali sono simili e viceversa», si può dire:

«È necessario e sufficiente che due triangoli abbiano gli angoli uguali, per essere certi che i due triangoli sono simili».

## Conoscenze

- ① Dire in quali modi si può enunciare un teorema del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

- ② Dire in quale modo si può enunciare un teorema del tipo:

$$H \Leftrightarrow T$$

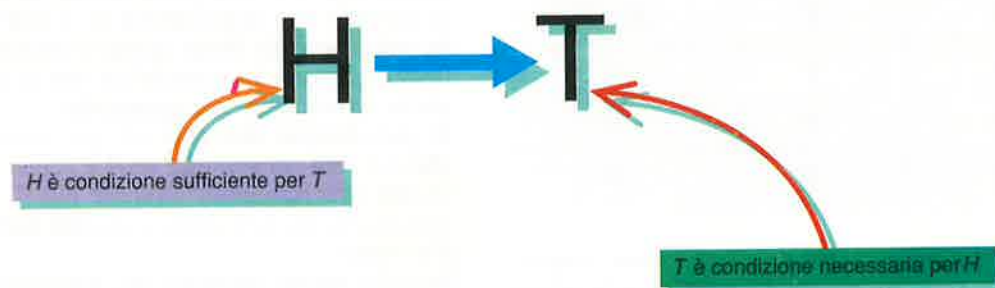
## Comprensione

- ① Spiegare il significato della frase: « $H$  è condizione sufficiente per  $T$ » e scrivere la corrispondente implicazione.
- ② Spiegare il significato della frase: « $T$  è condizione necessaria per  $H$ » e scrivere la corrispondente implicazione.
- ③ Spiegare il significato della frase: « $H$  è condizione necessaria e sufficiente per  $T$ » e scrivere la corrispondente implicazione.

## Applicazioni

- ① Esaminare un teorema a piacere ed esprimerlo nei modi indicati in questo paragrafo.

Figura 1  
Condizione necessaria e condizione sufficiente





# Definizioni e termini primitivi, teoremi e assiomi

## Una definizione introduce una nuova parola

In questo testo, come in molti altri libri, si trovano frasi che stabiliscono il significato da dare ad alcuni termini; ecco un esempio:

«Se un triangolo ha due lati uguali, allora è isoscele».

Questa asserzione può essere espressa più chiaramente con una delle frasi seguenti:

- «un triangolo con due lati uguali prende il nome di triangolo isoscele»;
- «si dice isoscele un triangolo con due lati uguali».

Queste due frasi esprimono chiaramente il fatto che la parola nuova (isoscele) sintetizza un concetto descritto con parole già note (triangolo con due lati uguali), perciò si può sostituire «triangolo isoscele» al posto di «triangolo con due lati uguali» e viceversa.

La prima frase invece presenta la stessa situazione sotto forma di un'implicazione, in cui si ha che:

- la premessa è «il triangolo ha due lati uguali»;
- la conseguenza è «il triangolo è isoscele».

Questa implicazione risulta poco chiara per due motivi:

1. Non chiarisce che si esprime una *definizione*, cioè che si definisce il significato della parola «isoscele»;
2. Non chiarisce che premessa e conseguenza sono legate da una doppia implicazione, dato che dire «triangolo isoscele» è lo stesso che dire «triangolo con due lati uguali».

Dunque, volendo esprimere la definizione in forma di implicazione, bisogna valersi della doppia implicazione e dire: «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali».

In conclusione, si ha che *una definizione introduce una nuova parola che sintetizza una proposizione espressa con parole già note*.

## I termini primitivi

Il fatto che una definizione introduce una nuova parola, spiegandone il significato attraverso parole già note, fa venire in mente la struttura di un vocabolario. E così, leggendo la frase «triangolo con due lati uguali», si può cercare sul vocabolario il significato delle parole «triangolo», «lati», «uguali».

E così si trova che «triangolo è un poligono con tre angoli» e, successivamente, che «poligono è una figura delimitata da segmenti» e «segmento è l'insieme dei punti di una retta compresi fra due suoi punti» e così via.

Continuando a cercare sul vocabolario il significato di altri termini geometrici, si arriva sempre a tre parole:

punto      retta      piano

Di queste parole la matematica dice che si tratta di *termini primitivi*, cioè di termini di cui non si dà la definizione.

La scelta fatta dalla matematica è chiara: non si può definire tutto, ci debbono essere poche parole-chiave, a partire dalle quali si definiscono tutte le altre.

Dunque in matematica, *i termini primitivi sono le parole di cui non si dà la definizione*.

## Un teorema esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note

Tornando ai triangoli isosceli, in geometria si può trovare anche la seguente proposizione:

«Un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele».

La proposizione ha di nuovo la forma di una doppia implicazione e può essere confrontata con la definizione data prima e cioè: «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali». Il confronto fa nascere una domanda: si tratta di due diverse definizioni di triangolo isoscele? Domande di questo tipo sono forse all'origine del grandioso lavoro di ricerca di Euclide, il famoso matematico del IV secolo a.C., che riordinò tutte le proprietà geometriche allora conosciute, mettendo in evidenza un fatto: alcune proprietà si potevano ricavare da altre. Per esempio, sapendo che un triangolo è isoscele, cioè che ha due lati uguali, si può ricavare che ha due angoli uguali, purché si conoscano anche i criteri di uguaglianza dei triangoli (vedi fig. 1).

Perciò la frase «Un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele» esprime una proprietà che si può ricavare a partire da altre già note, cioè è l'enunciato di un *teorema*, non è una definizione.

In conclusione, un *teorema* esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note.

### Gli assiomi

Proprio la fig. 1, che ha l'aspetto di un albero, fa capire che non si può dimostrare tutto; ci debbono essere delle proprietà che sono alla radice di tutte le altre.

Queste proprietà che non si ricavano da altre prendono il nome di *assiomi*, da un termine greco che significa «degno di essere creduto», o anche *postulati*, da un termine latino di analogo significato.

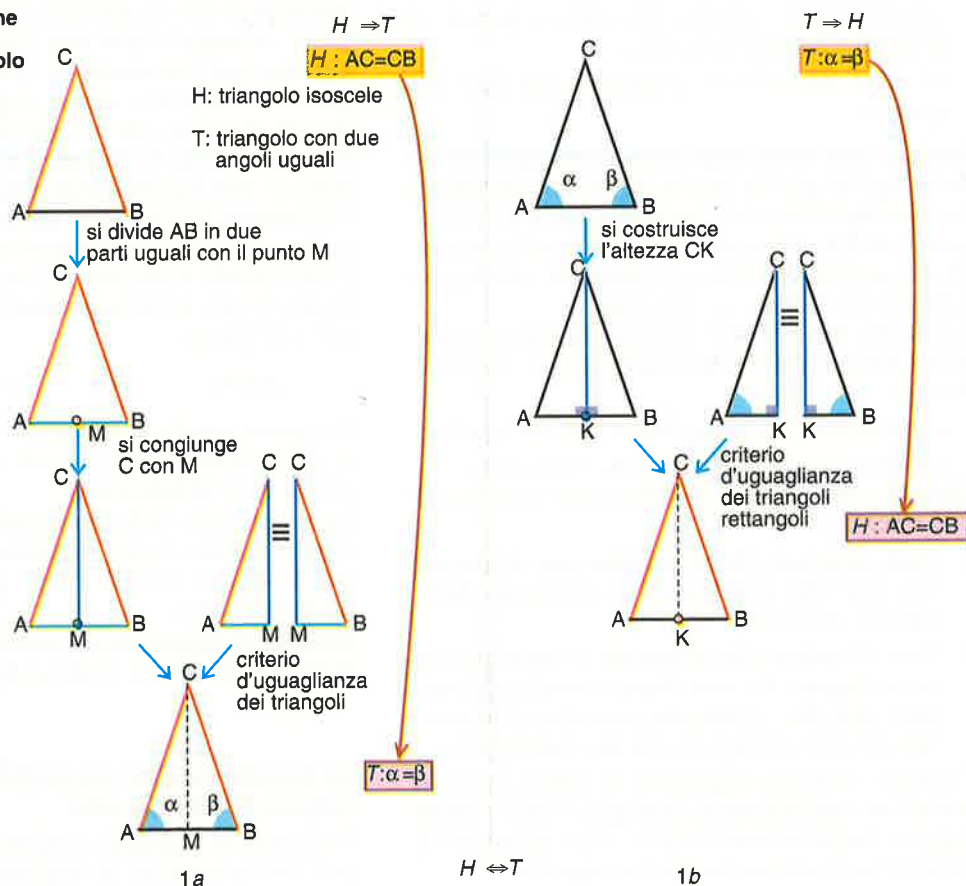
In conclusione, un *assioma* esprime una proprietà che si assume come vera senza ricavarla da altre.

### I cinque assiomi di Euclide e la geometria euclidea

Le proprietà che Euclide indica come assiomi sono i seguenti (fig. 2):

1. Per due punti passa una sola retta;
2. Si può prolungare indefinitamente una linea retta;

**Figura 1**  
Come si dimostra che un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele



3. Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali;
5. Se una retta, che interseca due altre rette, forma dalla stessa parte angoli coniugati la cui somma è inferiore a due retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

A partire da questi cinque assiomi Euclide riuscì a ricavare tutte le proprietà della geometria allora conosciuta, che veniva dunque sviluppata, come un albero ricco di rami e foglie, a partire dai cinque assiomi.

La geometria così sviluppata prende anche il nome di *geometria euclidea*.

La geometria euclidea è dunque organizzata nel modo seguente:

1. sono stabiliti dei *termini primitivi* (come punto, retta, piano);
2. sono stabiliti i *cinque assiomi* di Euclide, che descrivono delle proprietà dei termini primitivi;

3. dagli assiomi e dai termini primitivi si ricavano tante altre proprietà, che prendono il nome di *teoremi*.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato dei termini seguenti:
  - a. definizione e termine primitivo;
  - b. teorema e assioma;
  - c. assiomi di Euclide e geometria euclidea.

### Comprensione

- ① Spiegare qual è la differenza fra una definizione e un teorema.
- ② Spiegare qual è la differenza fra un termine primitivo e un assioma.

### Applicazioni

- ① Spiegare come si decide se la frase seguente è una definizione o un teorema: «Un triangolo è equilatero se e solo se ha i tre lati uguali».

**Figura 2**  
**Gli assiomi di Euclide**

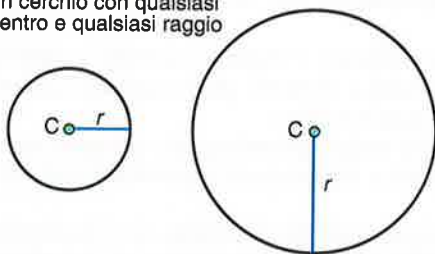
1. Per due punti passa una sola retta



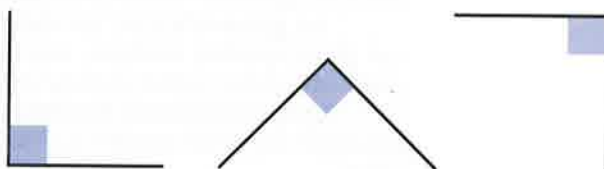
2. Si può prolungare indefinitamente una linea retta



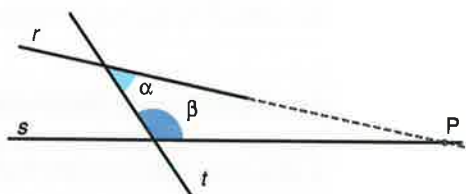
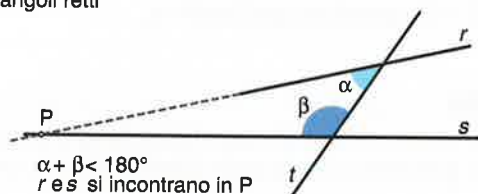
3. Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio



4. Tutti gli angoli retti sono uguali



5. Se una retta che interseca due altre rette, forma dalla stessa parte angoli coniugati la cui somma è inferiore a due retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti





## Qualche idea sulle geometrie non-euclidee

### Alcune ricerche sull'opera di Euclide

La geometria di Euclide rimase per secoli un'opera famosa, oggetto di studio e di ricerca da parte dei matematici.

Una delle ricerche più impegnative fu la seguente: i cinque assiomi di Euclide sono tutti necessari o ne bastano solo quattro per costruire la geometria euclidea?

Era il quinto assioma ad attirare soprattutto l'attenzione, perché sembrava che potesse essere dimostrato; in effetti furono pubblicate varie dimostrazioni di questo postulato, ma, a un'analisi più attenta, si trovò che le dimostrazioni si basavano sulla seguente proprietà: «per un punto passa una ed una sola retta parallela ad una retta data».

Questa proprietà non faceva parte dei quattro assiomi di Euclide e, dunque, costituiva un nuovo assioma, detto *assioma (o postulato) delle parallele*. Così gli assiomi rimanevano cinque, anche se il quinto poteva cambiare forma.

Per secoli si tentò di dimostrare l'assioma delle parallele, basandosi sempre soltanto sui primi quattro assiomi euclidei.

### L'idea di una geometria non-euclidea

I tentativi continuarono fino a che, nella prima metà dell'Ottocento, i matematici Nikolaj Lobačevskij (russo) e Janos Bolyai (ungherese) pubblicarono quasi contemporaneamente, ma senza essere a conoscenza l'uno degli studi dell'altro, due lavori che arrivavano alle stesse conclusioni: si può costruire una geometria coerente basata non solo sui primi quattro assiomi di Euclide, ma anche su un quinto assioma che contraddice l'assioma delle parallele, e cioè: «Per un punto passano più rette parallele ad una retta data».

La geometria così costruita lasciava inalterati i teoremi ricavati a partire dai primi quattro assiomi, ma modificava tutti i teoremi derivanti dal quinto postulato, perciò prese il nome di geometria non-euclidea.

Questa geometria dimostrava così che il quinto postulato era del tutto indipendente dai primi quattro e, dunque, non poteva certo essere considerato un teorema.

L'idea di una geometria non-euclidea per qualche decennio fu considerata una parte irrilevante della matematica, finché il matematico tedesco Bernhard Riemann riuscì a costruire una geometria non-euclidea, in cui il quinto postulato era: «Per un punto non si può tracciare la parallela ad una retta data».

Dopo i lavori di Riemann le geometrie non-euclidee divennero un fecondo settore di ricerca, arrivando anche ad importanti applicazioni.

### La geometria sulla Terra è non-euclidea

Sembra impossibile che le geometrie non-euclidee abbiano qualche applicazione: a che cosa può servire fondare una geometria su quattro invece che su cinque

assiomi o non poter condurre la parallela ad una retta?

Ma ecco una figura che condurrà ad applicare proprio la geometria di Riemann: in fig. 1a è riprodotta una carta geografica, su cui è segnata la rotta aerea Milano-Chicago; la linea che unisce le due città non è un segmento ma una linea curva.

Anche considerando le due città disposte sul mappamondo (fig. 1b) non si spiega la scelta della rotta: le due città si trovano sullo stesso parallelo e, invece, la rotta non segue affatto il parallelo.

Per studiare la situazione, isoliamo i due punti Milano (M) e Chicago (C) su una sfera e proviamo a congiungerli con archi di cerchio come in fig. 2: l'arco in verde è «più incurvato» dell'arco in blu e perciò è più lungo.

Se M e C fossero su un piano (fig. 3) il percorso più breve sarebbe quello in linea retta (in rosso).

Ma – ricordiamolo – siamo su una sfera, perciò l'arco «meno curvo» è quello di raggio più grande, cioè è il cerchio massimo che passa per M e C (in rosso in fig. 2).

Dunque, sulla sfera il percorso più breve fra due punti si ha su un arco di cerchio massimo.

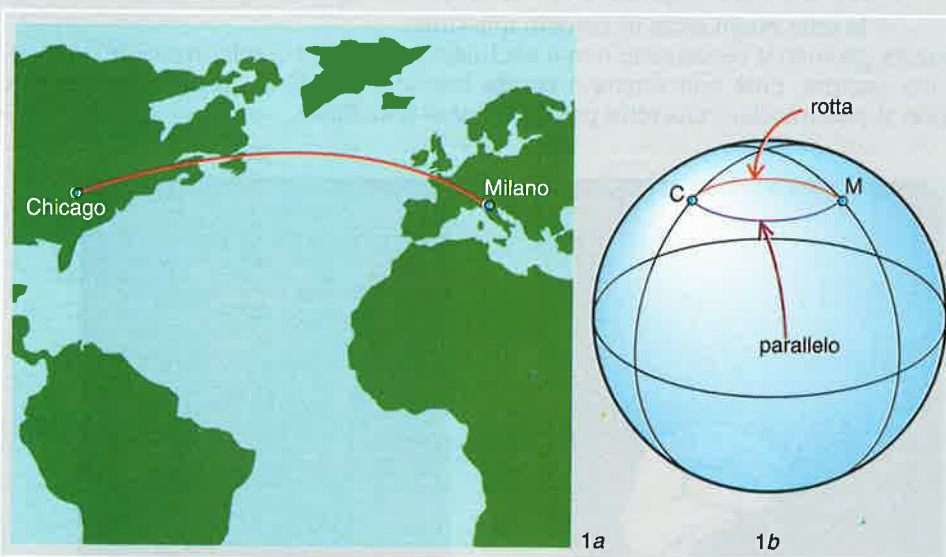


Figura 1  
La rotta Milano-Chicago

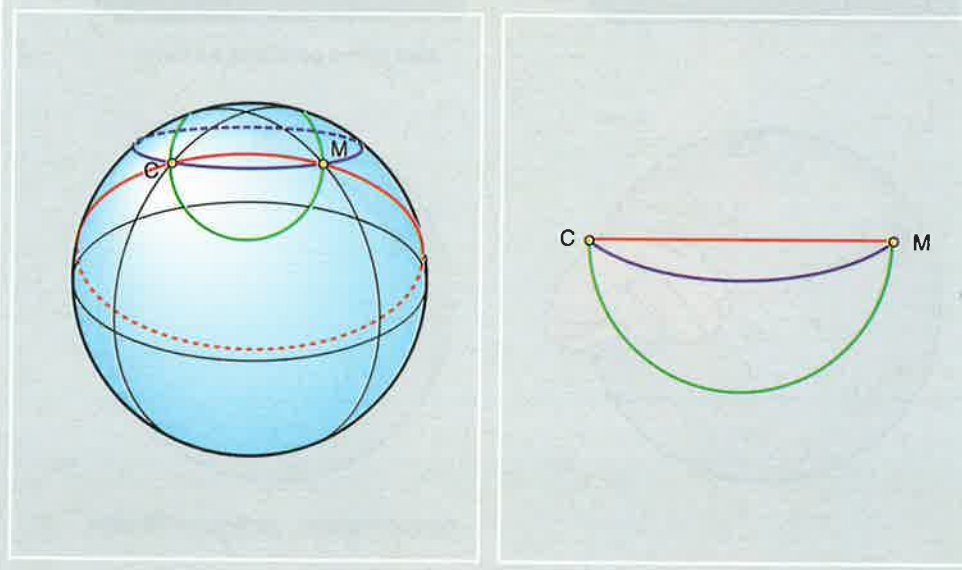


Figura 2 (a sinistra)  
Su una sfera il percorso  
più breve fra due punti  
si ha sul cerchio  
massimo

Figura 3 (a destra)  
Sul piano il percorso  
più breve è  
una linea retta



Il percorso più breve fra due punti prende anche il nome di *geodetica* di una superficie e così si può dire che:

- *sul piano le geodetiche sono le rette;*
- *sulla sfera le geodetiche sono i cerchi massimi.*

A queste stesse conclusioni si può arrivare con un semplice dispositivo (fig. 4):

- un elastico, che è collegato a due chiodi piantati su una tavoletta piana (fig. 4a), si dispone, una volta rilasciato, in modo che la tensione sia minima; ciò si realizza con l'elastico disposto lungo una linea retta (fig. 4b);
- un elastico collegato a due chiodi piantati su una sfera (fig. 4c) si dispone anch'esso in modo che la tensione sia minima; ciò si realizza con l'elastico disposto lungo il cerchio massimo (fig. 4d).

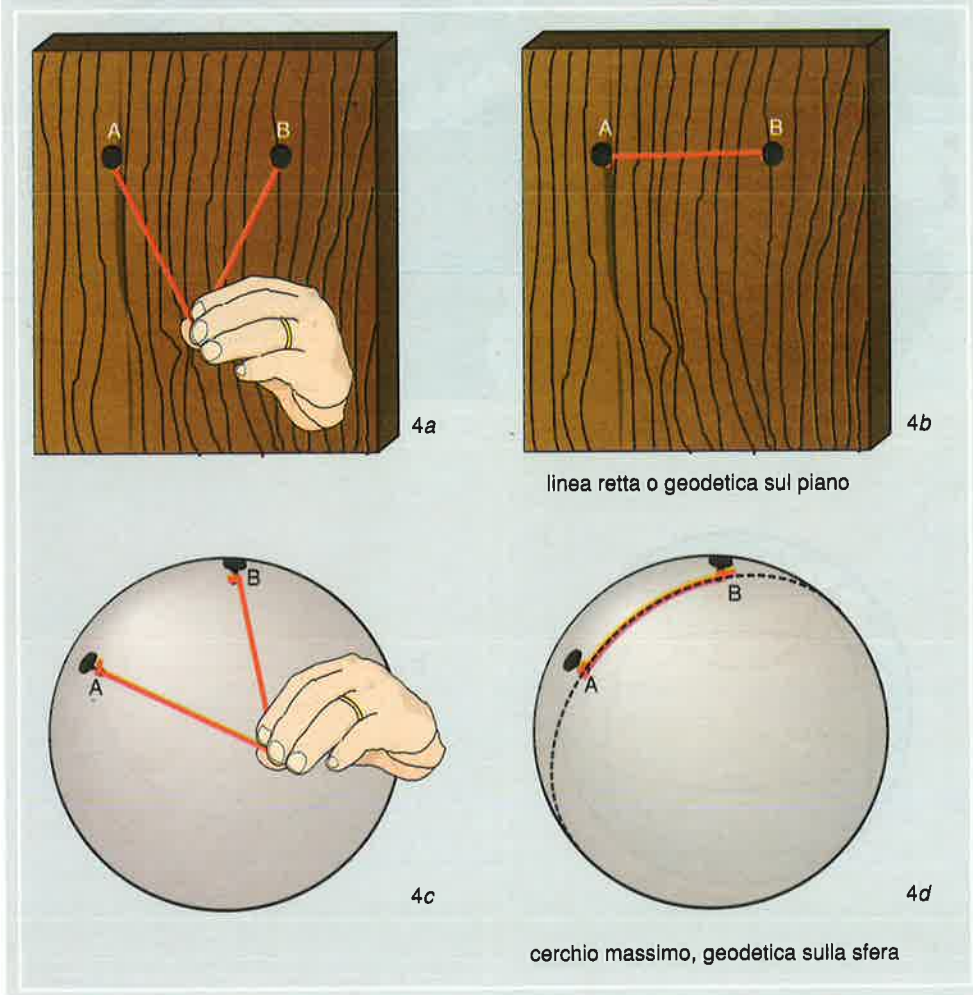
Si capisce allora quali sono le rotte scelte dagli aerei: sono le geodetiche della sfera, cioè gli archi di cerchio massimo.

Ecco ora come queste considerazioni sono collegate alle geometrie non euclidee. Riemann propose un modello di geometria che corrisponde proprio alla Terra su cui viviamo:

- il piano era la superficie di una sfera;
- le rette erano archi di cerchio massimo.

Questa geometria certamente non è euclidea, perché due cerchi massimi si incontrano sempre, cioè non esistono cerchi massimi paralleli. Accade dunque che «non si può tracciare una retta parallela a una retta data».

Figura 4  
Il percorso più breve  
fra due punti  
(geodetica)



### La geometria dell'Universo è non-euclidea

La Terra è però piccola cosa rispetto all'Universo; nel nostro Universo quale geometria vale?

Per molto tempo si è pensato che la Terra fosse immersa in uno spazio euclideo, in cui le geodetiche erano rette.

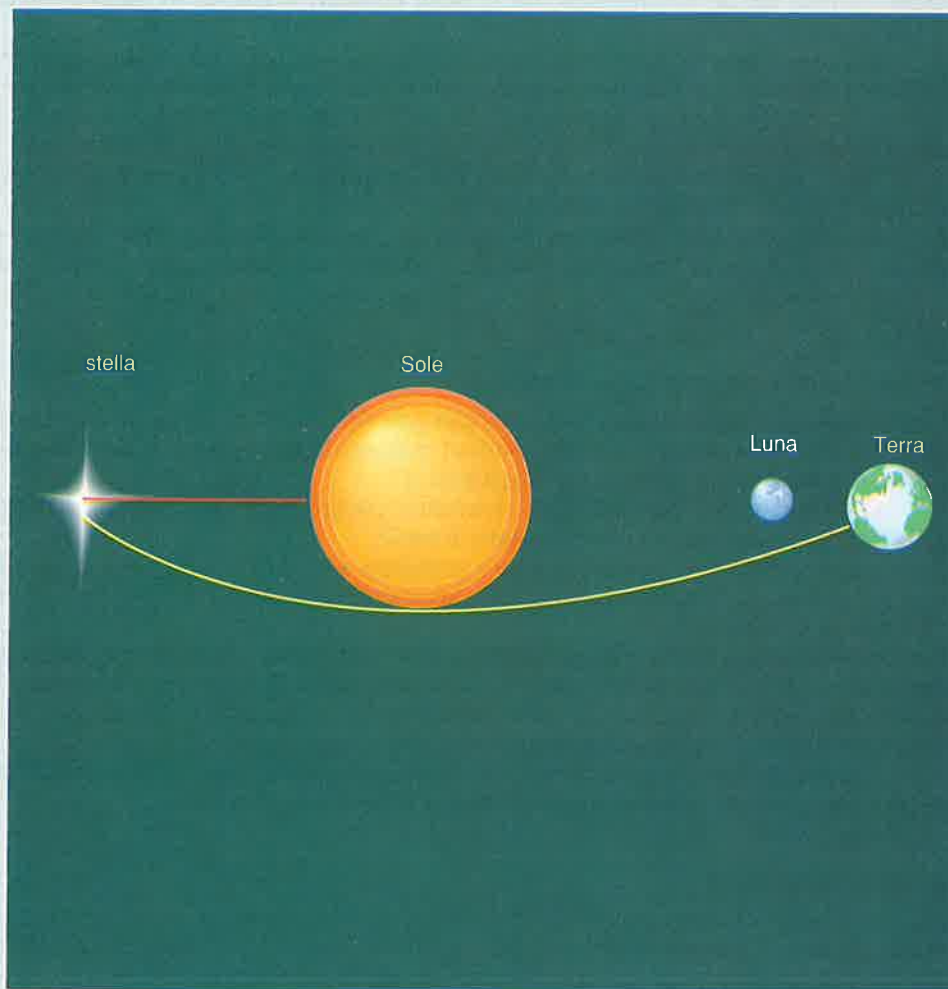
Ma nel 1916 Albert Einstein affermò, in base a studi matematici, che le geodetiche dell'Universo non erano rette e, dunque, nell'Universo, come sulla Terra, era valida una geometria non-euclidea.

Questa teoria fu confermata tre anni dopo in base a osservazioni astronomiche: durante un'eclisse totale di Sole, gli astronomi osservarono delle stelle che si trovavano proprio dietro al Sole (fig. 5). Questo voleva dire che la luce non seguiva un cammino rettilineo, che sarebbe stato «sbarrato» dal Sole (in rosso in fig. 5); seguiva invece una linea curva (in giallo in fig. 5) riuscendo così ad arrivare sulla Terra.

D'altra parte era noto che la luce segue sempre il percorso più breve, cioè segue le geodetiche dello spazio, e quindi si concluse che le geodetiche del nostro spazio sono linee curve; l'Universo dunque non è euclideo.

Così la geometria di Euclide, che per tanti secoli era stata l'unica «geometria vera», arriva a perdere il suo primato in confronto alle geometrie non-euclidee.

E soprattutto ci si rende conto che non ha più senso chiedersi: «Qual è la geometria vera?».



**Figura 5**  
La geometria  
dell'Universo  
non è euclidea

## La logica nella storia

### La logica ha origini molto antiche

Il vocabolo «logica» proviene da un termine greco che significa *discorso*, ma anche *ragionamento*. La logica nasce proprio in Grecia con gli antichi filosofi, fra i quali uno dei maggiori, Aristotele (del IV secolo a.C.), si propose di indagare sui modi di ragionare e di esprimersi.

Queste indagini, spesso sottili ed approfondite, condussero ad individuare alcune «regole del ragionamento», fra le quali compare qualcosa di molto vicino all'implicazione.

Ma ragionamenti e «ragionamenti sul modo di ragionare» erano sempre condotti nella lingua dell'epoca, il greco; non c'era traccia di formule che abbreviassero lunghe frasi ed era ancora di là da venire il calcolo letterale e il suo linguaggio stenografico.

Anche in matematica si ragionava e si dimostrava, ma l'unico supporto al pensiero erano le figure geometriche.

Questa situazione rimase quasi inalterata per molti secoli, mentre la matematica si sviluppava in tanti rami diversi e cominciava ad ammassarsi un'enorme quantità di risultati.

### I problemi sui fondamenti della matematica

È soprattutto nel XIX secolo che si trovano notevoli ricerche su un problema di fondo: su che cosa si basano tutti i risultati ottenuti in un dato ramo della matematica, per esempio la geometria o l'aritmetica?

Ogni risultato è generalmente ricavato a partire da altri risultati già noti; ma i risultati precedenti, su che cosa sono basati?

Fra le ricerche si trovano anche i problemi nati dall'esame degli assiomi della geometria euclidea e la nascita delle geometrie non-euclidee (vedi la scheda informativa a p. 160).

Alla fine del secolo emerge dunque una particolare immagine di tutta la matematica, non solo di alcuni suoi rami: la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui, a partire da certe premesse (gli assiomi), si traggono tante conclusioni valide, ma non ha senso chiedersi se gli assiomi siano o no veri.

È a questo punto che le ricerche si focalizzano sulla logica e in particolare sui procedimenti per ricavare risultati validi a partire dagli assiomi.

### La logica matematica

Ma, per studiare la logica così come si era studiata la geometria o l'aritmetica, mancava un linguaggio adeguato; per questo il matematico Giuseppe Peano (fig. 1), con un gruppo di logici e matematici, dedicò circa quindici anni a com-



pletare un'imponente opera: il *Formulario di matematica* (1894-1908).

In quest'opera compaiono per la prima volta i simboli « $\sim$ », « $\cap$ », « $\cup$ », « $\supset$ » per indicare i connettivi «non», «e», «o» e l'implicazione; lo scopo era ambizioso: creare un linguaggio formalizzato privo di ambiguità, perché costituito solo da simboli chiaramente definiti.

Peano riteneva di aver raggiunto pienamente il suo scopo: «Si vuole studiare un argomento qualunque? Si apra il formulario e si troveranno in poche pagine tutte le verità conosciute su quell'argomento, insieme alle loro dimostrazioni e alle indicazioni storiche».

Ma qual era la matematica che il formulario di Peano poteva presentare?

Per poter essere descritta con i simboli di Peano, una teoria matematica doveva essere abbastanza consolidata da potervi riconoscere i termini primitivi, gli assiomi e le regole per dimostrare i teoremi. Non vi si potevano trovare teorie nascenti, al momento del loro caotico sviluppo iniziale.

Ecco perché, a partire dalla fine del secolo, Peano seguì poco gli sviluppi delle nuove teorie, per dedicarsi a introdurre il formulario nel suo insegnamento universitario, ottenendo però un clamoroso insuccesso: gli studenti ritenevano inaccettabile lo studio della matematica esposta solo attraverso i nuovi simboli.

D'altra parte, l'introduzione della logica simbolica incontrò il favore dei matematici e gradualmente si diffuse sempre di più, favorendo lo sviluppo della logica matematica.

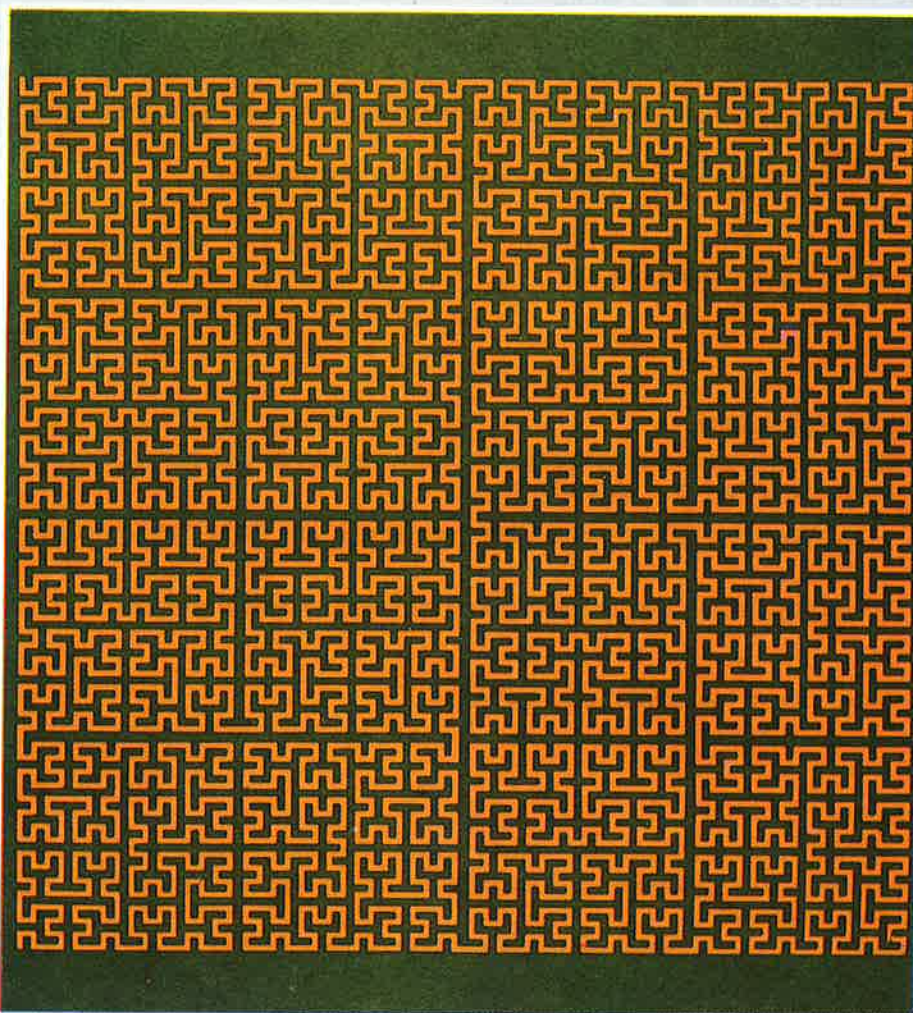


Figura 1  
La «curva di Peano»,  
una curva continua che  
costruisce un'area,  
fu il frutto di una  
dimostrazione del  
matematico italiano



# Che cosa bisogna sapere

## L'implicazione

Un'implicazione è una proposizione che si ottiene componendo due proposizioni  $p$  e  $q$  mediante le parole «se... allora...»;

- la proposizione  $p$ , scritta subito dopo la parola «se», si chiama *premessa* (o antecedente), la proposizione  $q$  si chiama *conseguenza* (o conseguente);
- un'implicazione è falsa solo se la premessa  $p$  è vera e la conseguenza  $q$  è falsa;
- un'implicazione si esprime brevemente con la formula:

$$p \Rightarrow q$$

che si legge: « $p$  implica  $q$ ».

## La doppia implicazione

Una doppia implicazione è una proposizione composta da due proposizioni  $p$  e  $q$  unite mediante le parole «...se e solo se...»;

- una doppia implicazione è falsa quando una sola delle due proposizioni è falsa;
- una doppia implicazione si esprime brevemente con la formula:

$$p \Leftrightarrow q$$

che si legge: « $p$  implica  $q$  e viceversa».

## Definizione

Una definizione introduce una parola nuova che sintetizza una proposizione espressa con parole già note. Una definizione può presentarsi nella forma di una doppia implicazione.

*Esempio:* «Si dice isoscele un triangolo con due lati uguali»

«Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali».

### Termine primitivo

È una parola di cui non si dà la definizione.

*Esempio:* In geometria sono termini primitivi «punto», «retta», «piano».

### Teorema

Un teorema esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note.

*Esempio:* «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli uguali».

### Assioma

Un assioma esprime una proprietà che si assume come vera senza ricavarla da altre.

*Esempio:* «Per due punti passa una sola retta».

### Vari modi di enunciare un teorema

Un teorema si può esprimere con un'implicazione del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

dove:

- la premessa  $H$  prende il nome di *ipotesi*;
- la conseguenza  $T$  prende il nome di *tesi*;
- l'enunciato del teorema è: è vera l'implicazione.

Altre forme per enunciare un teorema sono le seguenti:

- |   |  |
|---|--|
| 1. «È sufficiente sapere che $H$ è vera per essere certi che $T$ è vera»; | 2. «È necessario sapere che $T$ è vera per stabilire se $H$ è vera»; |
| «La verità di $H$ è sufficiente per asserire la verità di $T$ »;          | «La verità di $T$ è necessaria per asserire la verità di $H$ »;      |
| « $H$ è condizione sufficiente per $T$ ».                                 | « $T$ è condizione necessaria per $H$ ».                             |

### Teorema inverso di un dato teorema

Dato un teorema espresso nella forma:

$$H \Rightarrow T$$

il *teorema inverso* si presenta nella forma:

$$T \Rightarrow H$$

### Un teorema e il suo inverso riuniti in una doppia implicazione

L'enunciato di due teoremi, l'uno inverso dell'altro, può riunirsi in un unico enunciato che ha la forma di una doppia implicazione, cioè:

$$H \Leftrightarrow T$$

In tal caso l'enunciato si può esprimere con la frase: « $H$  è condizione necessaria e sufficiente per  $T$ ».

# Che cosa bisogna saper fare

## L'implicazione

### Attività 1

Sono date le proposizioni seguenti:

$p$ : «un numero è multiplo di 6»;

$q$ : «il numero è pari».

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere con una frase l'implicazione:

$$p \Rightarrow q$$

b. completare la seguente tabella:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
<b>VERA</b> 12 è multiplo di 6	<b>VERA</b> 12 è pari	<b>VERA</b> Si può dire: .....
<b>FALSA</b> 15 è multiplo di 5	<b>FALSA</b> .....	<b>VERA</b> Si può dire: .....
<b>VERA</b> .....	<b>FALSA</b> .....	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è <i>falso</i> ): .....
<b>FALSA</b> 10 è multiplo di 5	<b>VERA</b> .....	<b>VERA</b> Si può dire: «Anche se 10 è multiplo di 5, è un numero pari»

## La doppia implicazione

### Attività 2

Sono date le proposizioni seguenti:

$p$ : «un quadrilatero è un parallelogramma»;

$q$ : «il quadrilatero ha i lati opposti uguali».

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. descrivere con una frase la doppia implicazione:

$$p \Leftrightarrow q$$

- b. esaminare le figure 1-2 e completare la seguente tabella:

<i>p</i>	<i>q</i>	<i>p</i> $\Leftrightarrow$ <i>q</i>
<b>VERA</b> ..... .....	<b>VERA</b> ..... .....	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome ABCD è un parallelogramma, ha i lati opposti uguali
<b>FALSA</b> ..... .....	<b>FALSA</b> ..... .....	<b>VERA</b> Si può dire: «Siccome EFGH è un trapezio, ha i lati opposti disuguali»
<b>VERA</b> ..... .....	<b>FALSA</b> ..... .....	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è <i>falso</i> ): .....
<b>FALSA</b> ..... .....	<b>VERA</b> ..... .....	<b>FALSA</b> Si può dire (ma è <i>falso</i> ): .....»

Figura 1  
Un parallelogramma

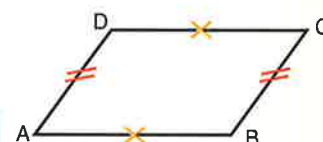
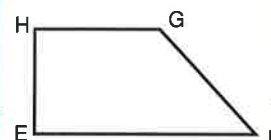


Figura 2  
Un trapezio



### Attività 3

Esaminare la seguente proposizione:

«Se un numero è positivo, allora il suo cubo è positivo».

Risolvere i seguenti quesiti:

- individuare la premessa *p* e la conseguenza *q*;
- stabilire se l'implicazione è doppia, formulando una domanda adatta;
- scrivere la proposizione valendosi dell'adatto connettivo di implicazione.

### Esaminare l'enunciato di un teorema

#### Attività 4

Esaminare il teorema seguente:

«Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora formano angoli alterni interni uguali».

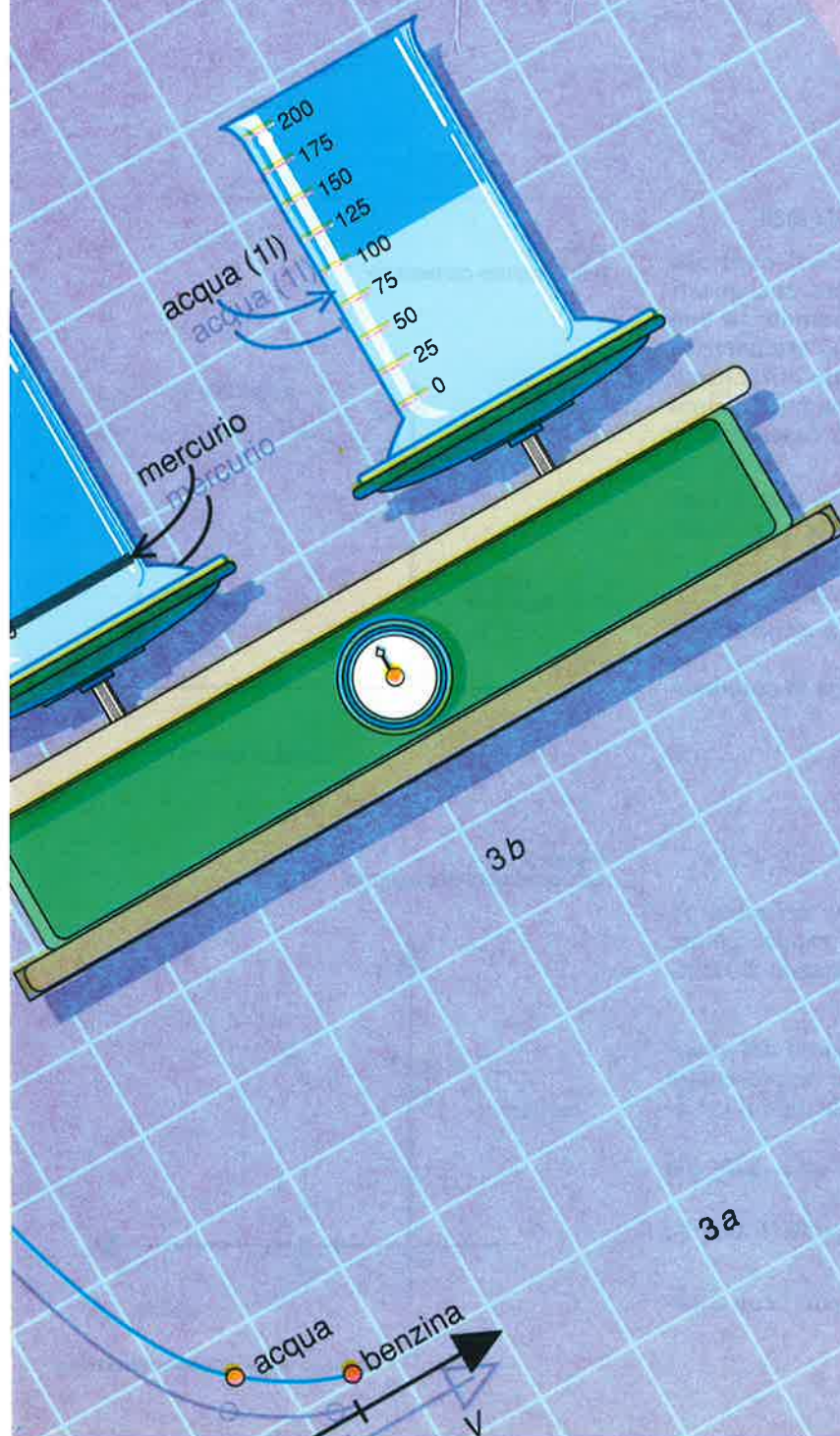
Rispondere ai seguenti quesiti:

- individuare l'ipotesi *H*, la tesi *T* e scrivere il teorema sotto forma di implicazione;
- scrivere sotto forma di implicazione il teorema inverso e, quindi, enunciarlo a parole;
- riunire i due teoremi precedenti in un unico teorema;
- enunciare quest'ultimo teorema mediante le condizioni necessarie e sufficienti.





# GEOMETRIA ANALITICA



1.  
Le coordinate reali.  
L'equazione della circonferenza

2.  
Rappresentare leggi matematiche  
sul piano cartesiano

**Scheda applicativa.**  
Alcune leggi matematiche  
suggerite dalle scienze sperimentali

**Scheda informativa.**  
Curve crescenti e curve decrescenti

3.  
Le funzioni in geometria analitica.  
La parabola e l'iperbole

4.  
Curve, funzioni e relazioni

**Scheda storica.**  
Il concetto di funzione nella storia

**Scheda applicativa.**  
Le funzioni nella realtà

5.  
Le funzioni  $y = x^n$  e il loro grafico

6.  
La funzione  $y = |x|$  e il suo grafico

**Scheda informativa.**  
Il riferimento polare

**Sintesi.**  
Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**  
Che cosa bisogna saper fare

# Le coordinate reali. L'equazione della circonferenza

## Riferimento cartesiano e coordinate reali

Studiando i numeri reali (vedi il capitolo secondo, pp. 46-49) si è trovato che questi numeri possono essere rappresentati su una retta. Questo procedimento si può estendere al piano, riprendendo il *riferimento cartesiano* rappresentato in fig. 1 (vedi anche il primo volume, p. 330). Nella figura si osservano in particolare:

- gli *assi coordinati* (o *assi cartesiani*), cioè l'*asse delle ascisse* (o *asse delle x*) e l'*asse delle ordinate* (o *asse delle y*);
- il punto O, detto *origine degli assi*;
- il segmento OU, che è l'*unità di misura delle lunghezze*.

In fig. 2 è indicato un punto P con le coordinate irrazionali:

$$P(\sqrt{2}; \sqrt{5})$$

La fig. 2 ricorda che:

- le *coordinate* sono i due numeri  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$ ;
- il *primo numero*  $\sqrt{2}$  è l'*ascissa del punto P*, cioè è il numero che si deve rappresentare sull'*asse delle ascisse*, individuando il corrispondente punto A;
- il *secondo numero*  $\sqrt{5}$  è l'*ordinata del punto P*, cioè è il numero che si deve rappresentare sull'*asse delle ordinate*, individuando il corrispondente punto B;
- da A si traccia la parallela all'*asse delle y* e da B la parallela all'*asse delle x*;
- le due rette si incontrano nel punto P che ha le due coordinate assegnate.

In fig. 3 sono rappresentati altri punti con coor-

Figura 1  
Il riferimento cartesiano

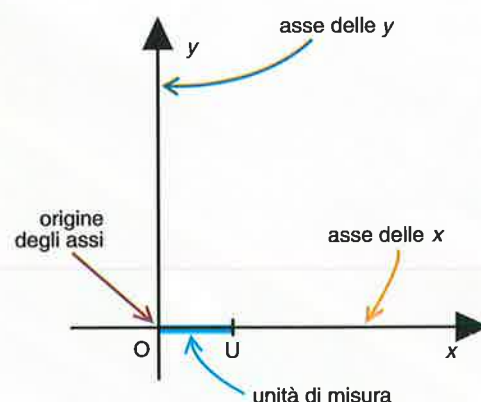
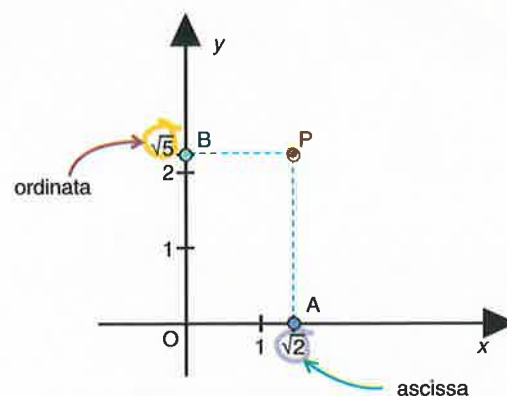


Figura 2  
Le coordinate di un punto





dinate irrazionali, e cioè:

- $Q(\sqrt{5}; \sqrt{2})$ , che ha le coordinate scritte in ordine diverso da quelle di P;
- $R(-\sqrt{2}; -\sqrt{5})$ , che ha le coordinate opposte a quelle di P.

Il riferimento cartesiano permette dunque di rappresentare non solo i punti con coordinate razionali (come si era visto nel primo volume), ma anche i punti con coordinate irrazionali. In conclusione, *si possono rappresentare nel piano cartesiano tutti i punti con coordinate reali.*

### Equazione delle rette parallele agli assi

La figura 4 aiuta a ricordare il procedimento seguito per scrivere l'equazione di una retta

parallela ad uno degli assi cartesiani.

Esaminando la retta  $r$  che passa per il punto  $Q(\sqrt{5}; \sqrt{2})$  ed è parallela all'asse delle  $y$ , si trova che *tutti i punti allineati su  $r$  hanno la stessa ascissa che vale  $\sqrt{5}$* ; questa frase si riassume con la formula:

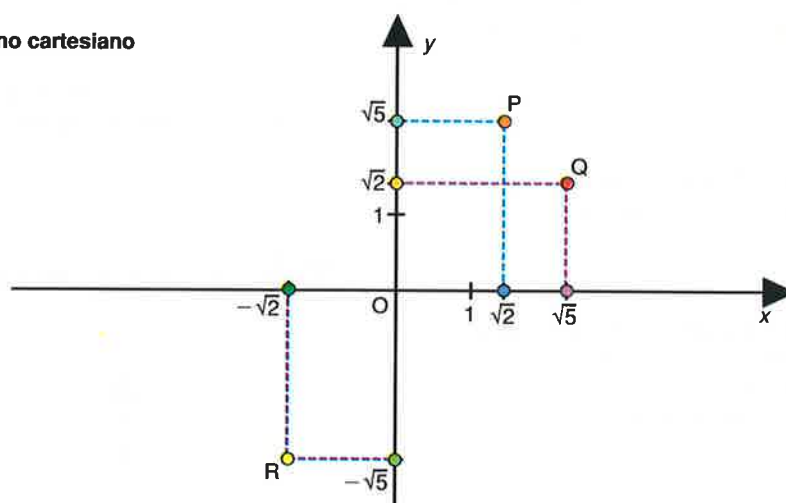
$$x = \sqrt{5}$$

Questa formula prende il nome di *equazione della retta  $r$* .

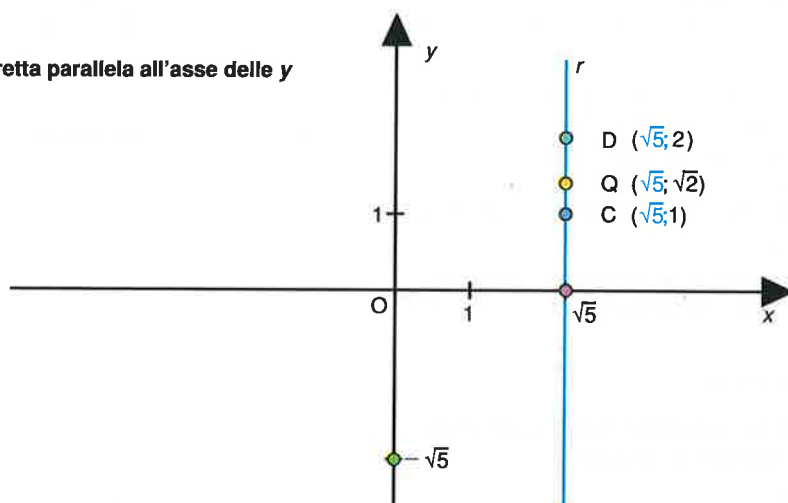
La formula diventa più espressiva immaginando un punto  $P$  che si muove sul piano cartesiano; le coordinate di questo punto variano durante il movimento e vengono indicate con le lettere  $x, y$ . Si scrive dunque:

$$P(x; y)$$

**Figura 3**  
Alcuni punti sul piano cartesiano



**Figura 4**  
L'equazione di una retta parallela all'asse delle  $y$





Ora, il punto P percorre proprio la retta  $r$  solo se la sua ascissa  $x$  mantiene sempre il valore  $\sqrt{5}$ ; questo vuol dire che deve risultare:

$$x = \sqrt{5}$$

In generale, si ha che una retta parallela all'asse delle  $y$  ha sempre l'equazione del tipo:

$$x = a$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà: un punto  $P(x; y)$  variabile sul piano cartesiano percorre la retta solo se la sua ascissa  $x$  vale sempre  $a$ .

Si può ragionare in modo del tutto analogo a partire dalla retta  $s$  che passa sempre per il punto  $Q(\sqrt{5}; \sqrt{2})$ , ma è parallela all'asse delle  $x$  (fig. 5). In questo caso si trova che  $P(x; y)$  percorre proprio la retta  $s$  solo se la sua ordinata  $y$  mantiene sempre il valore  $\sqrt{2}$ ; perciò l'equazione della retta  $s$  è:

$$y = \sqrt{2}$$

In generale si avrà allora che una retta parallela all'asse delle  $x$  ha sempre l'equazione del tipo:

$$y = b$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà: un punto  $P(x; y)$  variabile sul piano cartesiano percorre la retta solo se la sua ordinata  $y$  vale sempre  $b$ .

### Equazione della circonferenza

Si può esaminare in modo analogo un'altra linea tracciata sul piano: la circonferenza di fig. 6a, che ha il centro nell'origine  $O$  e il raggio lungo 2.

Anche in questo caso si immagina un punto  $P(x; y)$  variabile sul piano (fig. 6b) e si osservano le sue coordinate mentre  $P$  percorre la circonferenza. Si nota che tutte e due le coordinate cambiano, mentre deve sempre valere 2 la distanza di  $P$  da  $O$ .

Ora,  $PO$  è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo  $OPH$  a cui si può applicare il teorema di Pitagora; si ha:

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

da cui si ottiene la seguente equazione della circonferenza di centro  $O$  e raggio 2:

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

Lo stesso ragionamento si può seguire per tutte le altre circonferenze che hanno il centro nell'origine  $O$ ; si otterrà dunque un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

dove  $r$  indica la lunghezza del raggio.

Viceversa, ogni equazione del tipo (1) rappresenta una circonferenza che ha il centro nell'origine  $O$  e il raggio lungo  $r$ .

Per esempio, l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 2$$

rappresenta la circonferenza per cui risulta:

$$r^2 = 2 \quad \text{e cioè} \quad r = \sqrt{2}$$

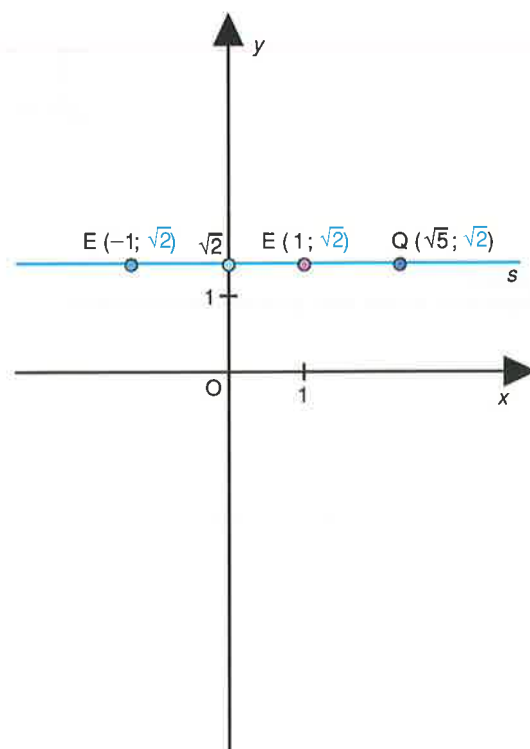
## Verifiche

### Conoscenze

- ① Qual è l'equazione di una circonferenza che ha il centro nell'origine  $O$  e il raggio lungo  $r$ ?

Figura 5

L'equazione di una retta parallela all'asse delle  $x$



- ② In un riferimento cartesiano disegnare una circonferenza con centro in O e determinarne l'equazione.

#### Comprensione

- ① Spiegare in quale modo si trova l'equazione di una circonferenza che ha il centro nell'origine O.  
 ② Sul piano cartesiano c'è un solo punto che dista 2 dall'origine?

#### Applicazioni

- ① Rappresentare sul piano cartesiano i punti che hanno le seguenti coordinate:

$$S(\sqrt{2}; -\sqrt{5}) \quad T(-\sqrt{2}; \sqrt{5}) \quad V(\sqrt{5}; -\sqrt{2})$$

- ② Scrivere l'equazione delle due rette che passano per S e sono parallele agli assi cartesiani.  
 ③ Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro nell'origine O e il raggio lungo  $\sqrt{5}$ .

- ④ Tracciare i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

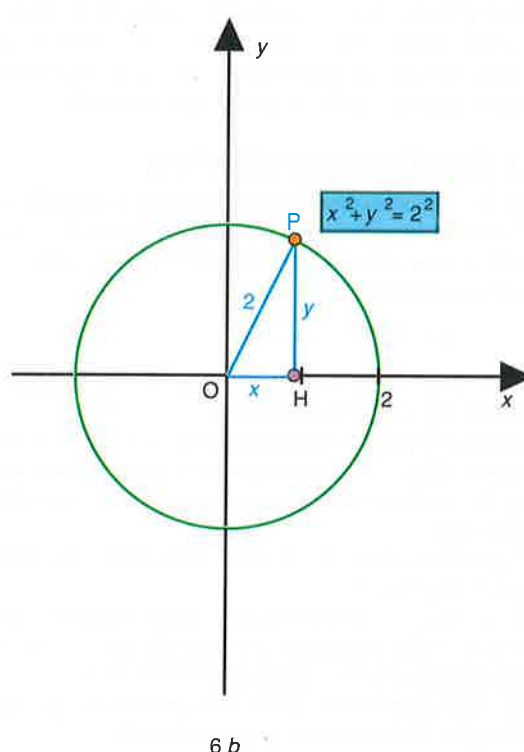
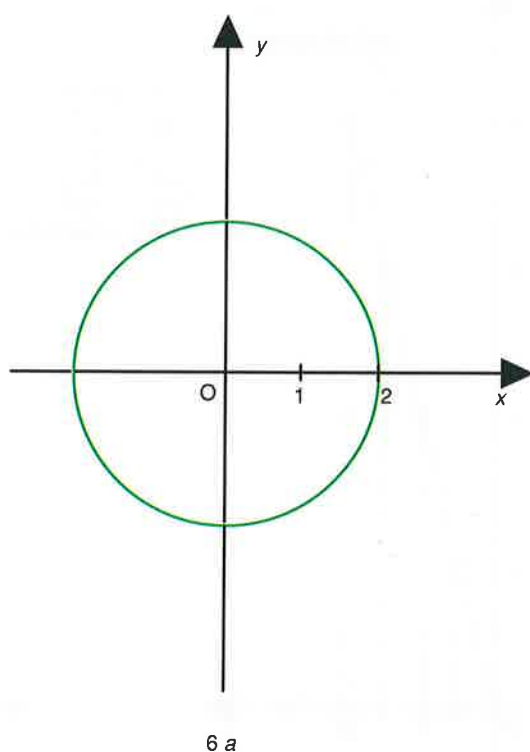
$$x = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}$$

#### Collegamento con il primo volume

- ① Spiegare il significato dei termini «ascissa» e «ordinata».  
 ② Spiegare come si trova l'ascissa e l'ordinata di un punto.  
 ③ Quali sono le coordinate dell'origine O? (Vedere il capitolo 8, paragrafo 1).  
 ④ Tutte le frasi seguenti sono errate; correggere gli errori.  
 (Vedere il capitolo 8, paragrafo 1).  
 «Le ordinate di un punto sono due numeri»;  
 «Il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano ascissa e ordinata»;  
 «Il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano  $x$  e  $y$ ».  
 ⑤ Quali sono le equazioni degli assi cartesiani? (Vedere il capitolo 8, paragrafo 2).

**Figura 6**  
L'equazione di una circonferenza che ha centro in O



# Rappresentare leggi matematiche sul piano cartesiano

Finora il riferimento cartesiano è stato utilizzato prevalentemente per uno scopo: scrivere le equazioni che descrivono alcune linee tracciate sul piano (rette o circonferenze); queste equazioni legano con una formula le variabili  $x$  e  $y$ , che sono le coordinate di un punto variabile sulla linea.

Ora, soprattutto nelle applicazioni, si incontra spesso il problema inverso: è data una legge matematica che lega due grandezze variabili e si vuole visualizzare questa legge con un grafico.

Questo paragrafo si occupa appunto di quest'ultimo problema, esaminando in particolare alcune leggi suggerite dalla matematica stessa; nella scheda applicativa (p. 181) si trovano invece alcuni esempi di leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali.

## La legge di proporzionalità diretta

In fig. 1a sono rappresentati tanti quadrati con il lato di lunghezza  $h$  sempre più grande, insieme ad una tabella che fornisce il perimetro  $p$  di ogni quadrato; risulta:

$$p = 4h$$

cioè il perimetro  $p$  si ottiene moltiplicando il lato  $h$  per il numero fisso 4.

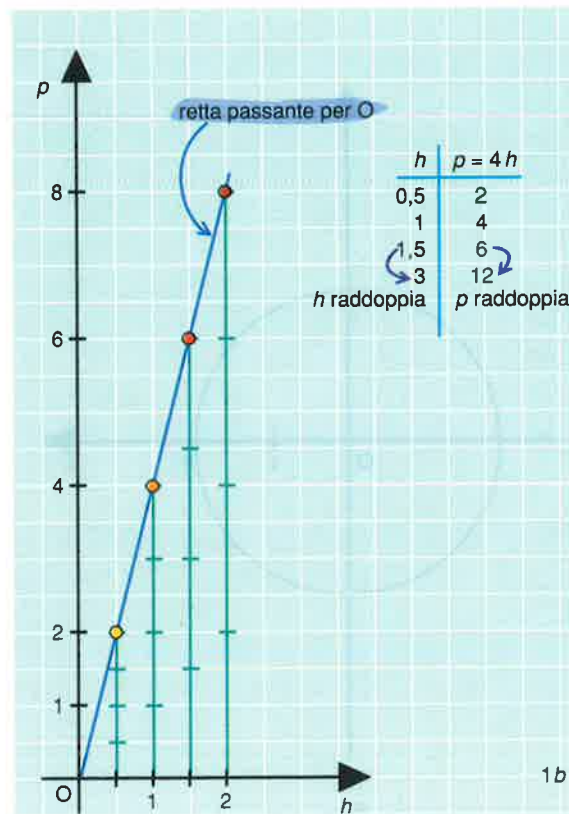
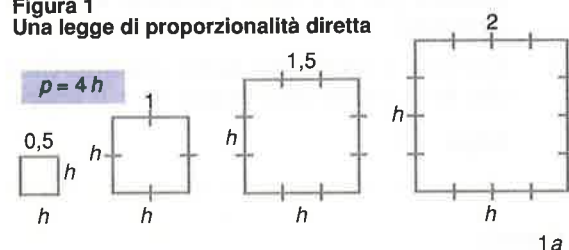
Questa legge è rappresentata sul piano cartesiano (fig. 1b), riportando il lato  $h$  sull'asse delle ascisse e il perimetro  $p$  sull'asse delle ordinate.

Il grafico ottenuto è una semiretta che passa per l'origine  $O$ .

Il grafico è caratterizzato dalla seguente proprietà: raddoppiando una grandezza (il lato  $h$ ), raddoppia anche l'altra (il perimetro  $p$ ).

Le due grandezze (lato  $h$  e perimetro  $p$ ) sono dunque *direttamente proporzionali*.

**Figura 1**  
Una legge di proporzionalità diretta



Si ritrovano così *alcune caratteristiche fondamentali della legge di proporzionalità diretta*:

- una grandezza si ottiene moltiplicando l'altra per un numero fisso;
- il grafico è una retta che passa per O;
- raddoppiando una grandezza raddoppia anche l'altra.

### La legge parabolica

In fig. 2a sono rappresentati gli stessi quadrati con il lato di lunghezza  $h$  sempre più grande, ma ora la tabella fornisce l'area  $S$  di ogni quadrato; risulta:

$$S = h^2$$

Cioè l'area  $S$  si ottiene elevando al quadrato il lato  $h$ .

La legge è rappresentata sul piano cartesiano (fig. 2b), riportando il lato  $h$  sull'asse delle ascisse e l'area  $S$  sull'asse delle ordinate.

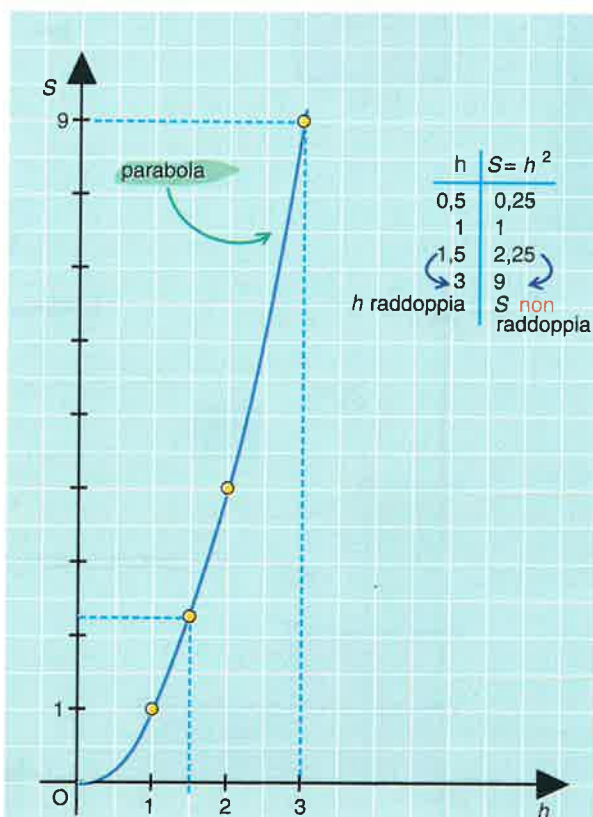
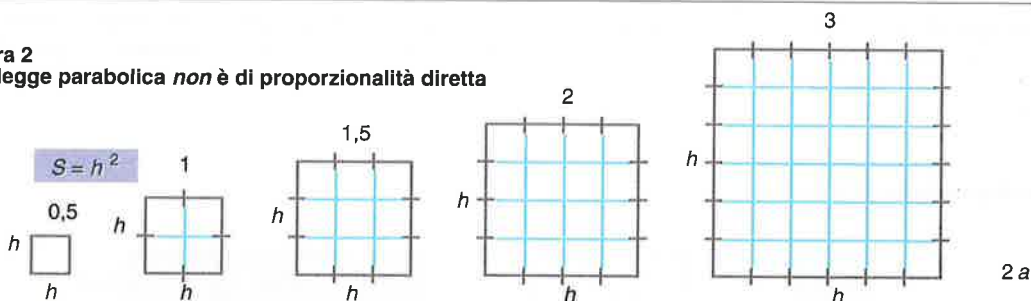
La curva ottenuta si chiama *parabola* e, insieme alla corrispondente tabella, permette di verificare che  $S$  e  $h$  **non** sono direttamente proporzionali; infatti si trova che:

- il grafico **non** è una retta che passa per O;
- raddoppiando una grandezza, l'altra **non** raddoppia.

In particolare, si può fissare l'attenzione sui seguenti dati della tabella: quando il lato  $h$  raddoppia passando da 1,5 a 3, l'area  $S$  **non** raddoppia; passa invece da 2,25 a 9.

La legge che lega il lato e l'area di un quadrato prende il nome di *legge parabolica*, cioè *legge che ha come grafico un arco di parabola*.

**Figura 2**  
Una legge parabolica **non** è di proporzionalità diretta





### La legge di proporzionalità inversa

In fig. 3 sono rappresentati tanti rettangoli che hanno la stessa area di valore 4; gli stessi rettangoli sono stati disegnati anche in un riferimento cartesiano, riportando un lato ( $b$ ) sull'asse delle ascisse e l'altro ( $h$ ) sull'asse delle ordinate.

I vertici liberi di questi rettangoli sono dunque punti che hanno le coordinate legate dalla legge seguente:

$$bh = 4 \quad \text{ossia} \quad h = \frac{4}{b}$$

Questi punti si dispongono su un arco di curva chiamata *iperbole*, curva che è caratterizzata dalla seguente proprietà: raddoppiando una grandezza (il lato  $b$ ), dimezza l'altra (il lato  $h$ ). Si dice in questo caso che le due grandezze sono *inversamente proporzionali*.

Si ritrovano, così, alcune caratteristiche fondamentali della legge di proporzionalità inversa:

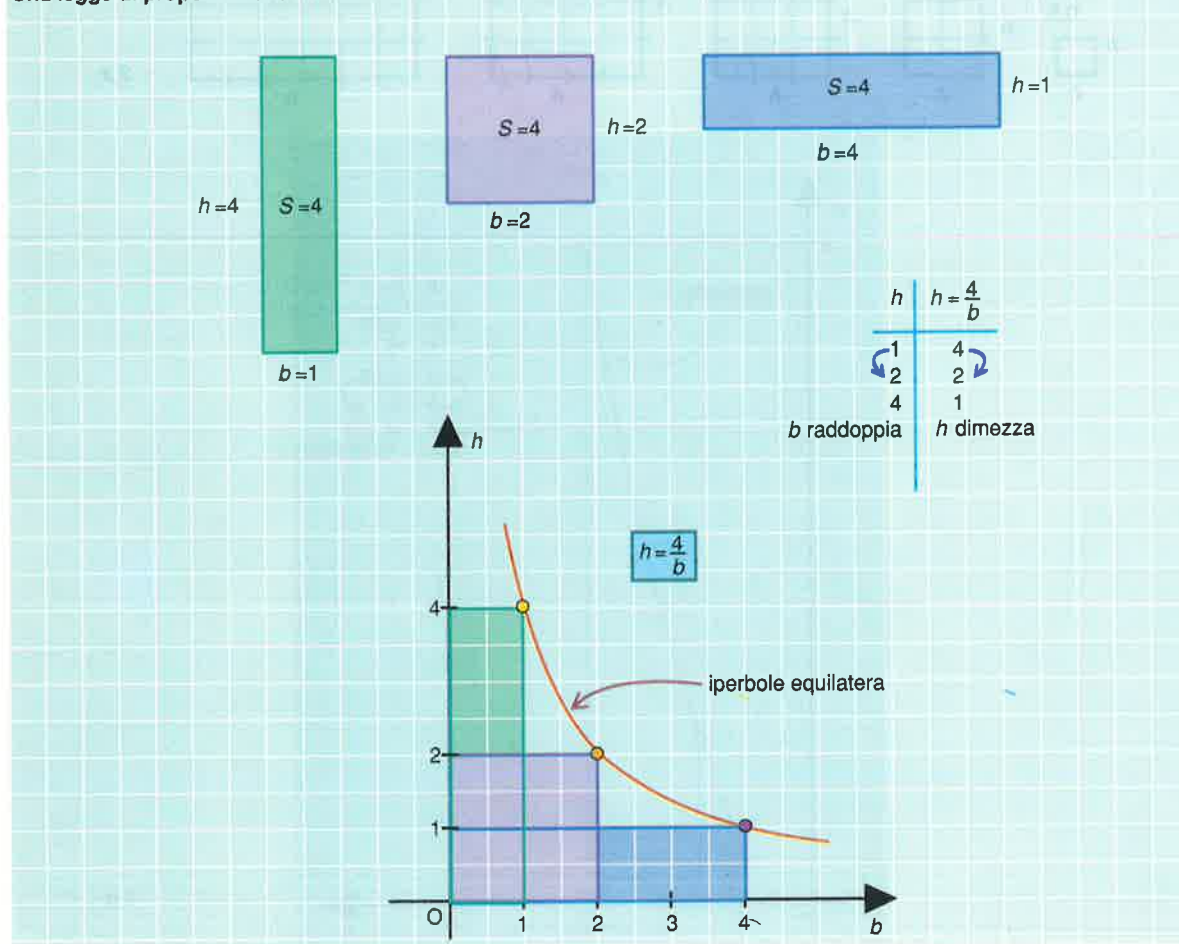
- il prodotto delle due grandezze è costante;
- il grafico è un arco di iperbole;
- raddoppiando una grandezza l'altra si dimezza.

### La legge lineare

In fig. 4 sono rappresentati tanti rettangoli che hanno lo stesso perimetro  $p$  lungo 8. Gli stessi rettangoli sono stati disegnati anche in un riferimento cartesiano, riportando un lato ( $b$ ) sull'asse delle ascisse e l'altro ( $h$ ) sull'asse delle ordinate.

I vertici liberi di questi rettangoli sono ora punti che hanno le coordinate legate dalla

**Figura 3**  
Una legge di proporzionalità inversa



legge seguente:

$$2b + 2h = 8 \quad \text{ossia} \quad h = -b + 4$$

Questi punti si dispongono sul tratto di retta rappresentato in fig. 4; il grafico e la corrispondente tabella permettono di verificare che  $b$  e  $h$  **non** sono inversamente proporzionali. Infatti si trova che:

- il grafico **non** è un arco di iperbole;
- raddoppiando una grandezza, l'altra **non** si dimezza.

In particolare, si può fissare l'attenzione sui seguenti dati: quando il lato  $b$  raddoppia, passando da 1 a 2, l'altro lato,  $h$ , **non** dimezza, passa invece da 3 a 2.

La legge che lega i due lati di un rettangolo di perimetro fisso prende anche il nome di *legge lineare*, cioè *legge che ha come grafico un tratto di linea retta*.

## La legge cubica

Passando dalle figure piane alle figure solide, si possono trovare altre leggi matematiche. Per esempio, in fig. 5 sono rappresentati dei cubi con il lato di lunghezza  $h$  sempre più grande, mentre la tabella fornisce il volume  $V$  di ogni cubo; risulta:

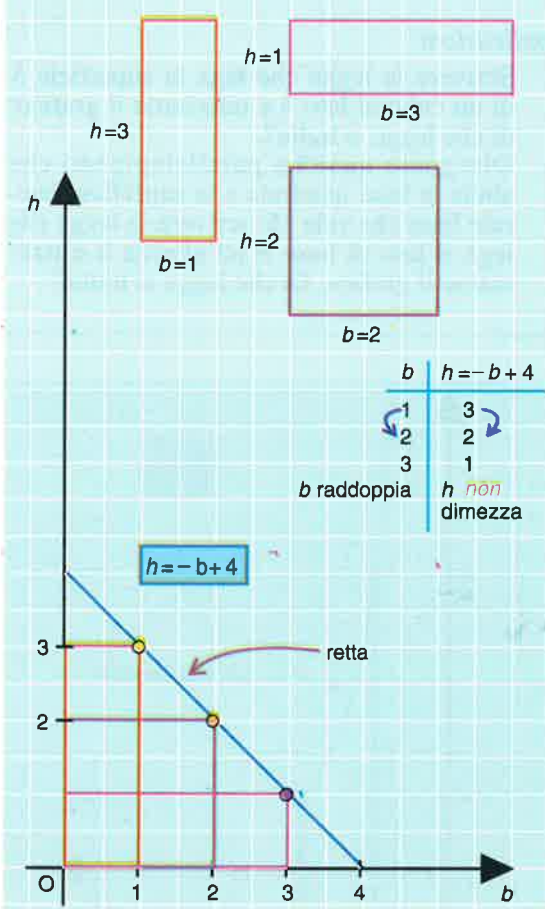
$$V = h^3$$

cioè il volume  $V$  si ottiene elevando al cubo il lato  $h$ .

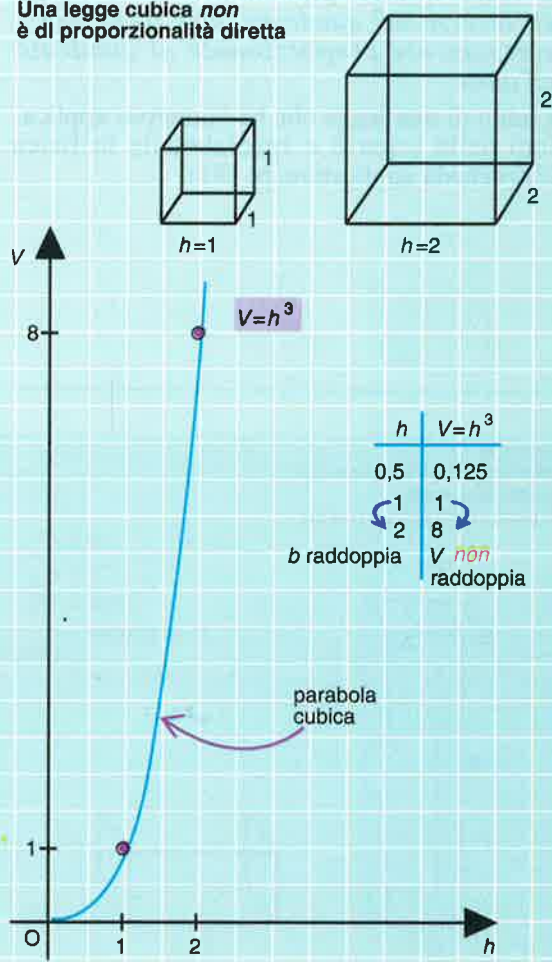
La legge è rappresentata anche sul piano cartesiano, riportando  $h$  sull'asse delle ascisse e  $V$  sull'asse delle ordinate.

La curva ottenuta si chiama *parabola cubica* e, insieme alla corrispondente tabella, permette di verificare che  $V$  e  $h$  **non** sono direttamente proporzionali. La legge che lega il lato e il volume di un cubo prende il nome di *legge cubica*, cioè *legge che ha come grafico un arco di parabola cubica*.

**Figura 4**  
Una legge lineare **non**  
è di proporzionalità inversa



**Figura 5**  
Una legge cubica **non**  
è di proporzionalità diretta



## La legge dell'inverso del quadrato

Un'altra legge suggerita dai volumi delle figure solide può essere ottenuta nel modo seguente: si disegnano tanti parallelepipedi con la base quadrata e il volume che vale 4 (fig. 6). Può variare allora il lato di base  $b$  e l'altezza  $h$ , che però sono sempre legati dalla legge:

$$b^2 h = 4 \quad \text{ossia} \quad h = \frac{4}{b^2}$$

La legge è quindi rappresentata anche sul piano cartesiano (fig. 6), riportando sull'asse delle ascisse il lato di base  $b$  e sull'asse delle ordinate l'altezza  $h$ .

Si tratta di un arco di curva che somiglia all'iperbole di fig. 3, ma non è un'iperbole perché è più «ripida»; d'altra parte è facile verificare che le due grandezze *non* sono inversamente proporzionali: per esempio, quando  $b$  raddoppia, passando da 1 a 2,  $h$  non dimezza, passa invece da 4 a 1.

La curva rappresenta dunque una legge diversa da tutte quelle precedenti; è la *legge dell'inverso del quadrato*: una grandezza è *inversamente proporzionale al quadrato dell'altra*.

Si tratta di una legge che ha numerose applicazioni nelle scienze e specialmente in fisica (vedi scheda applicativa, p. 181).

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Elencare le proprietà che caratterizzano le leggi di proporzionalità diretta e inversa, portando degli esempi.
- ② Spiegare che cosa vuol dire che due grandezze sono legate da una legge parabolica o cubica, portando un esempio.
- ③ Spiegare che cosa vuol dire che due grandezze sono legate dalla legge dell'inverso del quadrato, portando un esempio.

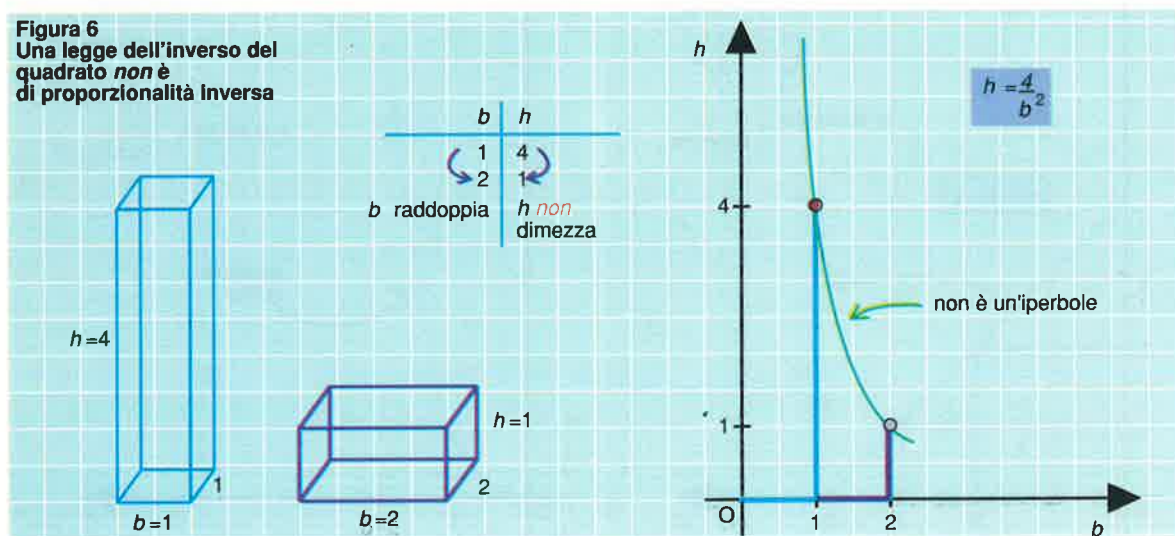
### Comprensione

- ① Spiegare come si può verificare se due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali, portando degli esempi diversi da quelli dati dal testo.
- ② Spiegare come si può verificare se due grandezze sono legate da una legge parabolica o cubica.
- ③ Spiegare come si può verificare se due grandezze sono legate dalla legge dell'inverso del quadrato.

### Applicazioni

- ① Scrivere la legge che lega la superficie  $S$  di un cubo al lato  $h$  e tracciarne il grafico; di che legge si tratta?
- ② Disegnare qualche parallelepipedo che abbia la base quadrata e la superficie laterale fissa che vale 16; scrivere la legge che lega il lato di base  $b$  all'altezza  $h$  e tracciarne il grafico. Di che legge si tratta?

**Figura 6**  
Una legge dell'inverso del quadrato *non* è di proporzionalità inversa



## Alcune leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali

### Le leggi di proporzionalità diretta e di proporzionalità inversa

Spesso studiando la fisica si incontrano delle leggi che legano tre diverse grandezze e si trova che, fissando una delle tre grandezze, le altre due variano in modo proporzionale. Ecco un esempio.

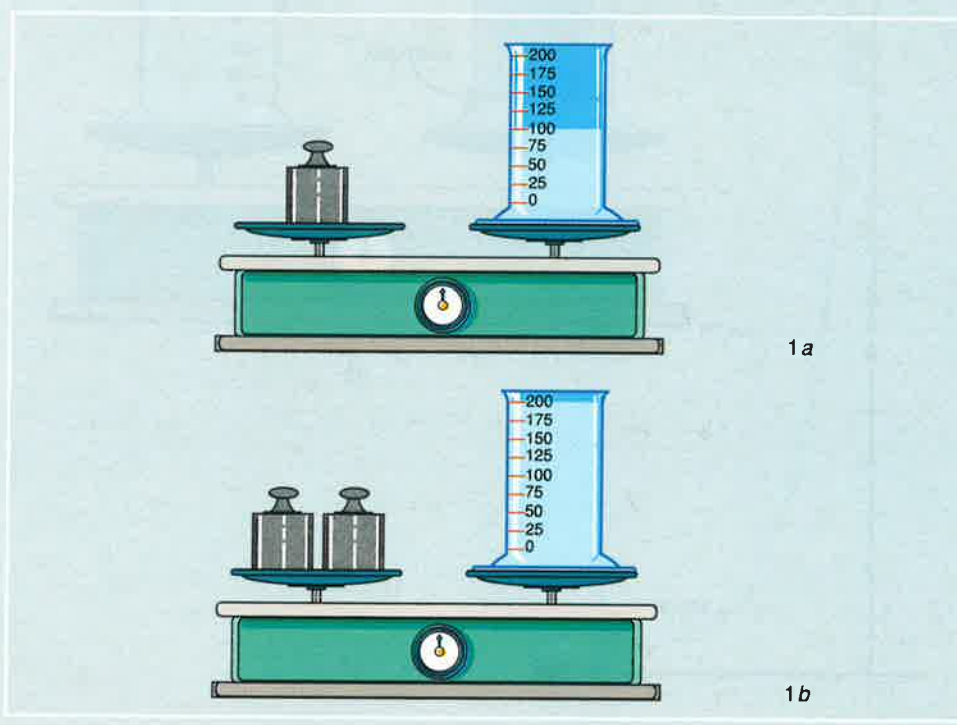
Si studia la relazione che lega le tre grandezze seguenti:

- massa  $m$  di un liquido;
- densità  $d$  del liquido;
- volume  $V$  che occupa il liquido.

Per studiare questo legame si eseguono varie esperienze, fra le quali le seguenti:

- A. Si considera sempre la stessa sostanza, per esempio l'acqua; così si tiene fissa la densità  $d$ , che è per l'acqua di  $1 \text{ kg/dm}^3$ .

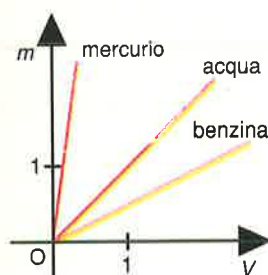
Si riempie quindi con l'acqua un recipiente di un certo volume, per esempio  $V = 1 \text{ dm}^3$  (fig. 1a), poi un altro di volume doppio e si verifica sempre che anche la corrispondente massa raddoppia (fig. 1b).



**Figura 1**  
La massa e il volume occupato dall'acqua sono direttamente proporzionali



**Figura 2**  
La massa  $m$  e il volume  $V$  occupato da una sostanza sono direttamente proporzionali



Si trova così che *massa e volume sono grandezze direttamente proporzionali*, legate dalla legge:

$$m = V$$

Questa legge vale nel caso particolare dell'acqua; se però si ripete l'esperienza con la benzina, si trova la legge seguente:

$$m = 0,7V$$

Se poi si ripete l'esperienza con il mercurio, si trova:

$$m = 13,6V$$

Si hanno dunque sempre leggi di proporzionalità diretta (rappresentate in fig. 2), ma, al variare della sostanza, varia la costante di proporzionalità, che è la densità  $d$  del liquido.

Si ha dunque:

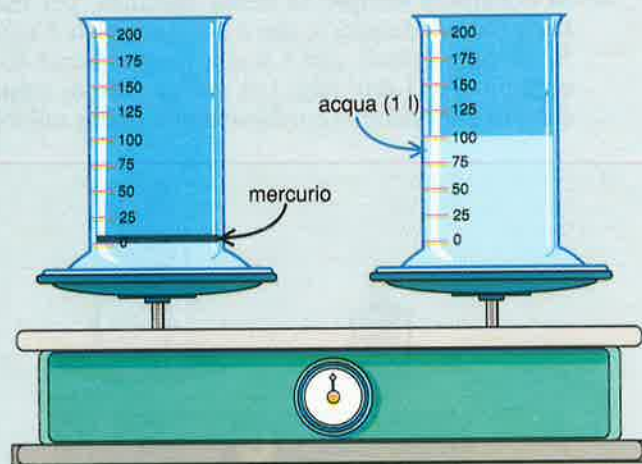
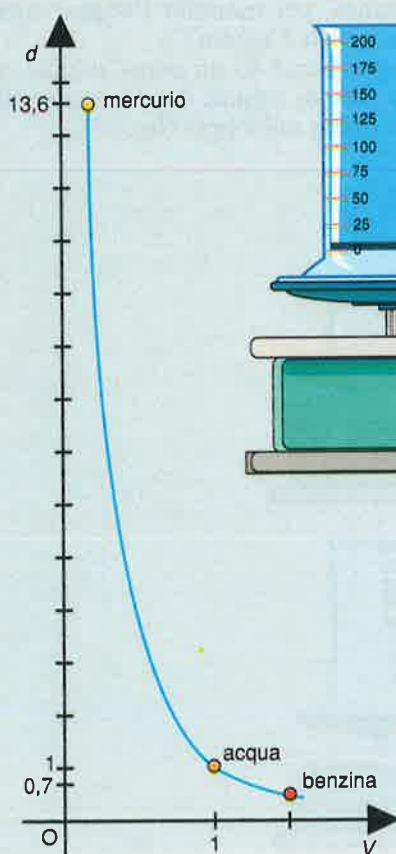
$$m = dV$$

- B. Si prende la stessa massa  $m$ , per esempio 1 kg, di liquidi diversi e si misura il volume  $V$  occupato da ogni liquido (fig. 3); così si verifica che *volume e densità sono grandezze inversamente proporzionali*, legate dalla legge:

$$1 = dV$$

rappresentata in fig. 3a.

**Figura 3**  
La massa è costante (1 kg); volume ( $V$ ) e densità ( $d$ ) sono inversamente proporzionali



3b

3a

Perciò si avrà bisogno di un volume  $V = 1 \text{ dm}^3$  per contenere 1 kg d'acqua, ma basta una bottiglietta di volume  $V \cong \frac{1}{13} \text{ dm}^3$  per contenere 1 kg di mercurio (fig. 3b).

### La legge parabolica

È una legge di grande importanza anche dal punto di vista storico, perché fu una delle prime a essere individuata. Ecco un documento a questo proposito.

Galileo Galilei, nella sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) descrive i suoi esperimenti sulla caduta di un corpo lungo un piano inclinato (fig. 4) ed enuncia così la sua scoperta:

«Per esperienze ben cento volte replicate sempre si incontrava gli spazi percorsi esser tra loro come i quadrati dei tempi, e questo per tutte le inclinazioni del piano».



Figura 4  
Il modello di Galileo per studiare la discesa di un corpo lungo un piano inclinato (Museo di Storia della Scienza di Firenze)

Eseguendo un esperimento analogo, si possono trovare, per esempio, i risultati elencati nella tabella di fig. 5, dove  $s$  indica la distanza percorsa e  $t$  il tempo impiegato a percorrerla.

La legge che lega le due grandezze  $s$  e  $t$  è in tal caso:

$$s = t^2$$

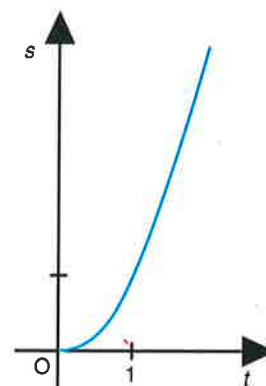
### La legge dell'inverso del quadrato

Si tratta di una legge che descrive fenomeni molto diversi, fra i quali si segnalano i tre seguenti.

#### 1. La propagazione della luce

Quando ci si allontana da una sorgente di luce (ad esempio un lampione), si percepisce chiaramente che l'intensità luminosa varia al variare della distanza dalla sorgente. Eseguendo opportune esperienze, si trova che l'intensità  $I$

Figura 5  
La legge che descrive la distanza percorsa da un corpo che cade



$t$	$s = t^2$
0,5	0,25
1	1
2	4

varia al variare della distanza  $r$  dalla sorgente secondo la legge:

$$I = \frac{k}{r^2}$$

dove  $k$  è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

### 2. *L'attrazione gravitazionale*

La legge di gravitazione universale descrive la forza che si manifesta fra due corpi (per esempio la Terra e un satellite artificiale) posti a distanza  $r$ : la forza è sempre attrattiva e ha un'intensità  $F$  che varia al variare della distanza secondo la legge:

$$F = \frac{k}{r^2}$$

dove  $k$  è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

### 3. *L'attrazione elettrostatica*

La legge di Coulomb descrive la forza che si manifesta fra due corpi, carichi elettricamente, posti a distanza  $r$ : la forza può essere attrattiva o repulsiva, ma ha sempre un'intensità  $F$  che varia al variare della distanza secondo la legge:

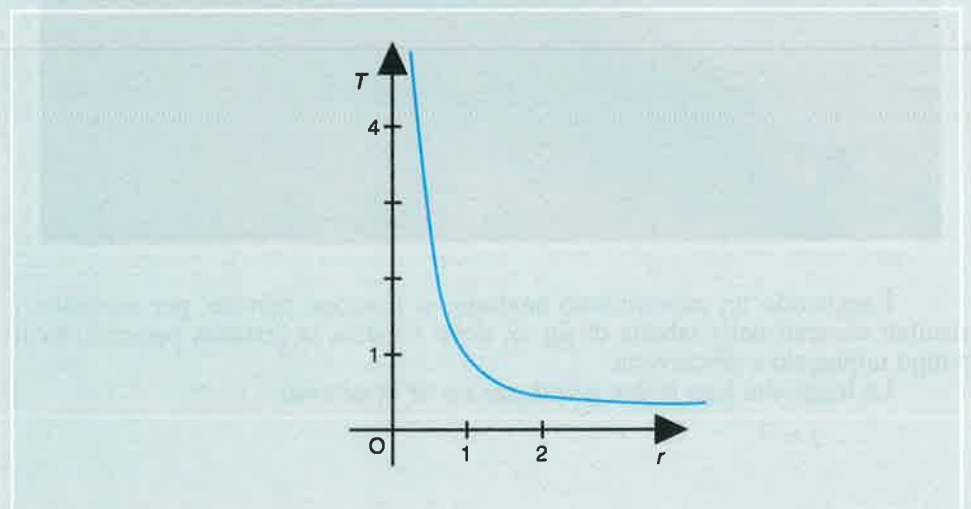
$$F = \frac{k}{r^2}$$

dove  $k$  è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

Si trova così in tre fenomeni molto diversi la legge dell'inverso del quadrato, legge che è rappresentata in fig. 6 scegliendo la costante  $k$  uguale a 1.

La forza elettrica e la forza gravitazionale diminuiscono dunque all'aumentare della distanza e queste «forze invisibili» diminuiscono come diminuisce l'intensità della luce che colpisce un foglio di carta allontanato sempre più dalla sorgente.

**Figura 6**  
La legge dell'inverso  
del quadrato





# Curve crescenti e curve decrescenti

## Curve crescenti

In fig. 1 sono rappresentate due delle leggi matematiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

- in fig. 1a la legge  $p = 4h$ ;
- in fig. 1b la legge  $S = h^2$ .

I due grafici mostrano un'importante caratteristica comune, che si scopre immaginando di percorrere una delle curve: quando ci si allontana da O verso destra, si è «costretti a salire». In questo caso si dice che *la curva è crescente, cioè al crescere dell'ascissa cresce anche l'ordinata*.

## La proporzionalità diretta è una particolare legge crescente

Le considerazioni svolte prima si possono anche esprimere dicendo che la proporzionalità diretta e la legge parabolica sono leggi crescenti.

Fra le leggi crescenti si trova dunque la legge di proporzionalità diretta, cioè *la proporzionalità diretta è una particolare legge crescente*.

La fig. 2 visualizza questa conclusione: nell'insieme C si trovano le leggi crescenti, mentre nell'insieme P si trovano le leggi di proporzionalità diretta.

Così si vede bene che P è contenuto all'interno di C e perciò:

- scegliendo una legge di proporzionalità diretta (cioè in P), si è certi di trovarsi in C, cioè di scegliere una legge crescente;
- scegliendo invece una legge crescente (cioè in C), si può anche cadere al di fuori di P e scegliere una legge che non è di proporzionalità diretta.

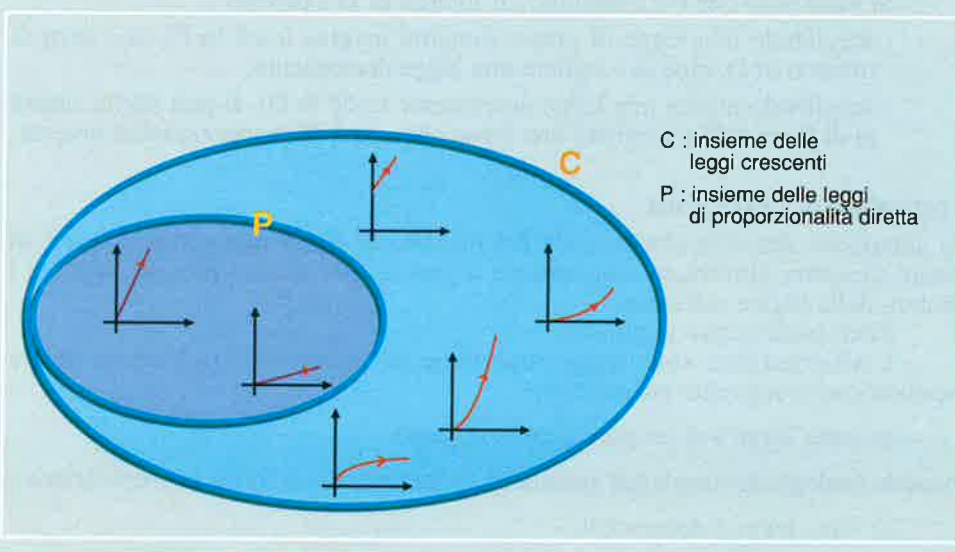
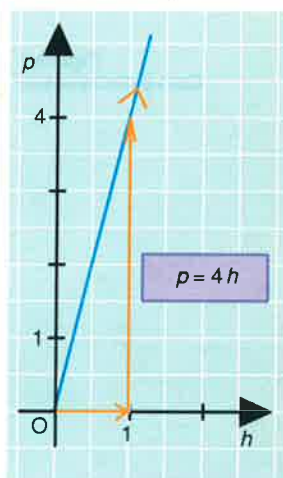
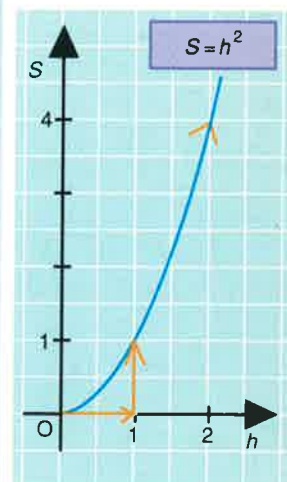


Figura 1  
Curve crescenti



1a



1b

Figura 2  
La proporzionalità diretta è una particolare legge crescente



### Curve decrescenti

Considerazioni analoghe, ma con qualche modifica essenziale, si possono ripetere a partire dalla fig. 3, dove sono rappresentate altre due leggi matematiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

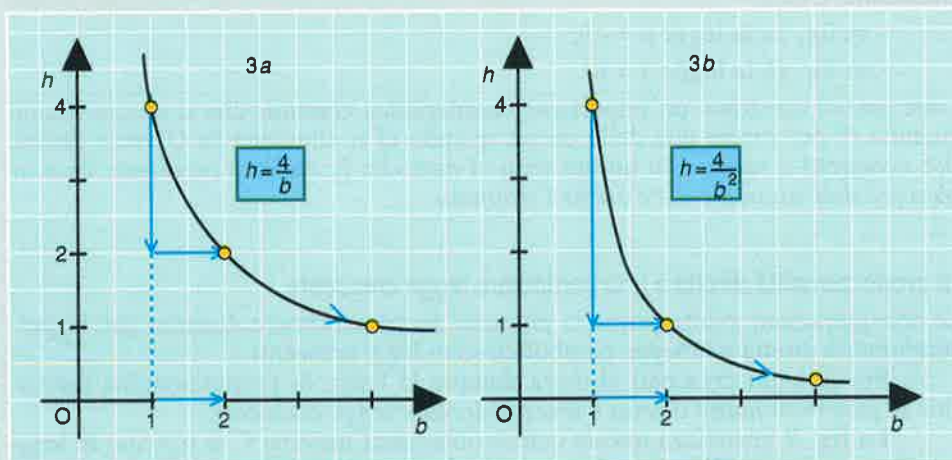
- in fig. 3a la legge  $h = \frac{4}{b}$ ;

- in fig. 3b la legge  $h = \frac{4}{b^2}$ .

I due grafici mostrano ora la seguente caratteristica comune: quando ci si allontana da O verso destra, si è «costretti a scendere».

In questo caso si dice che la curva è decrescente, cioè al crescere dell'ascissa decresce l'ordinata.

Figura 3  
Curve decrescenti



### La proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente

Fra le leggi decrescenti si trova dunque la legge di proporzionalità inversa, cioè la proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente.

La fig. 4 visualizza questa conclusione: nell'insieme D si trovano le leggi decrescenti, mentre nell'insieme P si trovano le leggi di proporzionalità inversa.

Si vede bene che P è contenuto all'interno di D e perciò:

- scegliendo una legge di proporzionalità inversa (cioè in P), si è certi di trovarsi in D, cioè di scegliere una legge decrescente;
- scegliendo invece una legge decrescente (cioè in D), si può anche cadere al di fuori di P e scegliere una legge che non è di proporzionalità inversa.

### Il connettivo di implicazione

La situazione descritta chiaramente dal disegno di fig. 4 non sempre riesce ad essere descritta altrettanto chiaramente a parole; per questo possono aiutare i simboli della logica matematica.

Ecco come si può ragionare.

L'affermazione «una legge appartiene all'insieme P» può anche essere espressa con la seguente proposizione:

p: «una legge è di proporzionalità inversa»

In modo analogo da «una legge appartiene all'insieme D» si forma la proposizione :

d: «una legge è decrescente»

E così, invece di dire «una legge dell'insieme P si trova sicuramente nell'insieme D», si dice:

«se è vera  $p$ , è vera anche  $d$ »

o, più brevemente:

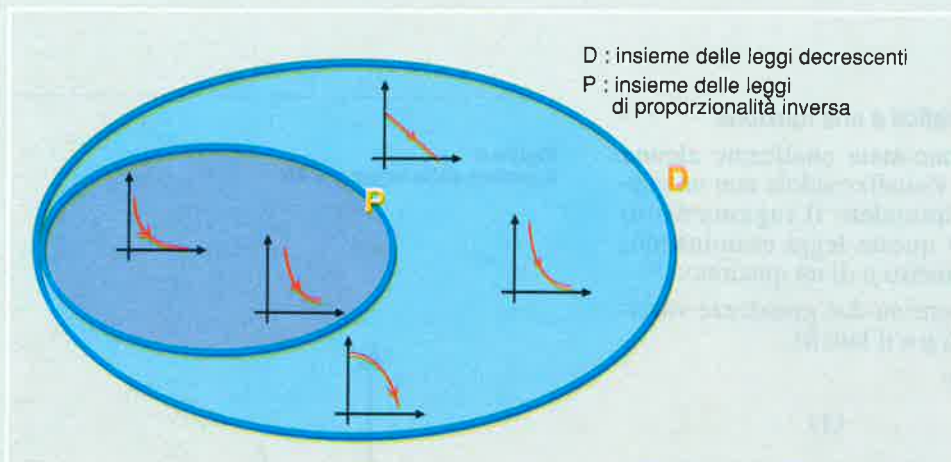
« $p$  **implica**  $d$ »

che si scrive:

$$p \Rightarrow d$$

La frase « $p$  implica  $d$ » afferma dunque che «la verità della proposizione  $p$  contiene in sé la verità della proposizione  $d$ ».

Ora, esaminando di nuovo le proposizioni  $p$  e  $d$ , ci si rende conto che, invece, la verità della proposizione  $d$  non racchiude in sé la verità della proposizione  $p$ .



**Figura 4**  
La proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente

Si può così concludere dicendo che *la proporzionalità inversa implica la decrescenza, mentre il viceversa non è vero.*

E analogamente si può dire che *la proporzionalità diretta implica la crescita, ma il viceversa non è vero.*

### Spunti di discussione e di lavoro

- ① Come si riconosce se una curva è crescente o decrescente?
- ② Spiegare perché una legge di proporzionalità diretta è sempre crescente.
- ③ Spiegare perché una legge di proporzionalità inversa è sempre decrescente.
- ④ Fra le frasi seguenti scegliere quella sbagliata e correggere gli errori:  
 «L'area di un quadrato cresce al crescere del lato, perciò l'area è direttamente proporzionale al lato»;  
 «Il perimetro di un quadrato è direttamente proporzionale al lato, perciò il perimetro cresce al crescere del lato».
- ⑤ Esaminare la legge che lega il lato e il volume di un cubo e dire se si tratta di una legge crescente o decrescente.
- ⑥ Esaminare la legge che lega i due lati di un rettangolo che ha il perimetro lungo 8 e dire se si tratta di una legge crescente o decrescente.

# Le funzioni in geometria analitica.

## La parabola e l'iperbole

### Da una legge matematica a una funzione

Nel paragrafo 2 sono state analizzate alcune leggi matematiche, visualizzandole con un grafico. Si può ora riprendere il ragionamento condotto su una di queste leggi esaminando, per esempio, il perimetro  $p$  di un quadrato:

1. si fissa l'attenzione su due grandezze variabili (il perimetro  $p$  e il lato  $h$ );
2. si trova la legge:

$$p = 4h \quad (1)$$

che fa corrispondere a un valore di una delle due variabili ( $h$ ) un solo valore dell'altra ( $p$ );

3. si rappresenta sul piano cartesiano la legge trovata (fig. 1).

Ora, confrontando la legge (1) con il grafico di fig. 1, ci si rende conto che la formula da sola non esprime tutto quello che si sa sulle grandezze esaminate.

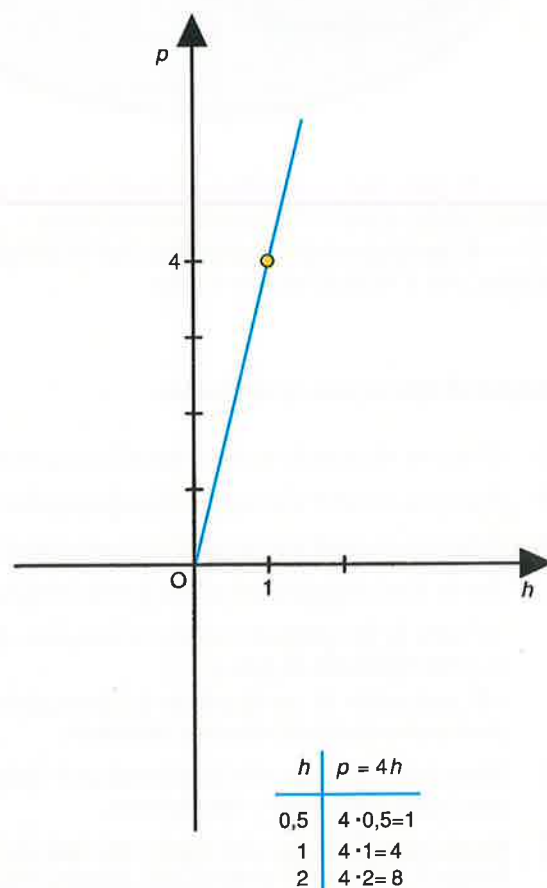
Infatti, sia il perimetro  $p$  che il lato  $h$  del quadrato possono assumere solo valori positivi e questo fatto è chiaramente espresso dal grafico, ma non dalla formula.

Basta quest'esempio per capire che una legge matematica deve essere completata indicando gli insiemi numerici in cui si scelgono i valori da assegnare alle variabili; si passa così da una legge matematica ad una *funzione*.

*Si individua una funzione quando sono dati:*

1. un insieme  $D$ , detto dominio;
2. un insieme  $C$ , detto codominio;
3. una legge che associa ad ogni elemento  $x$  dell'insieme  $D$  un solo elemento  $y$  dell'insieme  $C$ .

**Figura 1**  
Il grafico della legge  $p = 4h$



## Le funzioni in geometria analitica

Per descrivere come varia il perimetro di un quadrato al variare del lato, si considera dunque la funzione seguente:

1. il dominio  $D$  è l'insieme dei numeri reali positivi, spesso indicato con il simbolo  $\mathbb{R}^+$ ;
2. il codominio  $C$  è pure l'insieme  $\mathbb{R}^+$ ;
3. a ogni numero  $x$ , scelto in  $D$ , si fa corrispondere nel codominio  $C$  un numero  $y$ , dato da:

$$y = 4x \quad (2)$$

La semiretta  $Or$  di fig. 2a rappresenta proprio questa funzione, perché sul grafico si trovano tutti i punti  $P(x; y)$  con le seguenti caratteristiche:

1. l'ascissa  $x$  appartiene all'insieme  $D$ , dominio della funzione;

2. l'ordinata  $y$  appartiene all'insieme  $C$ , codominio della funzione;
3.  $x$  e  $y$  sono legate dalla legge (2).

Il grafico di fig. 2a conduce a ricordare quello che si era detto a proposito dell'equazione e del grafico di una retta nel primo volume (vedi il capitolo ottavo, pp. 338-350): l'equazione

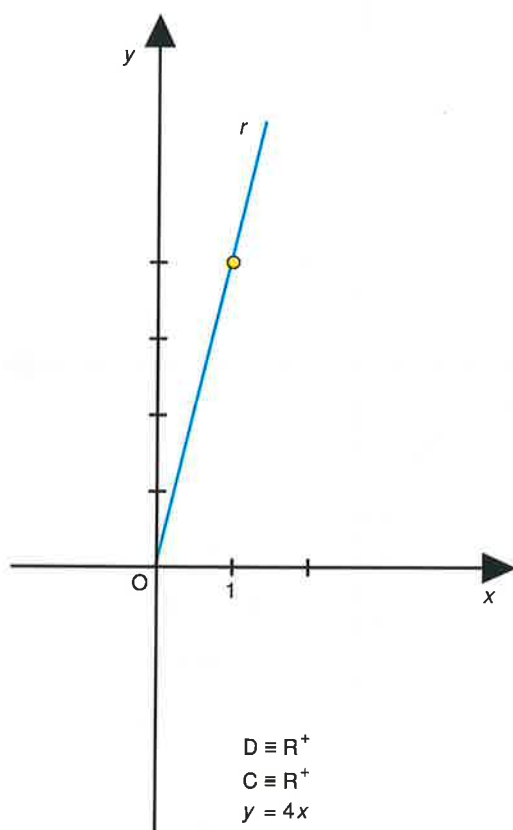
$$y = 4x$$

ha come grafico la retta rappresentata in fig. 2b, su cui si trovano tutti i punti  $P(x; y)$  che hanno le due coordinate reali.

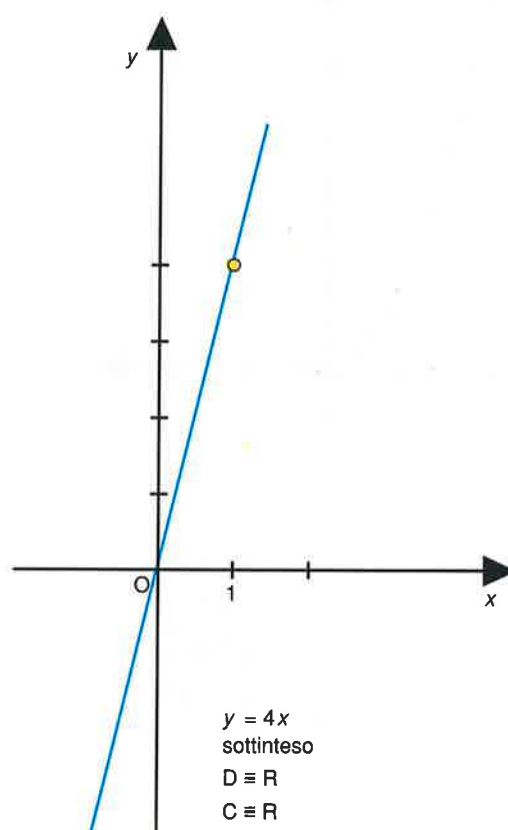
Si trova così che *in geometria analitica si assegna una funzione indicando solo la formula che permette di ricavare  $y$  a partire da  $x$ .*

In questo caso sono sottintese le seguenti indicazioni:

**Figura 2**  
Il grafico di una funzione in geometria analitica



2 a



2 b



- il dominio  $D$  è l'insieme di tutti i numeri reali con i quali è possibile eseguire le operazioni indicate dalla formula;
- il codominio  $C$  è l'insieme dei numeri reali.

### La funzione $y = x^2$ e la parabola

La legge parabolica, ottenuta esaminando come varia l'area del quadrato al variare del lato (vedi la tabella di fig. 3), conduce ad introdurre la seguente funzione:

1. il dominio  $D$  è l'insieme  $R$  dei numeri reali;
2. il codominio  $C$  è pure l'insieme  $R$ ;
3. a ogni numero  $x$ , scelto in  $D$ , si fa corrispondere nel codominio  $C$  un numero  $y$ , dato da:

$$y = x^2 \quad (3)$$

Questa funzione viene spesso assegnata in geo-

metria analitica indicando solo la formula (3) e ha come grafico la curva rappresentata in fig. 3, curva che prende il nome di *parabola*.

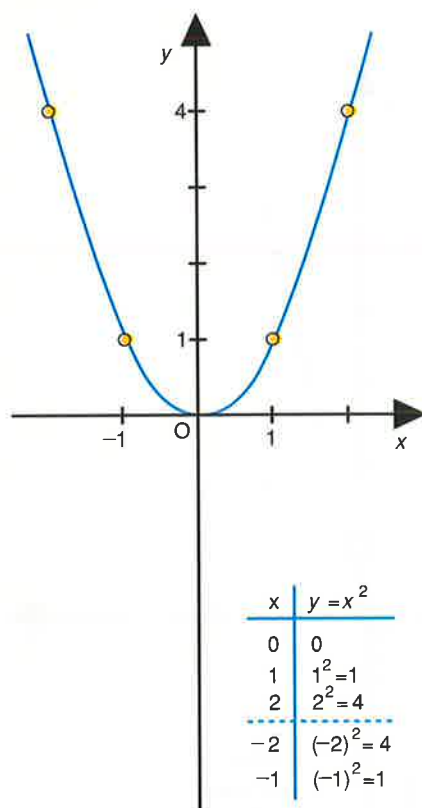
La parabola presenta molte proprietà caratteristiche, fra le quali si segnalano le seguenti, suggerite anche dalla tabella di fig. 3:

- a. la curva si trova tutta al disopra dell'asse delle ascisse, cioè è formata da punti che hanno tutti l'ordinata  $y$  positiva, e questo perché il quadrato di un numero è sempre positivo;
- b. la curva è tangente all'asse delle  $x$  nel punto  $O$ , che prende anche il nome di *vertice* della parabola.

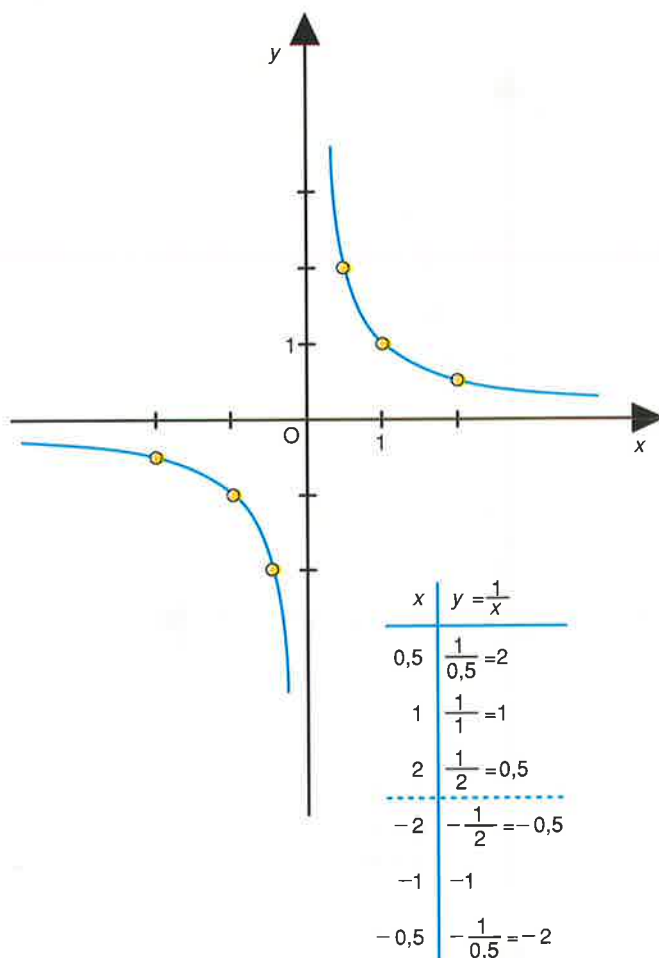
### La funzione $y = \frac{1}{x}$ e l'iperbole

La legge di proporzionalità inversa (vedi la tabella di fig. 4) conduce invece a introdurre il

**Figura 3**  
La parabola



**Figura 4**  
L'iperbole



geometria analitica la funzione:

$$y = \frac{1}{x}$$

Qual è ora il dominio sottinteso?

Per rispondere si debbono indicare i numeri con i quali è possibile eseguire le operazioni indicate dalla formula; in questo caso la formula richiede di eseguire solo una divisione, operazione che non si può eseguire sempre, visto che:

la divisione  $\frac{1}{0}$  non ha risultato

Si conclude dunque che il dominio  $D$  è l'insieme dei reali escluso 0, insieme spesso indicato con il simbolo  $\mathbb{R}_0$ .

La funzione assegnata ha come grafico la curva rappresentata in fig. 4, curva che prende il nome di *iperbole*.

L'iperbole presenta molte proprietà caratteristiche, fra le quali si segnalano le seguenti, suggerite anche dalla tabella di fig. 4:

- la curva occupa solo il I e il III quadrante, cioè è formata da punti che hanno ascissa e ordinata dello stesso segno (positivo nel I quadrante e negativo nel III);
- la curva è formata da due rami separati, che si avvicinano sempre di più agli assi cartesiani.

Quest'ultimo andamento della curva merita qualche riflessione più approfondita.

Il grafico e la tabella di fig. 4 suggeriscono la seguente osservazione: assegnando a  $x$  un valore positivo grande, per esempio 100, si ottiene un valore positivo piccolo di  $y$ , dato da:

$$y = \frac{1}{100} = 0,01$$

E il punto  $P(100; 0,01)$ , così vicino all'asse delle  $x$ , conduce a chiedersi se l'iperbole arriverà mai ad incontrare l'asse delle  $x$ .

Non è certo il grafico che può rispondere a questa domanda: anche una matita molto appuntita non riesce a disegnare in fig. 4 il punto  $P$  separato dall'asse delle  $x$ . È con il calcolo che si riesce a rispondere: anche assegnando a  $x$  numeri molto grandi come 100 o 1000 si otterranno ordinate come 0,01 o 0,001 che sono vicinissime a 0, ma non valgono 0.

Dunque *l'ordinata non vale mai esattamente 0 e perciò l'iperbole non può incontrare l'asse delle  $x$ .*

Analogamente, si possono assegnare a  $x$  valori

positivi molto vicini a 0, come per esempio 0,01, e ottenere grandi valori positivi di  $y$ , come per esempio:

$$y = \frac{1}{0,01} = 100$$

Ma non si può sostituire 0 a  $x$  e perciò la curva non può incontrare l'asse delle  $y$ .

Proprio questa suggestiva idea dell'avvicinamento indefinito senza possibilità di incontro è sintetizzata dalla parola di origine greca *asintoto*, che significa appunto «non-incontro».

Si dice quindi che *gli assi cartesiani sono gli asintoti dell'iperbole*.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- Elencare le informazioni da dare per assegnare una funzione.
- Descrivere il dominio e tracciare il grafico della funzione assegnata con la sola formula:  
 $y = x^2$
- Descrivere il dominio e tracciare il grafico della funzione assegnata con la sola formula:

$$y = \frac{1}{x}$$

### Comprensione

- Spiegare che cosa distingue una legge matematica da una funzione.
- Spiegare perché l'iperbole non incontra gli assi cartesiani.

### Applicazioni

- Riprendere la legge lineare, ottenuta esaminando i lati dei rettangoli con il perimetro che vale 8, descrivere la corrispondente funzione e tracciarne il grafico.
- Riprendere l'equazione della retta

$$y = -x + 4$$

studiata in geometria analitica, descrivere la corrispondente funzione e tracciarne il grafico.

- Confrontare le funzioni esaminate nei due esercizi precedenti; in che cosa differiscono?

# Curve, funzioni e relazioni

La parabola e l'iperbole introdotte nel paragrafo precedente sono due curve ottenute rappresentando sul piano cartesiano due particolari funzioni (fig. 1).

Viceversa, ci si chiede, una qualunque curva tracciata sul piano è sempre il grafico di una funzione?

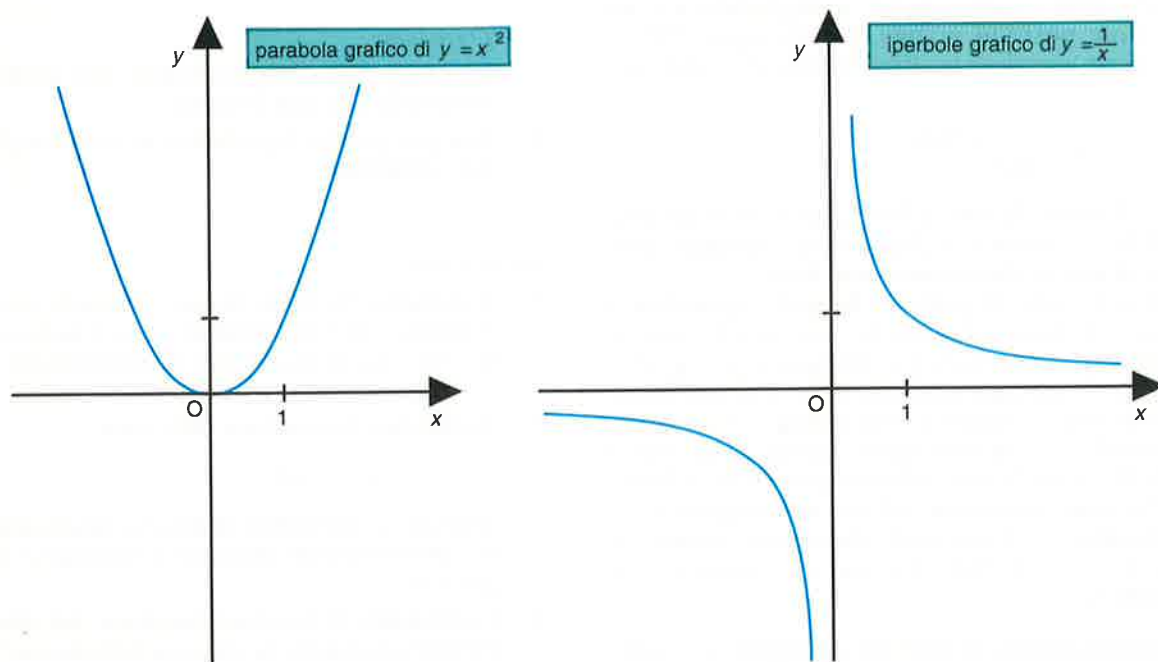
**La circonferenza non è il grafico di una funzione**  
Ecco un esempio che conduce a rispondere alla

domanda precedente: in fig. 2 è rappresentata la circonferenza che ha centro nell'origine  $O$  e il raggio lungo 5.

È immediato rendersi conto che *la circonferenza non è il grafico di una funzione*.

Infatti, una delle caratteristiche fondamentali di una funzione è quella di far corrispondere a un valore di  $x$  un solo valore di  $y$ ; invece, nel caso della circonferenza, fissato un valore di  $x$  si possono trovare due corrispondenti valori di  $y$ .

**Figura 1**  
Due curve che sono il grafico di una funzione



### Per descrivere una circonferenza occorrono due funzioni

La fig. 2 suggerisce però un'osservazione: i due valori di  $y$  che corrispondono a una stessa  $x$  sono opposti, dato che l'asse delle  $x$  divide la circonferenza in due parti fra loro simmetriche. Così si trova, per esempio, che ci sono due punti di ascissa 3:

- P che ha l'ordinata  $y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ,

- P' che ha l'ordinata opposta -4.

E, analogamente, ci saranno due punti di ascissa 4 e cioè:

- Q che ha l'ordinata  $y = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ;

- Q' che ha l'ordinata opposta -3.

Più in generale, a una data ascissa  $x$  corrispondono le due ordinate seguenti:

$$y = \sqrt{5^2 - x^2} \quad y = -\sqrt{5^2 - x^2}$$

È ancora il grafico a suggerire un'avvertenza:  $x$  non può essere scelta come si vuole, perché i punti della circonferenza hanno l'ascissa compresa fra -5 e 5.

Si arriva così a capire che, per descrivere la circonferenza occorrono due funzioni (fig. 3):

- la prima che descrive la semicirconferenza al

disopra dell'asse delle  $x$  (fig. 3a) e quindi è:

$$y = \sqrt{5^2 - x^2}$$

- la seconda che descrive la semicirconferenza al disotto dell'asse delle  $x$  (fig. 3b) e quindi è:

$$y = -\sqrt{5^2 - x^2}$$

Entrambe le funzioni avranno come dominio l'insieme dei numeri reali compresi fra -5 e 5.

### Funzioni e relazioni

I risultati finora raggiunti danno un'idea di quanto lunghi e complicati possono essere gli studi sulle funzioni:

- da un lato una funzione semplice come:

$$y = \frac{1}{x}$$

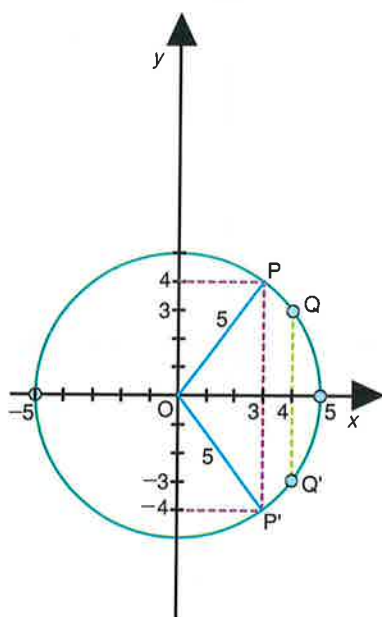
ha come grafico una curva complicata e insidiosa, spezzata in due archi separati;

- dall'altro per descrivere un'unica curva regolare come la circonferenza si arriva a due funzioni complicate come:

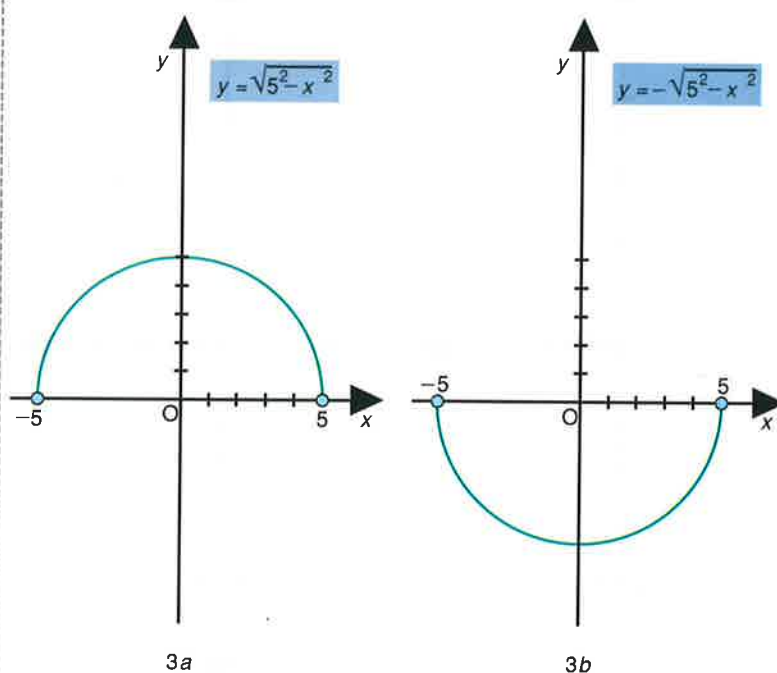
$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad y = -\sqrt{25 - x^2}$$

E infatti gli studi sulle funzioni hanno da sempre accompagnato lo sviluppo della matematica.

**Figura 2**  
La circonferenza non è il grafico di una funzione



**Figura 3**  
Per descrivere una circonferenza occorrono due funzioni





ca; per questo in epoche diverse o in contesti diversi si trovano sull'argomento «funzioni» tanti risultati che si intrecciano fra loro (vedi anche la scheda storica, p. 196).

In particolare, il termine «funzione», nato con un significato largo e intuitivo per descrivere sia i fenomeni fisici che le curve del piano, è stato modificato durante il nostro secolo da un rigoroso lavoro di risistemazione dei concetti.

Si è arrivati così alla definizione di funzione data nel paragrafo precedente, e cioè:

*Si individua una funzione quando sono dati:*

1. un insieme  $D$ , detto dominio;
2. un insieme  $C$ , detto codominio;
3. una legge che associa a ogni elemento  $x$  dell'insieme  $D$  un solo elemento  $y$  dell'insieme  $C$ .

In questa definizione sono importanti due fatti che per secoli erano passati inosservati:

- che bisogna sempre precisare dominio e codominio di una funzione;
- che a una  $x$  deve corrispondere una sola  $y$ .

Questo porta molte conseguenze, fra le quali si segnalano le due seguenti.

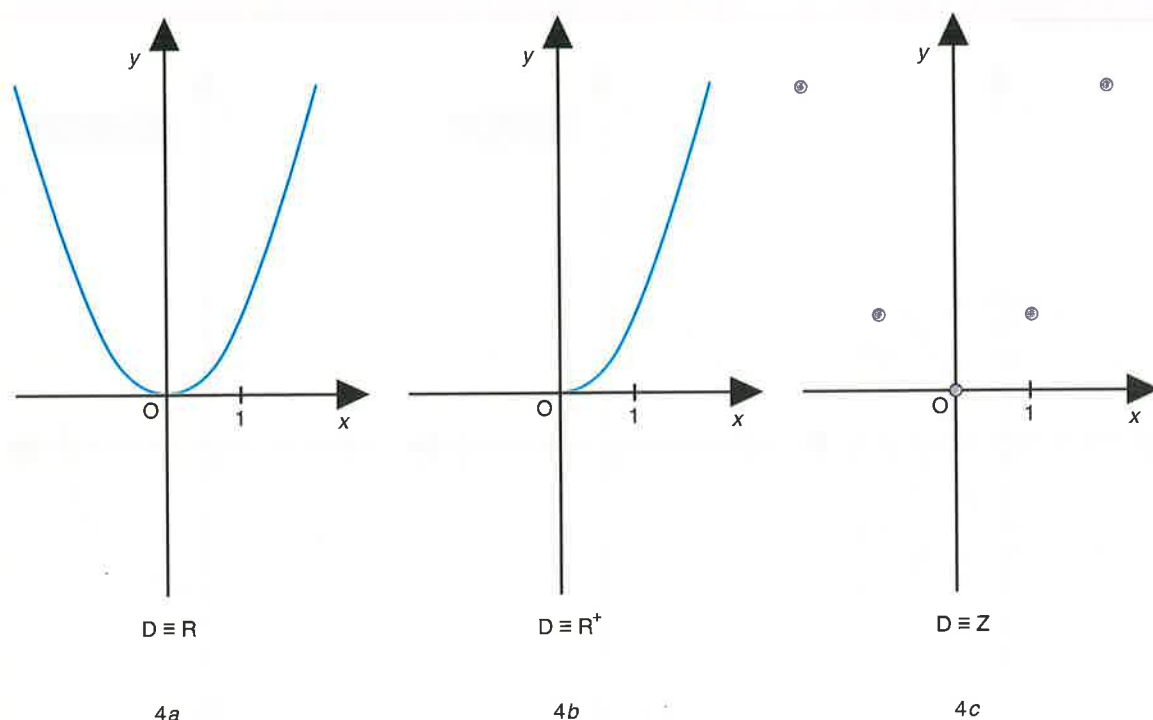
1. Per modificare una funzione, basta modificare il dominio; così, per esempio, in fig. 4 sono rappresentate tre funzioni diverse costruite con la formula  $y = x^2$ :
  - la prima ha come dominio i reali (fig. 4a);
  - la seconda ha come dominio i reali positivi (fig. 4b);
  - la terza ha come dominio gli interi (fig. 4c).
2. Rimangono molti casi in cui le variabili  $x$  e  $y$  sono legate in modo che a una  $x$  non corrisponde una sola  $y$ ; un esempio è proprio il grafico della circonferenza (fig. 2) che ha l'equazione cartesiana trovata nel paragrafo 1 e cioè:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (1)$$

In questi casi si preferisce adottare il termine *relazione*, dicendo quindi che l'equazione (1) stabilisce una relazione fra le coordinate  $(x; y)$  di un punto  $P$  che percorre la circonferenza.

**Figura 4**

**Funzioni diverse costruite con la formula  $y = x^2$**



### Come riconoscere se una curva è il grafico di una funzione

Le precedenti considerazioni conducono ad individuare un criterio per decidere se una linea tracciata sul piano cartesiano è il grafico di una funzione (fig. 5): una retta parallela all'asse delle  $y$  deve incontrare la curva al massimo in un punto.

Così la curva di fig. 5a è il grafico di una funzione, mentre la curva di fig. 5b non è il grafico di una funzione.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① L'iperbole è il grafico di una funzione?
- ② La circonferenza è il grafico di una funzione?
- ③ Qual è il criterio per riconoscere se una curva è il grafico di una funzione?

### Comprensione

- ① Spiegare perché l'iperbole è il grafico di una funzione mentre la circonferenza non lo è.
- ② Spiegare perché si distinguono le relazioni dalle funzioni.

### Applicazioni

- ① Tracciare il grafico delle seguenti tre funzioni costruite con la formula:

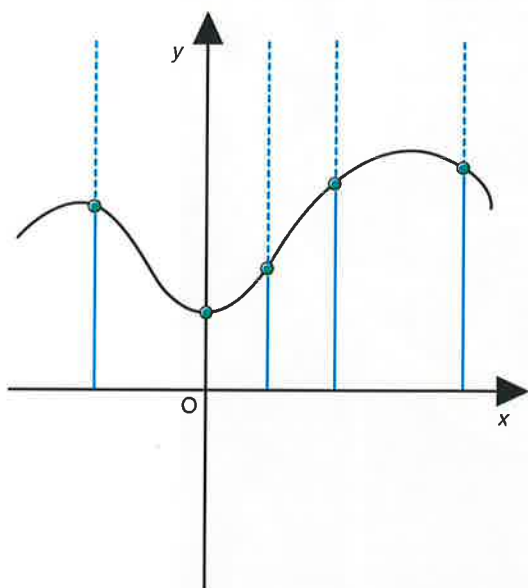
$$y = 4x$$

Il dominio delle tre funzioni è il seguente

- la prima ha come dominio i reali;
- la seconda ha come dominio i reali positivi;
- la terza ha come dominio gli interi.

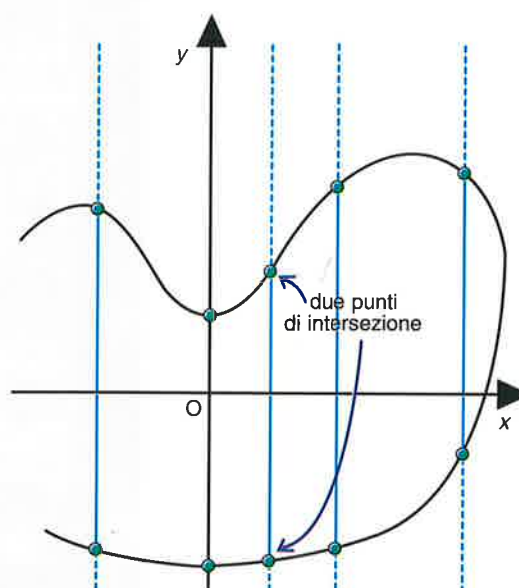
- ② Disegnare la retta che è parallela all'asse delle  $y$  e passa per il punto  $A(3; 1)$ ; scrivere l'equazione della retta e dire se è una funzione o una relazione.
- ③ Disegnare la retta che è parallela all'asse delle  $x$  e passa per il punto  $A(3; 1)$ ; scrivere l'equazione della retta e dire se è una funzione o una relazione.

Figura 5  
Criterio per decidere se una curva è il grafico di una funzione



la curva rappresenta una funzione

5a



La curva **non** rappresenta una funzione

5b

## Il concetto di funzione nella storia

### Le origini del concetto di funzione

Il concetto di funzione non è antico quanto la geometria o il calcolo letterale, ma si forma gradualmente a partire da studi di fisica e di geometria. Ecco qualche situazione in cui si trovano le radici del concetto di funzione.

### Gli studi di Tycho Brahe

Alla fine del XVI secolo l'astronomo danese Tycho Brahe (fig. 1) ideò un modello del sistema solare da contrapporre a quello proposto da Copernico. Per verificare la validità del suo modello, Brahe condusse per anni delle osservazioni astronomiche così precise da essere, in molti casi, ancora oggi valide.

Figura 1  
L'osservatorio di  
Tycho Brahe in un  
dipinto del Seicento



Fra questi lavori i più famosi sono quelli relativi ai pianeti del sistema solare: l'astronomo riuscì a valutare il raggio  $R$  dell'orbita dei pianeti allora conosciuti e il relativo periodo di rotazione  $T$ , e riunì le misure trovate in una tabella come quella qui sotto. Questa tabella fornisce dunque la legge per trovare, per ogni valore di  $R$ , il corrispondente valore di  $T$ .

Pianeta	R	T
Mercurio	0,389	87,77
Venere	0,724	224,70
Terra	1	365,25
Marte	1,524	686,98
Giove	5,200	4332,62
Saturno	9,510	10759,20

$R$  è dato dal rapporto fra il raggio dell'orbita del pianeta e quello della Terra;  $T$  è misurato in giorni

### Il lavoro di Fermat

Il matematico francese Pierre de Fermat (1601-1665) è ritenuto, insieme al contemporaneo René Descartes, il fondatore della geometria analitica, che studia le proprietà delle curve con i metodi dell'algebra.

Ecco che cosa scrive Fermat in un suo lavoro completato nel 1629, ma pubblicato postumo solo nel 1679:

«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un'equazione, si ha una linea che può essere retta o curva».

In particolare, Fermat scriveva l'equazione di una retta passante per l'origine nella forma seguente:

«D in A aequetur B in E»

In questa oscura frase latina si ha che:

- A ed E indicano le coordinate di un punto;
- «D in A» significa «D volte l'ascissa»;
- «B in E» significa «B volte l'ordinata»;
- il verbo latino «aequetur» viene oggi espresso col simbolo «=».

Quindi la frase corrisponde alla formula:

$$Dx = By \quad \text{ossia} \quad y = \frac{D}{B}x$$

Si tratta in definitiva della formula:

$$y = mx$$

espressa però con un linguaggio molto lontano da quello di oggi.



## Gli studi sulle traiettorie di un corpo

Nella prima metà del Seicento vengono pubblicati vari studi sul lancio dei proiettili. In fig. 2 un'incisione dell'epoca mostra le traiettorie seguite da una palla di cannone; la fig. 3 mostra le due grandezze variabili che caratterizzano la traiettoria del proiettile:

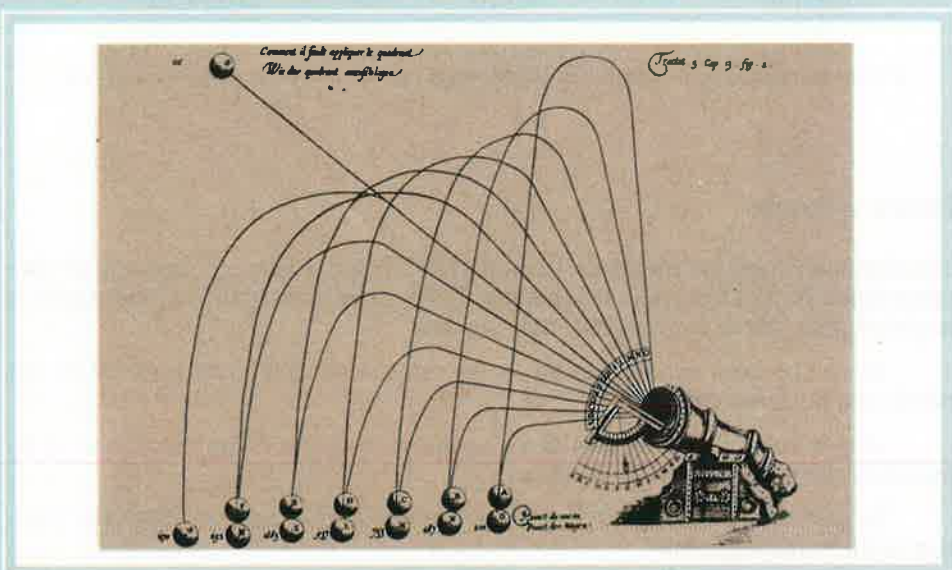
- lo spostamento  $x$  in direzione orizzontale;
- lo spostamento  $y$  in direzione verticale.

È quindi una curva che fornisce la legge per ricavare, per ogni valore di  $x$ , il corrispondente valore di  $y$ .

E così il grande fisico inglese Isaac Newton (1642-1727) considerava le curve sempre come traiettorie, cioè come «scie» lasciate da un corpo che si muove; ecco infatti che cosa scrive Newton nel 1676:

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal movimento continuo di punti. ... Questa genesi avviene naturalmente e viene osservata tutti i giorni nel movimento dei corpi.»

Figura 2  
Lo studio  
della traiettoria  
dei proiettili  
in un trattato  
di artiglieria  
del 1621



## Il concetto di funzione dal XVIII secolo alla fine del XIX

Il termine «funzione» compare per la prima volta nel 1673 in un manoscritto del filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz per indicare una quantità variabile da un punto ad un altro di una curva.

Si trattava dunque di un concetto vago e suggestivo, sul quale molti matematici di valore hanno lavorato per secoli, modificandolo gradualmente.

Ecco una breve selezione delle definizioni di funzione che si trovano nei testi degli autori più noti dal Settecento alla fine dell'Ottocento.

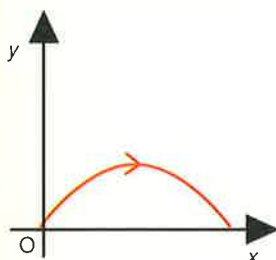
*Leonhard Euler [Eulero] (1755)*

«Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste.

Questa denominazione ha un'estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre.

Se dunque  $x$  rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da  $x$  in un modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate funzioni di essa».

Figura 3  
La traiettoria  
di un proiettile  
è una curva



*Augustin-Louis Cauchy (1857)*

«Due variabili reali o, in altri termini, due quantità algebriche variabili diconsi funzioni una dell'altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell'una determini il valore dell'altra».

*Karl Weierstrass (1878)*

«Se una quantità variabile reale ..., che diremo  $y$ , è legata ad un'altra quantità variabile reale ...  $x$ , in guisa che ad un valore di  $x$  corrispondano, entro certi limiti, uno o più valori determinati per  $y$ , si dirà che  $y$  è funzione di  $x$  nel senso più generale del vocabolo e si scriverà  $y = f(x)$ ».

### **Il concetto di funzione dopo il 1939**

Nel 1935 sette giovani matematici francesi crearono un gruppo di lavoro al quale dettero il «nome di battaglia» di Bourbaki. Inizialmente il gruppo aveva un obiettivo circoscritto: riscrivere un famoso trattato di matematica in cui avevano individuato delle parti poco rigorose.

Ben presto però il progetto iniziale si trasformò nel ben più ambizioso programma di risistemare tutta la matematica, basandola su un unico fondamento: lo studio degli insiemi.

A partire dal 1939 cominciarono a uscire i lavori del gruppo Bourbaki, che riesaminavano i vari rami della matematica allora conosciuti alla luce di questo nuovo punto di vista; e così le tradizionali suddivisioni della matematica in aritmetica, geometria, algebra, etc. diventavano sorpassate e si imponevano nuovi criteri di classificazione.

Ecco che cosa ha scritto a questo proposito Jean Dieudonné, uno dei più famosi membri del gruppo Bourbaki:

«Io paragono le vecchie suddivisioni della matematica alle suddivisioni degli antichi zoologi i quali, vedendo che il delfino, lo squalo e il tonno sono animali simili, dicevano: sono pesci, perché tutti vivono nel mare ed hanno forme simili. Bisognava aspettare un bel pezzo prima che essi realizzassero che le strutture di questi animali non erano del tutto simili e che dovevano essere classificati in modi diversi».

Dal 1939 è stata enorme l'influenza esercitata da Bourbaki sul linguaggio e sul modo di concepire e di trattare gli argomenti centrali della matematica. E fra gli argomenti centrali affrontati in «stile bourbakista» non poteva mancare il concetto di funzione.

Ecco appunto la definizione bourbakista di funzione, come si trova in un testo di Dieudonné del 1969:

«Siano  $E$  e  $F$  due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile  $x$  di  $E$  e una variabile  $y$  di  $F$  è detta relazione funzionale di  $E$  verso  $F$ , se, qualunque sia  $x$  in  $E$ , esiste un elemento  $y$  di  $F$ , e uno solo, che stia nella relazione considerata con  $x$ . Si dà il nome di funzione all'operazione che così associa ad ogni elemento  $x$  di  $E$  l'elemento  $y$  di  $F$  che si trova nella relazione data con  $x$ ; si dice che  $y$  è il valore della funzione per l'elemento  $x$  e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata».

Però, mentre il gruppo Bourbaki si dedicava a questo paziente lavoro di rigorosa sistemazione dei concetti, altri grandi matematici lavoravano in settori più orientati verso le applicazioni, e non tutti concordavano sull'impostazione bourbakista; ecco la voce di uno di questi matematici.

*René Thom (1964)*

«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki ... non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza».

## Le funzioni nella realtà

La nozione di funzione data nei paragrafi 3 e 4 è molto generale: una funzione è una legge che fa corrispondere a un elemento del dominio  $D$  un solo elemento del codominio  $C$ .

E così non è detto che gli insiemi  $D$  e  $C$  siano insiemi numerici né che gli elementi siano numeri e nemmeno che la legge di corrispondenza sia espressa con una formula.

Ecco allora qualche esempio di funzione che nasce in un contesto non strettamente matematico.

### Funzioni date con un grafico

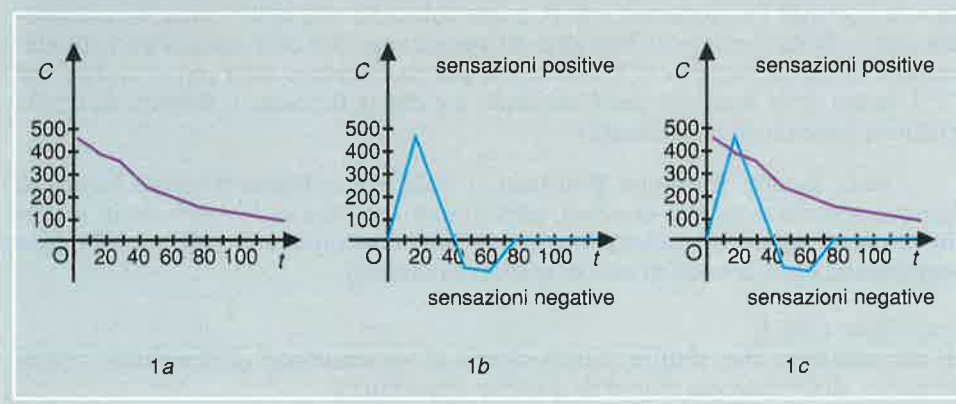
In fig. 1 sono riportati dei grafici ottenuti nel 1982 da due sperimentatori americani che si occupavano degli effetti della cocaina, una droga di antica origine.

Una delle esperienze condotte è stata la seguente: far assumere della cocaina a un tossicodipendente e misurare la concentrazione  $c$  della droga nel sangue al passare del tempo  $t$  che trascorre a partire dall'assunzione della cocaina. Si sono quindi tradotti i risultati dell'esperimento in un grafico, riportando  $t$  sull'asse delle ascisse e  $c$  sull'asse delle ordinate. Si è così ottenuto il grafico di fig. 1a.

Il grafico di fig. 1b è stato invece ottenuto riportando sull'asse delle ascisse ancora il tempo  $t$ , ma sull'asse delle ordinate le «sensazioni riferite dal soggetto», considerando, per esempio, come sensazione positiva l'euforia e come sensazioni negative la depressione, l'angoscia e il desiderio di un'altra dose di droga.

Infine la fig. 1c riporta i due grafici delle figure 1a e 1b sovrapposti; quest'ultimo grafico mostra che le sensazioni negative hanno inizio quando la concentrazione di droga nel sangue è ancora relativamente elevata.

Figura 1  
Tre grafici  
per studiare l'effetto  
della cocaina





Basta sfogliare un quotidiano o un settimanale d'informazione per trovare altre funzioni espresse con un grafico; per esempio in fig. 2 si trovano due grafici che danno due diverse previsioni, fatte all'inizio del 1988, per il tasso d'inflazione della lira italiana nel periodo dal 1988 al 1992.

### Funzioni date con una tabella

Ancora più varie e comuni sono le funzioni date per mezzo di una tabella.

La tabella A, per esempio, si occupa della temperatura massima di alcune città in un dato giorno: a ogni città è associata la sua temperatura massima.

Questa funzione può essere visualizzata con un grafico come quello di fig. 3. Un grafico analogo potrebbe visualizzare anche la tabella B, che fa parte di uno studio sulla sopravvivenza di differenti microrganismi sottoposti ad alta temperatura.

TABELLA A				TABELLA B	
Amsterdam	12	Lisbona	18	Organismi	Tempo di sopravvivenza in minuti
Atene	14	Londra	10		
Belgrado	6	Los Angeles	25	Protozoi	0
Berlino	7	Madrid	16	Batteri	0
Bruxelles	11	Miami	17	Bacillus subtilis	14
Chicago	11	Mosca	6	Clostridium perfringens	20
Copenaghen	5	New York	9	Clostridium botulinum	360
Dublino	7	Oslo	4		
Francoforte	9	Parigi	12		
Ginevra	7	Rio de Janeiro	36		
Helsinki	4	S. Francisco	22		
Honolulu	26	Stoccolma	3		
Istanbul	14	Vienna	8		
Kiev	2	Varsavia	5		

### Altre funzioni

Ma non si trovano solo tabelle e grafici nella vita di tutti i giorni: ci si vale di funzioni, forse senza rendersene conto, tutte le volte che si usa un tariffario per calcolare il costo di una telefonata, di un viaggio in treno o l'ammontare delle tasse da pagare ogni anno. Ecco un esempio. Per sapere quanto verrà a costare una telefonata interurbana in Italia ad una distanza superiore a 120 km, si hanno delle indicazioni di questo tipo: il costo è valutato a partire da unità indivisibili di tempo composte di tre minuti; la prima unità costa 1235 lire, le successive 735 lire.

Per valutare il costo di una telefonata seguendo queste indicazioni, si potrebbe allora procedere così:

- si indica con  $x$  il tempo (in minuti);
- si indica con  $y$  il costo (in lire);
- si applicano le seguenti formule:
 
$$\begin{aligned} \text{per } 0 \leq x < 3 \quad y &= 1235 \\ \text{per } 3 \leq x < 2 \cdot 3 \quad y &= 1235 + 735 \\ \text{per } 2 \cdot 3 \leq x < 3 \cdot 3 \quad y &= 1235 + 2 \cdot 735 \end{aligned}$$

e così via.

Si trovano dunque, nei settori scientifici più vari e nella vita di tutti i giorni, la necessità e l'abitudine di basarsi su formule, tabelle o grafici per esplorare o descrivere la realtà. Sono proprio questi strumenti di indagine, apparentemente tanto diversi, a essere sintetizzati in un unico concetto: il concetto di funzione.

Figura 2  
Due grafici di previsione del tasso d'inflazione

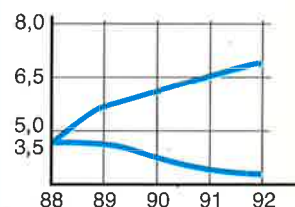


Figura 3  
La temperatura in alcune città del mondo





# Le funzioni $y=x^n$ e il loro grafico

## Le funzioni $y = x^2$ e $y = x^3$

Dalla legge parabolica si è stati condotti a studiare la funzione

$$y = x^2$$

scegliendo come dominio tutto l'insieme dei reali (fig. 1).

E così la legge cubica può condurre a studiare la funzione

$$y = x^3$$

scegliendo ancora come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$  dei reali; si ottengono la tabella e il grafico di fig. 2, che prende anche il nome di *parabola cubica* o *parabola del terzo ordine*.

Queste due curve visualizzano alcune proprietà delle potenze a esponente intero; in particolare:

- le due curve passano per il punto  $O(0; 0)$ , dato che risulta:

$$0^2 = 0 \qquad 0^3 = 0$$

- le due curve passano per il punto  $A(1; 1)$ , visto che si ha:

$$1^2 = 1 \qquad 1^3 = 1$$

- la parabola d'equazione  $y = x^2$  è costituita da tutti punti di ordinata  $y$  positiva e questo perché *qualunque numero elevato al quadrato dà una potenza positiva*; risulta, per esempio:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \qquad (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

- la parabola d'equazione  $y = x^3$  è costituita tutta da punti di ordinata  $y$  con lo stesso segno dell'ascissa  $x$  e questo perché *qualunque numero elevato al cubo dà una potenza che ha lo stesso segno della base* e cioè risulta, per esempio:

$$2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

## Le funzioni $y = x^n$ con esponente $n$ intero positivo

Le due funzioni ora ottenute conducono a continuare lo studio, tracciando il grafico di altre funzioni del tipo

$$y = x^n$$

con esponente intero positivo.

Così, per esempio, in fig. 3 si trova la tabella e il grafico della funzione:

$$y = x^4$$

In fig. 4 si trova la tabella e il grafico della funzione:

$$y = x^5$$

Ora, confrontando le figure 1 e 3, si osserva che le due curve hanno un andamento analogo, andamento che si può ritrovare anche in funzioni come  $y = x^6$  o  $y = x^8$ , cioè in funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente  $n$  pari. E così si trova un andamento analogo nelle due curve delle funzioni  $y = x^3$  e  $y = x^5$  (figure 2 e 4), che sono pure del tipo  $y = x^n$ , ma con esponente  $n$  dispari.

Le considerazioni finora svolte possono essere riassunte nel modo seguente.

1. Tutte le funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente intero positivo presentano due caratteristiche comuni:
  - passano per  $O(0; 0)$  perché  $0^n = 0$  per qualunque  $n$  intero positivo;
  - passano per  $A(1; 1)$  perché  $1^n = 1$  per qualunque  $n$  intero positivo.

2. Tutte le funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente pari hanno un grafico analogo a quello della funzione  $y = x^2$ ; in particolare, la curva è costituita tutta da punti di ordinata  $y$  positiva, perché *qualunque numero elevato a un esponente pari dà una potenza positiva*.

Per esempio risulta:

$$(-2)^4 = [(-2)^2]^2 = 16$$

$$(-2)^6 = [(-2)^2]^3 = 64$$

3. Tutte le funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente dispari hanno un grafico analogo a quello della funzione  $y = x^3$ ; in particolare, la curva è costituita tutta da punti che hanno l'ordinata  $y$  con lo stesso segno dell'ascissa  $x$ , perché *qualunque numero elevato a un esponente dispari dà una potenza che ha lo stesso segno della base*.

Per esempio risulta:

$$(-2)^5 = (-2)(-2)^4 = -32$$

$$(-2)^7 = (-2)(-2)^6 = -128$$

## Conoscenze

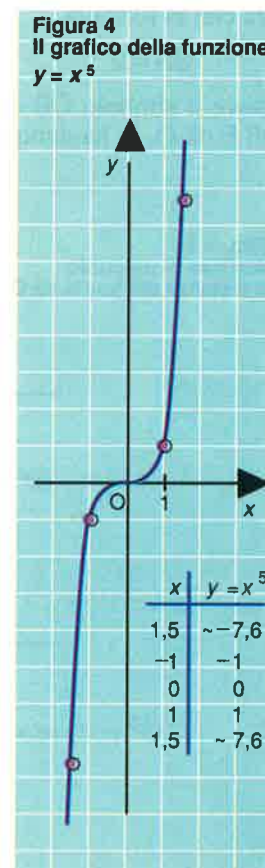
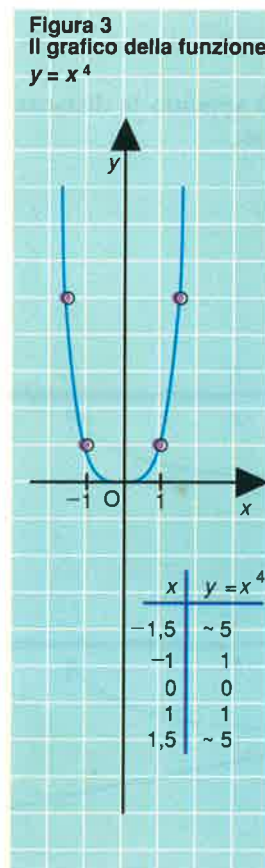
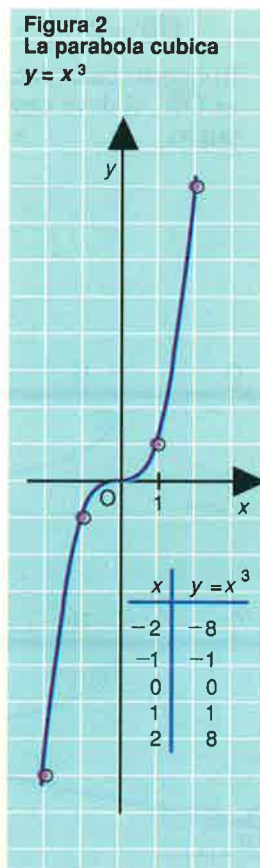
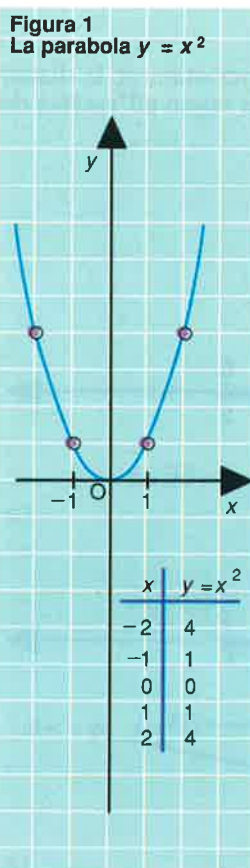
- ① Tracciare il grafico delle funzioni  $y = x^2$  e  $y = x^4$  illustrandone le caratteristiche comuni.
- ② Tracciare il grafico delle funzioni  $y = x^3$  e  $y = x^5$  illustrandone le caratteristiche comuni.

## Comprensione

- ① Esporre le proprietà che caratterizzano tutte le funzioni  $y = x^n$ .
- ② Esporre le proprietà che distinguono le funzioni  $y = x^n$  con  $n$  pari da quelle con  $n$  dispari.

## Applicazioni

- ① Tracciare il grafico della funzione  $y = x^6$  e illustrarne le caratteristiche.
- ② Tracciare il grafico della funzione  $y = x^7$  e illustrarne le caratteristiche.



# La funzione $y=|x|$ e il suo grafico

## Il valore assoluto (o modulo) di un numero

In fig. 1a si trova l'asse delle  $x$  di un riferimento cartesiano e una coppia di punti corrispondenti a numeri reali opposti:

- B che rappresenta 2, e B', che rappresenta -2.  
Così si osserva subito che l'unità di misura OU è contenuta 2 volte in OB e perciò la distanza di B da O vale 2. Questa situazione si sintetizza con la formula

$$\overline{OB} = 2$$

dove il simbolo  $\overline{OB}$  indica appunto la distanza di B da O. Si ha dunque che:

- l'ascissa di B è 2 e

$$\overline{OB} = 2$$

cioè la distanza  $\overline{OB}$  coincide con l'ascissa del punto.

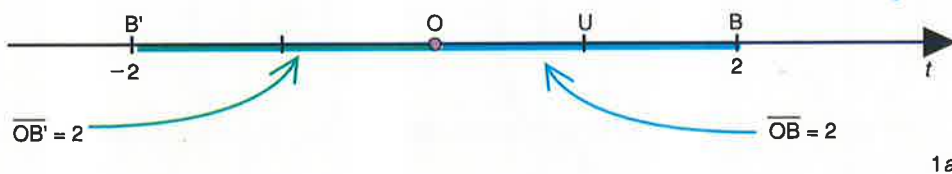
Passando ora a esaminare il punto B' (fig. 1a), si trova che:

- l'ascissa di B' è -2 e

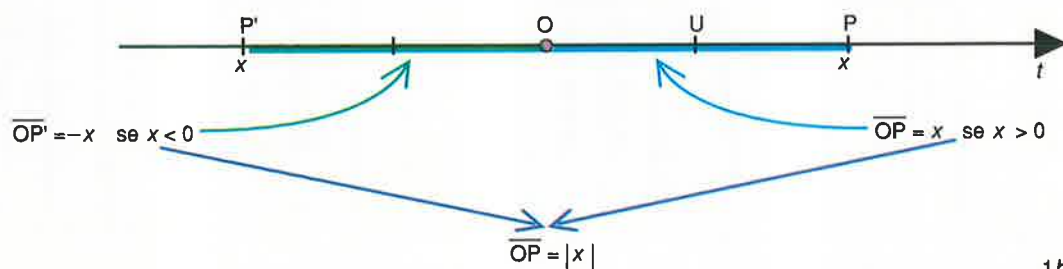
$$\overline{OB'} = 2$$

In questo caso dunque per ottenere la distanza  $\overline{OB'}$ , si deve cambiare segno all'ascissa del punto.

**Figura 1**  
Ascissa di un punto  
e distanza del punto da O



1a



1b

Il fatto che si deve cambiare segno all'ascissa  $-2$  per ottenere la distanza positiva  $2$  si può anche esprimere scrivendo:

$$\overline{OB'} = -(-2)$$

Analoghe considerazioni si possono ripetere ovviamente a partire da una qualunque altra coppia di punti  $P$  e  $P'$  che rappresentano numeri reali opposti.

Si può dunque concludere dicendo che (fig. 1b):

- se  $P$  ha l'ascissa  $x$  positiva,  $\overline{OP} = x$ ;
- se  $P$  ha l'ascissa  $x$  negativa,  $\overline{OP} = -x$ .

Il procedimento ora descritto si riassume scrivendo:

$$\overline{OP} = |x|$$

Il simbolo  $|x|$  si legge «valore assoluto di  $x$ » o «modulo di  $x$ ».

### La funzione $y = |x|$

Il procedimento per ottenere il valore assoluto di un numero può essere efficacemente visualizzato considerando la funzione:

$$y = |x|$$

che è dunque definita così:

- il dominio  $D$  è l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali;
- il codominio  $C$  è l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi;
- ad ogni numero reale  $x$  si associa un numero reale positivo  $y$  con la legge seguente:
  - se  $x \geq 0$ ,  $y = x$ ;
  - se  $x < 0$ ,  $y = -x$ .

In fig. 2 si trova il grafico di questa funzione: il grafico è costituito da due semirette:

- la semiretta d'equazione  $y = x$ , in corrispondenza dei valori positivi di  $x$ ;
- la semiretta d'equazione  $y = -x$ , in corrispondenza dei valori negativi di  $x$ .

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Che cosa indica il simbolo  $|x|$ ?
- ② Dire come è definita la funzione  $y = |x|$  e tracciarne il grafico.

### Comprensione

- ① Esaminare le formule seguenti:

$$\overline{OP} = x \quad \overline{OP} = -x \quad \overline{OP} = |x|$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare la differenza fra le tre formule;
- b. spiegare perché una sola delle formule è valida per qualunque valore dell'ascissa  $x$ .

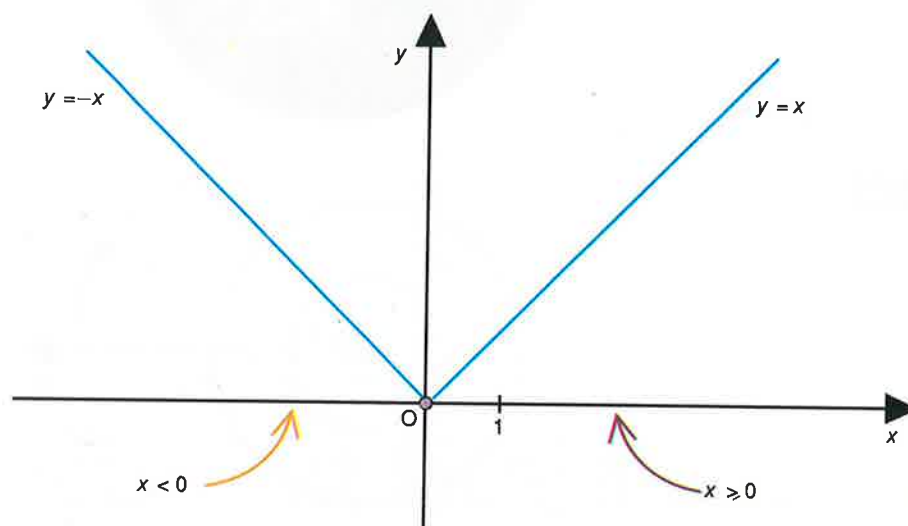
### Applicazioni

- ① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = x \quad y = -x \quad y = |x|$$

Figura 2

La funzione  $y = |x|$  e il suo grafico





## Il riferimento polare

### Un riferimento polare nella tecnica

In fig. 1 è riportata la fotografia di uno schermo radar, che fa parte degli strumenti di bordo delle navi e degli aerei e dei sistemi di controllo di porti e aeroporti. Quando il radar è in funzione, si nota una semiretta luminosa che gira in verso antiorario intorno al centro dello schermo; la presenza di un qualsiasi ostacolo nella direzione della semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

La posizione di un ostacolo  $A$  rispetto all'osservatore  $O$  è quindi individuata da due numeri che si leggono sullo schermo (fig. 2):

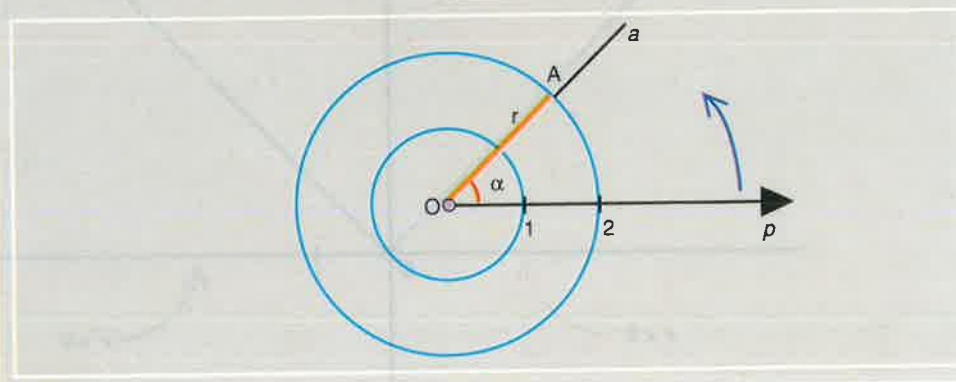
- la distanza  $\overline{OA}$  lunga  $r$ ;
- l'ampiezza  $\alpha$  dell'angolo descritto dalla semiretta luminosa per passare dalla posizione di partenza  $Op$  alla posizione  $OA$ .

Questi due numeri  $r$  e  $\alpha$  individuano dunque la posizione di un punto  $A$  rispetto al punto  $O$  e alla semiretta  $Op$ ; si dice allora che si è stabilito sullo schermo un *riferimento polare*.

**Figura 1**  
Lo schermo radar  
per il controllo del  
traffico navale in un  
porto olandese



**Figura 2**  
Il riferimento polare



## Le coordinate polari

Sul piano si stabilisce dunque un *riferimento polare* fissando (fig. 2):

- un punto  $O$ , detto *polo*;
- una semiretta  $Op$ , detta *asse polare*, su cui è fissata un'unità di misura delle lunghezze;
- un verso di rotazione della semiretta, di solito quello antiorario.

Fissato un riferimento polare, la posizione di un punto  $A$  è individuata da due numeri:

- il *raggio*  $r$ , che indica la distanza  $\overline{OA}$ ;
- l'*anomalia*  $\alpha$ , che indica l'ampiezza dell'angolo  $p\hat{O}A$ .

Raggio e anomalia sono le coordinate polari del punto  $A$ , e si scrive:

$$A(r; \alpha)$$

In fig. 3 si trova indicato qualche punto con le sue coordinate polari.

Le coordinate polari in matematica sono utilizzate soprattutto per descrivere in modo facile delle linee in cui c'è un punto con un ruolo particolare; ecco tre esempi.

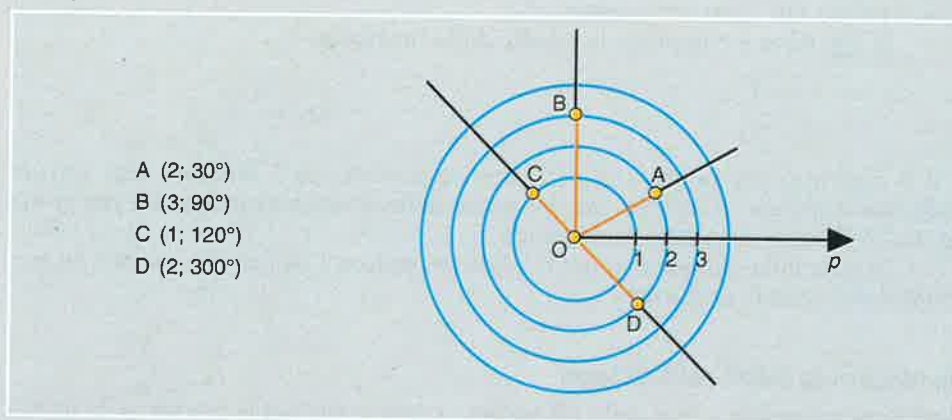


Figura 3  
Qualche punto con le sue coordinate polari

### Equazione di semirette che passano per $O$

In fig. 4 è disegnata la semiretta  $Ob$  che forma con l'asse polare un angolo di  $45^\circ$ . Tutti i punti della semiretta hanno dunque una proprietà comune: l'anomalia  $\alpha$  vale  $45^\circ$ ; perciò l'equazione della semiretta  $Ob$  è:

$$\alpha = 45^\circ$$

E viceversa le equazioni:

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{e} \quad \alpha = 135^\circ$$

hanno per grafico le due semirette  $Oc$  e  $Od$  pure rappresentate in fig. 4.

In conclusione, una semiretta di origine  $O$  ha equazione:

$$\alpha = k$$

dove  $k$  indica l'anomalia fissa di tutti i punti che si trovano sulla semiretta.

### Equazione di circonferenze di centro $O$

Un punto  $A$  che ha il raggio  $r$  fisso mantiene sempre la stessa distanza da  $O$  e perciò percorre una circonferenza di centro  $O$ .

Per esempio (fig. 5), le equazioni:

$$r = 1 \quad r = 3$$

descrivono due circonferenze di centro  $O$ , una con il raggio lungo 1 e l'altra con il raggio lungo 3.

Figura 4  
Semirette nel riferimento polare

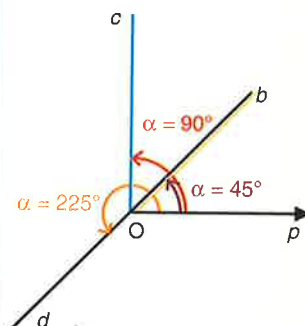
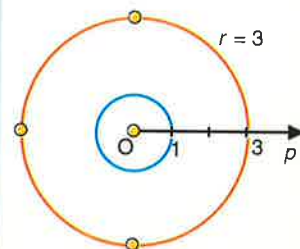


Figura 5  
Circonferenze di centro nel riferimento polare



In conclusione, una circonferenza che ha il centro nell'origine  $O$  ha equazione:

$$r = h$$

dove  $h$  indica il raggio di tutti i punti che si trovano sulla circonferenza.

### La spirale uniforme

Finora si è visto come delle linee note – semirette passanti per  $O$  e circonferenze di centro  $O$  – assumano equazioni particolarmente semplici quando si stabilisce sul piano un riferimento polare.

Vediamo ora il viceversa: quale aspetto assume il grafico di una funzione nota in questo nuovo riferimento. Ecco un esempio.

La funzione:

$$y = \frac{1}{20}x$$

che nel riferimento cartesiano ha come grafico una retta (fig. 6a), ha nel riferimento polare tutt'altro andamento.

In fig. 6b si è compilata la tabella della funzione:

$$r = \frac{1}{20} \alpha$$

e si è costruito per punti il grafico corrispondente; si è ottenuta una *spirale uniforme* o *spirale di Archimede*, dal nome dello scienziato greco che per primo ne studiò il comportamento matematico.

Si conclude dunque che nel riferimento polare l'equazione  $r = m\alpha$  ha per grafico una spirale uniforme.

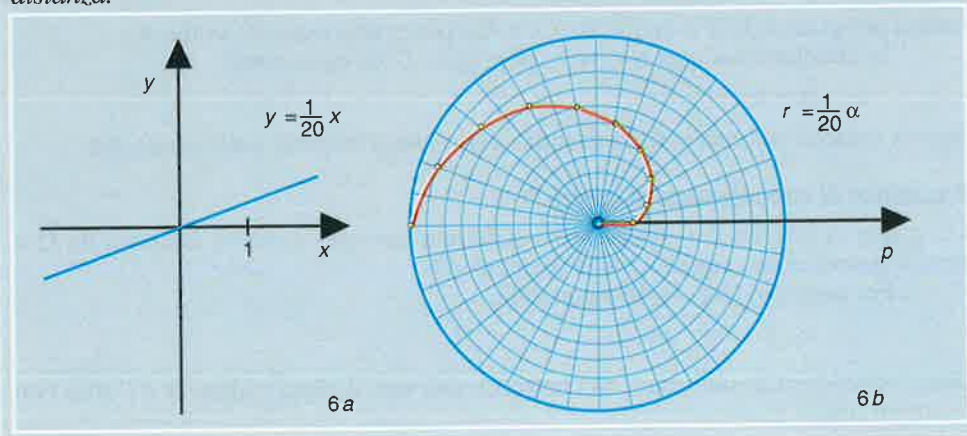
### Un riferimento polare nella biologia

Il riferimento polare – si è detto all'inizio – trova la sua applicazione nella tecnologia; ma questo riferimento si applica anche in un campo del tutto diverso e precisamente nell'*etologia*, che è lo studio del comportamento degli animali.

In particolare, si è scoperto che un'ape comunica alle compagne il luogo dove ha trovato del cibo basandosi proprio su un riferimento polare: l'ape percorre un breve tratto indicando la direzione del cibo; quindi esegue la cosiddetta «danza dell'addome», cioè fa vibrare il suo corpo più o meno rapidamente a seconda della distanza a cui si trova il cibo.

La posizione del cibo è così individuata da due informazioni: *direzione* e *distanza*.

Figura 6  
Un grafico cartesiano e un grafico polare



## Che cosa bisogna sapere

### Il riferimento cartesiano nel piano

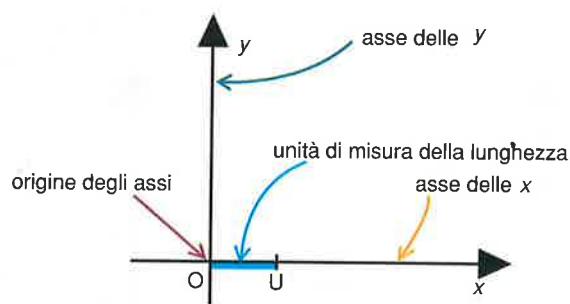
Il riferimento è formato da due rette perpendicolari, dette *assi coordinati*, che si incontrano in un punto  $O$ , detto *origine*.

Su ogni retta è fissato:

- un verso di percorrenza indicato da una freccia;
- un segmento  $OU$ , unità di misura delle lunghezze.

La retta orizzontale prende il nome di *asse delle ascisse* o *asse delle  $x$* .

La retta verticale prende il nome di *asse delle ordinate* o *asse delle  $y$* .

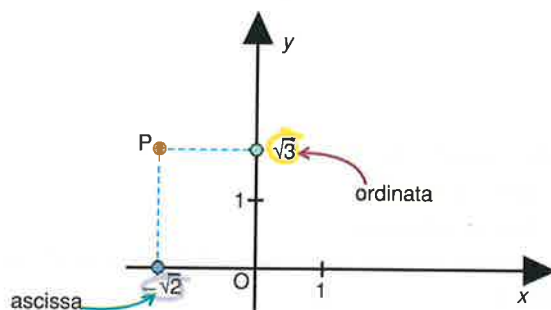


### Le coordinate di un punto

Le coordinate di un punto sono due numeri reali:

- l'*ascissa*, che si legge sull'asse delle ascisse;
- l'*ordinata*, che si legge sull'asse delle ordinate.

*Esempio:*  $P(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$  ha l'ascissa che vale  $-\sqrt{2}$  e l'ordinata che vale  $\sqrt{3}$





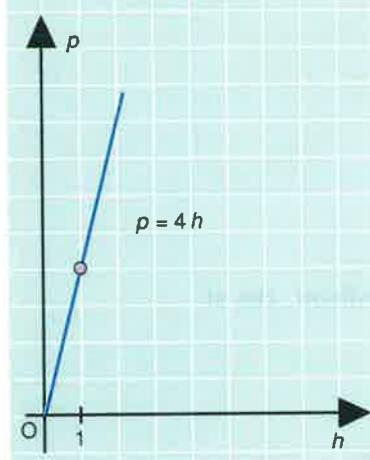
### Equazione di una circonferenza di centro O

Un punto  $P(x; y)$  che percorre la circonferenza di centro O e raggio  $r$  ha le due coordinate variabili e legate dall'equazione:

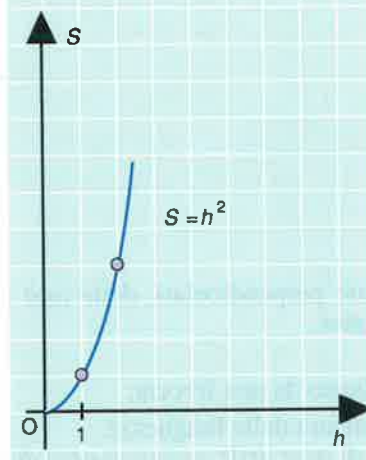
$$x^2 + y^2 = r^2$$

### Leggi matematiche rappresentate sul piano cartesiano

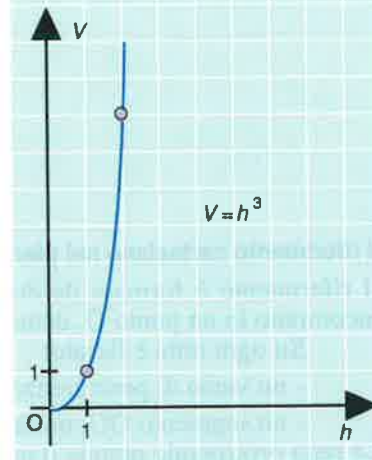
*Proporzionalità diretta*



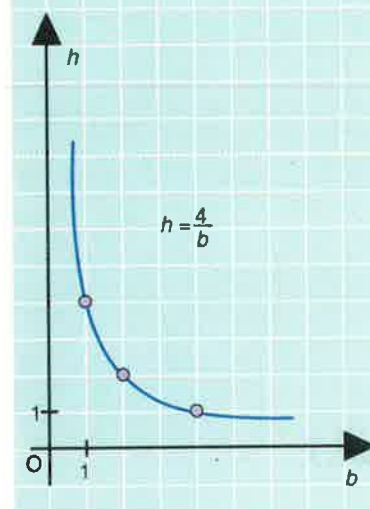
*Legge parabolica*



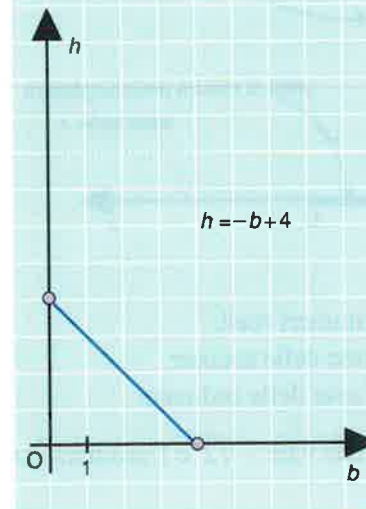
*Legge cubica*



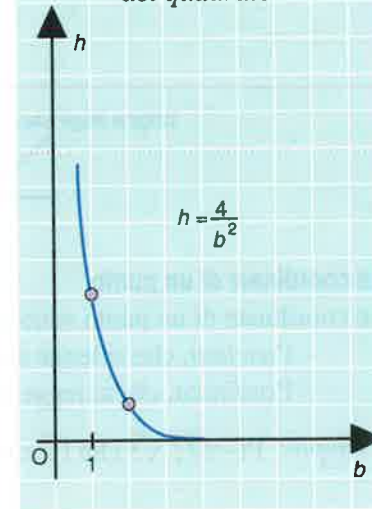
*Proporzionalità inversa*



*Legge lineare*



*Legge dell'inverso del quadrato*

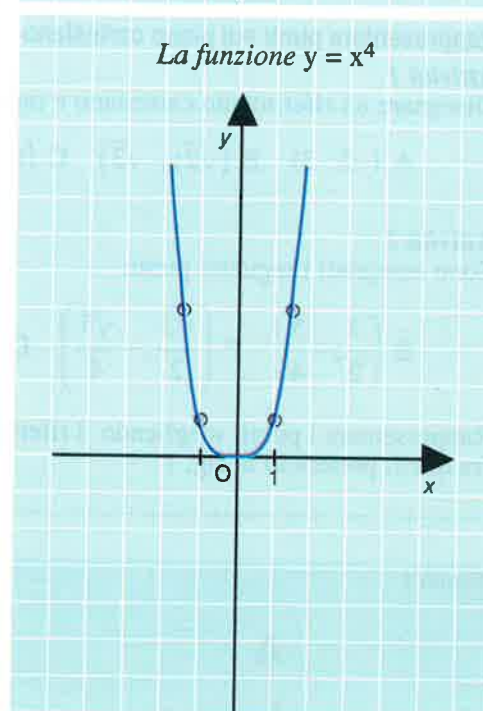
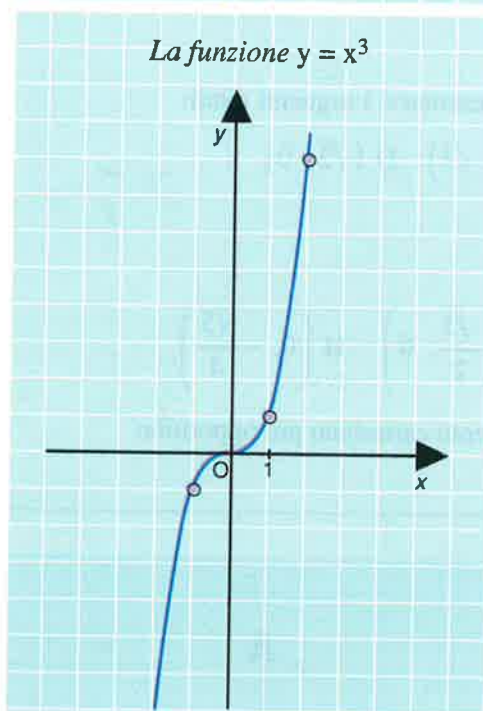
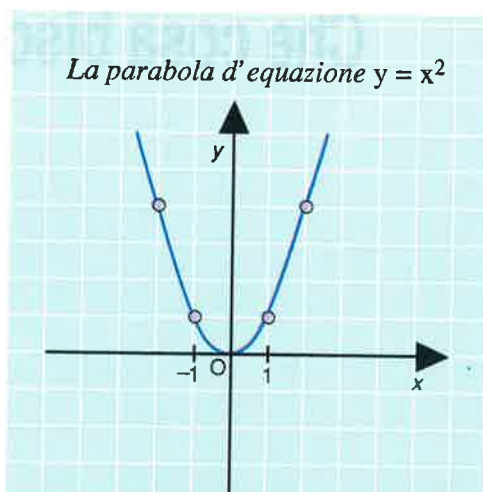
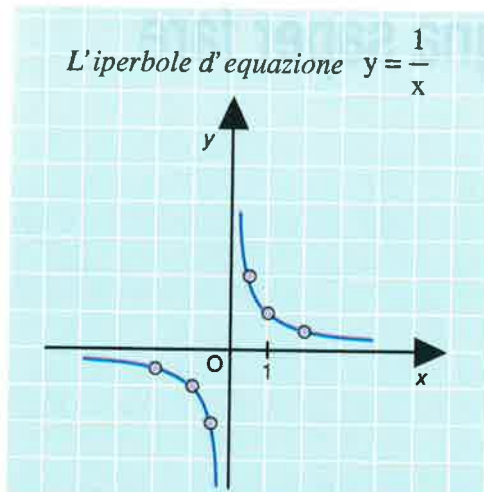


### Il concetto di funzione

Si individua una funzione quando sono dati:

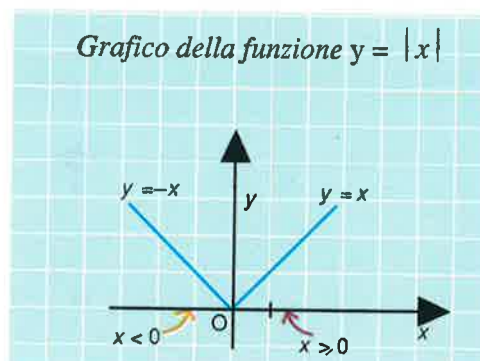
1. un insieme  $D$ , detto *dominio*;
2. un insieme  $C$ , detto *codominio*;
3. una *legge* che associa ad ogni elemento  $x$  dell'insieme  $D$  un solo elemento  $y$  dell'insieme  $C$ .

## Grafici di funzioni



Il valore assoluto o modulo di un numero  $x$ , cioè  $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Che cosa bisogna sapere

# Che cosa bisogna saper fare

## Rappresentare punti sul piano cartesiano

### Attività 1

Disegnare un riferimento cartesiano e rappresentarvi i seguenti punti:

$$A (-2; 3) \quad B (\sqrt{2}; -\sqrt{3}) \quad C (0; -\sqrt{3}) \quad D (\sqrt{2}; 0)$$

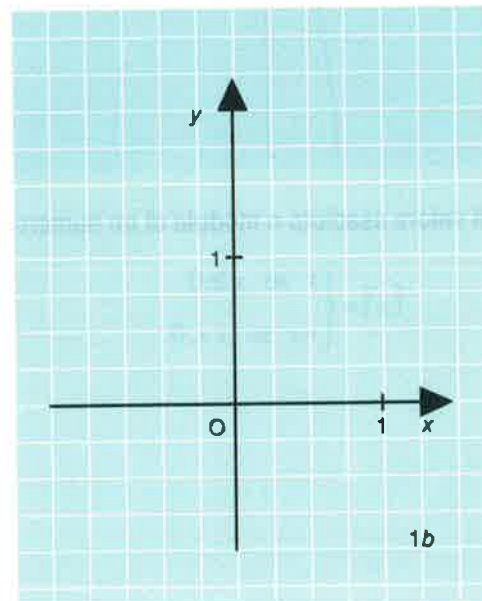
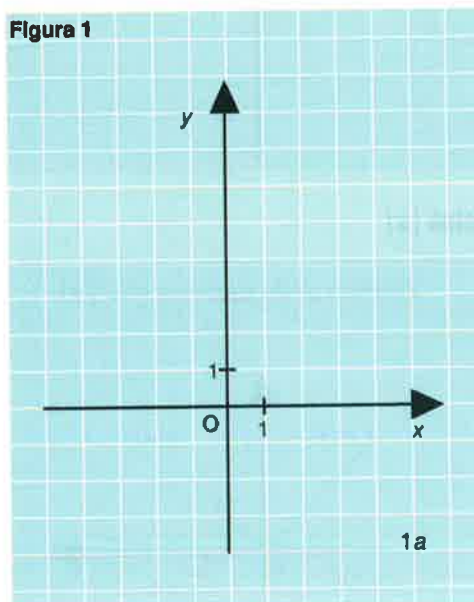
### Attività 2

Sono assegnati i seguenti punti:

$$E \left( \frac{3}{2}; -\frac{5}{4} \right) \quad F \left( \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{4} \right) \quad G \left( \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \quad H \left( 0; -\frac{\sqrt{5}}{4} \right)$$

Rappresentare i punti, scegliendo il riferimento cartesiano più opportuno fra quelli presentati in fig. 1.

Figura 1



## Riconoscere funzioni

### Attività 3

Esaminare i grafici disegnati in fig. 2 e dire quali di essi sono il grafico di una funzione, motivando la scelta.

### Attività 4

Completare la fig. 3, scrivendo accanto a ogni grafico e tabella la corrispondente funzione.

Figura 2

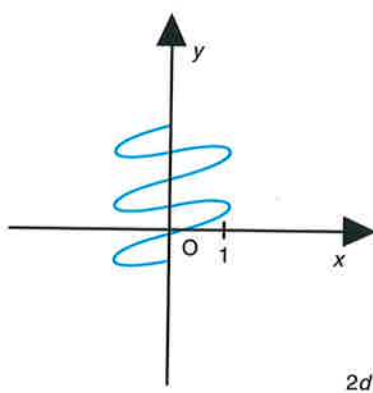
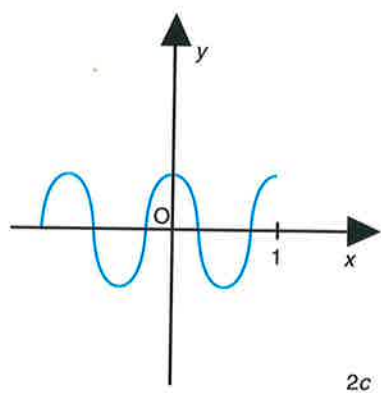
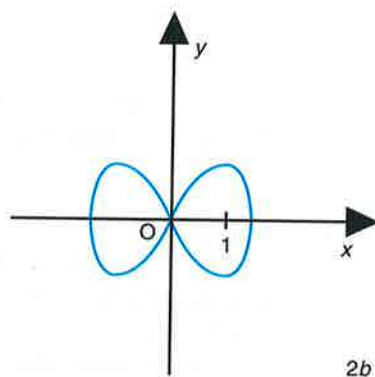
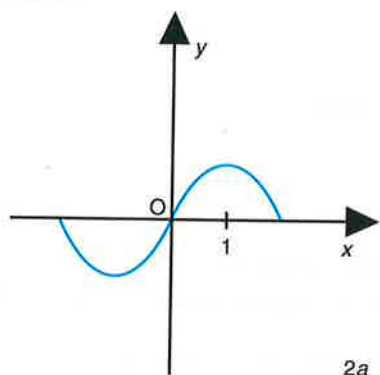
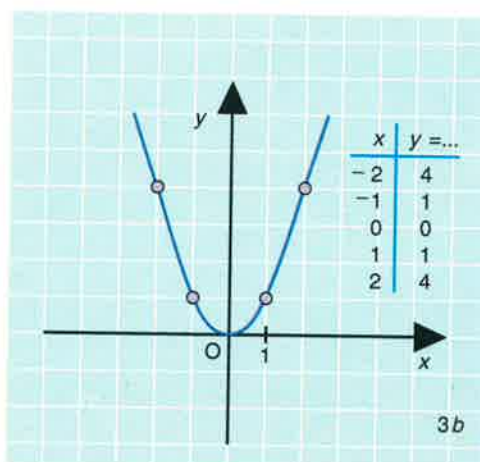
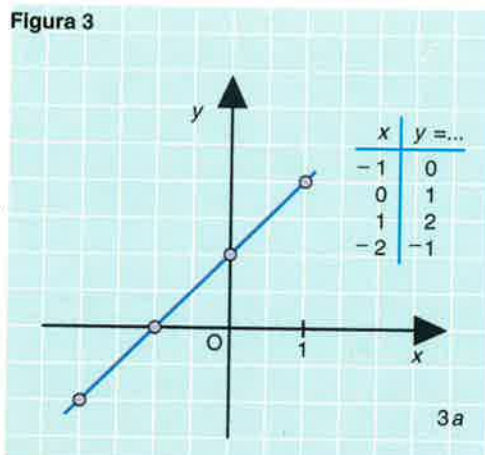


Figura 3





## Tracciare il grafico di una funzione assegnata

### Attività 5

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

1.  $\begin{cases} \text{il dominio } D \text{ è l'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali} \\ \text{il codominio } C \text{ è l'insieme } \mathbb{R} \\ y = x^3 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} \text{il dominio } D \text{ è l'insieme } \mathbb{R}^+ \text{ dei reali positivi} \\ \text{il codominio } C \text{ è l'insieme } \mathbb{R}^+ \\ y = x^3 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} \text{il dominio } D \text{ è l'insieme } \mathbb{Z} \text{ degli interi} \\ \text{il codominio } C \text{ è l'insieme } \mathbb{Z} \\ y = x^3 \end{cases}$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché si ottengono tre grafici differenti;
- b. indicare almeno un punto che si trova sul primo grafico e non sugli altri due;
- c. indicare quale delle tre precedenti funzioni si intende assegnare scrivendo solo:

$$y = x^3$$

# CAPITOLO SESTO

## TRASFORMAZIONI

1. Trasformazioni affini
2. Le equazioni di una trasformazione affine
3. Aree di figure affini

### Scheda applicativa.

Le trasformazioni nella natura

4. Dalle equazioni di un'affinità alle equazioni di una simmetria

5. Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani

### Scheda informativa.

Dalle traslazioni ai vettori

6. Trasformare le funzioni  $y = x^n$  con simmetrie

7. Le funzioni  $y = \sqrt[n]{x}$

### Attività.

Lavorare con le funzioni  $y = \sqrt[n]{x}$

8. Le funzioni  $y = ax^2$  e  $y = \frac{k}{x}$

### Scheda informativa.

L'ellisse

9. Le parabole di equazione  $y = ax^2 + bx + c$

### Attività.

Disegnare parabole di equazione  $y = ax^2 + bx + c$

### Scheda storica.

Le trasformazioni nella storia

### Scheda informativa.

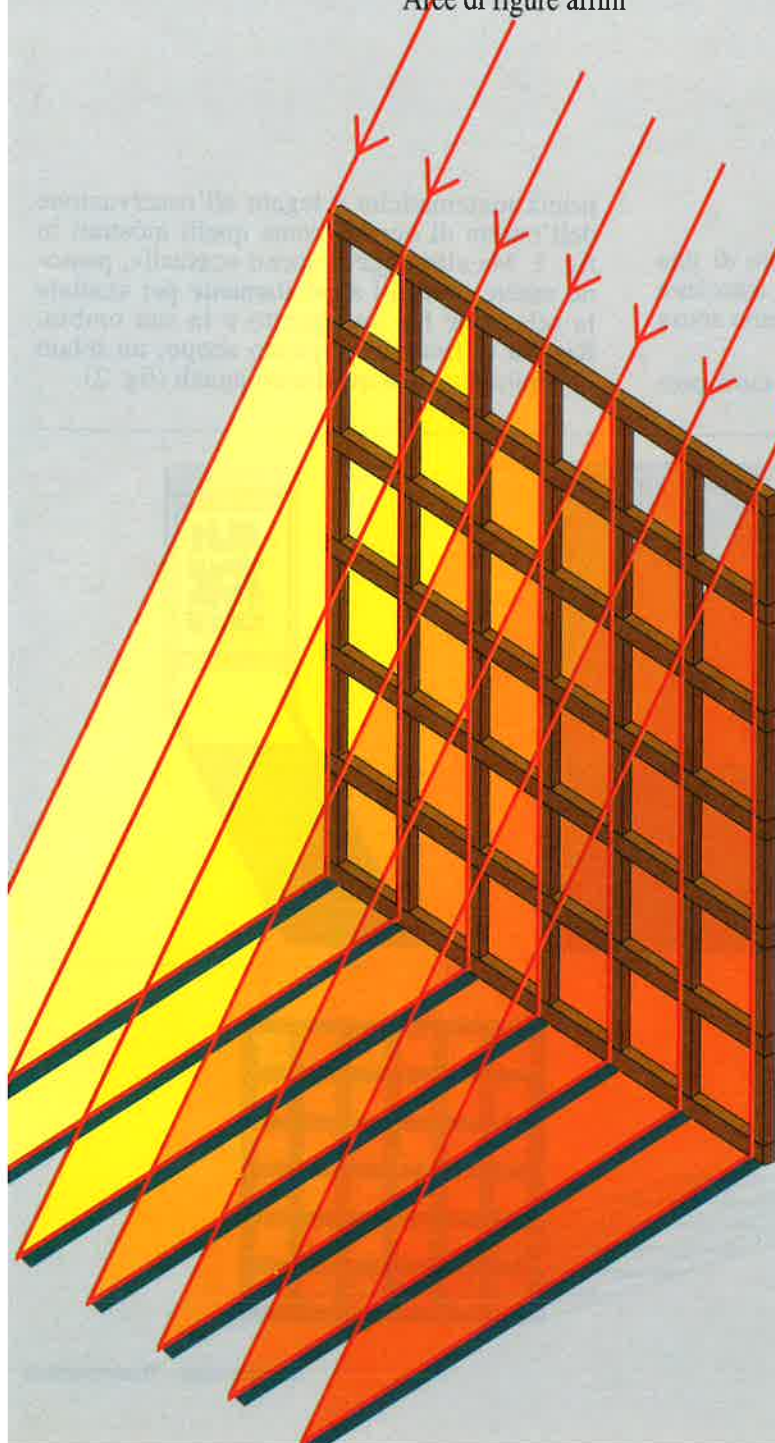
Le equazioni delle trasformazioni proiettive

### Sintesi.

Che cosa bisogna sapere

### Attività finali.

Che cosa bisogna saper fare



# Trasformazioni affini

## Osservare le ombre date dal Sole

Un cartellone pubblicitario o il telaio di una finestra, illuminati dal Sole (fig. 1), tracciano ombre nitide, che molto spesso vediamo senza fermarci ad osservarle.

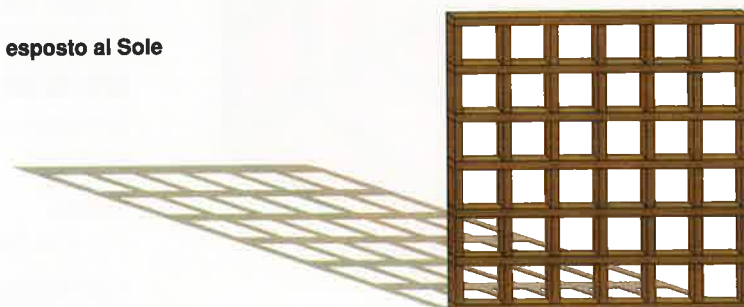
Eppure la scoperta di alcune importanti pro-

prietà matematiche è legata all'osservazione dell'ombra di oggetti come quelli mostrati in fig. 1. Ma altri oggetti, meno «casuali», possono essere costruiti appositamente per studiare la relazione fra un oggetto e la sua ombra. Risulta utilissimo, a questo scopo, un telaio quadrato diviso in quadratini uguali (fig. 2).

**Figura 1**  
Una finestra  
e un cartellone  
pubblicitario  
illuminati dal Sole



**Figura 2**  
Un telaio quadrettato esposto al Sole





Il telaio è esposto al Sole per tutto il giorno e l'ombra si modifica nel corso della giornata, ma sembra avere sempre le stesse caratteristiche: l'ombra del telaio quadrato è un parallelogramma.

Ci si chiede:

- l'ombra è proprio un parallelogramma?
- l'ombra è un parallelogramma a qualunque ora del giorno?

### La trasformazione data dai raggi del Sole è una trasformazione affine

Per trovare la risposta alle domande precedenti si può ragionare così (fig. 3): il Sole è talmente distante dalla Terra che i suoi raggi si possono considerare paralleli; questi raggi, sfiorando le sbarrette, formano dei «piani di luce» paralleli che tracciano sul tavolo ombre parallele.

Così si conclude che *a sbarrette parallele corrispondono ombre che sono segmenti di rette parallele*.

Proprio per questo il telaio quadrato e i quadratini in cui è suddiviso danno come ombra certamente dei parallelogrammi, cioè dei quadri-

lateri con i lati a due a due paralleli.

Si può dire che *i raggi del Sole trasformano il telaio nella sua ombra, mantenendo il parallelismo*: sbarrette che sono parallele nel telaio danno come ombra segmenti che sono ancora paralleli.

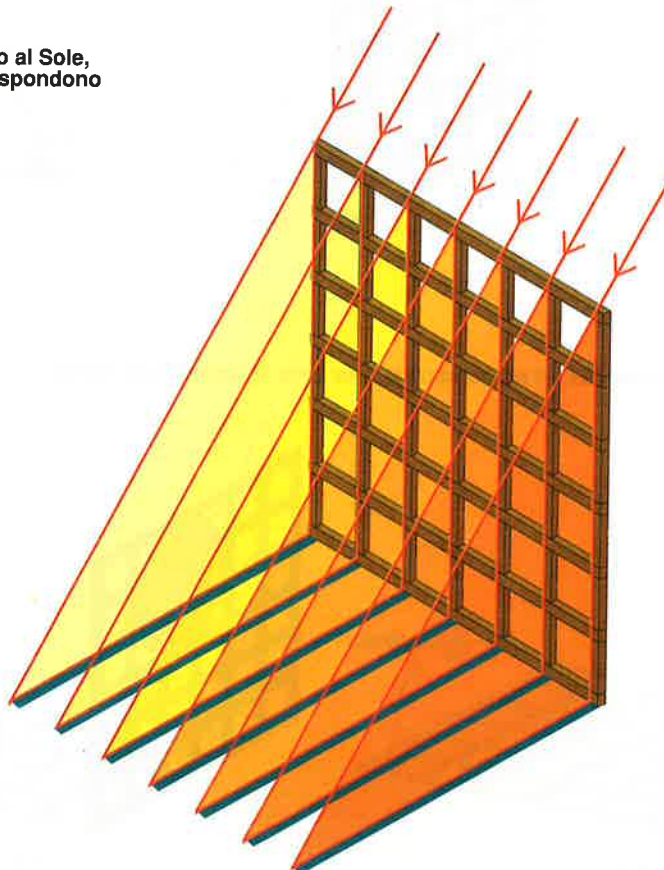
*Una trasformazione che mantiene il parallelismo prende il nome di trasformazione affine o affinità.*

### Un'affinità modifica angoli, lunghezze ed aree

La trasformazione affine data dai raggi del Sole mantiene dunque il parallelismo, ma non mantiene la perpendicolarità: sbarrette che erano perpendicolari danno spesso come ombra segmenti che non sono più perpendicolari.

Più in generale, si osserva che l'affinità modifica l'ampiezza degli angoli e, insieme all'ampiezza degli angoli, cambia la lunghezza dei segmenti e l'area delle superfici: l'ombra del telaio si allunga al tramonto e quindi ne varia l'area nel corso della giornata.

**Figura 3**  
Quando il telaio è esposto al Sole, a sbarrette parallele corrispondono ombre parallele





### Un'affinità mantiene il rapporto delle aree

Anche se tutto sembra variare, continuando ad osservare il telaio e la sua ombra si scopre facilmente qualcosa che non cambia: al telaio  $A$  formato da 36 quadratini  $Q$  tutti uguali fra loro (fig. 4) corrisponde un'ombra  $A'$  formata da 36 parallelogrammi  $Q'$  tutti uguali fra loro; questo vuol dire che risulta:

$$A = 36 Q \quad \text{e} \quad A' = 36 Q'$$

ossia:

$$\frac{A}{Q} = 36 \quad \text{e} \quad \frac{A'}{Q'} = 36$$

Questo particolare rapporto di aree che resta costante porta a indagare meglio sul rapporto

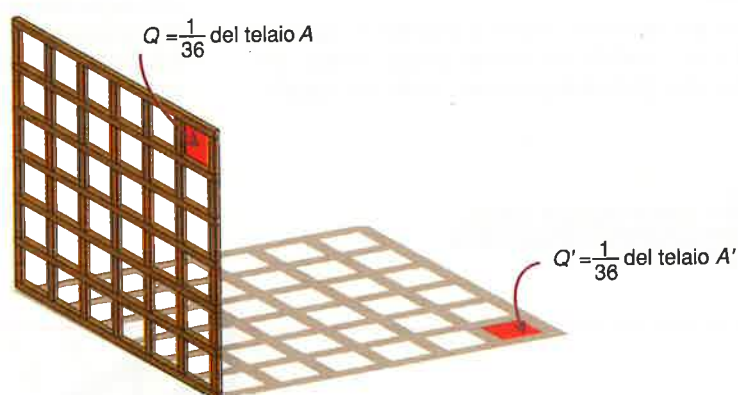
fra aree di figure corrispondenti.

Si può, per esempio, suddividere ogni quadratino del telaio in due triangoli con una sbarretta-diagonale (fig. 5a): si ottengono 72 triangoli  $T$  tutti uguali, che daranno come ombra 72 triangoli  $T'$  ancora tutti uguali fra loro e così si avrà che:

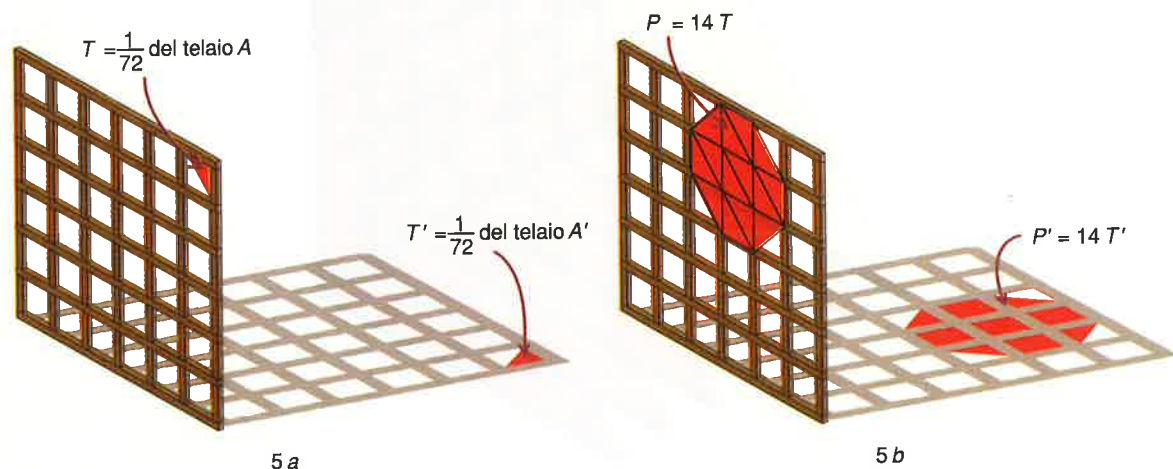
$$\frac{A}{T} = 72 \quad \text{e} \quad \frac{A'}{T'} = 72$$

E ancora, si possono isolare nel telaio un certo numero di triangoli  $T$ , per formare un poligono  $P$  come quello di fig. 5b, che è formato da 14 triangoli  $T$ ; l'ombra sarà un poligono  $P'$  formato ancora da 14 triangoli uguali  $T'$  e perciò si avrà, per esempio:

**Figura 4**  
Una trasformazione affine mantiene il rapporto fra le aree dei quadrilateri corrispondenti



**Figura 5**  
Una trasformazione affine mantiene il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti



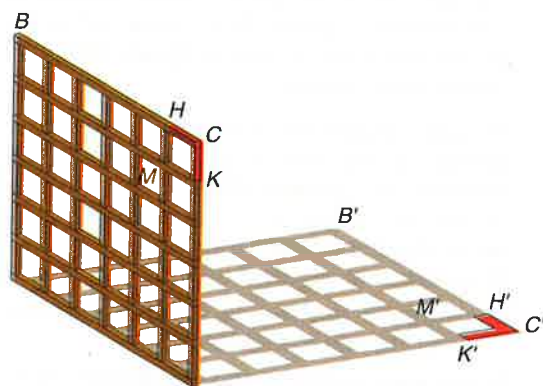
$$\frac{P}{T} = 14 \quad \text{e} \quad \frac{P'}{T'} = 14$$

Si può continuare a esaminare nello stesso modo tanti altri poligoni, arrivando a concludere che è costante il rapporto fra poligoni corrispondenti.

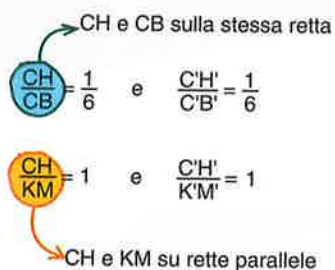
E dai poligoni si può passare alle figure curvilinee, ricavando dal modello suggerimenti per spingersi oltre con l'immaginazione: si possono immaginare poligoni con un numero sempre più grande di lati fino ad approssimare un cerchio, o un quadrettato che approssima una qualunque altra figura curvilinea.

Osservazione e immaginazione portano dunque a concludere che i raggi del Sole trasformano il telaio nella sua ombra, mantenendo il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti.

**Figura 6**  
Una trasformazione affine non mantiene sempre il rapporto fra segmenti corrispondenti



$$\frac{CH}{CK} = 1 \quad \text{ma} \quad \frac{C'H'}{C'K'} \neq 1$$



### Un'affinità non mantiene sempre il rapporto fra segmenti

Non sembra invece che si mantenga sempre il rapporto fra segmenti corrispondenti; ecco qualche esempio (fig. 6):

- al lato CH, che è uguale a CK nel telaio, corrisponde C'H', che non è uguale a C'K' nell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{CK} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{C'H'}{C'K'} \neq 1$$

- al lato CH, che è uguale a KM nel telaio, corrisponde C'H', che è uguale a K'M' nell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{KM} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{C'H'}{K'M'} = 1$$

- al lato CH, che è  $\frac{1}{6}$  del lato CB del telaio,

corrisponde C'H', che è  $\frac{1}{6}$  del lato C'B' dell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{C'H'}{C'B'} = \frac{1}{6}$$

Ripetendo altre osservazioni di questo tipo si arriva a concludere che una trasformazione affine mantiene il rapporto fra segmenti corrispondenti solo se i segmenti si trovano sulla stessa retta (come CH e CB) o su rette parallele (come CH e KM).

### Proprietà invarianti per una trasformazione affine

Ecco le proprietà che non cambiano, che sono cioè *invarianti* per una trasformazione affine, come risultano dall'osservazione dell'ombra data dai raggi del Sole:

- il parallelismo;
- il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti;
- il rapporto fra segmenti corrispondenti solo se i segmenti si trovano sulla stessa retta o su rette parallele.

A queste proprietà se ne può aggiungere un'altra che sembra evidente:

- a rette corrispondono rette;
- cioè tratti rettilinei, come i lati del telaio, non appaiono «incurvati» nell'ombra.

### Le trasformazioni affini sono particolari trasformazioni proiettive

L'ultima osservazione potrebbe sembrare superflua, ma acquista significato quando si sottopone il telaio a un'altra trasformazione che non è affine: si illumina il telaio non più con i raggi solari ma con un proiettore (fig. 7); l'ombra non è più un parallelogramma, ma un quadrilatero qualunque.

Non si mantiene dunque il parallelismo, che è la proprietà invariante caratteristica dell'affinità, e perciò la trasformazione non è affine; prende invece il nome di *trasformazione proiettiva* o *proiettività* (vedi anche la scheda informativa di p. 282).

Non mantenendosi il parallelismo, in una proiettività non si mantiene neanche il rapporto fra le aree (l'ombra è formata da quadrilateri disuguali) e tanto meno si mantiene il rapporto fra i segmenti.

C'è un'unica proprietà che rimane: *a rette corrispondono rette*.

È interessante osservare che, se il proiettore viene allontanato dal telaio, il quadrilatero-ombra tende ad assumere la forma di un parallelogramma.

Si può così intuire che *un'affinità è una particolare proiettività*, ottenuta considerando la sorgente di luce infinitamente lontana.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Che cosa vuol dire il termine trasformazione affine?

- ② Quali sono le proprietà invarianti per una trasformazione affine?

### Comprensione

- ① Perché una trasformazione affine è considerata un caso particolare della trasformazione proiettiva?
- ② Un pettine è posto davanti a una lampadina accesa; i raggi di luce che passano attraverso i denti del pettine vanno poi a illuminare un telaio quadrato come quello di fig. 2. Rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. i raggi di luce che passano attraverso i denti del pettine sono paralleli?
  - b. la trasformazione data da questi raggi di luce è affine o proiettiva?

### Applicazioni

- ① La luce del Sole, penetrando attraverso una finestra aperta, determina sul pavimento una zona luminosa. Quale forma ha questa zona luminosa?
- ② Il telaio quadrettato di fig. 2 è disposto davanti a uno specchio curvo, come per esempio una pentola d'acciaio ben lucida; il telaio viene così trasformato in un'immagine formata tutta di linee curve. Rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. spiegare perché la trasformazione descritta non è proiettiva;
  - b. spiegare perché la trasformazione non è affine.



Figura 7



# Le equazioni di una trasformazione affine

## Dall'ombra del Sole alla tela elastica

Pensiamo a una persona ferma davanti al Sole al tramonto (fig. 1): si osserva che l'ombra diventa sempre più lunga mano a mano che il Sole si abbassa all'orizzonte. È come se l'ombra fosse un elastico che viene tirato.

L'idea dell'elastico fa nascere un'altra idea (fig. 2): disegnare una figura su una tela elastica (fig. 2a) e tirare la tela nella direzione delle fibre (fig. 2b). La figura subisce una trasformazione che sembra un'affinità, pur essendo lontana dalla trasformazione data dai raggi del Sole.

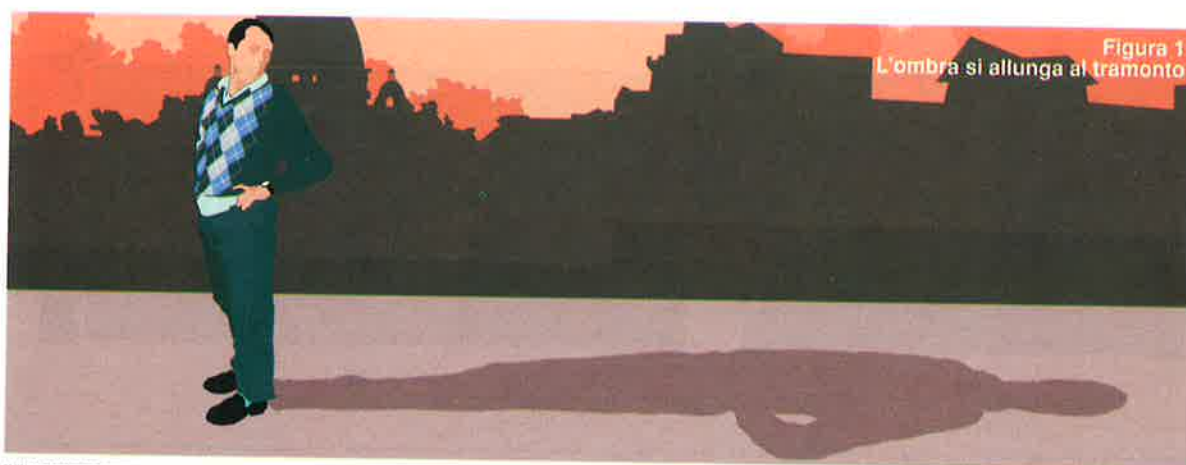
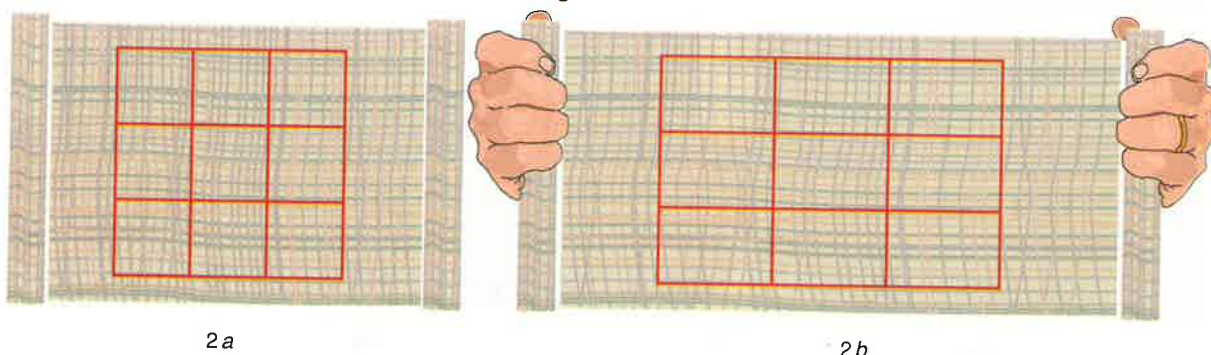


Figura 1  
L'ombra si allunga al tramonto

Figura 2  
Una figura disegnata su una tela elastica viene allungata



2a

2b



Per verificare se si tratta effettivamente di una trasformazione affine basta verificare la proprietà caratteristica di un'affinità: rette parallele si trasformano in rette parallele.

Per avere questa verifica si disegnano su una tela elastica due rette parallele  $r$  e  $s$ , che attraversano le fibre elastiche della tela in tanti punti, come ad esempio  $R$  e  $S$  (fig. 3a); si stira quindi la tela nella direzione delle fibre elastiche, cioè nella direzione  $RS$  (fig. 3b). Si ottengono così due rette,  $r'$  e  $s'$ , che sono certamente ancora parallele: dilatando la tela nella direzione  $RS$  non può infatti accadere che  $R$  e  $S$  vadano a coincidere.

Dunque rette parallele si trasformano in rette parallele e cioè la trasformazione che si ottiene dilatando una tela elastica è un'affinità.

### Dalla tela elastica alle equazioni di un'affinità

Le osservazioni sulla tela elastica portano a

descrivere una trasformazione affine per mezzo di equazioni. Ecco come si può procedere.

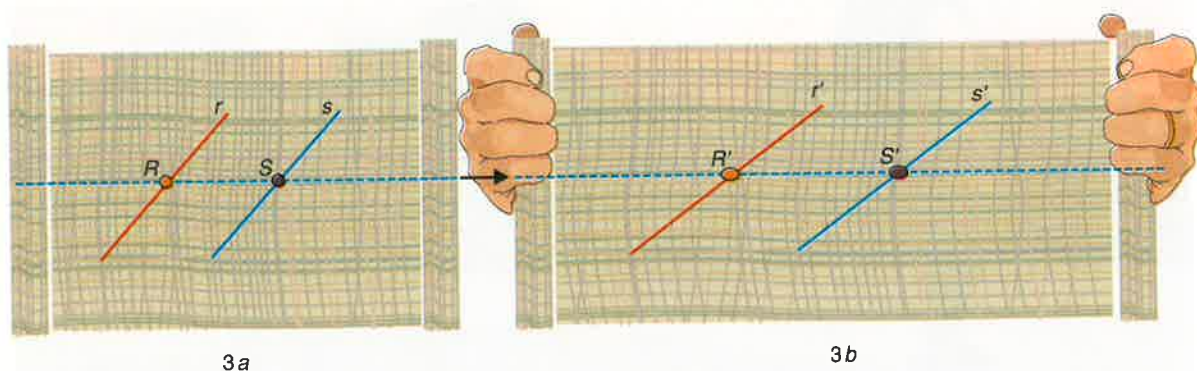
Si disegna su una tela elastica un riferimento cartesiano e si fissa l'attenzione su un punto di questo piano, per esempio  $A(2; 3)$  (fig. 4a).

Viene quindi dilatata la tela nella direzione dell'asse delle  $x$  fino a raddoppiarne la lunghezza (fig. 4b): il piano si è trasformato e la scala sull'asse delle  $x$  risulta dilatata; si intuisce che sono cambiate le coordinate di  $A$  rispetto al riferimento presentato in fig. 4a. Ma la situazione iniziale adesso è scomparsa.

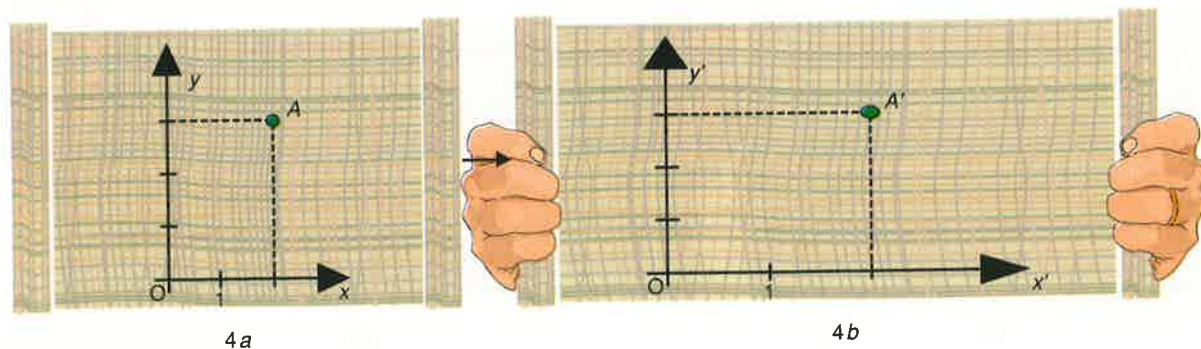
Per capire meglio che cosa è successo conviene fissare su una lastra di vetro il riferimento nella situazione iniziale, indicandolo con  $O'x'y'$  (in nero in fig. 5a).

Così inizialmente si ha il piano di vetro perfettamente sovrapposto al piano elastico ed il punto  $A$  di coordinate  $(2; 3)$ ; ma, dopo aver operato lo stiramento lungo l'asse delle  $x$ , il punto  $A$  si trasforma nel punto  $A'(4; 3)$  (fig. 5b).

**Figura 3**  
La trasformazione ottenuta dilatando una tela elastica è un'affinità



**Figura 4**  
Un riferimento cartesiano sulla tela elastica



Si trova dunque che l'ordinata è rimasta inalterata, mentre l'ascissa è raddoppiata.

È chiaro che hanno subito la stessa sorte tutti i punti della tela elastica: qualunque punto A che aveva inizialmente le coordinate:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

si trasforma, in seguito allo stiramento, nel punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$$

Se poi la tela viene stirata sempre lungo l'asse delle x, ma con una forza diversa, le ascisse verranno moltiplicate per un coefficiente  $m > 1$  e il punto A' avrà le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$$

Se invece si opera uno stiramento lungo l'asse delle y rimangono inalterate le ascisse di tutti i punti, mentre le ordinate risultano moltiplicate per un numero  $n > 1$ . Perciò un qualunque punto A(x; y) si trasforma in un punto A', che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$$

Infine, se si operano successivamente (o contemporaneamente) uno stiramento lungo l'asse delle x e uno lungo l'asse delle y, un punto A(x; y) si trasforma in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

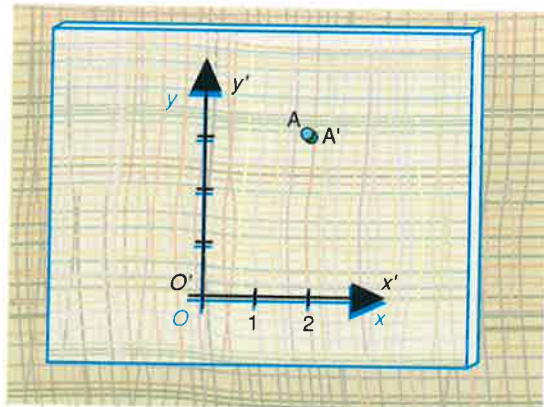
$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad (1)$$

dove le lettere m e n indicano due numeri reali più grandi di 1.

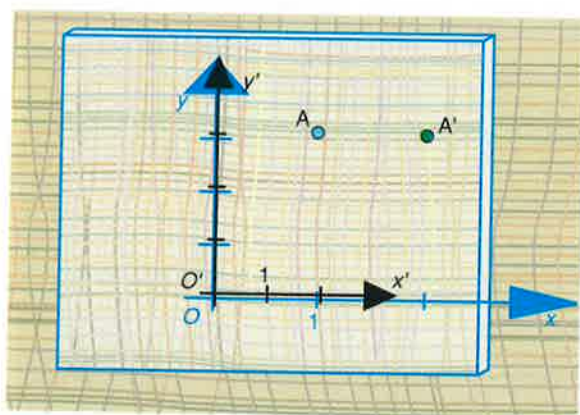
Si può anche immaginare di disegnare il riferimento su una tela elastica che sia stata già dilatata lungo i due assi cartesiani; quando si allenta la tensione, il piano «si restringe» come se fosse stato compresso lungo i due assi. A questa esperienza fisica corrisponde il fatto che nelle equazioni (1) i coefficienti m e n hanno valori più piccoli di 1 (ma sempre positivi).

Le equazioni (1) sono le equazioni che descrivono una trasformazione affine, dove m e n indicano due qualunque numeri reali positivi che generalmente non sono uguali fra loro.

**Figura 5**  
Le equazioni dell'affinità



5a



5b

### La similitudine come caso particolare di affinità

Che cosa succede se i due coefficienti m e n sono uguali fra loro?

Si avrà che i due stiramenti in direzione degli assi cartesiani avvengono «con forze uguali» e questo porta al fatto che non cambia la forma delle figure: si ottiene cioè una *figura simile*. Si può dunque concludere che la *similitudine* è una particolare affinità, descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \quad (2)$$



### Applicare le equazioni dell'affinità

Per vedere come si possono usare le equazioni dell'affinità per trasformare una figura, conviene lavorare subito su qualche esempio.

1. Si disegna sul piano cartesiano il quadrilatero che ha i vertici seguenti:

$$A(2; 2) \quad B(4; 3) \quad C(3; 5) \quad D(1; 4)$$

È facile verificare che questo quadrilatero è un quadrato, dato che ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali (fig. 6a).

Si vuole ora disegnare il quadrilatero che si ottiene operando l'affinità descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Si tratta dunque di triplicare le ascisse e raddoppiare le ordinate; si ottiene il quadrilatero che ha i seguenti vertici:

$$A'(6; 4) \quad B'(12; 6) \quad C'(9; 10) \quad D'(3; 8)$$

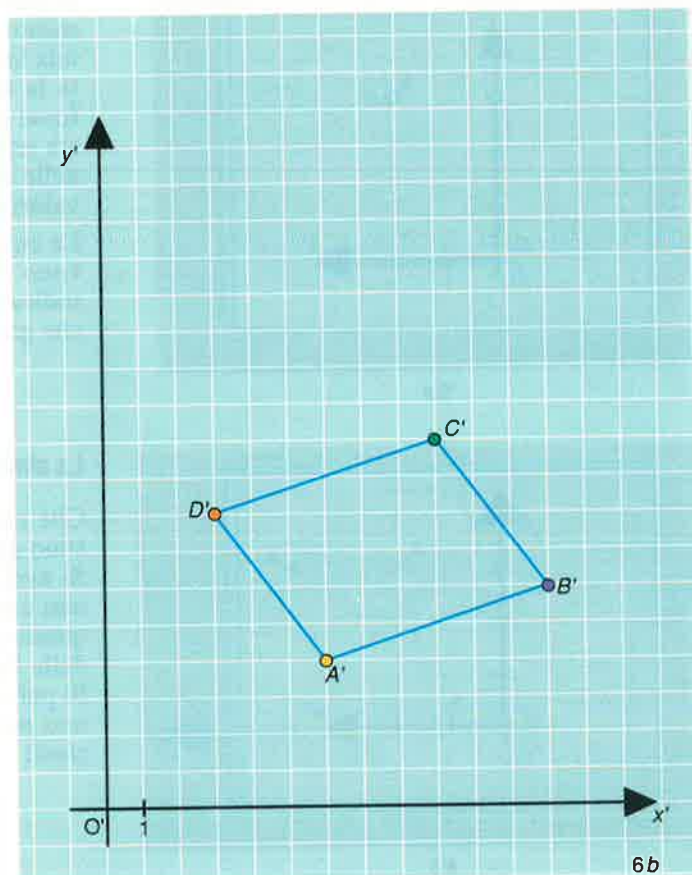
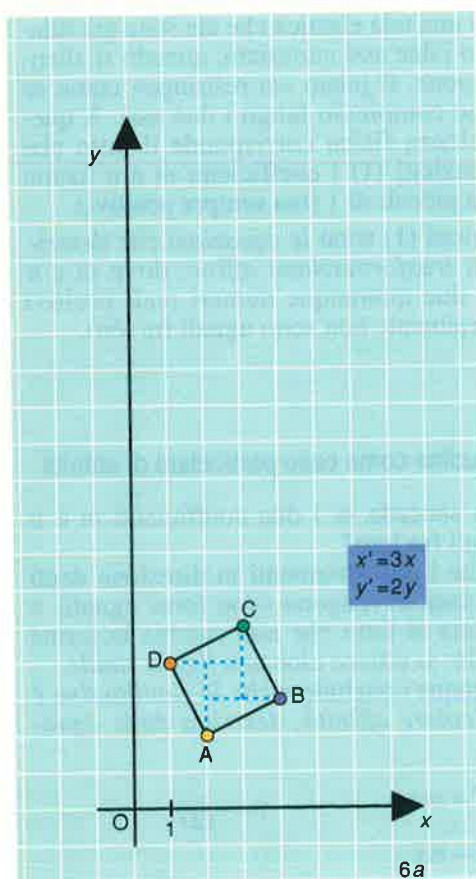
Disegnando questo quadrilatero (fig. 6b) si trova appunto la figura trasformata del quadrato iniziale: è un parallelogramma perché i lati paralleli del quadrato si trasformano in segmenti ancora paralleli, ma non è più un quadrato, perché l'affinità assegnata non mantiene la perpendicolarità.

2. Ci si chiede ora come modificare le equazioni dell'affinità in modo da avere una trasformazione che modifichi solo le dimensioni del quadrato iniziale, ma non la sua forma. La risposta si è trovata prima: le equazioni debbono essere del tipo (2), cioè presentare i due coefficienti uguali; per esempio:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

Con queste equazioni si opera una similitudine, che triplica sia le ascisse che le ordina-

Figura 6  
Un quadrato e il parallelogramma trasformato per affinità



te; si ottiene il quadrilatero che ha i vertici seguenti:

$A''(6; 6)$   $B''(12; 9)$   $C''(9; 15)$   $D''(3; 12)$

Il quadrilatero (fig. 7b) è certamente un quadrato.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Scrivere le equazioni che descrivono una trasformazione affine
- ② Scrivere le equazioni di una similitudine

### Comprensione

- ① Spiegare il significato delle lettere  $x$ ,  $y$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $m$ ,  $n$  che compaiono nelle equazioni di un'affinità.
- ② Spiegare perché una trasformazione affine

si può realizzare disegnando una figura su una tela elastica.

### Applicazioni

- ① Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha i vertici seguenti:

$A(2; 3)$   $B(8; 3)$   $C(10; 6)$   $D(4; 6)$

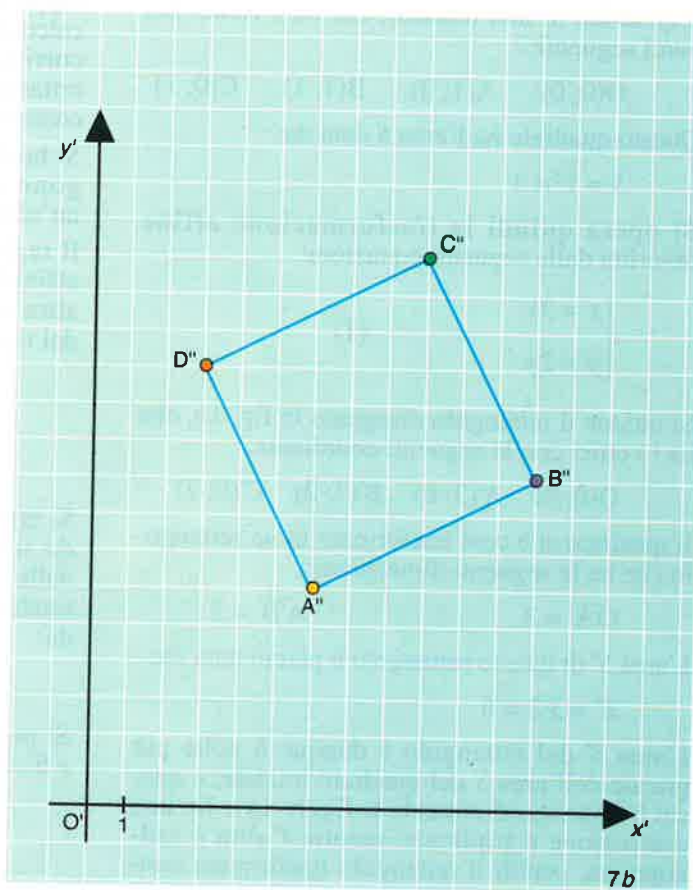
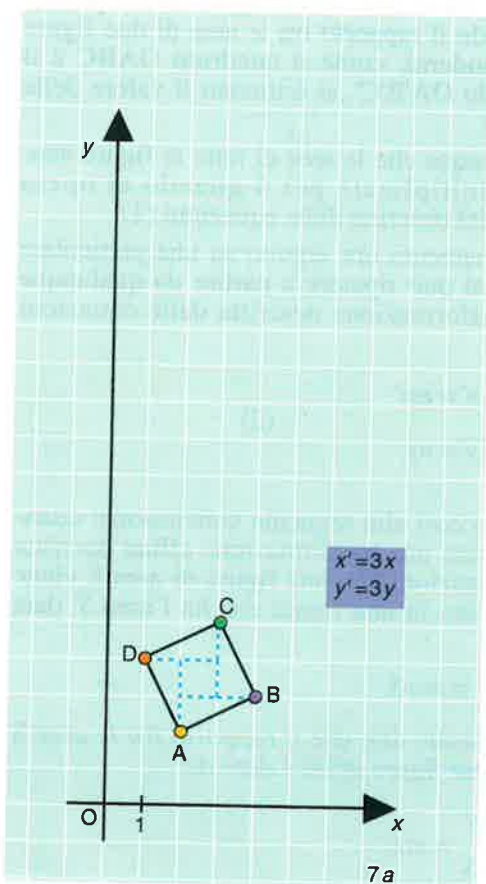
Operare la trasformazione affine descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Disegnare il quadrilatero trasformato.

- ② Modificare le equazioni precedenti in modo da ottenere un parallelogramma simile a quello assegnato.

Figura 7  
Un quadrato e il quadrato trasformato per similitudine





# Aree di figure affini

## Rapporto fra le aree di due figure affini

Le equazioni delle trasformazioni affini permettono di completare e approfondire un risultato trovato nel paragrafo 1: è costante il rapporto fra le aree di due figure che si corrispondono in un'affinità.

Conviene cominciare a riflettere su un semplice esempio numerico: in fig. 1a si è disegnato il quadrato di lato unitario, che ha i vertici nei punti seguenti:

$$O(0; 0) \quad A(1; 0) \quad B(1; 1) \quad C(0; 1)$$

Questo quadrato ha l'area  $S$  data da:

$$S = 1^2 = 1$$

Si opera quindi la trasformazione affine descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \quad (1)$$

Si ottiene il rettangolo disegnato in fig. 1b, che ha i vertici con le seguenti coordinate:

$$O(0; 0) \quad A'(3; 0) \quad B'(3; 2) \quad C'(0; 2)$$

Il quadrato si è così trasformato in un rettangolo che ha le seguenti dimensioni:

$$\overline{OA'} = 3 \quad \overline{A'B'} = 2$$

L'area  $S'$  di questo rettangolo è perciò data da:

$$S' = 3 \cdot 2 = 6$$

L'area  $S'$  del rettangolo è dunque 6 volte più grande dell'area  $S$  del quadrato iniziale; e questo è chiaro confrontando le figure 1a e 1b: una dimensione è triplicata, mentre l'altra è raddoppiata, perciò il rettangolo trasformato con-

tiene 3·2 quadrati uguali a quello iniziale. Risulta dunque:

$$S' = 6 S \quad \text{ossia} \quad \frac{S'}{S} = 6$$

La conclusione ora ottenuta è valida per tutte le coppie di figure corrispondenti: è costante il rapporto fra le aree di due figure affini; perciò, calcolando il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti, come il quadrato  $OABC$  e il rettangolo  $OA'B'C'$ , si è trovato il valore della costante.

Si ha dunque che le aree di tutte le figure vengono moltiplicate per 6 quando si opera un'affinità descritta dalle equazioni (1).

Il ragionamento ora seguito su una particolare affinità si può ripetere a partire da qualunque altra trasformazione descritta dalle equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad (2)$$

Si arriva così alla seguente conclusione: quando si opera una trasformazione affine descritta dalle equazioni (2), una figura di area  $S$  viene trasformata in una figura che ha l'area  $S'$  data da:

$$S' = mn \cdot S$$

Si può anche dire che il rapporto fra le aree  $S$  e  $S'$  di due figure affini è dato da:

$$\frac{S'}{S} = mn$$

### Rapporto fra le aree di due figure simili

Il risultato ora ottenuto si applica anche alle similitudini, cioè alle trasformazioni descritte da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \quad (3)$$

In tal caso (vedi anche il capitolo terzo, pp. 103-104) il rapporto delle aree di due figure simili sarà dato da:

$$\frac{S'}{S} = m^2$$

In fig. 2 viene illustrata questa conclusione: il quadrato OABC di fig. 2a, che ha l'area  $S = 1$ ,

viene trasformato con la similitudine di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

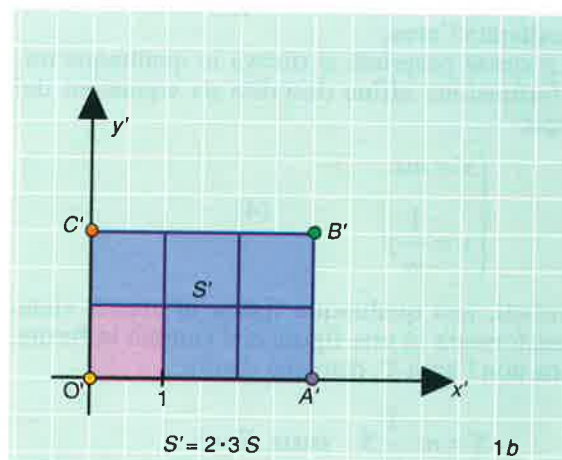
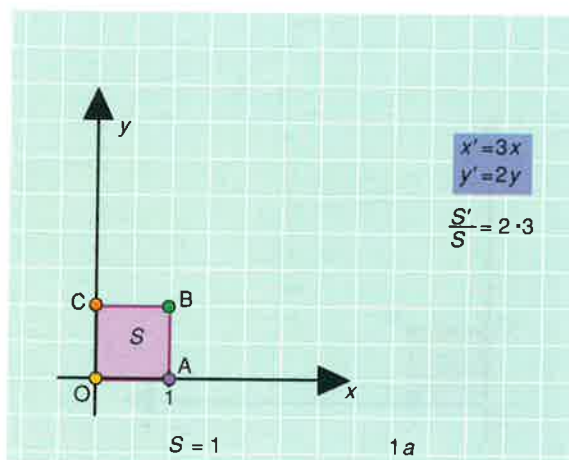
Si ottiene così un altro quadrato (fig. 2b), che ha entrambe le dimensioni triplicate e perciò contiene  $3 \cdot 3$  quadrati uguali a quello iniziale; si ha dunque che l'area  $S'$  del quadrato trasformato è data da:

$$S' = 3^2 S$$

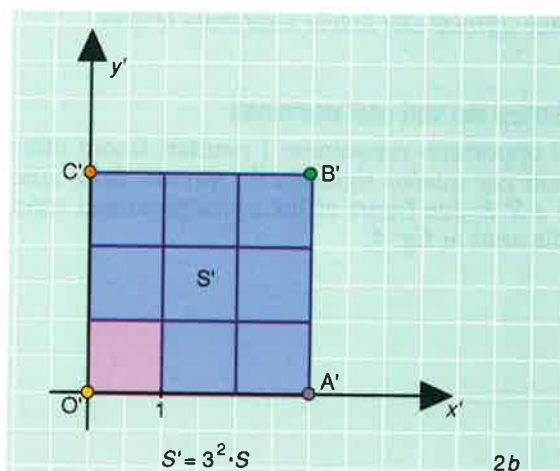
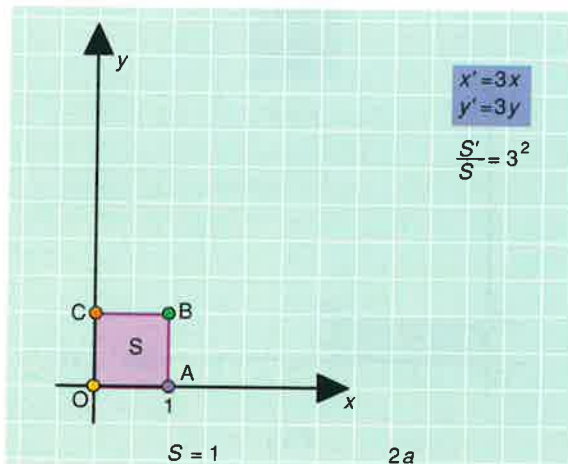
Si può anche dire che risulta:

$$\frac{S'}{S} = 3^2$$

**Figura 1**  
Rapporto fra le aree di due figure affini



**Figura 2**  
Rapporto fra le aree di due figure simili



## Affinità equivalenti

Un caso di affinità particolarmente interessante si ottiene pensando di stirare il piano lungo una direzione (per esempio quella dell'asse delle  $x$ ) e di comprimerlo lungo l'altra direzione (quella dell'asse delle  $y$ ).

Ecco un esempio: a partire dal quadrato OABC (fig. 3a) di area  $S = 1$ , si opera la trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Si ottiene il rettangolo O'A'B'C' di fig. 3b, con l'area  $S'$  che vale ancora 1, dato che risulta:

$$S' = 2 \cdot \frac{1}{2} S \text{ ossia } S' = S$$

Si capisce così che questa trasformazione modifica la forma delle figure, ma ne lascia inalterata l'area.

La stessa proprietà si ritrova in qualunque trasformazione affine descritta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = \frac{1}{m}y \end{cases} \quad (4)$$

Infatti, una qualunque figura di area  $S$  viene trasformata in una figura che cambia la forma, ma non l'area  $S'$ , dato che risulta:

$$S' = m \cdot \frac{1}{m} S \text{ ossia } S' = S$$

Una trasformazione descritta da equazioni del tipo (4) prende il nome di *affinità equivalente*, cioè *affinità che lascia inalterate le aree*.

## Sintesi dei vari casi esaminati

È opportuno riassumere i risultati finora ottenuti per quanto riguarda il rapporto delle aree  $S$  e  $S'$  di due figure affini; i casi esaminati sono illustrati in fig. 4.

## Verifiche

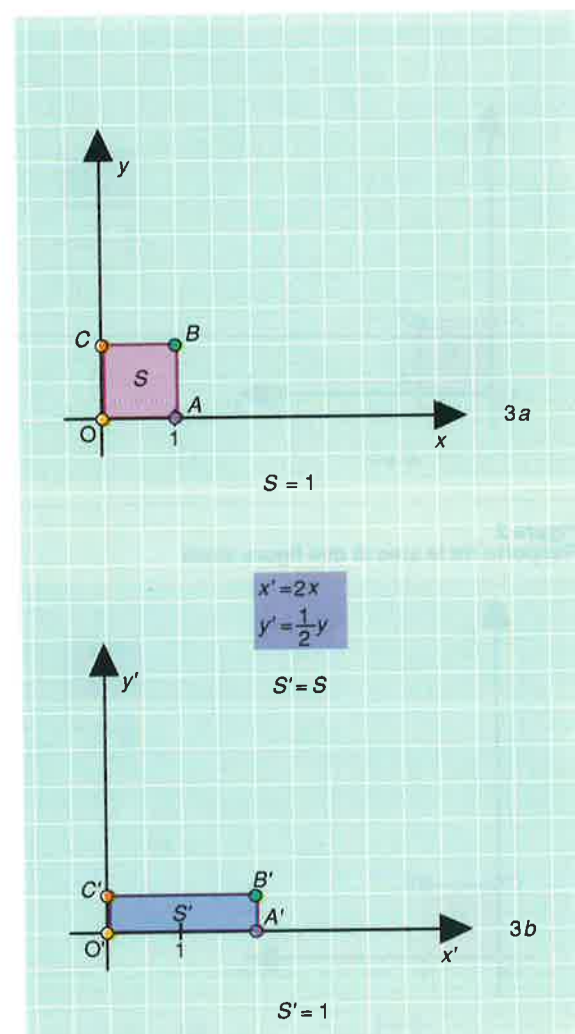
### Conoscenze

- ① Scrivere le equazioni che descrivono un'affinità e dire quanto vale il rapporto delle aree di due figure affini.
- ② Scrivere le equazioni che descrivono una similitudine e dire quanto vale il rapporto delle aree di due figure simili.
- ③ Spiegare che cosa si intende con il termine *affinità equivalente* e scriverne le equazioni.

### Comprensione

- ① Spiegare perché il rapporto di due figure

**Figura 3**  
Un'affinità equivalente lascia inalterate le aree



corrispondenti in un'affinità è dato dal prodotto dei coefficienti  $m$  e  $n$ .

- ② Spiegare perché lascia inalterate le aree una trasformazione affine con i coefficienti  $m$  e  $n$  che sono l'uno il reciproco dell'altro.

#### Applicazioni

- ① Disegnare il quadrato che ha i vertici seguenti:

A(2; 2) B(4; 4) C(2; 6) D(0; 4)

e verificare che ha l'area  $S = 8$ .

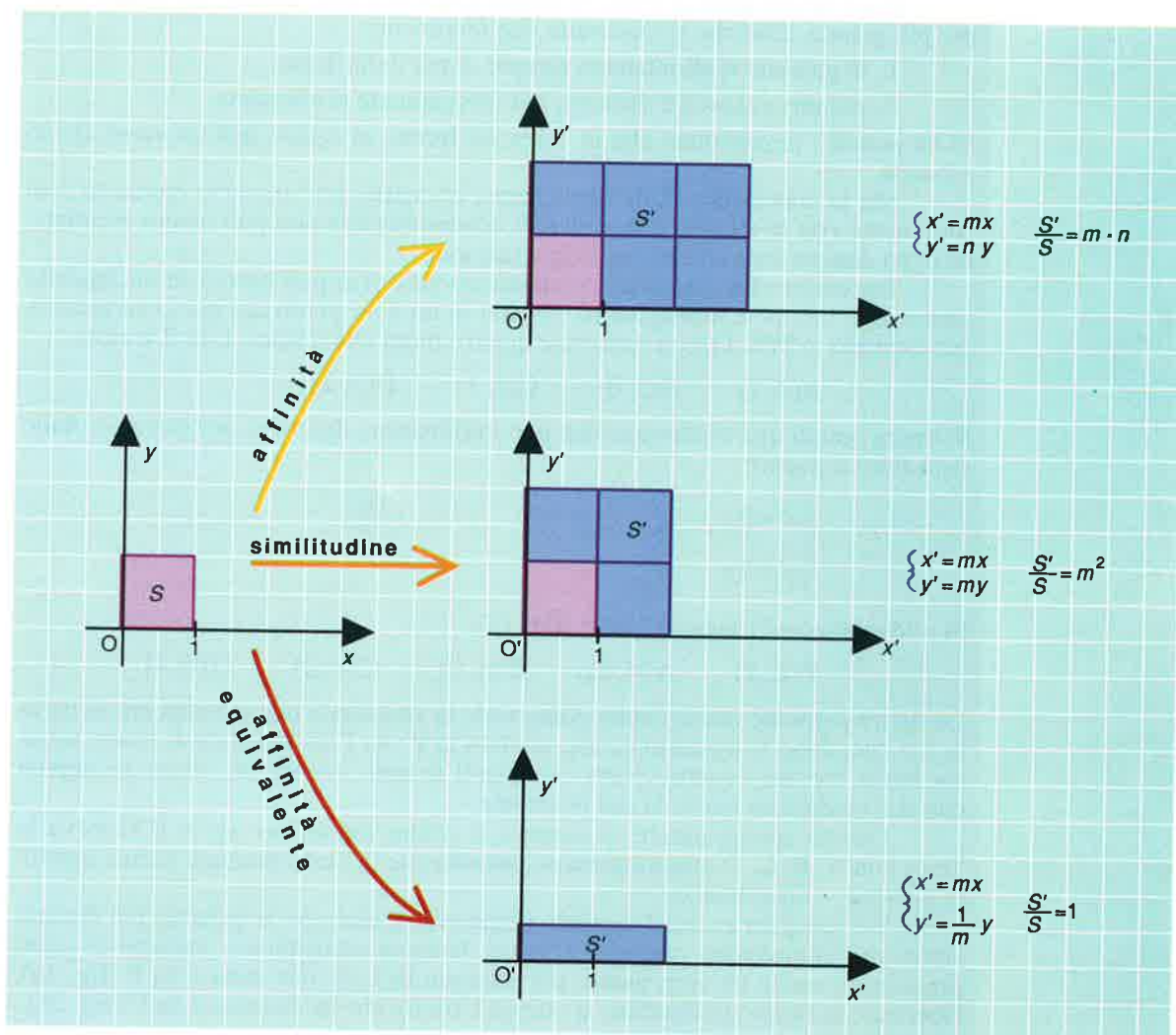
Operare la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (1)$$

Disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.

- ② Modificare le equazioni (5) in modo da ottenere una similitudine; disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.
- ③ Modificare le equazioni (5) in modo da ottenere un'affinità equivalente; disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.

Figura 4  
Aree di figure affini





## Le trasformazioni nella natura

### La similitudine e l'espansione dell'universo

Le equazioni della similitudine trovate nel paragrafo 2 aiutano a capire il fenomeno dell'*espansione dell'universo*, un fenomeno scoperto dagli astronomi all'inizio di questo secolo.

Ecco di che cosa si tratta: si ritiene che l'universo diventi col tempo sempre più grande, dato che si osservano due fenomeni:

1. le galassie si allontanano sempre di più dalla Terra;
2. più una galassia è distante, più velocemente si allontana.

Si ha perciò l'impressione che la Terra sia ferma, al centro dell'universo che si espande.

Ma la concezione della Terra ferma al centro dell'universo contrasta così fortemente con le attuali conoscenze di astronomia che non può essere accettata; bisogna dunque esaminare meglio la situazione.

Per capire che cosa effettivamente avviene ci si può basare su un modello piano (fig. 1a): ci si immagina di trovarsi in un dato punto del piano cartesiano, per esempio in  $P(3; 1)$ , e di osservare quattro punti che distano 1 da  $P$ , e cioè:

$$A(2; 1) \quad B(3; 0) \quad C(4; 1) \quad D(3; 2)$$

Si opera quindi una trasformazione per similitudine, descritta, per esempio, dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Si ottengono così i seguenti punti (fig. 1b):

$$P'(6; 2) \quad A'(4; 2) \quad B'(6; 0) \quad C'(8; 2) \quad D'(6; 4)$$

La figura permette ora di capire come vede la situazione una persona che si trova in  $P$  e che, dopo la trasformazione, si trova in  $P'$ : ha l'impressione di essere rimasta ferma mentre i quattro punti circostanti si sono allontanati, senza accorgersi che si è modificata anche la sua posizione.

Questo spiega perché si osserva il primo fenomeno: se in  $P$  si trova la Terra e in  $A, B, C, D$  quattro galassie, sembra che la Terra rimanga ferma, mentre le galassie si allontanano.

Per spiegare anche il secondo fenomeno, e cioè che le galassie più distanti sembrano allontanarsi più velocemente, bisogna considerare, insieme ai punti precedenti, anche un altro punto, per esempio  $E(3; 3)$ , che dista 2 da  $P$  (fig. 2a). Operando la stessa similitudine, si ottiene  $E'(6; 6)$ , che ha distanza 4 da  $P'$  (fig. 2b).

Si trova dunque che:

- A, che distava 1 da P, dopo la similitudine si trova in A' a distanza 2 da P';
- E, che distava 2 da P, dopo la similitudine si trova in E' a distanza 4 da P'.

E così, trovandosi in P, si ha l'impressione che i punti più distanti si allontanino più velocemente di quelli vicini.

### Le trasformazioni e la crescita delle strutture ossee

Nel paragrafo 1 si è visto che un telaio quadrettato viene trasformato da un'affinità in un parallelogramma, suddiviso in parallelogrammi uguali.

E allo stesso modo, un poligono che ha per vertici dei nodi del quadrettato (fig. 3a) viene trasformato in un poligono che ha per vertici i nodi dei corrispondenti parallelogrammi (fig. 3b).

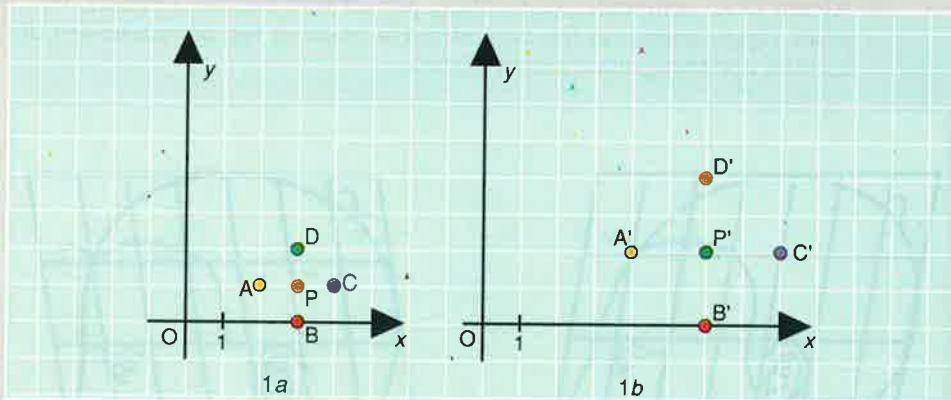


Figura 1  
Un modello per  
«vedere» l'espansione  
dell'universo

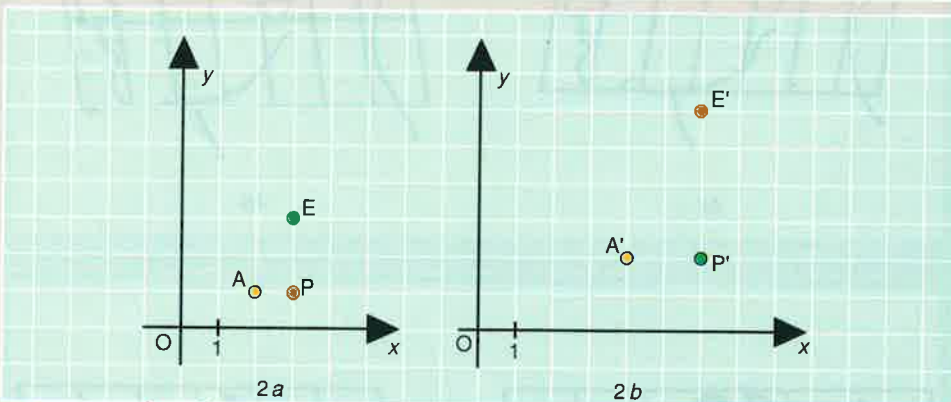


Figura 2  
Un modello per capire  
perché le galassie più  
lontane sembrano  
allontanarsi  
più velocemente

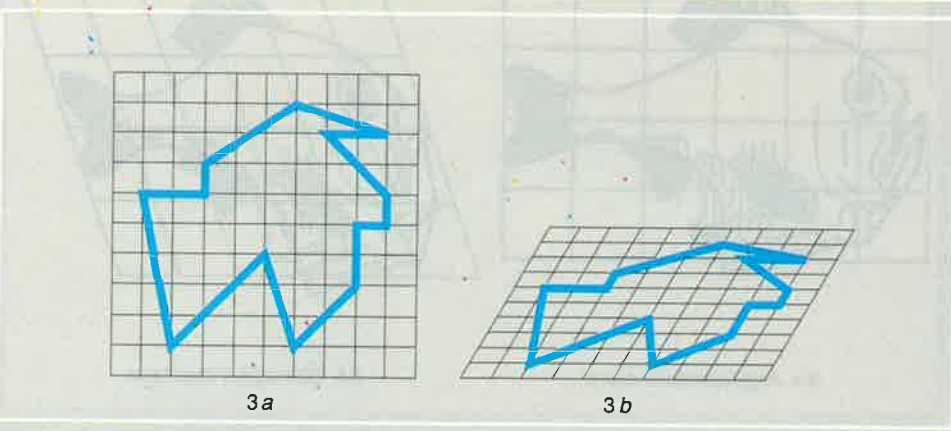


Figura 3  
Come trasformare  
un poligono con  
un'affinità

Se poi la figura non è un poligono, si potranno utilizzare dei quadretti più fitti, in modo da poter disegnare con una buona approssimazione la figura trasformata. È proprio quest'idea che ha portato i biologi a studi di carattere matematico sulla crescita degli animali.

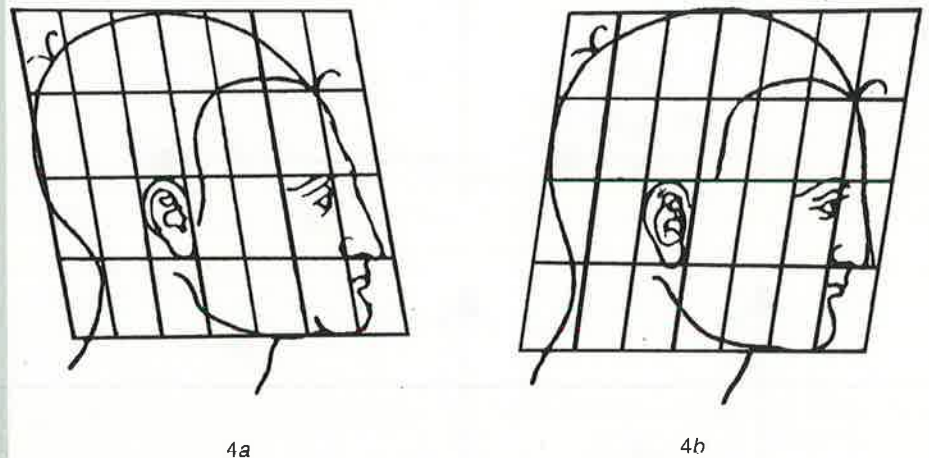
I primi tentativi di applicare la geometria delle trasformazioni per descrivere i cambiamenti di forma sono dovuti al naturalista inglese D'Arcy Thompson, che pubblicò i risultati dei suoi studi nel libro *Crescita e forma* (1917).

Thompson riprende alcuni disegni pubblicati nel 1528 dal grande pittore e incisore tedesco Albrecht Dürer (fig. 4) ed esamina il cambiamento di forma di una testa d'uomo studiata da Dürer, scoprendo che questo cambiamento è dovuto ad una trasformazione affine.

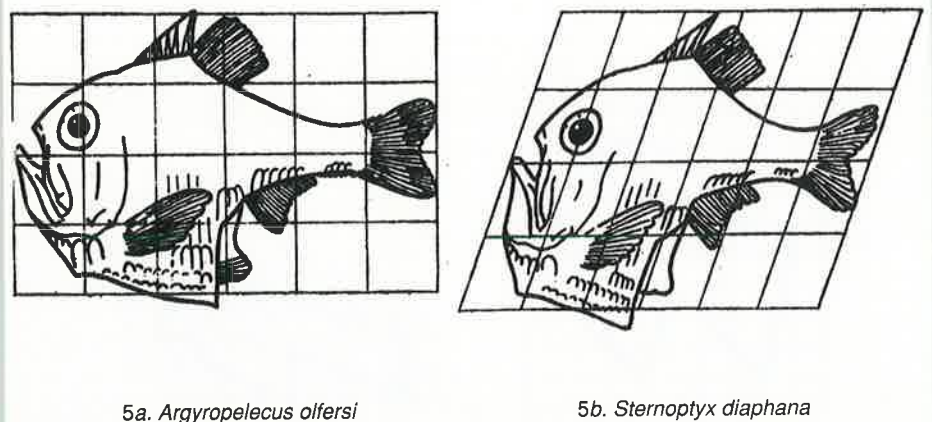
Ma è la forma degli animali che più sollecita le ricerche del naturalista; ecco due esempi semplici, ma suggestivi.

1. Alcuni pesci sembrano trasformarsi per affinità durante l'evoluzione: il pesce rappresentato in fig. 5a è affine al pesce di fig. 5b, anche se i due animali appartengono a generi diversi.

**Figura 4**  
La trasformazione di una testa d'uomo studiata da Dürer e ripresa da Thompson



**Figura 5**  
Un pesce che sembra essersi trasformato in un altro per affinità durante l'evoluzione, secondo Thompson



5a. *Argyropelecus olfersi*

5b. *Sternoptyx diaphana*



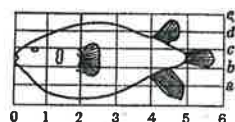
2. Sono invece legati da una trasformazione molto più complicata il pesce-porcospino e il pesce-luna (fig. 6): i segmenti verticali del reticolato che inquadra il pesce-porcospino (fig. 6a) si trasformano in un sistema di cerchi concentrici nel disegno del pesce-luna (fig. 6b), mentre i segmenti orizzontali di fig. 6a diventano dei rami d'iperbole in fig. 6b.

Thompson aveva notato che, proprio basandosi sulle trasformazioni, si riusciva a spiegare molti fatti relativi alla fisiologia degli animali.

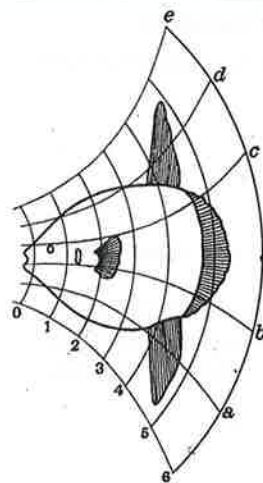
Queste teorie biologico-matematiche restarono abbandonate per parecchie decine d'anni; solo recentemente sono state riprese e sviluppate con l'aiuto dei calcolatori.

Lo scopo è oggi duplice (fig. 7):

- prevedere lo sviluppo di un organo in condizioni normali, per esempio lo sviluppo della testa di un bambino a partire dalla nascita (profilo più interno in fig. 7a);
- studiare l'evoluzione della testa umana a partire dall'uomo di Neandertal (profilo più interno in fig. 7b).

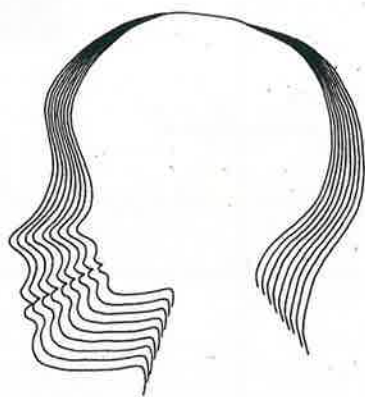


6a. *Diodon* o pesce-porcospino

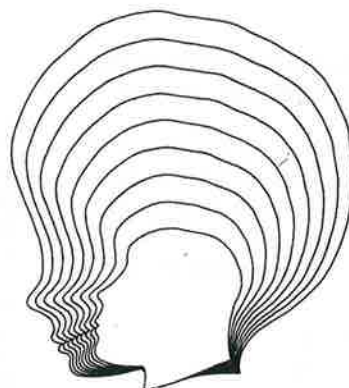


6b. *Orthogoriscus* o pesce-luna

Figura 6  
Due pesci legati  
da una complicata  
trasformazione  
secondo Thompson



7a



7b

Figura 7  
Studio delle  
trasformazioni  
della testa umana



# Dalle equazioni di un'affinità alle equazioni di una simmetria

## Le simmetrie rispetto agli assi cartesiani

Finora sono state esaminate le trasformazioni descritte dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

considerando i coefficienti  $m$  e  $n$  sempre positivi.

Ora, abbandonando il supporto della tela elastica, si può vedere che cosa succede se i due coefficienti non sono più positivi. Ecco qualche caso particolare.

A.  $m = -1$  e  $n = 1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad (1)$$

È facile prevedere l'effetto di questa trasformazione: le ordinate restano inalterate, mentre le ascisse cambiano segno.

Un qualunque punto  $P$  si porta in un punto  $P'$ , che ha la stessa distanza dall'asse delle  $y$  ma si trova nel semipiano opposto, cioè  $P'$  è il simmetrico di  $P$  rispetto all'asse delle  $y$ .

In fig. 1 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- $P(3; 1)$  si porta in  $P'(-3; 1)$ ;
- $Q(-1; 2)$  si porta in  $Q'(1; 2)$ ;
- $R(0; -3)$  e tutti i punti di ascissa 0 rimangono fermi.

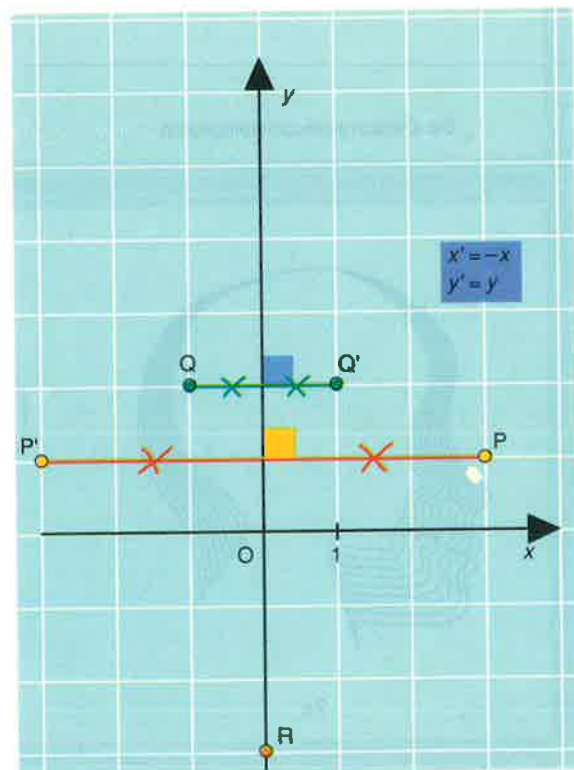
Le equazioni (1) descrivono dunque la simme-

tria rispetto all'asse delle  $y$ ; questa simmetria lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle  $y$ .

B.  $m = 1$  e  $n = -1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

Figura 1  
La simmetria rispetto all'asse delle  $y$



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad (2)$$

Ora sono le ascisse a rimanere inalterate, mentre le ordinate cambiano segno.

Un qualunque punto  $P$  si porta in un punto  $P'$ , che ha la stessa distanza dall'asse delle  $x$  ma si trova nel semipiano opposto, cioè  $P'$  è il *simmetrico di  $P$  rispetto all'asse delle  $x$* .

In fig. 2 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- $P(3; 1)$  si porta in  $P'(3; -1)$ ;
- $Q(1; -2)$  si porta in  $Q'(1; 2)$ ;
- $R(-3; 0)$  e tutti i punti di ordinata 0 rimangono fermi.

Le equazioni (2) descrivono dunque la *simmetria rispetto all'asse delle  $x$* ; questa simmetria lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle  $x$ .

### La simmetria rispetto all'origine $O$

Un terzo caso da esaminare è il seguente:

C.  $m = -1$  e  $n = -1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad (3)$$

In questo caso un qualunque punto si porta in un punto che ha le coordinate opposte; in fig. 3 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- $P(3; 1)$  si porta in  $P'(-3; -1)$ ;
- $Q(-1; 2)$  si porta in  $Q'(1; -2)$ ;
- $R(0; 3)$  si porta in  $R'(0; -3)$ ;
- $S(-2; 0)$  si porta in  $S'(2; 0)$ ;
- $O(0; 0)$  resta fermo.

In questa trasformazione il solo punto che resta fermo è l'origine  $O$ , che ha un ruolo fondamentale (fig. 3): due punti corrispondenti come  $P$  e  $P'$  sono legati dalle seguenti proprietà:

- si trovano sulla stessa retta per  $O$ ;
- sono equidistanti da  $O$ , cioè risulta  $PO = P'O$ .

Le equazioni (3) descrivono dunque la *simmetria rispetto all'origine  $O$* , unico punto che rimane fermo.

Figura 2  
La simmetria rispetto all'asse delle  $x$

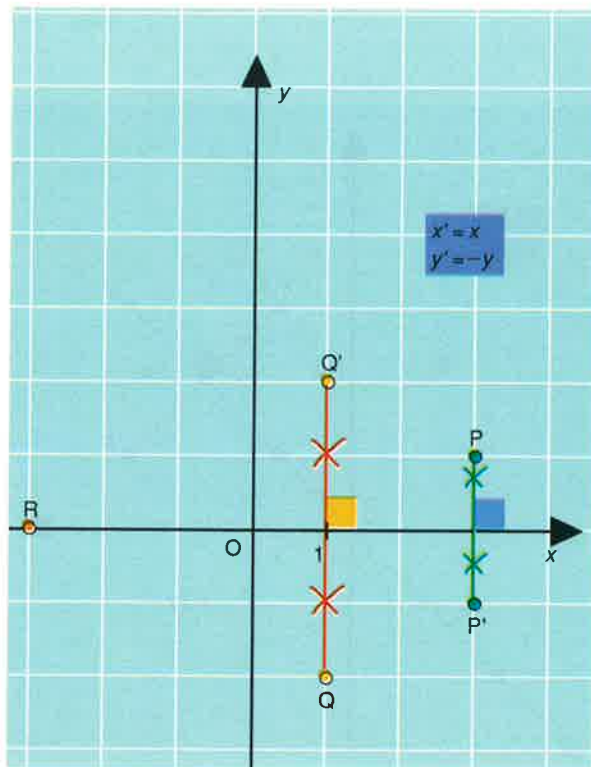
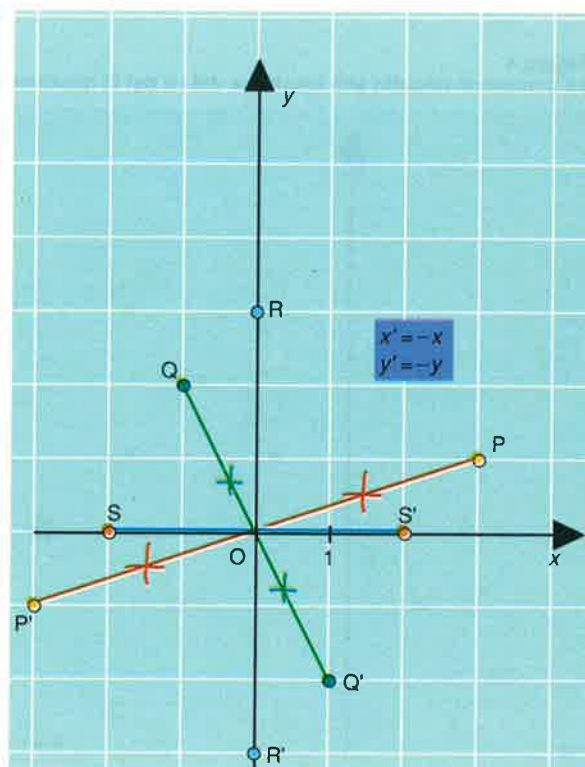


Figura 3  
La simmetria rispetto all'origine  $O$



### La simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

C'è un'ultima trasformazione che è molto ricca di applicazioni (vedi anche il paragrafo 7, p. 253), ma che non rientra fra quelle finora esaminate; si tratta della trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad (5)$$

È facile capire il significato di queste equazioni: per ogni punto P del piano si scambia l'ascissa con l'ordinata.

In fig. 4a si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- P(3; 1) si porta in P'(1; 3);
- Q(-1; 2) si porta in Q'(2; -1);
- R(3; 3) e tutti gli altri punti con le coordinate uguali fra loro rimangono fermi.

In questa trasformazione dunque rimangono fissi tutti i punti che hanno le coordinate uguali fra loro: si tratta dei punti che si trovano tutti sulla retta d'equazione:

$$y = x$$

cioè sulla retta  $r$ , bisettrice del I e III quadrante.

Tracciando il grafico di questa retta (fig. 4b) si

nota che due punti corrispondenti come P e P' risultano simmetrici rispetto a  $r$ .

Le equazioni (5) descrivono dunque la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

### Applicare le equazioni delle simmetrie

Ecco un esempio di applicazione delle equazioni delle simmetrie ora ottenute: si disegna il rettangolo che ha i seguenti vertici (in nero in fig. 5):

$$A(3; 1) \quad B(6; 1) \quad C(6; 2) \quad D(3; 2)$$

Si operano quindi le varie simmetrie esaminate in questo paragrafo e si ottengono i seguenti risultati:

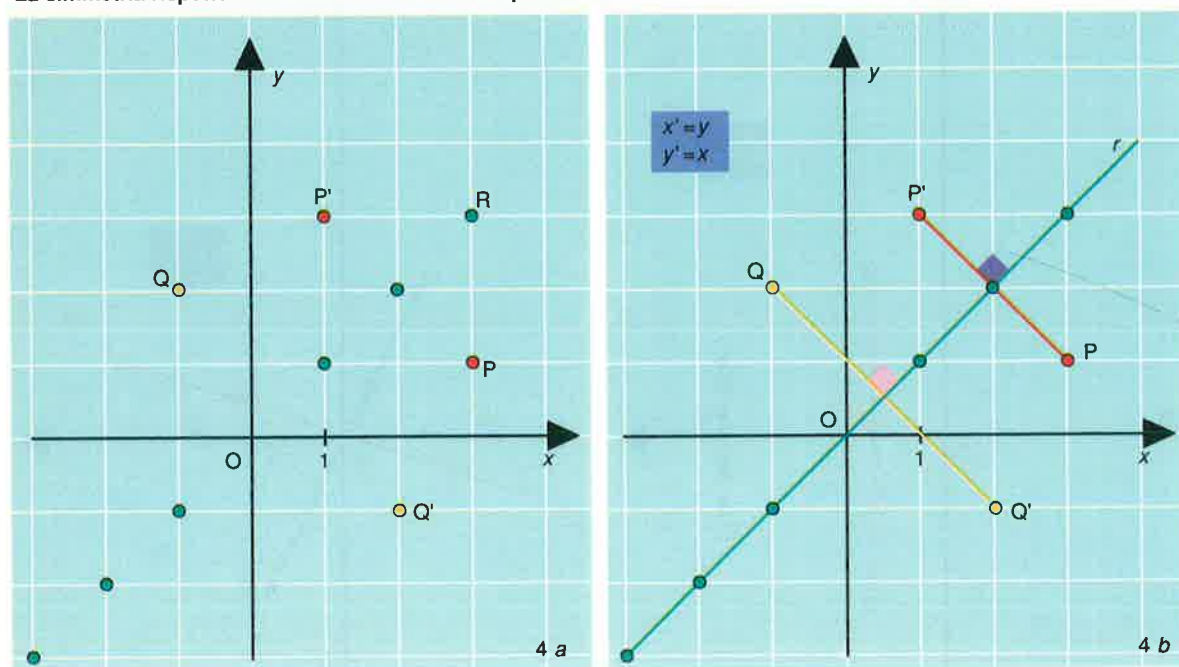
- con la simmetria rispetto all'asse delle  $y$ , descritta dalle equazioni (1), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in rosso in fig. 5):

$$A'(-3; 1) \quad B'(-6; 1)$$

$$C'(-6; 2) \quad D'(-3; 2)$$

- con la sola simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , descritta dalle equazioni (2), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in blu in fig. 5):

**Figura 4**  
La simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante



$$A''(3; -1) \quad B''(6; -1)$$

$$C''(6; -2) \quad D''(3; -2)$$

- con la simmetria rispetto all'origine O, descritta dalle equazioni (3), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in verde in fig. 5):

$$A'''(-3; -1) \quad B'''(-6; -1)$$

$$C'''(-6; -2) \quad D'''(-3; -2)$$

- con la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, descritta dalle equazioni (5), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in grigio in fig. 5):

$$A^*(1; 3) \quad B^*(1; 6)$$

$$C^*(2; 6) \quad D^*(2; 3)$$

### Le simmetrie sono particolari isometrie

Quando si opera una simmetria, si ritrova un'osservazione fatta all'inizio: non si può più pensare alle figure disegnate sulla tela elastica, visto che non cambia la forma della figura, ma solo la sua posizione nel piano cartesiano.

Proprio per questo le simmetrie prendono anche il nome di *isometrie*, termine che riunisce tutte le trasformazioni del piano che si limitano a cambiare la posizione delle figure, lasciandone immutate forma e dimensioni.

### Comporre trasformazioni

È interessante ora osservare che la simmetria rispetto a O può essere *ottenuta* operando successivamente, ossia *componendo*, le due simmetrie rispetto agli assi coordinati.

Quest'osservazione permette di esaminare rapidamente il seguente caso:

$$D. \quad m = -3 \text{ e } n = -2$$

La trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -2y \end{cases} \quad (4)$$

può essere esaminata pensando di operare successivamente, ossia di comporre, le seguenti trasformazioni:

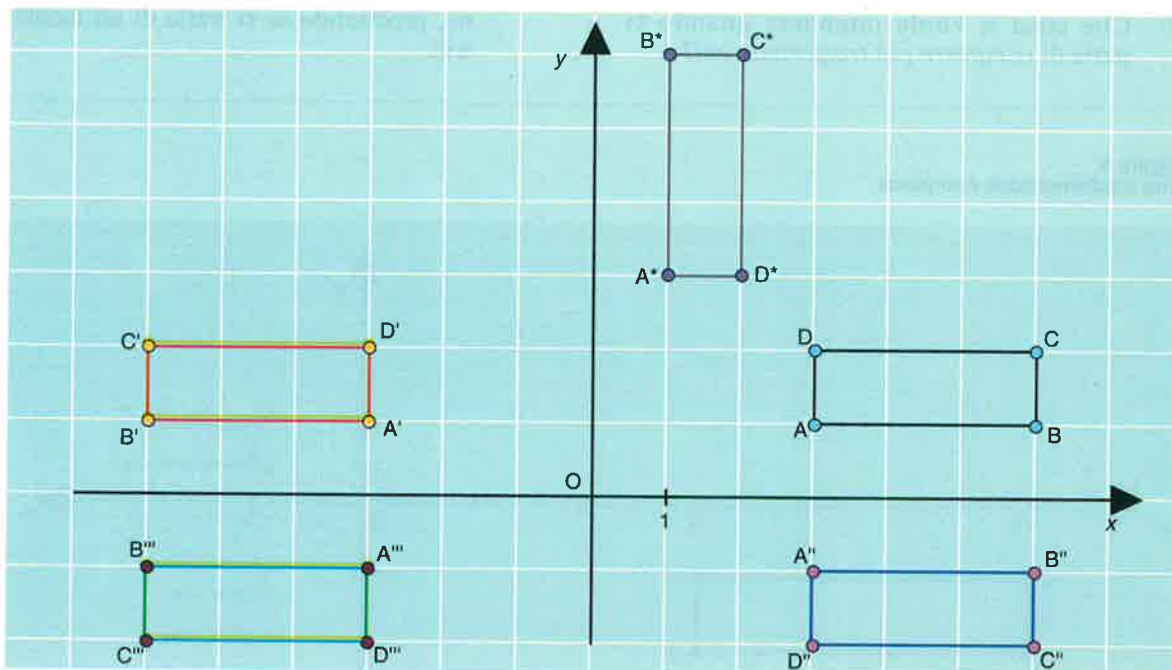
$$I. \quad \begin{cases} x^* = 3x \\ y^* = 2y \end{cases}$$

cioè un'affinità che dilata il piano nella direzione degli assi, e:

$$II. \quad \begin{cases} x' = -x^* \\ y' = -y^* \end{cases}$$

cioè una simmetria rispetto a O, che cambia segno alle coordinate.

**Figura 5**  
Un rettangolo e i rettangoli simmetrici





La trasformazione descritta dalle equazioni (4) non è più un'isometria: trasforma il rettangolo ABCD nel rettangolo A'B'C'D' di fig. 6.

Considerazioni analoghe possono essere ripetute quando i coefficienti  $m$  e  $n$  nelle equazioni di una trasformazione non sono entrambi positivi. Si può dunque concludere che *equazioni del tipo*:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

descrivono una trasformazione del piano che presenta le seguenti caratteristiche:

- se i coefficienti  $m$  e  $n$  sono entrambi positivi, la trasformazione è una dilatazione (o una contrazione) nella direzione degli assi coordinati;
- se i coefficienti  $m$  e  $n$  non sono entrambi positivi, la trasformazione è ottenuta componendo la dilatazione (o la contrazione) con simmetrie rispetto agli assi coordinati.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Scrivere le equazioni di tutte le simmetrie introdotte in questo paragrafo e descriverne l'effetto.
- ② Che cosa significa il termine *isometria*?

### Comprensione

- ① Che cosa si vuole intendere quando si parla di *comporre più trasformazioni*?

- ② Esaminare la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 3x \end{cases}$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- a. descrivere l'effetto della trasformazione, pensandola ottenuta componendo un'affinità e una simmetria;
- b. la trasformazione assegnata è un'isometria?

### Applicazioni

- ① Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i seguenti vertici:

$$A(-3; -2) \quad B(-4; -4)$$

$$C(-6; -3) \quad D(-5; -1)$$

Operare tutte le simmetrie introdotte in questo paragrafo e disegnare la figura trasformata.

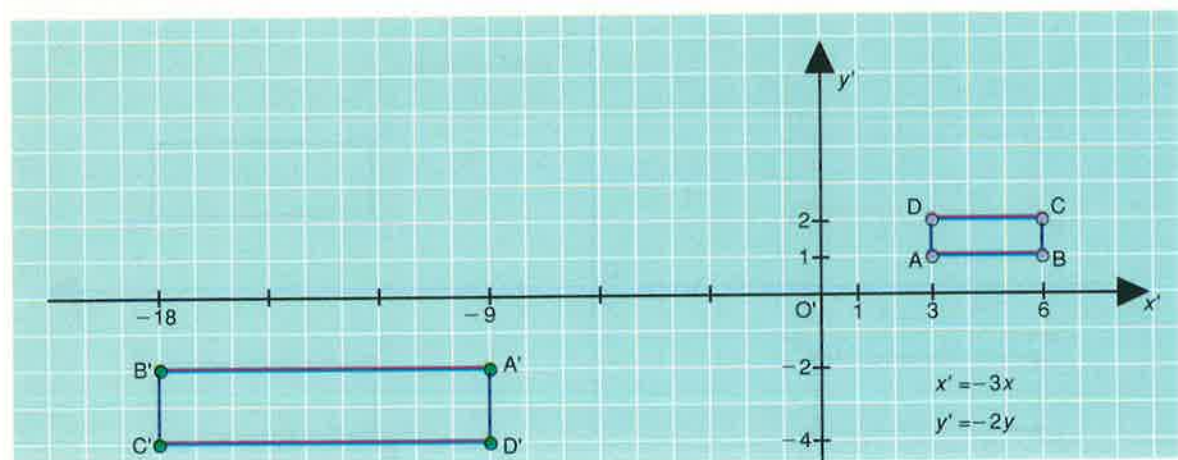
- ② Sempre a partire dal quadrato assegnato nell'esercizio precedente, operare la trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -y \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. disegnare la figura trasformata;
- b. descrivere l'effetto della trasformazione, precisando se si tratta di un'isometria.

**Figura 6**  
Una trasformazione composta



# Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani

## Anche le traslazioni sono particolari isometrie

La realtà suggerisce varie trasformazioni che modificano la posizione di una figura, lasciandone inalterate forma e dimensioni. Ecco un esempio: un adesivo è attaccato sul vetro laterale di un'automobile e, quando il vetro sale o scende, l'adesivo cambia solo posizione.

L'esempio descrive una *traslazione*: tutti i punti del vetro dell'automobile percorrono la stessa distanza, muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso e lo stesso succede ai

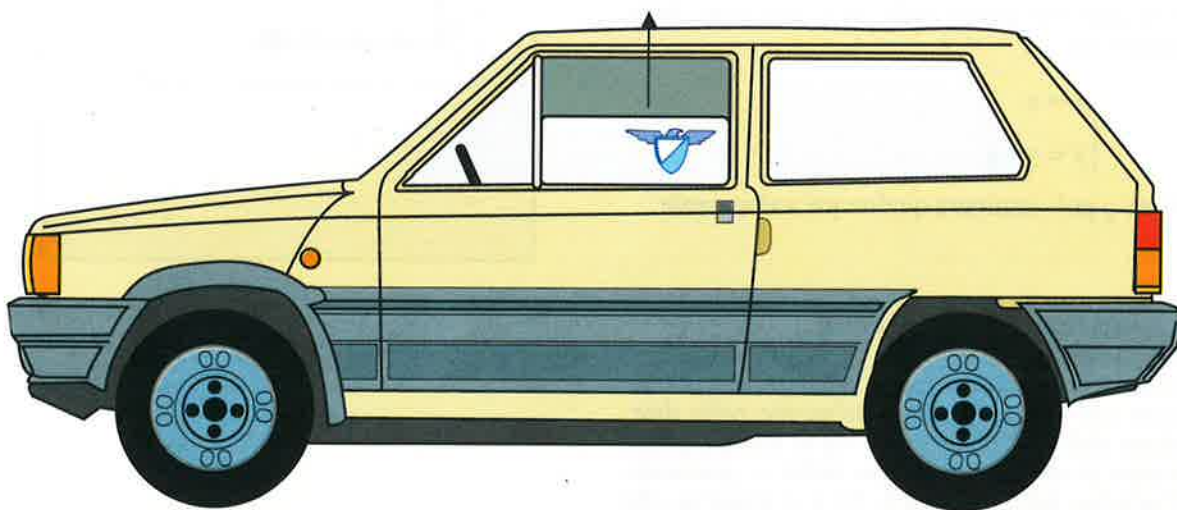
punti del vetro dell'automobile (fig. 1).

Le traslazioni sono delle particolari isometrie, dato che le figure come l'adesivo cambiano solo la loro posizione.

## Le equazioni di una traslazione nella direzione dell'asse delle $y$

Per arrivare a descrivere anche queste ultime isometrie con equazioni, si può fissare l'attenzione sulle traslazioni che lasciano le figure

Figura 1  
Una traslazione



nello stesso piano, basandosi ancora una volta su un supporto concreto (fig. 2): si disegna il riferimento cartesiano  $Oxy$  su una lastra trasparente, che può traslare scivolando su un cartone; il riferimento  $O'x'y'$ , disegnato sul cartone, permette di confrontare la situazione iniziale con quella finale.

In fig. 3a la lastra trasparente è stata traslata di 3 unità nella direzione dell'asse delle  $y$ , verso l'alto.

Così un qualunque punto  $A$  del piano, che aveva inizialmente le coordinate:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

dopo la traslazione mantiene la stessa ascissa, ma aggiunge 3 all'ordinata. Questo vuol dire che  $A$  si porta in un punto  $A'$  che ha le coordinate  $(x'; y')$  date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3 \end{cases} \quad (1)$$

In particolare, l'origine si porta in  $O(0; 3)$ .

Se invece la stessa traslazione lungo l'asse delle  $y$  avviene verso il basso (fig. 3b), si deve sottrarre 3 alle ordinate, perciò un punto  $A(x; y)$  si porta in un punto  $A'$  che ha le coordinate  $(x'; y')$  date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases} \quad (2)$$

In particolare, l'origine si porta in  $O(0; -3)$ .

Le considerazioni ora svolte suggeriscono delle conclusioni di carattere generale: *una traslazione lungo l'asse delle  $y$ , che porta l'origine nel punto  $O(0; q)$  è descritta dalle equazioni:*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases}$$

dove  $q$  può assumere qualunque valore reale.

### Le equazioni di una traslazione lungo l'asse delle $x$

Si può ragionare in modo analogo per descrivere con equazioni una traslazione nella direzione dell'asse delle  $x$  (fig. 4): si trasla il piano verso destra lungo l'asse delle  $x$ , portando l'origine nel punto  $O(2; 0)$  e si osserva che

bisogna aggiungere 2 alle ascisse di tutti i punti (fig. 3a).

Si ha quindi che un punto  $A(x; y)$  si porta in un punto  $A'$  che ha le coordinate  $(x'; y')$  date da:

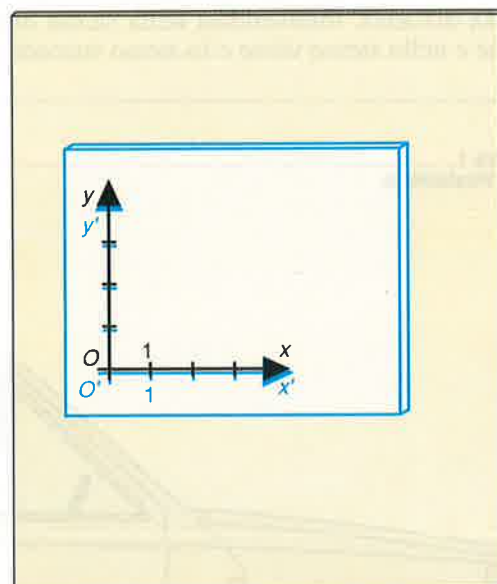
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases} \quad (3)$$

Se invece la stessa traslazione lungo l'asse delle  $x$  avviene verso sinistra (fig. 4b), si deve sottrarre 2 alle ascisse, perciò un punto  $A(x; y)$  si porta in un punto  $A'$  che ha le coordinate  $(x'; y')$  date da:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases} \quad (4)$$

In particolare, l'origine si porta in  $O(-2; 0)$ .

**Figura 2**  
Un dispositivo per studiare le traslazioni



In generale, una traslazione lungo l'asse delle  $x$  che porta l'origine nel punto  $O(p; 0)$  è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases}$$

dove  $p$  può assumere qualunque valore reale.

$A(x; y)$  si porta in un punto  $A'$  che ha le coordinate  $(x'; y')$  date da:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

dove  $p$  e  $q$  possono assumere qualunque valore reale.

### Comporre due traslazioni lungo gli assi cartesiani

Le due traslazioni lungo gli assi possono essere composte, cioè effettuate una dopo l'altra; in tal caso l'origine si porta in  $O(p; q)$  e le coordinate di tutti i punti vengono modificate nello stesso modo: si aggiunge  $p$  all'ascissa e  $q$  all'ordinata.

Questo vuol dire che un qualunque punto

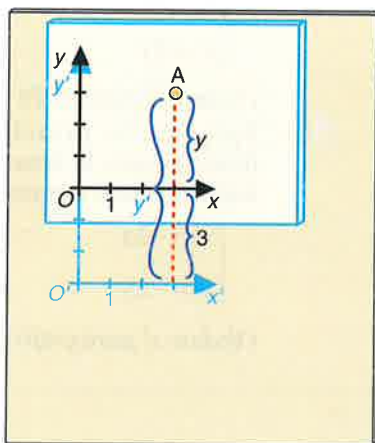
### Applicare le equazioni di una traslazione

Ecco un esempio di applicazione delle equazioni delle traslazioni ora ottenute: si disegna il rettangolo che ha i vertici (in nero in fig. 5)

$$A(1; 1) \quad B(1; 3) \quad C(2; 3) \quad D(2; 1)$$

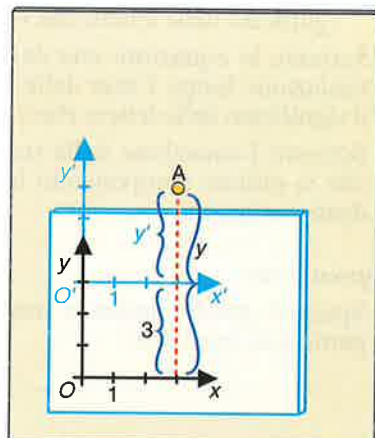
Si operano quindi le varie traslazioni esaminate in questo paragrafo e si ottengono i seguenti risultati:

**Figura 3**  
Le equazioni di traslazioni lungo l'asse delle  $y$



3a

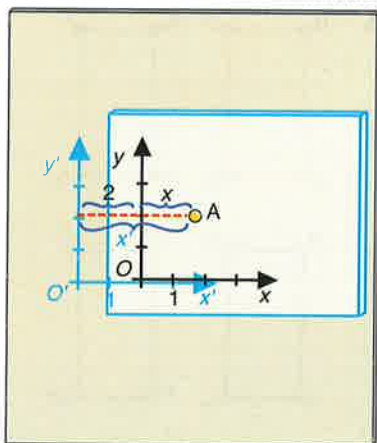
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$



3b

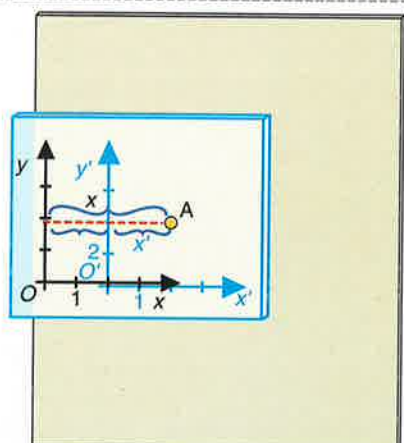
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

**Figura 4**  
Le equazioni di traslazioni lungo l'asse delle  $x$



4a

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$$



4b

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases}$$



- con la traslazione lungo l'asse delle  $y$ , descritta dalle equazioni (1), si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in rosso in fig. 5):

$$A'(1; 4) \quad B'(1; 6) \quad C'(2; 6) \quad D'(2; 4)$$

- con la sola traslazione lungo l'asse delle  $x$ , descritta dalle equazioni (3), si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in blu in fig. 5):

$$A''(3; 1) \quad B''(3; 3) \quad C''(4; 3) \quad D''(4; 1)$$

- componendo le due traslazioni, si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in verde in fig. 5):

$$A^*(3; 4) \quad B^*(3; 6) \quad C^*(4; 6) \quad D^*(4; 4)$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Scrivere le equazioni che descrivono una traslazione lungo l'asse delle  $x$ , spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.
- ② Scrivere le equazioni che descrivono una traslazione lungo l'asse delle  $y$ , spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.
- ③ Scrivere l'equazione della trasformazione che si ottiene componendo le due precedenti traslazioni.

### Comprensione

- ① Spiegare perché anche le traslazioni sono particolari isometrie.

- ② Spiegare come si arriva a scrivere l'equazione di una traslazione lungo l'asse delle  $x$  o lungo l'asse delle  $y$ .

### Applicazioni

- ① Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i seguenti vertici:  
 $A(3; 2) \quad B(4; 4) \quad C(6; 3) \quad D(5; 1)$   
 Operare le traslazioni descritte dalle equazioni (2) e (4) di questo paragrafo e disegnare le figure trasformate.
- ② Disegnare la figura che si ottiene applicando successivamente le traslazioni descritte dalle equazioni (2) e (4) al quadrato assegnato nel precedente esercizio.

### Collegamento con i paragrafi precedenti

- ① Spiegare le principali differenze che distinguono le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

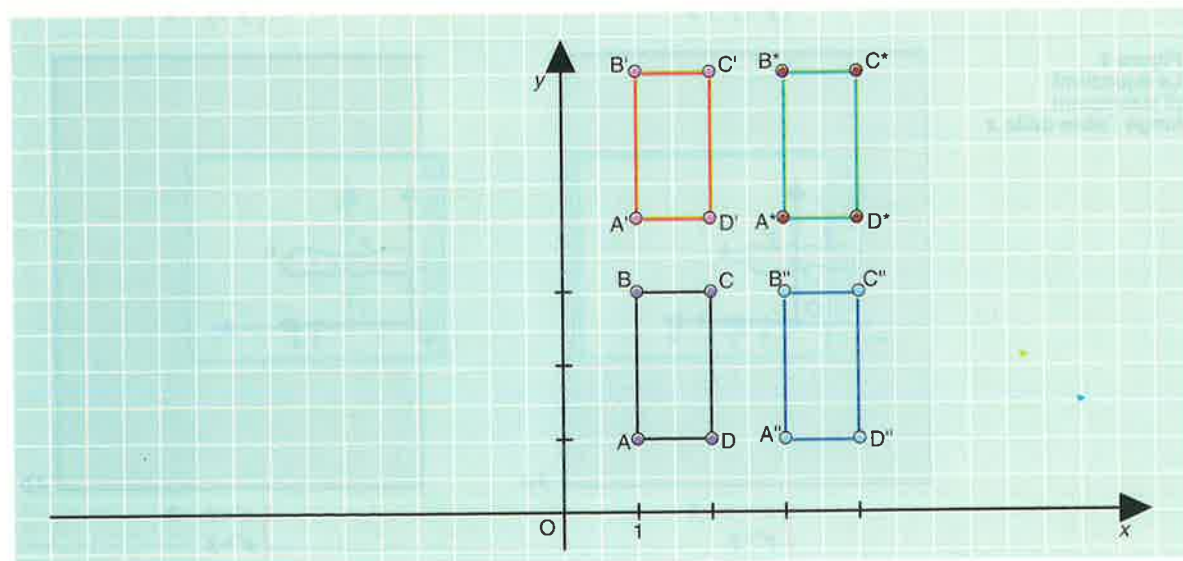
(Vedere il paragrafo 2)

- ② Spiegare le principali differenze che distinguono le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

(Vedere il paragrafo 4)

**Figura 5**  
Un rettangolo che viene traslato



## Dalle traslazioni ai vettori

### Descrivere una traslazione con un vettore

Osserviamo una situazione analoga a quella descritta all'inizio del paragrafo precedente (p. 239): il pavimento di un ascensore in movimento subisce una traslazione, dato che tutti i suoi punti percorrono la stessa distanza muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso (fig. 1a).

Queste considerazioni mettono in rilievo un fatto: per descrivere una traslazione bisogna fornire tre informazioni:

1. la *distanza percorsa* dai punti (cioè la lunghezza dei segmenti  $AA'$ ,  $BB'$ , etc. in fig. 1b, dove l'ascensore sale di 2 metri);
2. la *direzione* lungo la quale si muovono i punti (cioè la direzione delle rette parallele  $AA'$ ,  $BB'$ , etc. in fig. 1b);
3. il *verso* del movimento, per dire se l'ascensore sale o scende (in fig. 1b la freccia verso l'alto indica che l'ascensore sale).

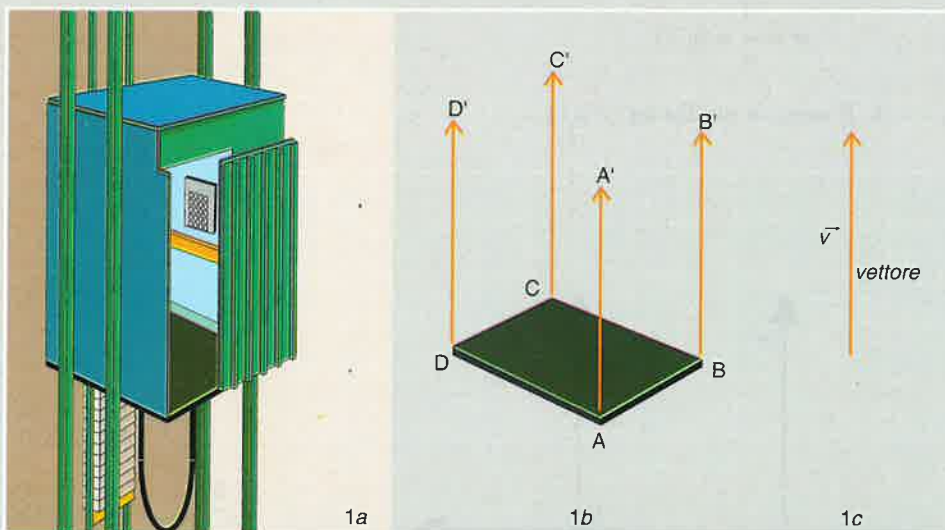


Figura 1  
Una traslazione  
può essere  
descritta  
da un vettore

Queste tre informazioni possono essere date disegnando tanti *segmenti orientati*; per esempio, quando l'ascensore sale di 2 metri, tutti i suoi punti subiscono una traslazione che può essere descritta disegnando tanti segmenti orientati come quelli indicati in fig. 1b.

Ma proprio questa figura suggerisce un'osservazione: è inutile riempire il foglio di segmenti orientati che hanno tutti la stessa lunghezza, direzione e verso; basta disegnarne uno.

Quest'unico segmento orientato che descrive completamente la traslazione indicandone lunghezza, direzione e verso prende il nome di *vettore* (fig. 1c), ed è indicato in simboli con una lettera sormontata da una freccia:

$\vec{v}$

### Dalle equazioni al vettore che descrive una traslazione

Nel paragrafo precedente sono state descritte le traslazioni per mezzo di equazioni, che ora appaiono lunghe e complicate rispetto al simbolo così sintetico di vettore, appena introdotto.

Per capire come si può passare dalle equazioni al vettore conviene cominciare a esaminare un caso numerico (fig. 2): la traslazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Questa traslazione porta, per esempio, l'origine nel punto  $O(3; 4)$  e perciò può essere descritta dal vettore  $\vec{v}$  che ha le seguenti caratteristiche (fig. 2a):

1. lunghezza, che è la distanza di  $O$  da  $O'$ ;
2. direzione, che è quella della retta  $OO'$ ;
3. verso, in questo caso da  $O'$  a  $O$ .

È facile capire come queste tre caratteristiche sono legate alle equazioni della trasformazione; ecco come si può ragionare (fig. 2b).

1. La lunghezza di  $OO'$  si può calcolare valendosi del teorema di Pitagora; si ha:

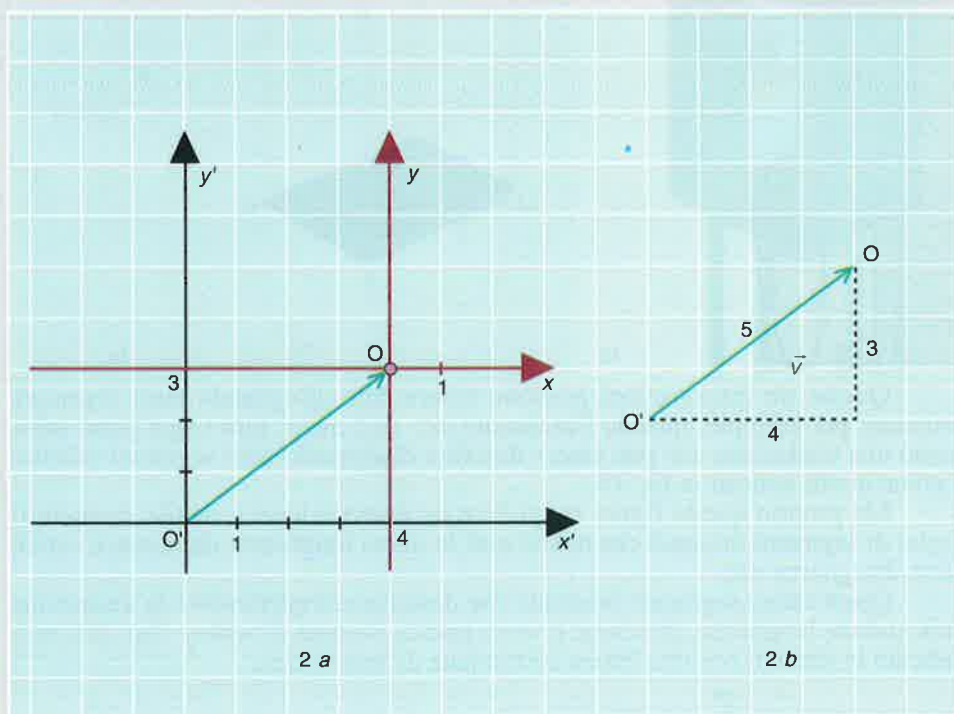
$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

2. La direzione della retta  $OO'$  si può determinare valendosi della sua pendenza  $m$ , data da (vedi il primo volume, pp. 341-345):

$$m = \frac{3}{4} = 0,75$$

3. Il verso è quello da  $O'$  a  $O$ .

**Figura 2**  
Disegnare il vettore  
che individua una  
traslazione



Un procedimento analogo si può sempre seguire quando una traslazione è data mediante le equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \quad (1)$$

La traslazione porta l'origine in  $O(p; q)$  e perciò può anche essere descritta dal vettore  $\vec{v}$  che ha le seguenti caratteristiche:

1. la lunghezza  $\overline{OO'}$  calcolata valendosi del teorema di Pitagora, e cioè:

$$\overline{OO'} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

2. la direzione, che è quella della retta  $OO'$ , determinata valendosi della sua pendenza  $m$ , data da:

$$m = \frac{q}{p}$$

3. il verso, che è quello da  $O'$  a  $O$ .

### Le componenti di un vettore

Ecco qualche esempio di applicazione dei risultati ora ottenuti.

- A. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

può anche essere descritta dal vettore  $\vec{v}$  che ha le seguenti caratteristiche (fig. 3):

1. lunghezza  $\overline{OO'} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ ;

2. pendenza  $m = \frac{-3}{4} = -0,75$ ;

3. verso da  $O'$  a  $O$ .

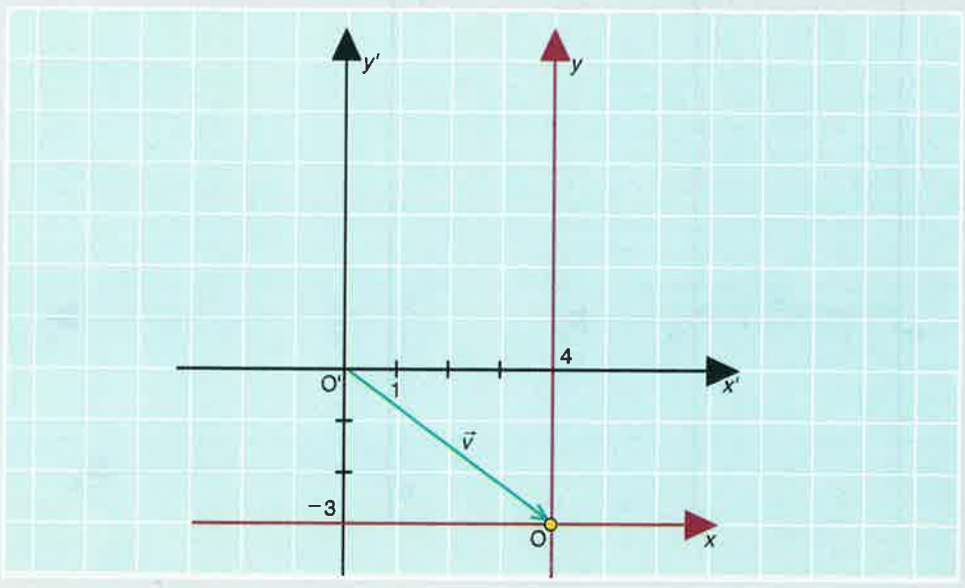


Figura 3  
Il vettore  
che descrive  
una traslazione



B. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$$

può anche essere descritta dal vettore  $\vec{w}$  che ha le seguenti caratteristiche (fig. 4):

1. lunghezza  $\overline{OO'} = 4$ ;
2. pendenza  $m = \frac{0}{4} = 0$ ;
3. verso da  $O'$  a  $O$ .

C. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

può essere anche descritta dal vettore  $\vec{t}$  disegnato in fig. 5; ma questo vettore deve essere disegnato direttamente e non può essere ricavato con il procedimento precedente, dato che non si può calcolare la pendenza dell'asse delle  $y$ .

Questi esempi suggeriscono la seguente conclusione. Dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

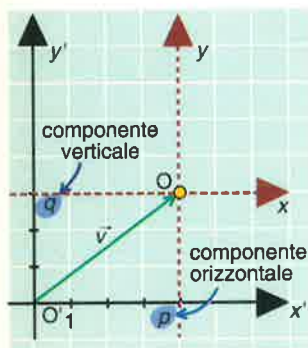
si può sempre ricavare il vettore  $\vec{v}$  che descrive la traslazione.

Per mettere in rilievo questo fatto si dice che  $p$  e  $q$  sono le *componenti* del vettore  $\vec{v}$  e più precisamente (fig. 6):

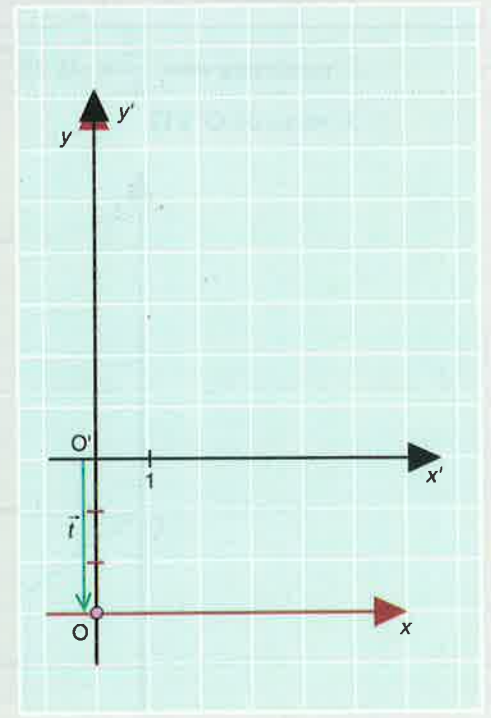
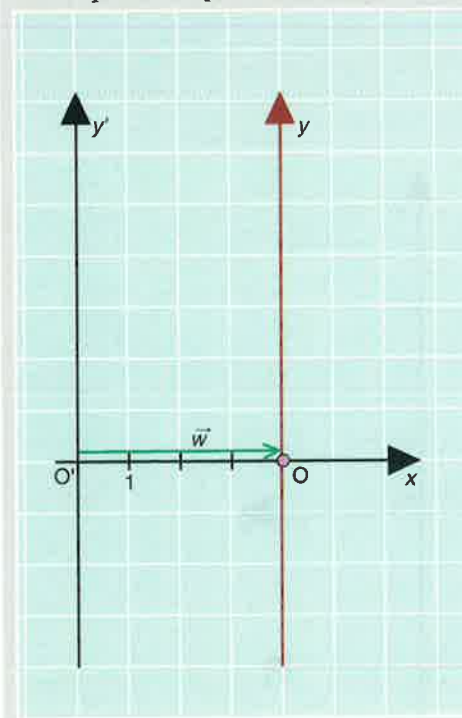
$p$  è la *componente orizzontale*;  
 $q$  è la *componente verticale*.

**Figura 4** (a sinistra)  
Il vettore che descrive  
una traslazione lungo  
l'asse delle  $x$

**Figura 5** (a destra)  
Il vettore che descrive  
una traslazione lungo  
l'asse delle  $y$



**Figura 6**  
Le componenti  
di un vettore



Queste informazioni vengono espresse sinteticamente dalla seguente scrittura:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

E così si scriverà, per esempio:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### Composizione di traslazioni e somma di vettori

Le figg. 3, 4 e 5 conducono a riflettere sulla composizione di traslazioni descritte con vettori: componendo la traslazione descritta dal vettore  $\vec{w}$  con quella descritta dal vettore  $\vec{t}$  si ottiene la traslazione descritta dal vettore  $\vec{v}$ .

Ma quest'ultimo vettore si può disegnare direttamente a partire dai primi due con il seguente procedimento (fig. 7):

- a partire da  $O'$  si disegnano successivamente i due vettori  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$ , in modo che la «coda» di  $\vec{t}$  parta dalla «punta» di  $\vec{w}$ ;
- il vettore  $\vec{v}$  ha la «coda» in  $O'$  e la «punta» sull'ultimo vettore.

Il vettore  $\vec{v}$  così ottenuto prende il nome di *somma dei vettori*  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  e si scrive:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{t}$$

L'origine del termine *somma di vettori* si spiega esaminando le componenti dei vettori.

Ecco un altro esempio (fig. 8): si operano le traslazioni descritte dai seguenti vettori:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore  $\vec{v}$ , che in fig. 8 descrive la composizione delle due traslazioni, ha le componenti seguenti:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4+1 \end{pmatrix}$$

cioè *addizionando due vettori*  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  *si ottiene un vettore*  $\vec{v}$  *che ha come componenti la somma delle componenti corrispondenti dei due vettori*  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$ .

Figura 7  
La somma  
di due vettori

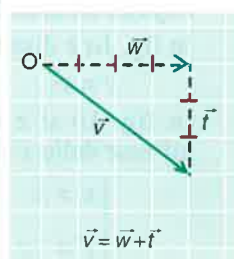
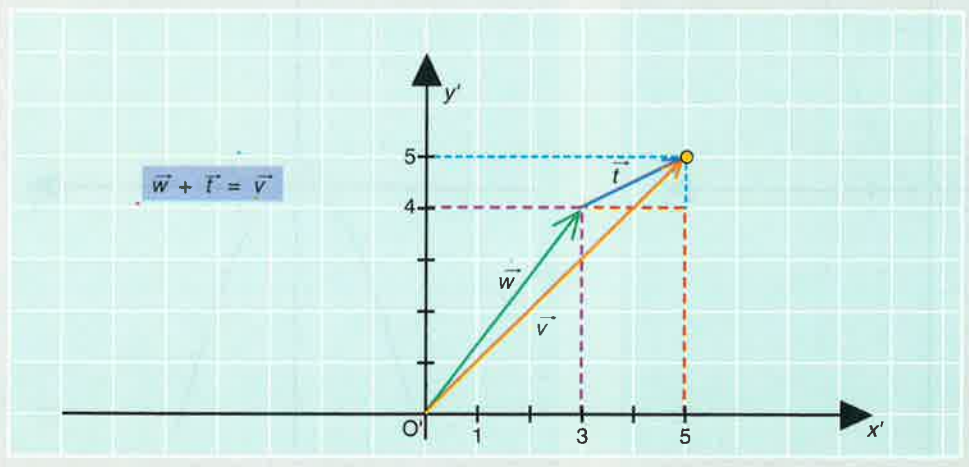


Figura 8  
Per sommare  
due vettori  
se ne sommano  
le componenti



# Trasformare le funzioni $y = x^n$ con simmetrie

**Trasformare la funzione  $y = x^2$  con la simmetria rispetto all'asse delle  $x$**

In fig. 1a è disegnata la parabola d'equazione:

$$y = x^2 \quad (1)$$

In fig. 1b si è operata la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad (2)$$

In conseguenza di questa simmetria, la parabola ha modificato la sua posizione nel piano car-

tesiano e si trova ora con la concavità rivolta verso il basso.

Quale sarà l'equazione della curva in questa nuova posizione?

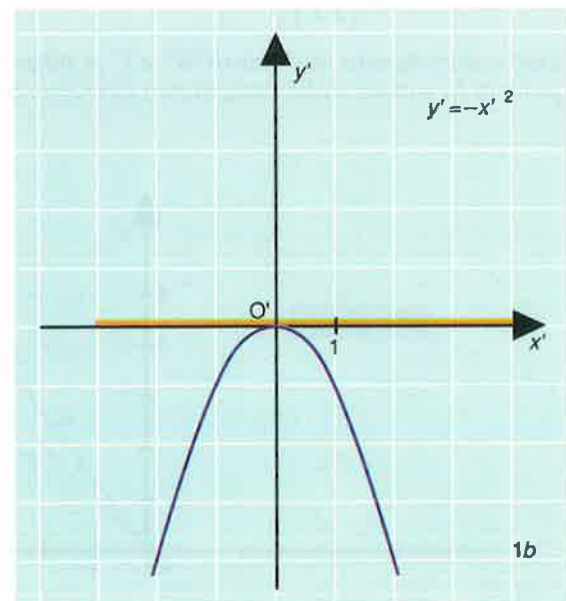
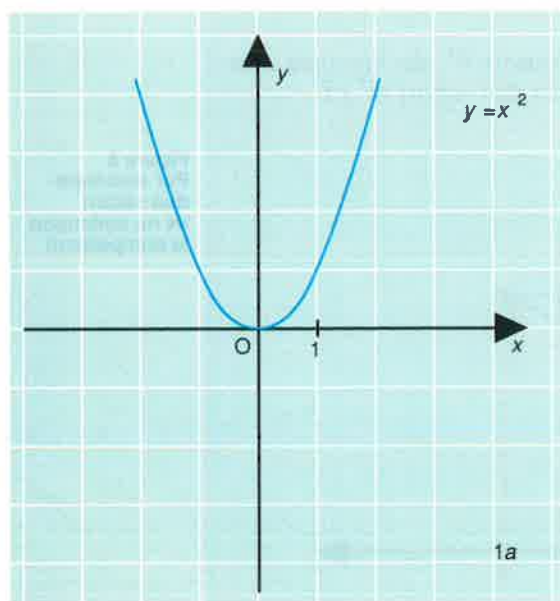
Per rispondere alla domanda, basta ricavare  $x$  e  $y$  dalla (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad -y' = x'^2$$

ossia:

$$y' = -x'^2$$

**Figura 1**  
La funzione  $y = x^2$  trasformata con una simmetria rispetto all'asse delle  $x$



**La parabola  $y = x^2$  rimane inalterata operando la simmetria rispetto all'asse delle  $y$**

In fig. 2 si è operata invece una simmetria rispetto all'asse delle  $y$  descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad (3)$$

La parabola è rimasta inalterata: la simmetria scambia il ramo destro con quello sinistro, ma non modifica il disegno.

Si ha dunque che *la parabola d'equazione  $y = x^2$  è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ , ossia l'asse delle  $y$  è asse di simmetria per la curva.*

Questo fatto geometrico è legato ad un fatto algebrico, che si trova subito scrivendo l'equazione della curva trasformata; dalle (3) si ricava infatti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y' = (-x')^2$$

Eseguendo l'elevazione al quadrato, si ottiene:

$$(-x')^2 = x'^2$$

e perciò si ha di nuovo l'equazione iniziale:

$$y' = x'^2$$

**Confrontare le due scritture  $-x'^2$  e  $(-x')^2$**

Il risultato prima ottenuto conduce ad esaminare le due scritture:

$$-x'^2 \quad \text{e} \quad (-x')^2$$

La scrittura:

$$-x'^2$$

richiede di svolgere i calcoli seguendo la priorità delle operazioni:

1. si eleva al quadrato, ottenendo  $x'^2$ ;
  2. si calcola l'opposto ottenendo  $(-1)x'^2 = -x'^2$ .
- Il risultato sarà sempre un numero negativo.*

Invece la scrittura:

$$(-x')^2$$

presenta le parentesi per alterare la priorità delle operazioni, che andranno perciò eseguite nell'ordine seguente:

1. si calcola l'opposto, ottenendo  $-x' = (-1)x'$ ;
2. si esegue l'elevazione al quadrato, ottenendo:

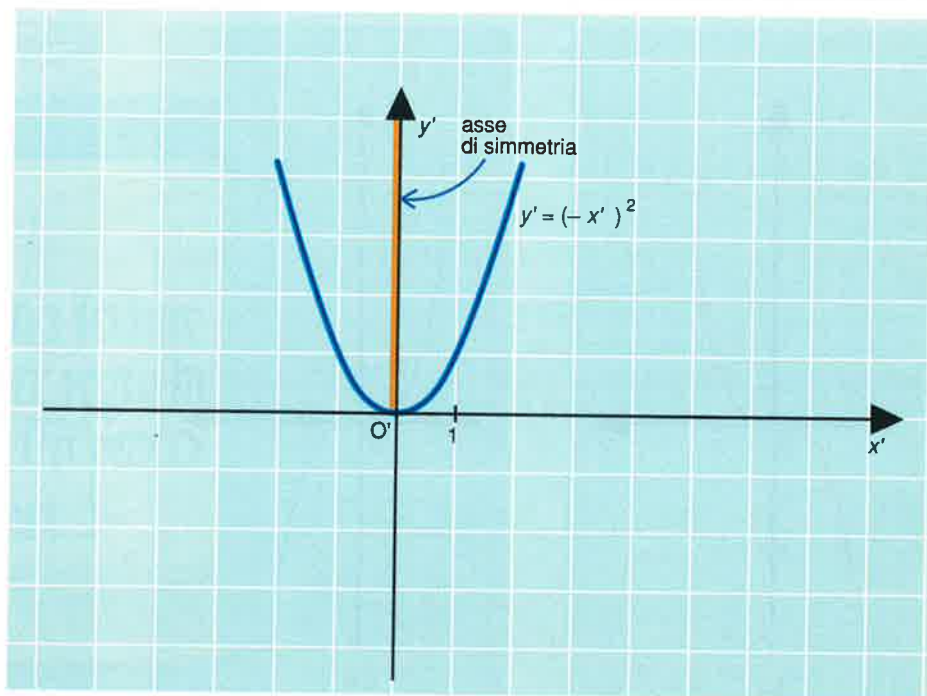
$$(-x')^2 = [(-1)x']^2 = (-1)^2 x'^2 = 1 \cdot x'^2 = x'^2$$

Si ottiene dunque:

$$(-x')^2 = x'^2$$

*Il risultato sarà sempre un numero positivo.*

**Figura 2**  
La parabola  $y=x^2$  rimane inalterata con la simmetria rispetto all'asse delle  $y$





### Trasformare la funzione $y = x^3$ con la simmetria rispetto all'asse delle $x$

In fig. 3a è disegnata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \quad (4)$$

In fig. 3b si è operata la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  descritta dalle equazioni (2).

In conseguenza della simmetria, la curva ha modificato la sua posizione nel piano cartesiano e quindi sarà anche cambiata l'equazione; la nuova equazione si ottiene ricavando  $x$  e  $y$  dalle (2) per poterle sostituire nella (4); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad -y' = x'^3$$

ossia:

$$y' = -x'^3$$

### Trasformare la funzione $y = x^3$ con la simmetria rispetto all'asse delle $y$

In fig. 3c si è operata la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  descritta dalle equazioni (3), ma la curva ha lo stesso grafico che si era ottenuto con la precedente simmetria.

Questo fatto geometrico è legato a un fatto algebrico, che si trova subito scrivendo l'equa-

zione della curva trasformata; dalle (3) si ricava infatti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y' = (-x')^3$$

e, eseguendo l'elevazione a potenza, si ottiene:

$$(-x')^3 = -x'^3$$

e quindi:

$$y' = -x'^3$$

### Confrontare le due scritture $-x'^3$ e $(-x')^3$

Le due equazioni:

$$y' = -x'^3 \quad \text{e} \quad y' = (-x')^3$$

descrivono dunque la stessa curva e questo fatto analitico-grafico porta l'attenzione sulle due scritture seguenti:

$$-x'^3 \quad \text{e} \quad (-x')^3$$

La scrittura:

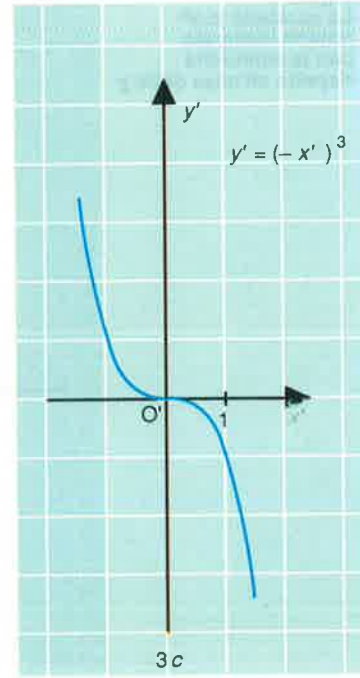
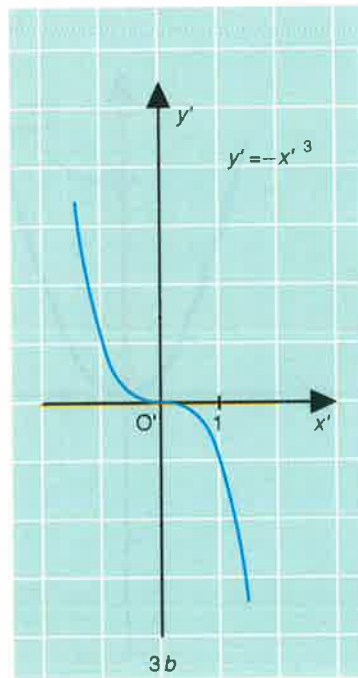
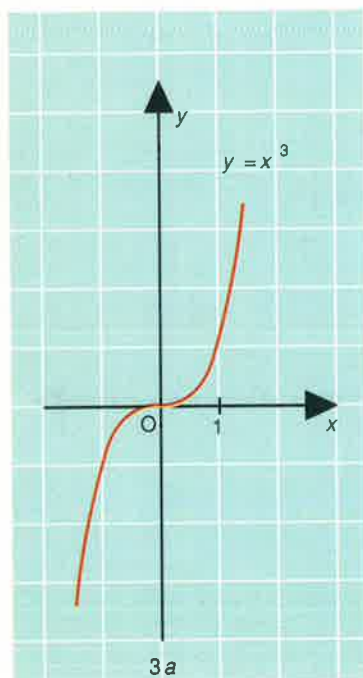
$$-x'^3$$

richiede di svolgere i calcoli seguendo la priorità delle operazioni e cioè:

1. si eleva a potenza, ottenendo  $x'^3$ ;
2. si calcola l'opposto, ottenendo  $(-1)x'^3 = -x'^3$ .

**Figura 3**

Trasformando la funzione  $y = x^3$  con la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  o all'asse delle  $y$  si ottiene sempre la stessa curva



La scrittura:

$$(-x')^3$$

presenta le parentesi per alterare la priorità delle operazioni, ma porta allo stesso risultato; ecco perché:

1. si calcola l'opposto, ottenendo  $-x' = (-1) x'$ ;
2. si eleva al cubo, ottenendo:

$$(-x')^3 = [(-1) x']^3 = (-1)^3 x'^3 = (-1) \cdot x'^3 = -x'^3$$

È per questo che si ottiene:

$$(-x')^3 = -x'^3$$

**La simmetria rispetto all'origine O lascia inalterata la funzione  $y = x^3$**

Il risultato appena ottenuto conduce a individuare la simmetria che lascia inalterata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \quad (4)$$

Si tratta della simmetria rispetto a O, che cambia il segno a entrambe le coordinate e è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad (5)$$

Ricavando infatti  $x$  e  $y$  dalle (5) per poterle sostituire nella (4) si ottiene:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e quindi } -y' = (-x')^3$$

e, eseguendo l'elevazione al cubo, si ottiene:

$$-y' = -x'^3$$

perciò si ritrova l'equazione iniziale:

$$y' = x'^3$$

Si ha dunque che *la simmetria rispetto all'origine O lascia la curva inalterata*, ossia la curva d'equazione  $y=x^3$  è *simmetrica rispetto all'origine O*.

**Trasformare con simmetrie le funzioni  $y = x^n$**

Le funzioni esaminate conducono a operare le simmetrie a partire da altre funzioni del tipo:

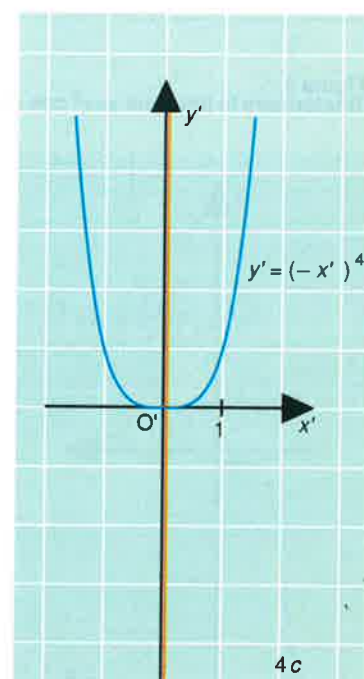
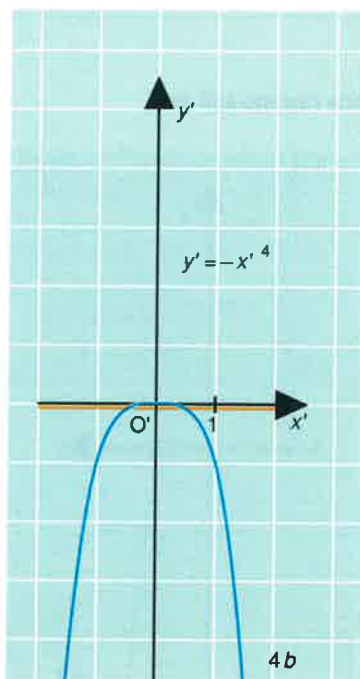
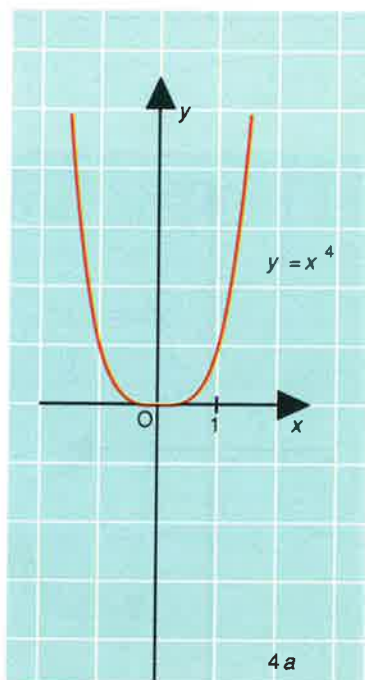
$$y = x^n$$

Così, per esempio, in fig. 4 si trova il grafico di  $y = x^4$  (fig. 4a) e delle curve che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  (fig. 4b) e rispetto all'asse delle  $x$  (fig. 4c).

In fig. 5 si trova invece il grafico della funzione

**Figura 4**

**Trasformare la funzione  $y=x^4$  con simmetrie rispetto agli assi**



$y = x^5$  (fig. 5a) e delle curve che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  (fig. 5b) o rispetto all'asse delle  $x$  (fig. 5c).

Ora, confrontando le figure 1 e 4, si osserva che le due curve hanno un comportamento analogo, che si può ritrovare anche in funzioni come  $y = x^6$  o  $y = x^8$ , cioè in funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente  $n$  pari.

E così si trova un comportamento analogo nelle due curve delle figure 3 e 5, che sono pure del tipo  $y = x^n$ , ma con esponente  $n$  dispari.

Le considerazioni finora svolte possono essere riassunte nel modo seguente:

1. tutte le funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente  $n$  pari sono simmetriche rispetto all'asse delle  $y$ ;
2. tutte le funzioni del tipo  $y = x^n$  con esponente  $n$  dispari sono simmetriche rispetto all'origine  $O$ .

### Il grafico delle funzioni $y = -x^n$

Le considerazioni svolte finora hanno anche un'importante conseguenza: esaminando la fig. 1b si può «dimenticare» che la curva è stata ottenuta, operando una simmetria, a partire da  $y = x^2$  e si può scriverne l'equazione senza più usare gli scomodi apici; e analogamente si può procedere per le curve rappresentate nelle figure 3b, 4b, 5b.

Si arriva così alle curve che hanno le equazioni seguenti:

$$y = -x^2 \quad y = -x^3 \quad y = -x^4 \quad y = -x^5$$

In generale si tratta delle curve che hanno equazione del tipo:

$$y = -x^n$$

con l'esponente  $n$  intero positivo.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Tracciare il grafico della funzione  $y = x^2$  e della curva che si ottiene operando la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ .
- ② Tracciare il grafico della funzione  $y = x^3$  e della curva che si ottiene operando la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ .

### Comprensione

- ① Spiegare come si trova che la parabola d'equazione  $y = x^2$  è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ , mentre la curva d'equazione  $y = x^3$  è simmetrica rispetto all'origine  $O$ .
- ② Quali sono il grafico e l'equazione della funzione ottenuta operando una simmetria rispetto a  $O$  a partire dalla funzione  $y = x^2$ ?

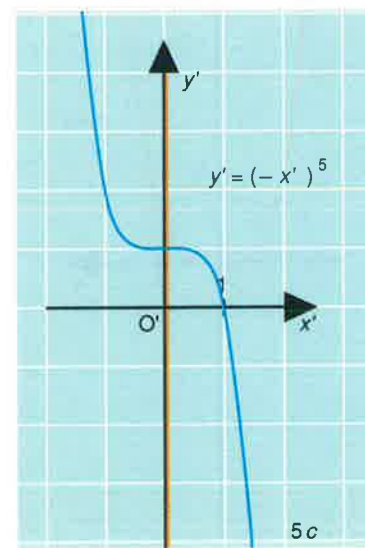
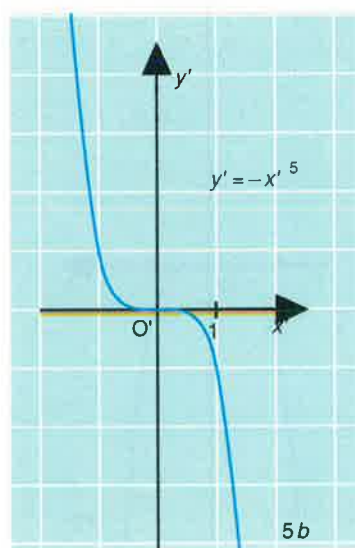
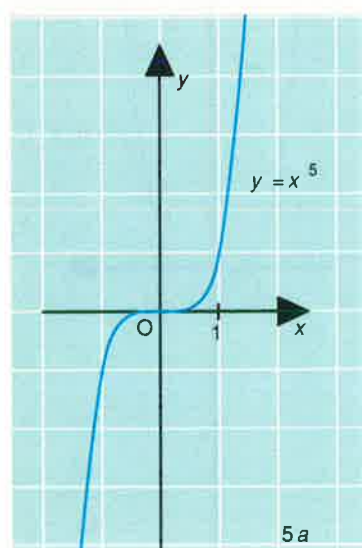
### Applicazioni

- ① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = -x^2 \quad y = -x^4 \quad y = -x^3 \quad y = -x^5$$

Indicare le curve simmetriche rispetto all'asse delle  $y$  e quelle simmetriche rispetto all'origine  $O$ .

**Figura 5**  
Trasformare la funzione  $y = x^5$  con simmetrie rispetto agli assi



# Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

## Trasformare le funzioni $y = x^n$ con la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante

Nel paragrafo precedente sono state esaminate le situazioni che si presentano quando si trasformano le funzioni  $y = x^n$  con le simmetrie rispetto agli assi cartesiani.

In questo paragrafo si continuerà a esaminare queste funzioni operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante.

Si tratta della simmetria che scambia l'ascissa con l'ordinata ed è descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad (1)$$

Ecco un primo esempio.

## Trasformare la funzione $y = x^3$

In fig. 1a è rappresentata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \quad (2)$$

che è simmetrica rispetto all'origine O.

In fig. 1b è rappresentata la curva ottenuta operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante: è ancora una curva simmetrica rispetto a O.

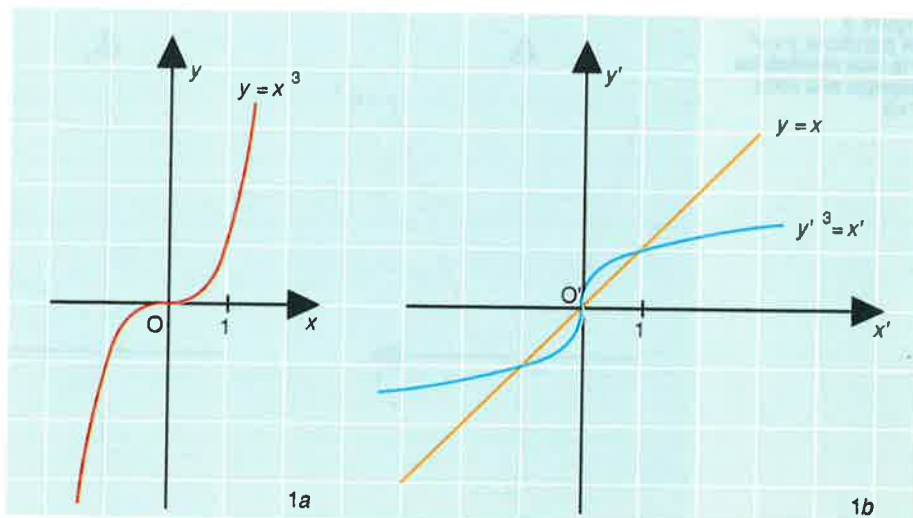
Per ottenere l'equazione della curva trasformata si procede come nel paragrafo precedente: si ricavano  $x$  e  $y$  dalla (1) per poterle sostituire nella (2); si ottiene:

$$\begin{cases} y = x' \\ x = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad x' = y'^3$$

ossia:  $y'^3 = x'$

Si può ora «dimenticare» il procedimento che

**Figura 1**  
La funzione  $y = x^3$   
e la sua simmetrica  
rispetto alla retta  $y = x$





ha portato a disegnare la curva di fig. 1b e non scrivere più gli apici, così si trova che la curva è descritta dalla relazione:

$$y^3 = x \quad (3)$$

Si osserva però che la curva rappresentata in fig. 1b è il grafico di una funzione, ma la formula (3) non descrive esplicitamente la legge per ottenere  $y$  a partire da  $x$ ; la formula fornisce infatti, in corrispondenza di un dato valore di  $x$ , invece di  $y$ ,  $y^3$ .

Tuttavia, a partire dalla relazione (3) è facile esplicitare  $y$ ; si ha infatti, per esempio:

- per  $x = 1$   $y^3 = 1$  da cui  $y = 1$
  - per  $x = 2$   $y^3 = 2$  da cui  $y = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$
  - per  $x = -1$   $y^3 = -1$  da cui  $y = -1$
  - per  $x = -2$   $y^3 = -2$  da cui  $y = \sqrt[3]{-2} \approx -1,26$
- In generale, dato un qualunque valore reale di  $x$ , si ottiene la funzione (fig. 2):

$$y = \sqrt[3]{x}$$

che ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$  dei reali.

## Trasformare la funzione $y = x^2$

In fig. 3a è rappresentata la curva d'equazione:

$$y = x^2 \quad (4)$$

Questa curva è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ .

In fig. 3b è disegnata invece la curva ottenuta operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; essendo scambiata l'ascissa con l'ordinata, la curva è simmetrica rispetto all'asse delle  $x$ .

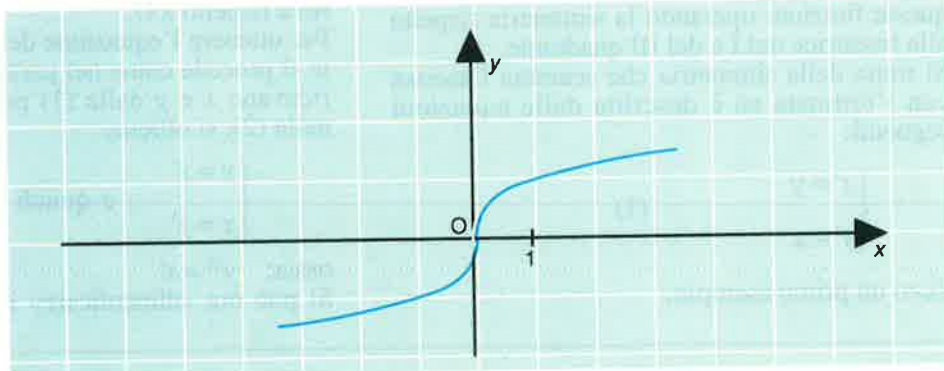
Per ottenere l'equazione della curva trasformata si procede come nel caso precedente; si ottiene che la curva di fig. 3b è descritta dalla relazione:

$$y^2 = x \quad (5)$$

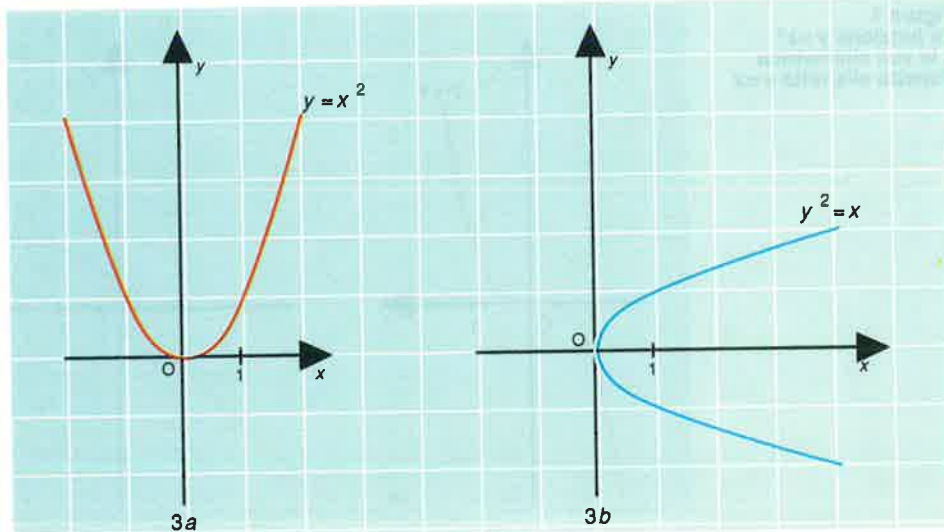
Ora, il grafico mostra una notevole differenza con il caso precedente: la curva non è il grafico di una funzione, perché a un dato valore di  $x$  possono corrispondere due valori di  $y$ .

La fig. 3b suggerisce però un'osservazione: la curva è simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  e

**Figura 2**  
La funzione  $y = \sqrt[3]{x}$



**Figura 3**  
La parabola  $y = x^2$  e la sua simmetrica rispetto alla retta  $y = x$



perciò i due valori di  $y$  che corrispondono ad uno stesso valore di  $x$  sono opposti. Così si trova, per esempio, che ci sono due punti di ascissa 1, per i quali risulta:

$$y^2 = 1$$

I due punti sono (fig. 4a):

- P che ha l'ordinata  $y = 1$ ;
- P' che ha l'ordinata opposta  $y = -1$ .

E, analogamente, ci sono due punti di ascissa 2, per i quali risulta:

$$y^2 = 2$$

I due punti sono (fig. 4a):

- Q che ha l'ordinata  $y = \sqrt{2}$ ;
- Q' che ha l'ordinata opposta  $y = -\sqrt{2}$ .

Più in generale, a una data ascissa  $x$  corrispondono le due ordinate seguenti:

$$y = \sqrt{x} \text{ e } y = -\sqrt{x}$$

È ancora il grafico a suggerire un'avvertenza:

$x$  non può essere scelta come si vuole, perché i punti della curva hanno tutti l'ascissa positiva.

Si arriva così a capire che, per descrivere la parabola di equazione  $y^2 = x$  occorrono due funzioni:

- la prima che descrive l'arco al disopra dell'asse delle  $x$  (fig. 4b) e quindi è  $y = \sqrt{x}$ ;
  - la seconda che descrive l'arco al disotto dell'asse delle  $x$  (fig. 4c) e quindi è  $y = -\sqrt{x}$ .
- Entrambe le funzioni hanno come dominio l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi.

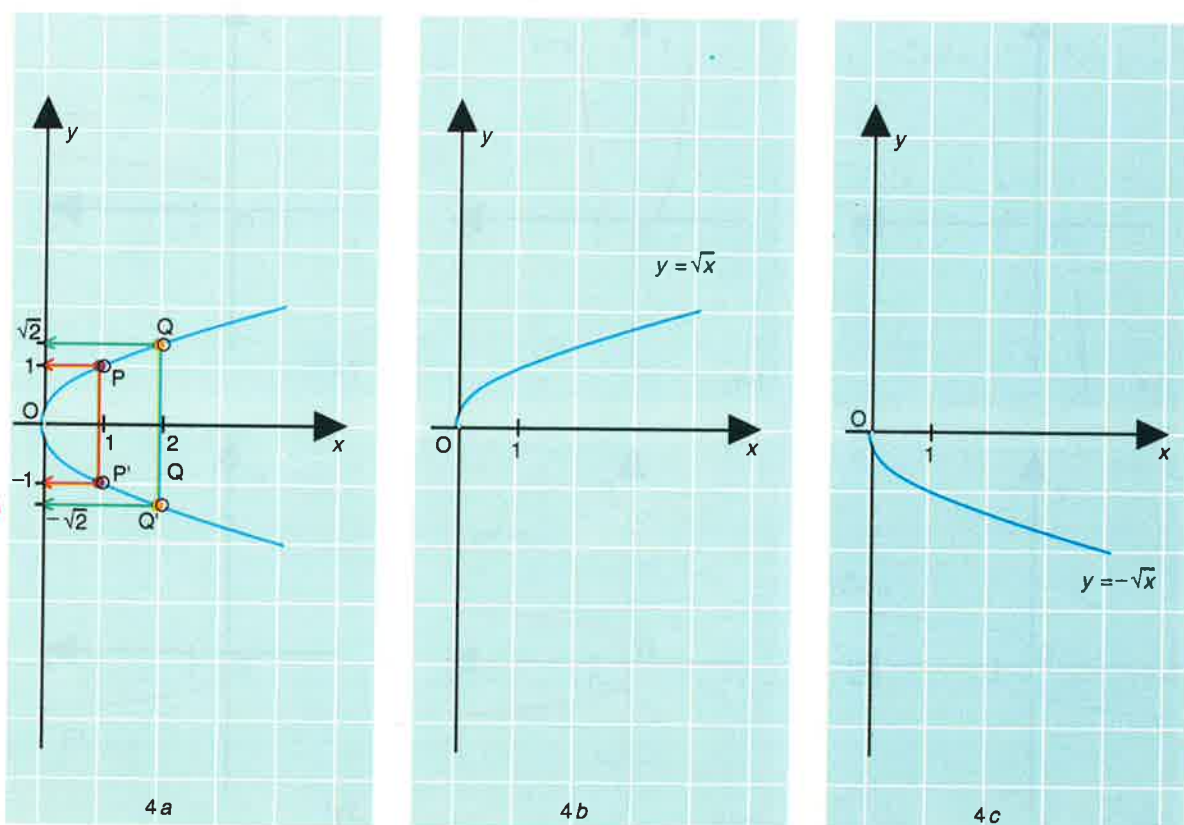
### Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

Le precedenti considerazioni possono essere ripetute a partire dalle altre funzioni del tipo  $y = x^n$ ; ecco ancora due esempi.

In fig. 5a è rappresentata la funzione:

$$y = x^5$$

**Figura 4**  
La parabola  $y^2 = x$  non è il grafico di una sola funzione



con l'esponente 5 dispari, mentre in fig. 5b è rappresentata la curva che si ottiene operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; la curva è simmetrica rispetto all'origine O e è descritta dalla relazione:

$$y^5 = x$$

La curva di fig. 5b può anche essere descritta dalla funzione:

$$y = \sqrt[5]{x}$$

che ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$  di tutti i numeri reali.

In fig. 6a è poi rappresentata la funzione:

$$y = x^4$$

con l'esponente 4 pari, mentre in fig. 6b è rappresentata la curva che si ottiene operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; la curva è simmetrica rispetto

all'asse delle  $x$  ed è descritta dalla relazione:

$$y^4 = x$$

Per descrivere quest'ultima curva occorrono però due funzioni; si tratta delle funzioni seguenti (fig. 7):

$$y = \sqrt[4]{x} \text{ e } y = -\sqrt[4]{x}$$

che hanno entrambe come dominio l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei numeri reali positivi.

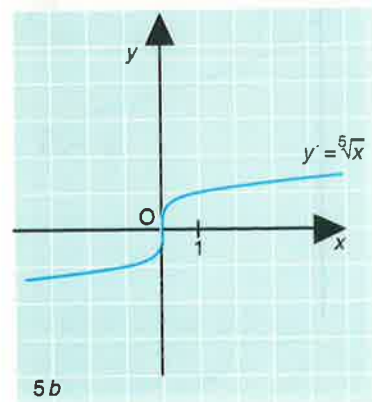
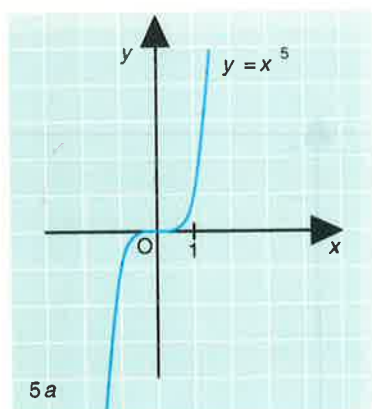
Si è così condotti a delle conclusioni di carattere generale: *a partire dalla relazione*

$$y^n = x$$

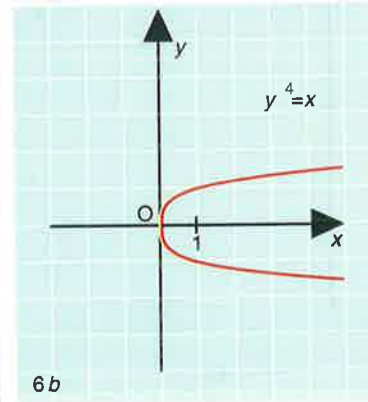
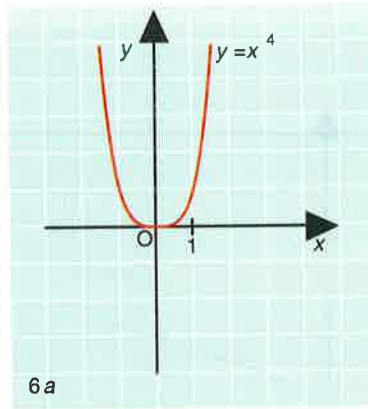
si ottengono:

- le due funzioni  $y = \sqrt[n]{x}$  e  $y = -\sqrt[n]{x}$  con dominio  $\mathbb{R}^+$  se  $n$  è pari;
- una sola funzione  $y = \sqrt[n]{x}$  con dominio  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari.

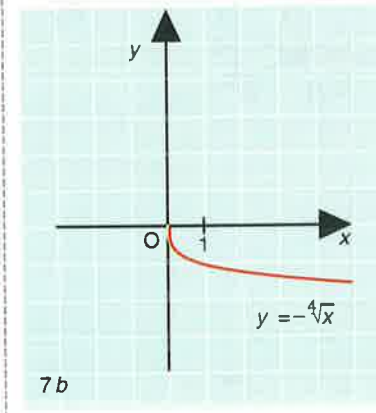
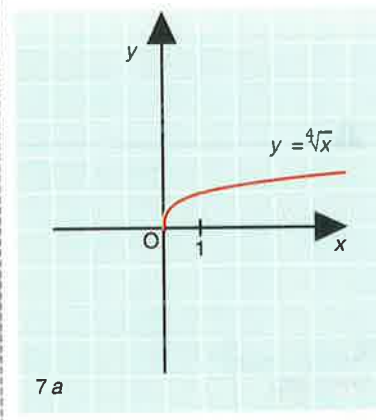
**Figura 5**  
Le funzioni  $y=x^5$  e  $y=\sqrt[5]{x}$



**Figura 6**  
La funzione  $y=x^4$  e la curva di equazione  $y^4=x$



**Figura 7**  
Le funzioni  $y = \sqrt[4]{x}$  e  $y = -\sqrt[4]{x}$



**Le funzioni  $y = \sqrt[n]{x}$  e l'operazione di «estrazione di radice»**

Ecco qualche esempio di applicazione dei risultati finora ottenuti.

1. Si esamina la relazione  $y^3 = x$

Si trova che da:

$$y^3 = 4$$

si ricava solo il numero:

$$y = \sqrt[3]{4} \cong 1,59$$

E così da:

$$y^3 = -4$$

si ottiene solo il numero:

$$y = \sqrt[3]{-4} \cong -1,59$$

Questi risultati e gli altri analoghi che si possono ottenere a partire dalla relazione:

$$y^3 = x$$

si descrivono talvolta dicendo che *l'operazione di estrazione di radice cubica di un qualunque numero reale  $x$  dà sempre un solo risultato indicato da:*

$$y = \sqrt[3]{x}$$

2. Si esamina la relazione  $y^2 = x$

Si trova che da:

$$y^2 = -4$$

non si ottiene alcun numero reale, perché nella relazione  $y^2 = x$  si possono scegliere solo valori positivi di  $x$ .

Invece da:

$$y^2 = 4$$

si ottengono i due numeri:

$$y = 2 \quad \text{e} \quad y = -2$$

sintetizzati spesso con la formula:

$$y = \pm 2$$

E così dalla relazione:

$$y^2 = 3$$

si ottengono i due numeri:

$$y = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3}$$

ossia:

$$y = \pm \sqrt{3}$$

Questi risultati e gli altri analoghi che si possono ottenere a partire dalla relazione:

$$y^2 = x$$

si descrivono talvolta dicendo che *l'operazione di estrazione di radice quadrata di un numero  $x$  positivo dà sempre due risultati, sintetizzati nella formula:*

$$y = \pm \sqrt{x}$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Tracciare il grafico della curva d'equazione:

$$y^3 = x$$

Scrivere la funzione che la descrive.

- ② Tracciare il grafico della curva d'equazione:

$$y^2 = x$$

Scrivere le due funzioni che la descrivono.

- ③ Dire quali sono le funzioni che si ottengono a partire dalle relazioni del tipo:

$$y^n = x$$

### Comprensione

- ① Spiegare perché si può dire che l'estrazione di radice cubica ha sempre un solo risultato.

- ② Spiegare perché non ha risultato reale la radice quadrata di un numero negativo.

- ③ Spiegare perché si può dire che l'estrazione di radice quadrata di un numero positivo ha sempre due risultati.

### Applicazioni

- ① Completare le seguenti frasi:

- da  $y^2 = 9$

si ottengono i due numeri  $y = \pm \dots\dots\dots$

- da  $y^2 = -9$

.....

- da  $y^3 = 81$

si ottiene il numero  $y = \dots\dots\dots$

- da  $y^3 = -81$

si ottiene il numero  $y = \dots\dots\dots$

- da  $y^4 = 16$

si ottengono i due numeri  $y = \pm \dots\dots\dots$

- da  $y^4 = -16$

.....

- da  $y^5 = -32$

si ottiene il numero  $y = \dots\dots\dots$



# Lavorare con le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

**Operare simmetrie a partire dalla funzione  $y = \sqrt[3]{x}$**

## Attività 1

Disegnare il grafico della funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  e risolvere i seguenti quesiti:

- a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$$y = -\sqrt[3]{x} \quad (1)$$

- b. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché si ottiene di nuovo la funzione (1);  
 c. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante e verificare che si ottiene la funzione:

$$y = x^3 \quad \text{con dominio l'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali.}$$

**Operare simmetrie a partire dalla funzione  $y = \sqrt{x}$**

## Attività 2

Disegnare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt{x} \quad (2)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$$y = -\sqrt{x} \quad \text{con dominio l'insieme } \mathbb{R}^+ \text{ dei reali positivi;}$$

- b. sempre a partire dalla funzione (2), operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$ , tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$$y = \sqrt{-x} \quad \text{con dominio l'insieme } \mathbb{R}^- \text{ dei reali negativi;}$$

- c. spiegare perché l'uguaglianza

$$\sqrt{-x} = -\sqrt{x}$$

è vera solo per  $x = 0$  ed è falsa per tutti gli altri valori reali di  $x$ .

### Attività 3

Disegnare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt{x} \quad (2)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- operare la simmetria rispetto all'origine O, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:  $y = -\sqrt{-x}$  con dominio l'insieme  $\mathbb{R}^-$  dei reali negativi;
- spiegare perché l'uguaglianza  $-\sqrt{-x} = \sqrt{x}$  è vera solo per  $x = 0$  e è falsa per tutti gli altri valori reali di  $x$ ;
- sempre a partire dalla funzione (2) operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:  $y = x^2$  con dominio l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi.

**Le funzioni composte**  $y = \sqrt{x^2}$  e  $y = (\sqrt{x})^2$

Il fatto che, operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante a partire dalla funzione  $y = \sqrt{x}$ , si ottiene la funzione  $y = x^2$  che ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi e non l'insieme  $\mathbb{R}$  dei reali, porta varie conseguenze che conviene conoscere.

Il primo caso da esaminare è la funzione:  $y = \sqrt{x^2}$  che può essere ottenuta, per esempio, utilizzando i tasti  $\boxed{x^2}$  e  $\boxed{\sqrt{\quad}}$  del calcolatore tascabile nel seguente modo:

$$x \xrightarrow{\boxed{x^2}} x^2 \xrightarrow{\boxed{\sqrt{\quad}}} \sqrt{x^2}$$

La funzione così ottenuta si dice anche *funzione composta*.

### Attività 4

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

$x$	$x^2$	$\sqrt{x^2}$
-2	$(-2)^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
2		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la funzione  $y = \sqrt{x^2}$  ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$ ;
- verificare che la funzione  $y = \sqrt{x^2}$  fornisce il valore assoluto di un qualunque numero reale  $x$ , cioè risulta:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

- tracciare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt{x^2} \quad \text{ossia} \quad y = |x|$$

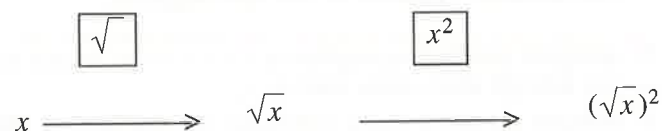
Lavorare con le funzioni  $y = \sqrt[n]{x}$

### Attività 5

Esaminare in modo analogo la funzione:

$$y = (\sqrt{x})^2$$

che può essere ottenuta utilizzando sempre i tasti  $x^2$  e  $\sqrt{\phantom{x}}$  del calcolatore tascabile, ma cambiando l'ordine nel seguente modo:



Anche questa è una *funzione composta* e, rispetto alla funzione esaminata prima, cambia solo l'ordine di composizione.

Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe.

$x$	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})^2$
-5	non reale	
5	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5})^2 = 5$
4		
-4		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la funzione  $y = (\sqrt{x})^2$  ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi;
- verificare che la funzione  $y = (\sqrt{x})^2$  riproduce il valore  $x$  di un qualunque numero positivo, cioè risulta:

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{solo se } x \text{ è positivo}$$

- tracciare il grafico della funzione:

$$y = (\sqrt{x})^2 \quad \text{ossia} \quad y = x \quad \text{con dominio l'insieme } \mathbb{R}^+$$

**Le funzioni  $y = \sqrt[3]{x^3}$  e  $y = (\sqrt[3]{x})^3$**

Nell'attività 1 si è trovato che, operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante a partire dalla funzione  $y = \sqrt[3]{x}$ , si ottiene la funzione  $y = x^3$  che ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$  dei reali.

Questo fatto porta alcune notevoli conseguenze nelle funzioni composte  $y = \sqrt[3]{x^3}$  e  $y = (\sqrt[3]{x})^3$  da esaminare nelle attività 6 e 7.

### Attività 6

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

$x$	$x^3$	$\sqrt[3]{x^3}$
-2	$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
2		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la funzione  $y = \sqrt[3]{x^3}$  ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$ ;
- verificare che la funzione  $y = \sqrt[3]{x^3}$  fornisce il valore  $x$  di un qualunque numero reale, cioè risulta:

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

- tracciare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt[3]{x^3} \quad \text{ossia} \quad y = x$$

### Attività 7

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

$x$	$\sqrt[3]{x}$	$(\sqrt[3]{x})^3$
-8	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$(-2)^3 = -8$
8		
1		
-1		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la funzione  $y = (\sqrt[3]{x})^3$  ha come dominio l'insieme  $\mathbb{R}$ ;
- verificare che la funzione  $y = (\sqrt[3]{x})^3$  fornisce il valore  $x$  di un qualunque numero reale, cioè risulta:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x$$

- tracciare il grafico della funzione:

$$y = (\sqrt[3]{x})^3 \quad \text{ossia} \quad y = x$$



# Le funzioni $y = ax^2$ e $y = \frac{k}{x}$

## Trasformare la funzione $y = x^2$ con affinità

Nei paragrafi 6 e 7 si è visto come la parabola d'equazione:

$$y = x^2 \quad (1)$$

(fig. 1) cambia posizione nel piano quando si operano delle simmetrie. In tal caso però la forma della parabola rimane inalterata.

È solo operando delle dilatazioni o delle contrazioni che si modifica la forma della curva. Ecco alcuni esempi, da cui trarre delle conclusioni di carattere generale.

1. Si opera la contrazione nella direzione dell'asse delle  $y$  descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases} \quad (2)$$

In conseguenza di questa trasformazione la parabola diventa «più larga» (fig. 2a). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si può ripetere il procedimento seguito nei paragrafi 6 e 7: si ricavano  $x$  e  $y$  dalle (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 4y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad 4y' = x'^2$$

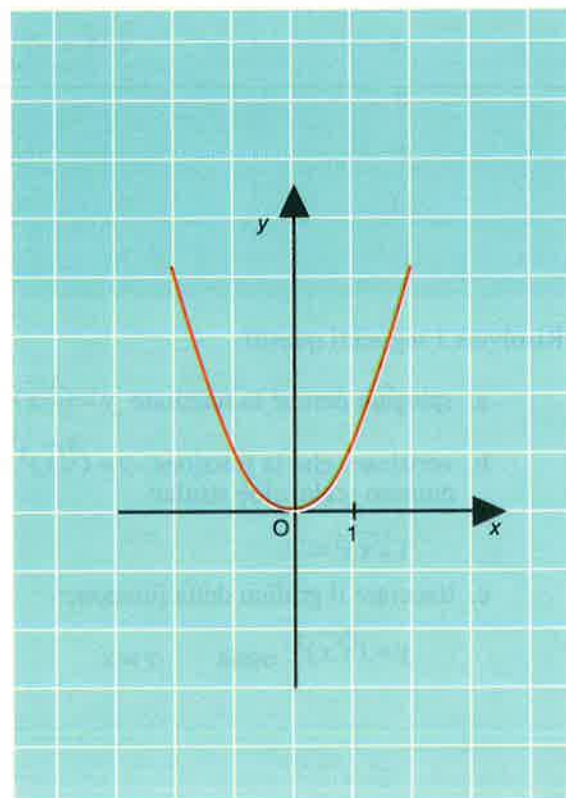
La parabola di fig. 2a ha dunque l'equazione:

$$y' = \frac{1}{4}x'^2$$

2. Si opera la dilatazione nella direzione dell'asse delle  $y$  descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \quad (3)$$

**Figura 1**  
La parabola di equazione  $y = x^2$



In conseguenza di questa trasformazione la parabola diventa «più stretta» (fig. 2b). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si ricavano  $x$  e  $y$  dalle (3) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases} \text{ e quindi } \frac{1}{2}y' = x'^2$$

La parabola di fig. 2b ha dunque equazione:

$$y' = 2x'^2$$

3. Dopo la dilatazione lungo l'asse delle  $y$ , si opera anche la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , ottenendo la curva che è rappresentata in fig. 3 e ha la seguente equazione:

$$y' = -2x'^2$$

### Le parabole di equazione $y = ax^2$

I procedimenti finora svolti si possono sempre ripetere quando si opera un'affinità descritta da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ay \end{cases} \quad (4)$$

Così si può concludere che, operando le trasformazioni descritte dalle equazioni (4), si ottiene sempre una parabola d'equazione:

$$y' = ax'^2$$

che risulta:

- «più larga» della parabola (1) se è dato

$$0 < a < 1 \text{ (come nel caso } a = \frac{1}{4}, \text{ fig. 2a);}$$

- «più stretta» della parabola (1) se è dato  $a > 1$  (come nel caso  $a = 2$ , fig. 2b);

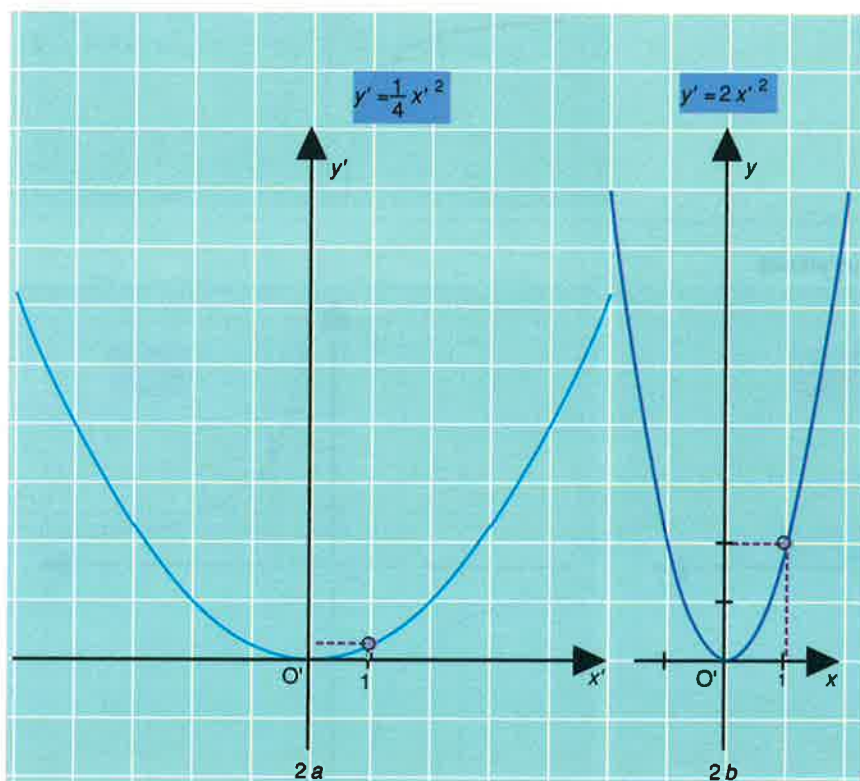
- con la concavità verso il basso se è dato  $a < 0$  (come nel caso  $a = -2$ , fig. 3).

Queste trasformazioni hanno però lasciato immutate due caratteristiche della parabola:

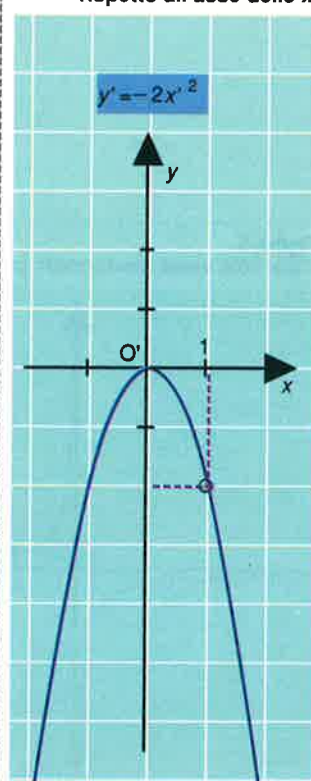
- la curva è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ ;
- il vertice è sempre l'origine  $O$ .

Si possono ora esaminare le curve delle figure

**Figura 2**  
La parabola viene trasformata con un'affinità



**Figura 3**  
La parabola viene trasformata con la simmetria rispetto all'asse delle  $x$



8. Le funzioni  $y = ax^2$  e  $y = \frac{k}{x}$

2 e 3 «dimenticando» il procedimento che ha portato a disegnarle; si possono omettere gli apici e si trova che un'equazione del tipo:

$$y = ax^2$$

rappresenta una parabola che ha il vertice nell'origine  $O$  e l'asse delle  $y$  come asse di simmetria.

La parabola presenta:

- la concavità rivolta verso l'alto se è dato  $a > 0$ ;
- la concavità verso il basso se è dato  $a < 0$ .

**Trasformare la funzione  $y = \frac{1}{x}$  con affinità**

Considerazioni analoghe a quelle finora svolte si possono ripetere a partire dalla funzione:

$$y = \frac{1}{x} \quad (5)$$

che ha come grafico l'iperbole di fig. 4.

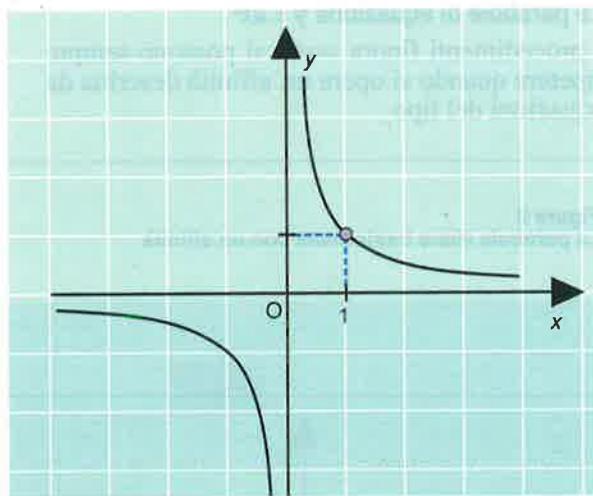
Ecco alcuni esempi, da cui trarre delle conclusioni di carattere generale.

1. Si opera la contrazione nella direzione dell'asse delle  $y$  descritta dalle equazioni (2). In conseguenza di questa trasformazione l'iperbole «si schiaccia» avvicinandosi all'asse delle  $x$  (fig. 5a). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si ricavano  $x$  e  $y$  dalle (3) per poterle sostituire nella (5); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 4y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad 4y' = \frac{1}{x'}$$

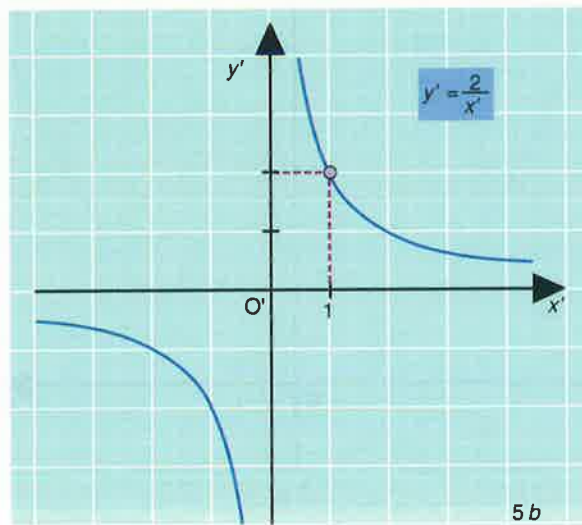
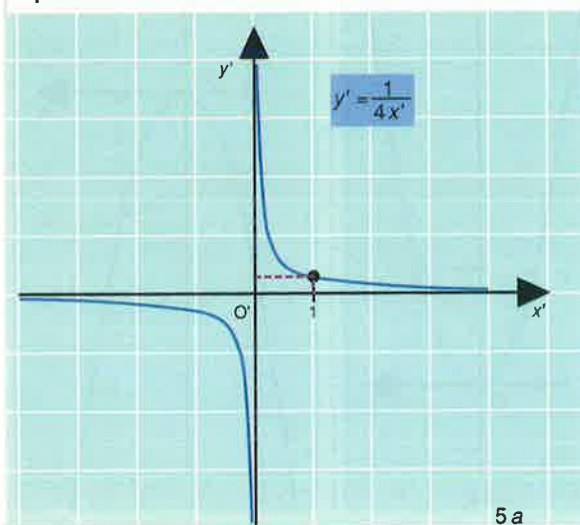
**Figura 4**

L'iperbole di equazione  $y = \frac{1}{x}$



**Figura 5**

L'iperbole viene trasformata con un'affinità



L'iperbole di fig. 5a ha dunque equazione:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x'}$$

che si può scrivere anche nelle forme seguenti:

$$y' = \frac{1}{4x'} \quad y' = \frac{1}{4x'}$$

2. Si opera la dilatazione nella direzione dell'asse delle  $y$  descritta dalle equazioni (3). In conseguenza di questa trasformazione l'iperbole «si stira» allontanandosi dall'asse delle  $x$  (fig. 5b). Per ricavare la

funzione che descrive questa curva si ricavano  $x$  e  $y$  dalle (2) per poterle sostituire nella (5); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{2}y' = \frac{1}{x'}$$

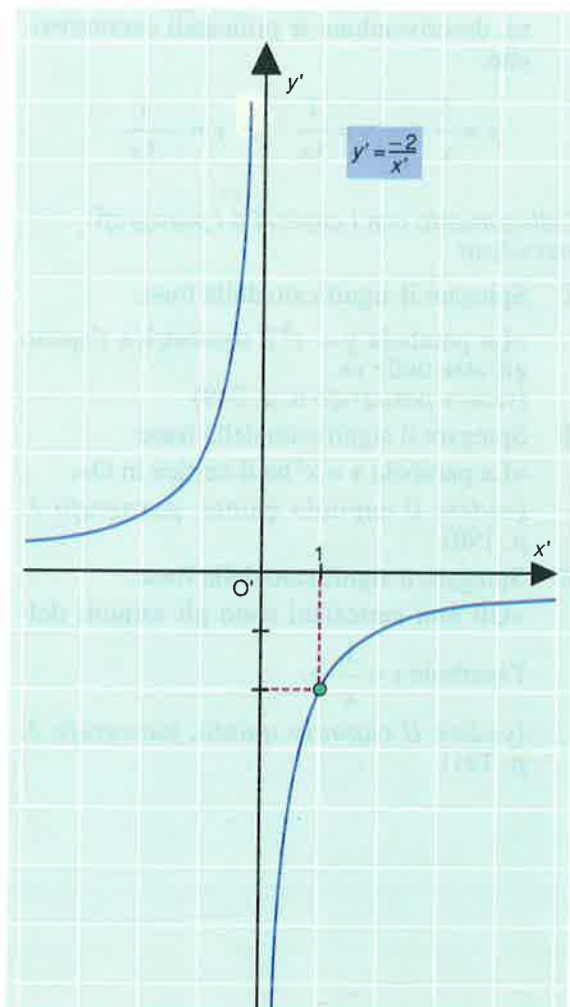
L'iperbole di fig. 5b ha dunque l'equazione:

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{x'} \quad \text{o anche} \quad y' = \frac{2}{x'}$$

3. Dopo la dilatazione lungo l'asse delle  $y$  si opera la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , ottenendo la curva che è rappresentata in fig. 6: occupa il II e il IV quadrante e ha la seguente equazione:

$$y' = \frac{-2}{x'}$$

**Figura 6**  
L'iperbole viene trasformata con la simmetria rispetto all'asse delle  $x$



8. Le funzioni  $y = ax^2$  e  $y = \frac{k}{x}$

### Le iperboli di equazione $y = \frac{k}{x}$

I procedimenti finora svolti si possono sempre ripetere quando si opera un'affinità descritta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad (6)$$

Si conclude che, operando le trasformazioni descritte dalle equazioni (6), si ottiene sempre un'iperbole di equazione:

$$y' = \frac{k}{x'}$$

che risulta:

- «più schiacciata» dell'iperbole (5) se è dato

$$0 < k < 1 \quad (\text{come nel caso } k = \frac{1}{4}, \text{ fig. 5a});$$

- «più allungata» dell'iperbole (5) se è dato  $k > 1$  (come nel caso  $k = 2$ , fig. 5b);

- contenuta nel II e nel IV quadrante se è dato  $k < 0$  (come nel caso  $k = -2$ , fig. 6).

Queste trasformazioni hanno però lasciato immutata una caratteristica dell'iperbole: gli assi cartesiani sono gli asintoti della curva.

Si possono ora esaminare le curve delle figure 5 e 6 «dimenticando» il procedimento che ha



portato a disegnarle; così si possono omettere gli apici e si trova che un'equazione del tipo:

$$y = \frac{k}{x}$$

rappresenta un'iperbole che ha gli assi cartesiani come asintoti.

L'iperbole occupa:

- il I e il III quadrante se è dato  $k > 0$ ;

- il II e il IV quadrante se è dato  $k < 0$ .

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Esaminare le funzioni  $y = ax^2$  e descriverne il grafico, sostituendo alla lettera  $a$  un numero positivo a piacere.
- ② Esaminare le funzioni  $y = ax^2$  e descriverne il grafico sostituendo alla lettera  $a$  un numero negativo a piacere.
- ③ Esaminare le funzioni  $y = \frac{k}{x}$  e descriverne il grafico, sostituendo alla lettera  $k$  un numero positivo a piacere.
- ④ Esaminare le funzioni  $y = \frac{k}{x}$  e descriverne il grafico sostituendo alla lettera  $k$  un numero negativo a piacere.

### Comprensione

- ① Descrivere la trasformazione che porta dalla parabola di equazione  $y = x^2$  alla parabola di equazione  $y' = \frac{1}{2}x'^2$ .
- ② Descrivere la trasformazione che porta dalla parabola d'equazione  $y = x^2$  alla parabola d'equazione  $y' = 2x'^2$ .

- ③ Descrivere la trasformazione che porta dall'iperbole di equazione  $y = \frac{1}{x}$  all'iperbole di equazione  $y' = \frac{1}{3x'}$ .

- ④ Descrivere la trasformazione che porta dall'iperbole  $y = \frac{1}{x}$  all'iperbole di equazione  $y' = \frac{3}{x'}$ .

### Applicazioni

- ① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, descrivendone le principali caratteristiche.

$$y = 3x^2 \quad y = \frac{1}{2}x^2 \quad y = -\frac{1}{2}x^2$$

- ② Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, descrivendone le principali caratteristiche.

$$y = \frac{3}{x} \quad y = \frac{1}{3x} \quad y = -\frac{1}{3x}$$

### Collegamento con i capitoli o i paragrafi precedenti

- ① Spiegare il significato della frase:  
«La parabola  $y = x^2$  è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ ».  
(vedere paragrafo 6, p. 249)
- ② Spiegare il significato della frase:  
«La parabola  $y = x^2$  ha il vertice in O».  
(vedere il capitolo quinto, paragrafo 3, p. 190)
- ③ Spiegare il significato della frase:  
«Gli assi cartesiani sono gli asintoti dell'iperbole  $y = \frac{1}{x}$  ».  
(vedere il capitolo quinto, paragrafo 3, p. 191)

# L'ellisse

## Trasformando il cerchio con un'affinità si ottiene un'ellisse

Le trasformazioni affini modificano la forma di una parabola o di un'iperbole, come si è visto nel paragrafo precedente; vediamo ora come si modifica un cerchio «sotto l'azione» di un'affinità.

In fig. 1a è disegnato, su una tela elastica, il cerchio d'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

già studiato nel capitolo quinto, paragrafo 1, pp. 174-175.

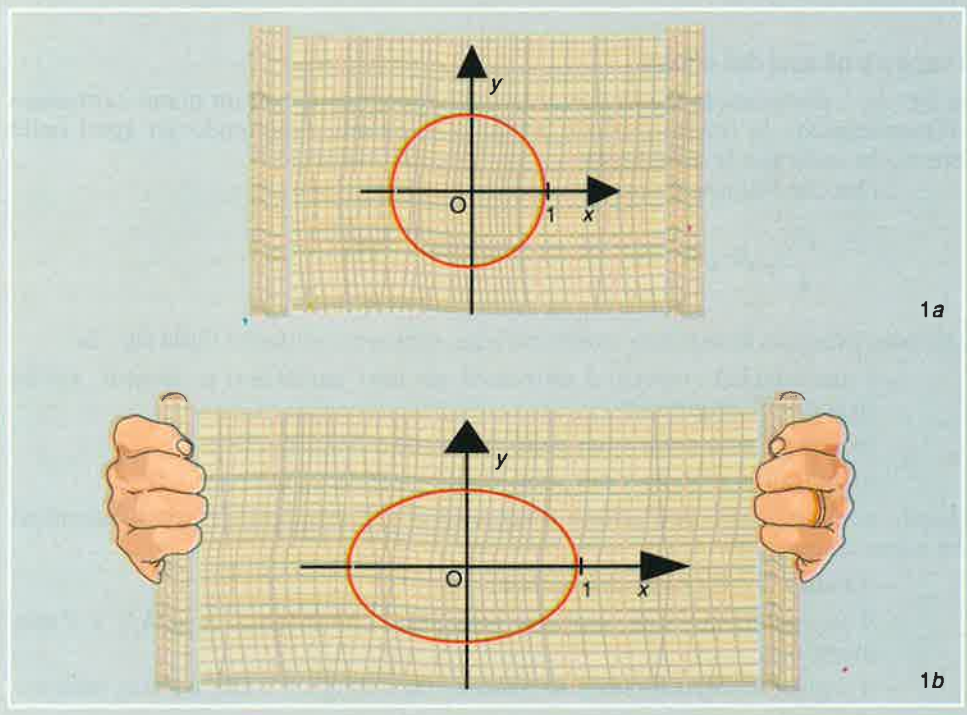
In fig. 1b la tela viene dilatata nella direzione dell'asse delle x: il cerchio si trasforma in una curva che prende il nome di *ellisse*.

Dunque, *l'ellisse è la curva che si ottiene trasformando un cerchio con un'affinità*.

## L'equazione dell'ellisse

In fig. 1b la trasformazione raddoppia le ascisse e quindi è descritta dall'equazione:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} \quad (2)$$



**Figura 1**  
Trasformando  
un cerchio  
con un'affinità  
si ottiene un'ellisse

Perciò, per ottenere l'equazione dell'ellisse, si dovrà ripetere il procedimento seguito nel paragrafo precedente: si ricavano  $x$  e  $y$  dalle (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + y'^2 = 1$$

Eseguendo l'elevazione al quadrato indicata, si ha che l'equazione dell'ellisse è data da:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

Più in generale, se il piano viene trasformato con un'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

il cerchio si trasforma nell'ellisse che ha equazione:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

ossia:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

### Il centro e gli assi dell'ellisse

In fig. 2a è disegnata la curva descritta dall'equazione (3) su un piano cartesiano «dimenticando» la trasformazione eseguita e, quindi, omettendo gli apici nelle lettere che indicano le coordinate.

Si ha che l'ellisse è descritta dall'equazione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (3)$$

La curva presenta le seguenti caratteristiche, messe in evidenza dalla fig. 2a:

- è simmetrica rispetto a entrambi gli assi cartesiani e, quindi, anche rispetto all'origine O;
- incontra l'asse delle  $x$  nei punti A'(-2; 0) e A(2;0);
- incontra l'asse delle  $y$  nei punti B(0; 1) e B'(0; -1).

Queste caratteristiche dell'ellisse d'equazione (3) vengono descritte valendosi dei seguenti termini:

- il punto O è il centro dell'ellisse;
- il segmento OA è il semiasse maggiore, che è lungo 2, e AA' è l'asse maggiore;
- il segmento OB è il semiasse minore, che è lungo 1, e BB' è l'asse minore.

In modo analogo la curva di fig. 2b, che ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si può descrivere più in generale dicendo che è un'ellisse con il centro nell'origine O, il semiasse maggiore OA che ha lunghezza a e il semiasse minore OB che ha lunghezza b.

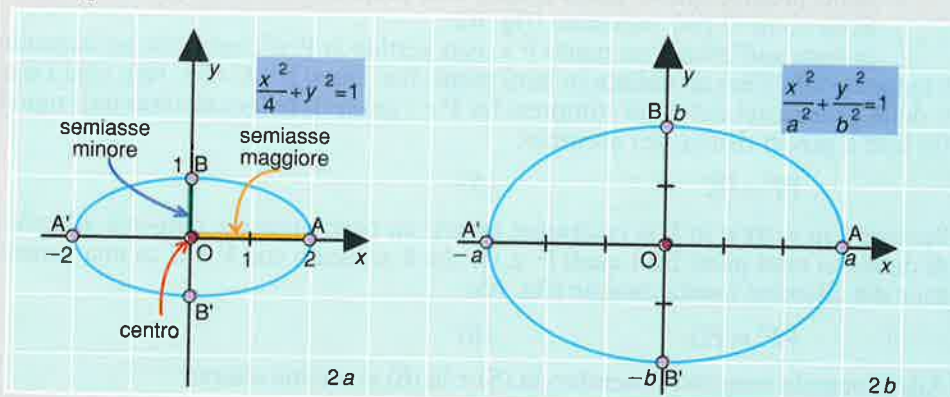


Figura 2  
Le caratteristiche di un'ellisse

### Una proprietà che caratterizza l'ellisse

L'ellisse è caratterizzata da una proprietà che si può scoprire trasformando il cerchio con un'affinità realizzata dai raggi del Sole (fig. 3a): si espone un disco al Sole e se ne osserva l'ombra, che è un'ellisse, perché è la curva trasformata di un cerchio per affinità.

L'esperienza di fig. 3a può essere anche interpretata nel modo seguente: i raggi del Sole che «si appoggiano» al disco formano un cilindro e si forma l'ombra quando questo cilindro è tagliato da un piano (fig. 3b).

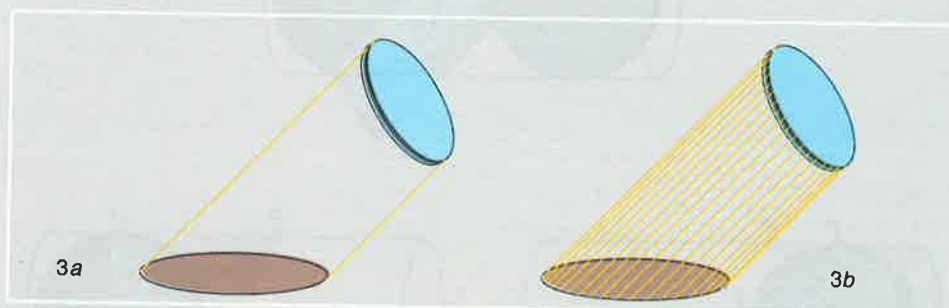


Figura 3  
L'ellisse ottenuta come ombra di un cerchio data dai raggi del Sole

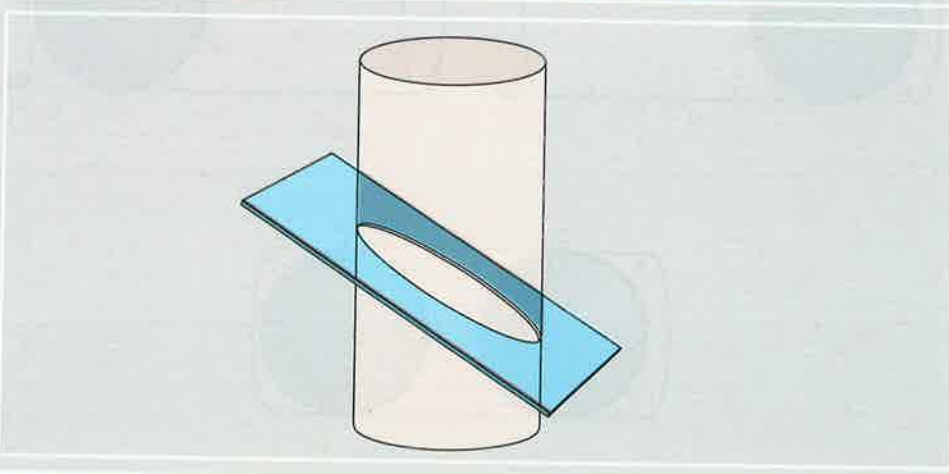


Figura 4  
L'ellisse si può ottenere tagliando un cilindro con un piano



L'ellisse si può dunque ottenere tagliando un cilindro con un piano (fig. 4).  
In fig. 5 è rappresentato un modello che permette di esaminare meglio la situazione: il cilindro è costruito con un foglio di carta trasparente e il piano secante è un cartoncino.

All'interno del cilindro sono inserite due sferette che hanno lo stesso diametro del cilindro, in modo che ciascuna sferetta tocchi il piano in un punto; si ottengono così, all'interno dell'ellisse, due punti indicati con le lettere F e F'.

Sono proprio questi punti a dare una proprietà caratteristica dell'ellisse. Ecco come si può ragionare (fig. 6).

Si fissa sull'ellisse un punto P e, con vertice in P, si costruisce un cono che è tangente alla sfera di sinistra in tanti punti, fra i quali F e C (fig. 6a); così i tratti delle generatrici del cono compresi fra P e i punti di tangenza sono tutti uguali fra loro e perciò risulta, per esempio:

$$PF = PC \quad (5)$$

Sempre con vertice in P si costruisce quindi un cono analogo, tangente alla sfera di destra in tanti punti fra i quali F' e D, che è allineato con P e C su una generatrice del cilindro; risulta dunque (fig. 6b):

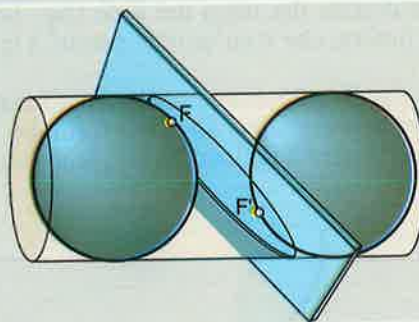
$$PF' = PD \quad (6)$$

Addizionando membro a membro la (5) e la (6) si ottiene allora:

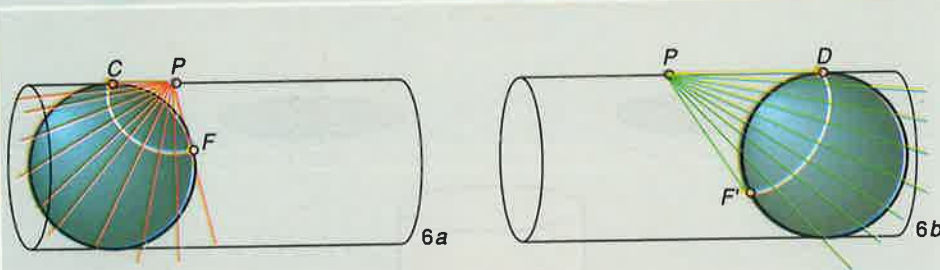
$$PF + PF' = CD$$

Per arrivare alla conclusione basta ora osservare la fig. 7 e rendersi conto che il

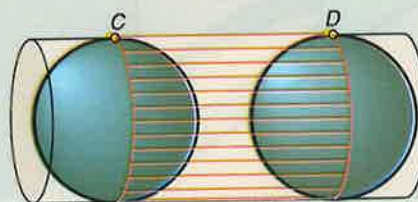
**Figura 5**  
Un modello per scoprire una proprietà dell'ellisse



**Figura 6**  
Una proprietà caratteristica delle tangenti a una sfera



**Figura 7**  
La distanza CD è costante



tratto CD ha sempre la stessa lunghezza comunque si scelga P sull'ellisse.

Si arriva così a scoprire la seguente proprietà (fig. 8): *esistono all'interno dell'ellisse due punti F e F', tali che, per qualunque punto P della curva, resta costante la somma delle distanze PF e PF'.*

### La costruzione dell'ellisse col «metodo del giardiniere»

La proprietà ora scoperta caratterizza l'ellisse come figura piana (fig. 9) e conduce a una semplice costruzione dell'ellisse (fig. 10): su una tavoletta si piantano due chiodi nei punti F e F' e vi si fissa un pezzo di spago; tenendo ben teso lo spago con l'aiuto di una matita, si riesce a tracciare l'ellisse. Questa costruzione è detta «metodo del giardiniere», perché usata dai giardinieri per tracciare il contorno di aiuole di forma ellittica.

La matita infatti congiunge tutti i punti per cui la somma  $PF + PF'$  è data dalla lunghezza dello spago.

Questa costruzione suggerisce anche come trovare il valore della somma  $PF + PF'$ : quando il punto P coincide con il punto A, risulta (fig. 11):

$$AF' + AF = AA' = 2a$$

La proprietà che caratterizza tutti i punti P dell'ellisse che ha l'asse maggiore lungo  $2a$  è dunque:

$$PF + PF' = 2a$$

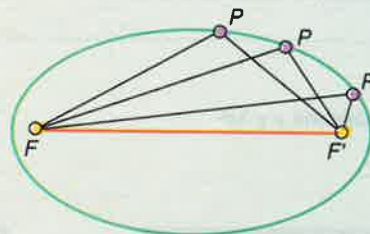
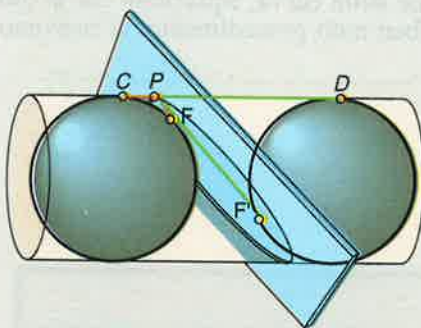


Figura 8 (a sinistra)  
Una proprietà caratteristica  
dell'ellisse

Figura 9 (a destra)  
La proprietà  
che caratterizza l'ellisse  
come figura piana

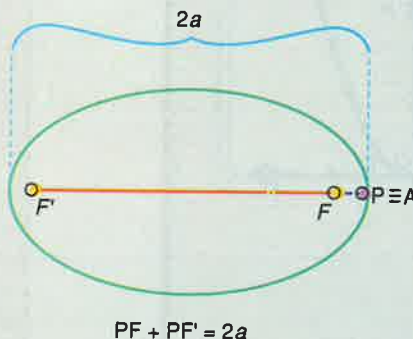
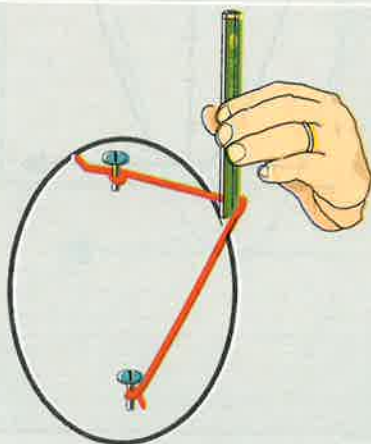


Figura 10 (a sinistra)  
L'ellisse costruita con il  
«metodo del giardiniere»

Figura 11 (a destra)  
Il valore della somma  
costante  $PF + PF'$

# Le parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$

## Traslare una parabola di equazione $y = ax^2$

Ecco un esempio da cui si possono trarre delle conclusioni di carattere generale (fig. 1): su una lastra trasparente, che realizza il riferimento  $Oxy$ , è disegnata la parabola d'equazione:

$$y = 3x^2 \quad (1)$$

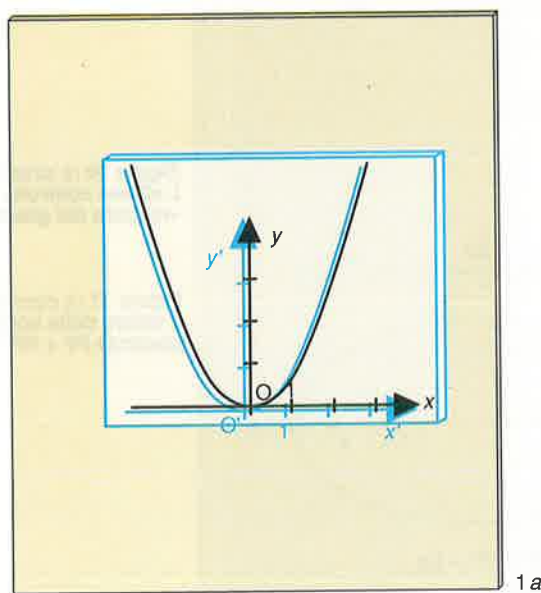
La lastra trasparente viene quindi traslata lungo il cartone che realizza il riferimento fisso

$O'x'y'$  con la traslazione descritta dalle equazioni seguenti (fig. 1b):

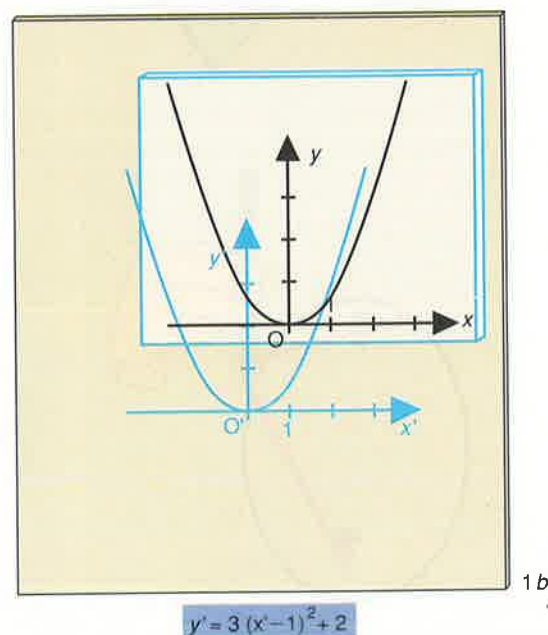
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \quad (2)$$

Questo cambiamento di posizione modifica l'equazione della curva, equazione che si ottiene con il ben noto procedimento: si ricavano  $x$

**Figura 1**  
Traslare una parabola di equazione  $y = 3x^2$



1 a



1 b

$$y' = 3(x' - 1)^2 + 2$$



e  $y$  dalla (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y' - 2 = 3(x' - 1)^2$$

Si ottiene dunque l'equazione:

$$y' = 3(x' - 1)^2 + 2$$

Conviene fissare l'attenzione sull'equazione ottenuta, confrontandola con il corrispondente grafico; si nota, fra l'altro, che:

- la parabola non ha ovviamente cambiato forma, e perciò è rimasto inalterato il coefficiente 3 di  $x'^2$ , coefficiente che «decide» la forma della curva;
- il vertice è il punto  $O(1; 2)$ ;
- l'asse di simmetria è la retta d'equazione  $x' = 1$ .

Si possono ora svolgere le operazioni indicate ricordando lo sviluppo del quadrato di un binomio (vedi il primo volume, p. 270); si ha:

$$(x' - 1)^2 = x'^2 + 1 - 2x'$$

e perciò si ottiene:

$$y' = 3(x'^2 + 1 - 2x') + 2$$

L'equazione diventa infine:

$$y' = 3x'^2 - 6x' + 5$$

**Una parabola traslata ha equazione del tipo  $y = ax^2 + bx + c$**

I procedimenti finora svolti possono essere ripetuti più in generale (fig. 2); si considera sul piano  $Oxy$  una parabola d'equazione:

$$y = ax^2$$

che ha:

- il vertice nel punto  $O(0; 0)$ ;
- l'asse di simmetria che è l'asse delle  $y$ , di equazione  $x = 0$ .

Si effettua quindi la traslazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

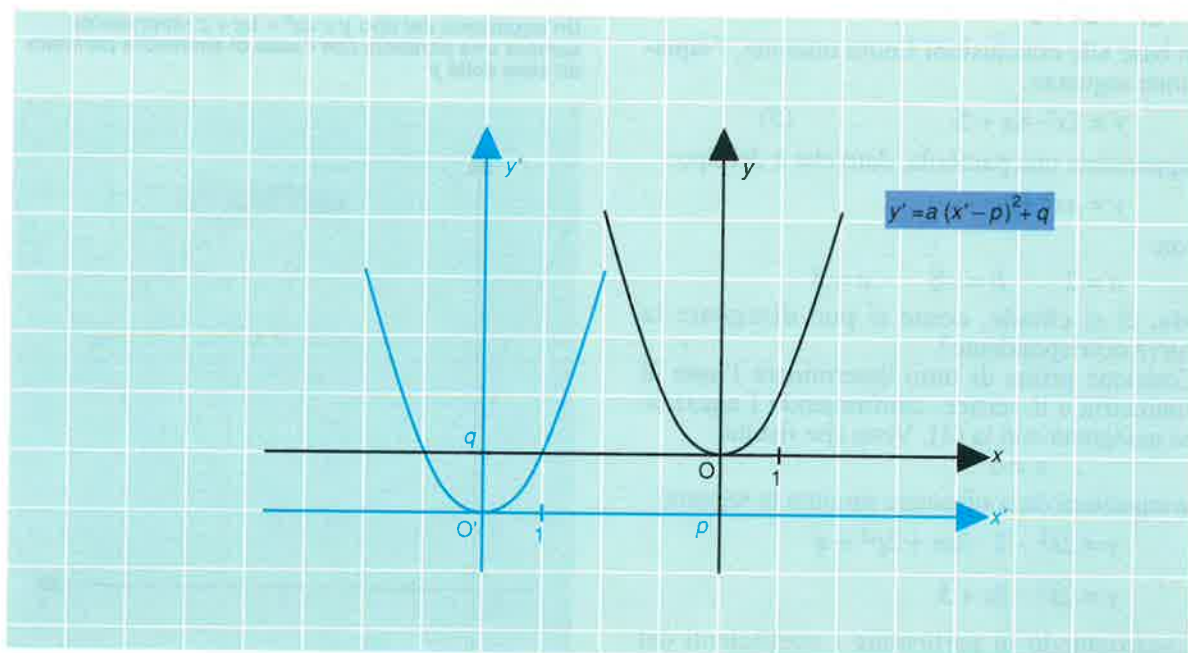
In questo modo si ottiene una curva che ha, nel riferimento  $O'x'y'$ , l'equazione data da:

$$y' - q = a(x' - p)^2$$

ossia:

$$y' = a(x' - p)^2 + q \quad (3)$$

**Figura 2**  
Traslare una parabola di equazione  $y = ax^2$





Questa parabola ha la stessa forma di quella iniziale, ma ha:

- il vertice nel punto  $O(p; q)$ ;
- l'asse di simmetria che è la retta  $s$ , di equazione  $x = p$ .

Svolgendo nella (3) i calcoli indicati, si ottiene l'equazione:

$$y' = ax'^2 - 2apx' + ap^2 + q$$

Si può ora esaminare la parabola «dimenticando» la traslazione che ha portato a disegnarla; si possono così omettere gli apici nelle lettere che indicano le coordinate (fig. 3); si ha che un'equazione del tipo:

$$y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q \quad (4)$$

rappresenta una parabola che ha:

- il vertice nel punto  $V(p; q)$ ;
- l'asse di simmetria che è la retta  $s$ , di equazione  $x = p$ .

L'equazione (4) si scrive abitualmente in forma più semplice, introducendo le lettere  $b$  e  $c$  che hanno il seguente significato:

$$b = -2ap \quad c = ap^2 + q$$

Si può così concludere che un'equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

rappresenta sempre una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$ .

### Tracciare il grafico di una funzione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

In base alle conclusioni finora ottenute, l'equazione seguente:

$$y = 2x^2 - 8x + 5 \quad (5)$$

rappresenta una parabola, dato che è del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con:

$$a = 2 \quad b = -8 \quad c = 5$$

Ma, ci si chiede, come si può disegnare la curva corrispondente?

Convien prima di tutto determinare l'asse di simmetria e il vertice, confrontando l'equazione assegnata con la (4). Visto che risulta:

$$a = 2$$

le equazioni da confrontare saranno le seguenti:

$$y = 2x^2 - 2 \cdot 2px + 2p^2 + q$$

$$y = 2x^2 - 8x + 5$$

Confrontando in particolare i coefficienti dei

monomi che presentano la lettera  $x$  (in blu), si trova che deve essere:

$$-4p = -8$$

e perciò l'ascissa  $p$  del vertice è data da:

$$p = \frac{-8}{-4} = 2$$

Ora, conoscendo l'ascissa del vertice è facile calcolarne l'ordinata  $q$ : basta sostituire 2 al posto di  $x$  nell'equazione della parabola. Si ha dunque:

$$q = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 = -3$$

Il vertice  $V$  della parabola è dunque il punto

$$V(2; -3)$$

e l'asse di simmetria  $s$ , che passa per  $V$  e è parallelo all'asse delle  $y$ , ha l'equazione data da:

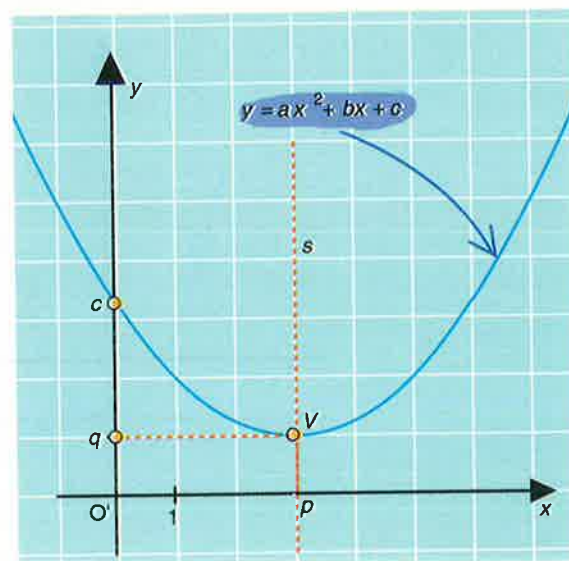
$$x = 2$$

Tracciati questi elementi sul piano cartesiano (fig. 4a), si prevede una curva formata da due archi simmetrici rispetto a  $s$ ; basta quindi disegnare uno solo di questi archi e ottenere poi l'altro per simmetria.

Volendo disegnare, per esempio, l'arco a sinistra di  $s$ , se ne determinano alcuni punti con il procedimento già seguito per disegnare una retta (vedi il primo volume, p. 349): nell'equazione (5) si sostituiscono a  $x$  alcune ascisse più

Figura 3

Un'equazione del tipo  $y = ax^2 + bx + c$  rappresenta sempre una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$



piccole di 2 e si ricavano le ordinate corrispondenti.

Si trovano, per esempio, i seguenti punti:

$x$	$y = 2x^2 - 8x + 5$	Punti
1	$y = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5 = -1$	A(1; -1)
0	$y = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 5 = 5$	B(0; 5)

Raccordando questi punti con una curva si ottiene un arco di parabola e, completando per simmetria il disegno, si ottiene la curva di fig. 4b.

Il procedimento seguito ha carattere generale e può essere sempre ripetuto per disegnare una parabola che ha l'equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si procederà dunque nel modo seguente:

1. si ricava l'ascissa del vertice confrontando l'equazione assegnata con la (4); confrontando in particolare i coefficienti dei monomi in  $x$ , si ricava che deve essere:

$$b = -2ap$$

e quindi l'ascissa  $p$  del vertice è data da:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

2. si ricava l'ordinata  $q$  del vertice sostituendo l'ascissa  $p$  nell'equazione assegnata;

3. si determina qualche altro punto della parabola, assegnando opportuni valori a  $x$  e ricavando i corrispondenti valori di  $y$ ;
4. si raccordano i punti ottenuti.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Quale forma assume l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$ ?

### Comprensione

- ① Spiegare perché le seguenti equazioni *non rappresentano* parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $x$ :

$$y = 4x + 1 \qquad y = 4x^3 - 2x + 5$$

### Applicazioni

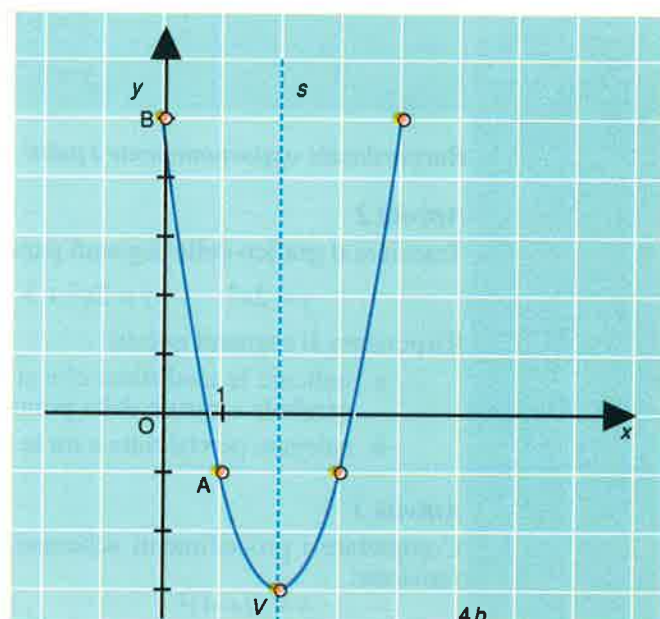
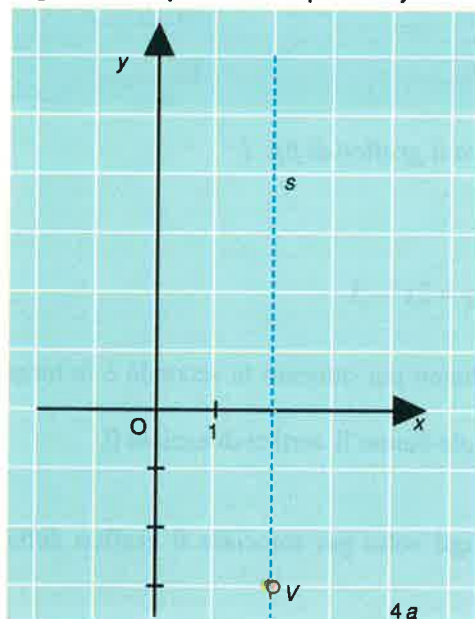
- ① Fra le seguenti equazioni scegliere quella che rappresenta una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $x$  e disegnare la curva corrispondente.

$$y = 2x^2 + 4x - 3 \qquad y = 4x - 3$$

$$y = 2x^3 + 4x - 3 \qquad y = 4x^2 - 3$$

Figura 4

Il grafico della parabola di equazione  $y = 2x^2 - 8x + 5$



# Disegnare parabole di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

## Attività 1

Completare il procedimento schematizzato qui sotto per tracciare il grafico della parabola:

$$y = 2x^2 - 1$$

Nell'equazione si ha:  $a = \dots$   $b = 0$   $c = \dots$

1. L'ascissa  $p$  del vertice è data da:  $p = \frac{-b}{2a} = 0$

2. L'ordinata  $q$  del vertice è data da:  $q = 2 \cdot \dots - 1 = -1$

La parabola ha:

- il vertice  $V(\dots; \dots)$ ;

- l'asse di simmetria che ha equazione  $x = \dots$

3. Determinare altri punti della parabola completando la seguente tabella:

$x$	$y = 2x^2 - 1$	Punti
1	$y = 2 \cdot 1^2 - 1 = \dots$	$A(\dots; \dots)$
2	$y = \dots$	$B(\dots; \dots)$

Raccordando opportunamente i punti si trova il grafico di fig. 1.

## Attività 2

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y = 2x^2$$

$$y = 2x^2 + 3$$

$$y = 2x^2 - 3$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
- spiegare perché tutte e tre le parabole hanno il vertice di ascissa 0.

## Attività 3

Completare i procedimenti schematizzati qui sotto per tracciare il grafico della funzione:

$$y = 2(x-1)^2$$

1. Si osserva che l'equazione è del tipo:

$$y = a(x-p)^2 + q$$

con:

$$a = \dots \quad p = 1 \quad q = 0$$

e perciò la parabola deve avere vertice  $V(\dots; \dots)$

2. Si determinano altri punti della parabola completando la seguente tabella:

$x$	$y = 2(x-1)^2$	Punti
0	$y = 2 \cdot (0-1)^2 = \dots\dots\dots$	A(.....; .....
-1	$y = \dots\dots\dots$	B(.....; .....

Raccordando opportunamente i punti si trova il grafico di fig. 2.

#### Attività 4

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y = 2x^2 \quad y = 2(x+3)^2 \quad y = 2(x-3)^2$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
- spiegare perché tutte e tre le parabole hanno il vertice di ordinata 0;
- sviluppare i calcoli indicati nella seconda e nella terza equazione.

#### Attività 5

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y = -x^2 \quad y = -x^2 + 2 \quad y = -(x+2)^2$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
- spiegare perché la seconda parabola ha il vertice di ascissa 0, mentre la terza ha il vertice di ordinata 0.
- sviluppare i calcoli indicati nella seconda e nella terza equazione.

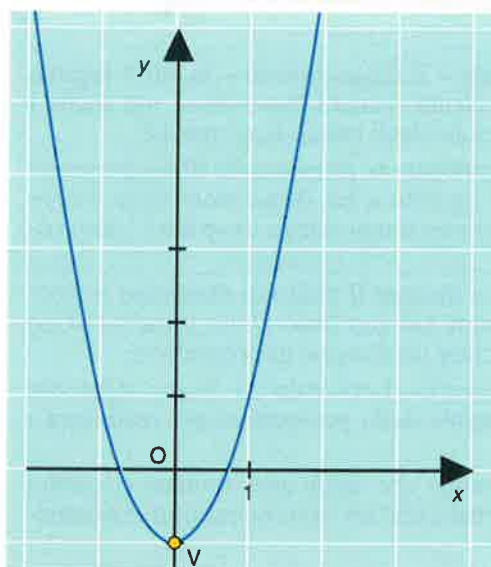


Figura 1 (a sinistra)  
La parabola  
di equazione  $y = 2x^2 - 1$

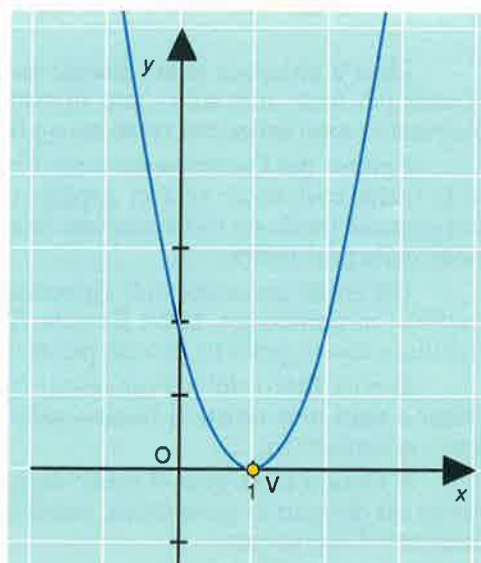


Figura 2 (a destra)  
La parabola  
di equazione  $y = 2(x-1)^2$

Disegnare parabole di equazione  $y = ax^2 + bx + c$



## Le trasformazioni nella storia

### Nel Rinascimento, dall'arte nasce la geometria proiettiva

Particolarmente forte è stato fin dall'antichità il legame fra geometria e arte: la decorazione dei vasi, i pavimenti a mosaico, motivi architettonici e decorativi, sia nelle arti maggiori che nell'artigianato di numerosi popoli (fig. 1), si ispirano alla geometria e sembrano utilizzarne alcuni risultati.

Figura 1  
Un tappeto caucasico  
con motivi geometrici



Ma c'è un'epoca relativamente recente – il Rinascimento – in cui il legame diventa più forte: non solo l'arte riprende alcuni risultati matematici, ma anche i matematici sono sollecitati verso nuove ricerche dagli artisti. Ecco perché.

I pittori del Quattrocento e del Cinquecento si propongono di rappresentare la realtà così come essa ci appare: un oggetto a tre dimensioni deve essere disegnato in modo da farne risaltare lo spessore e una stanza deve dare l'impressione della profondità.

Gli artisti rinascimentali «inventano» dunque il modo di disegnare *in prospettiva*; in particolare, Leon Battista Alberti nel suo libro *Della pittura* (1435) stabilisce regole grafiche precise per realizzare un disegno in prospettiva.

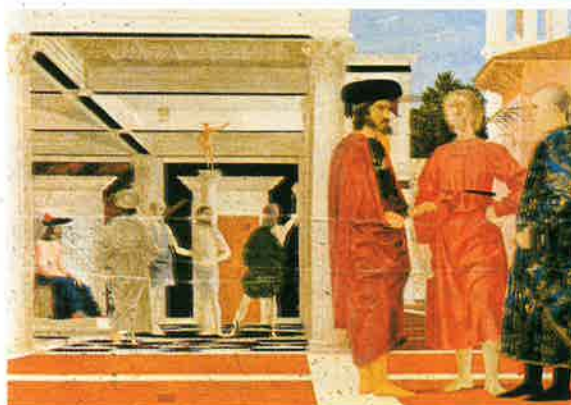
E così Piero della Francesca, Masaccio, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer e tanti altri artisti si basano sulle regole della prospettiva per realizzare i loro capolavori (fig. 2).

È Gerard Desargues il primo matematico che, dopo aver studiato a fondo i lavori sul disegno in prospettiva, pubblica nel 1639 un libro in cui tratta matematicamente l'argomento.

**Figura 2**  
Alcuni dipinti  
rinascimentali realizzati  
«in prospettiva»



2a. *Veduta di città ideale*, di anonimo italiano del XV secolo



2b. *La flagellazione*, di Piero della Francesca



2c. *La consegna delle chiavi*, di Piero Perugino

### **Nell'Ottocento si passa dalla geometria proiettiva alle trasformazioni geometriche**

Ma si deve aspettare fino all'Ottocento per trovare ripresi e approfonditi, in Francia, gli studi matematici nati dalla prospettiva: è dovuto soprattutto a Gaspard Monge l'insegnamento della geometria *descrittiva*, vale a dire largamente basata sulle tecniche di proiezione rinascimentali. La geometria descrittiva viene così a costituire un corso fondamentale per i matematici e gli ingegneri francesi di quell'epoca.

Uno degli alunni di Monge, Jean-Victor Poncelet, riprende le idee del suo maestro, le riordina e le arricchisce, introducendovi l'idea del movimento progressivo e continuo delle figure; il suo libro *Trattato delle proprietà proiettive delle figure* (1822) segna la nascita della geometria proiettiva come ramo della matematica.



Contemporaneamente si sviluppa, in Germania, lo studio della geometria proiettiva con il metodo delle coordinate: particolarmente originali e innovativi sono i lavori di August Ferdinand Möbius e Julius Plücker, ripresi poi da Hermann Grassmann. Si arriva così a studiare le trasformazioni geometriche con i metodi della geometria analitica, cioè con delle equazioni.

Nello stesso periodo, in Italia, il matematico Luigi Cremona pubblica importanti contributi, fra cui il fondamentale *Sulle trasformazioni delle figure piane* (1865) in cui si legge: «Per mezzo di raggi ... si possono proiettare i punti di un piano sopra un secondo piano e così trasformare una figura data in quello in una figura data in questo».

Nasce così uno studio sistematico delle trasformazioni geometriche e degli *invarianti*, cioè delle proprietà delle figure che restano immutate quando si operano le trasformazioni.

Nell'ambito di questi studi sulle trasformazioni, si considerano anche le trasformazioni affini come caso particolare delle trasformazioni proiettive (come si è visto nel paragrafo 1).

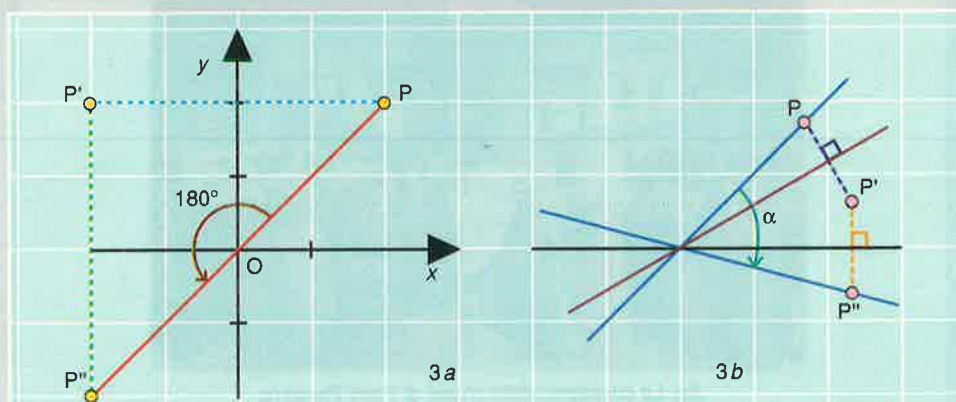
Le trasformazioni affini sembrano dunque avere una storia assai «scialba», come se fossero offuscate dal ricco sviluppo delle trasformazioni proiettive, di cui sono un caso particolare.

Ma, alla fine dell'Ottocento, queste trasformazioni trovano uno sviluppo autonomo, legato ad importanti applicazioni: si scopre infatti che proprio con le trasformazioni affini si possono descrivere le deformazioni elastiche subite da un materiale in seguito a stiramenti o compressioni.

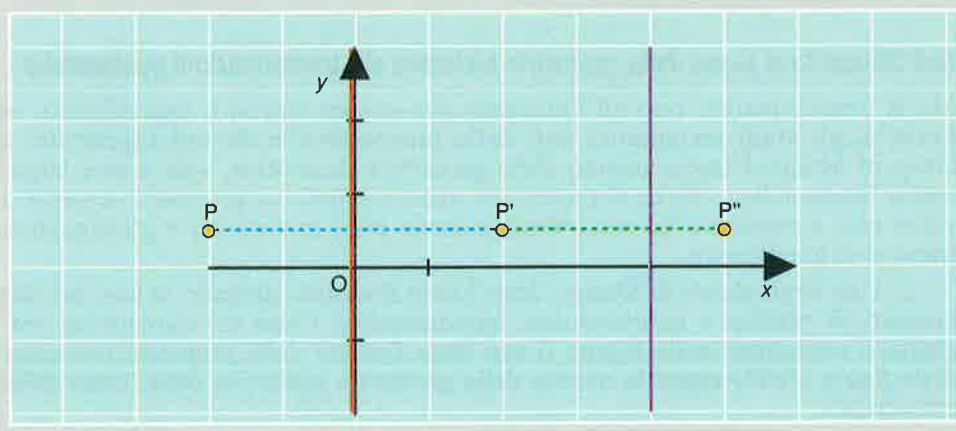
### Nel Novecento si sviluppa lo studio delle isometrie

Insieme alle trasformazioni affini vengono studiate anche le *isometrie*, cioè i movimenti che cambiano solo la posizione di una figura nel piano, e in particolare le simmetrie.

**Figura 3**  
La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti dà una rotazione



**Figura 4**  
La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli dà una traslazione



Le isometrie assumono un ruolo importante non tanto nelle applicazioni, quanto in un'opera di revisione e riordinamento della geometria, legata alla fine dell'Ottocento al nome di Felix Klein e poi sviluppata nel Novecento.

In particolare, nel XX secolo si studia la *composizione di isometrie*, arrivando a risultati di grande eleganza e generalità, come quelli esposti dal matematico tedesco Friedrich Bachmann nel libro *Costruzione della geometria a partire dalla simmetria* (1959). Bachmann mostra fra l'altro come tutte le isometrie possono essere ottenute componendo più simmetrie assiali.

Per avere un'idea di questo risultato, si possono ricordare alcune considerazioni svolte in questo capitolo.

Si è trovato (fig. 3a) che, componendo la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  con quella rispetto all'asse delle  $y$ , si ottiene la simmetria rispetto a  $O$ , che può essere anche considerata una rotazione di  $180^\circ$ .

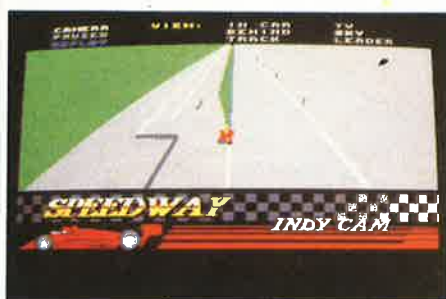
E così, componendo due simmetrie assiali con assi incidenti (fig. 3b), si possono ottenere altre rotazioni.

Invece, componendo due simmetrie con assi paralleli, si ottengono le traslazioni (fig. 4).

### Le trasformazioni e la grafica col calcolatore

Insieme allo sviluppo teorico delle isometrie si ritrova, nella seconda metà del nostro secolo, un rinnovato interesse per le trasformazioni affini e proiettive in seguito al diffondersi dei calcolatori elettronici e, quindi, della grafica col calcolatore.

Sono proprio queste trasformazioni che permettono, fra l'altro, di disegnare un palazzo e vedere l'impressione che darà quando sarà osservato da diversi punti di vista o di realizzare giochi elettronici con i loro strabilianti effetti prospettici (fig. 5).



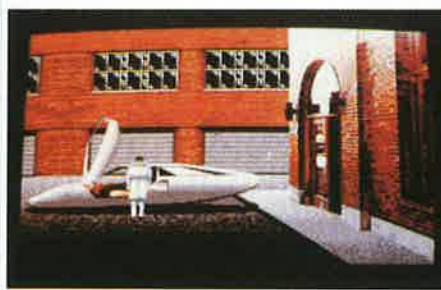
5a



5b



5c



5d

Figura 5  
Alcuni scenari  
di videogames



# Le equazioni delle trasformazioni proiettive

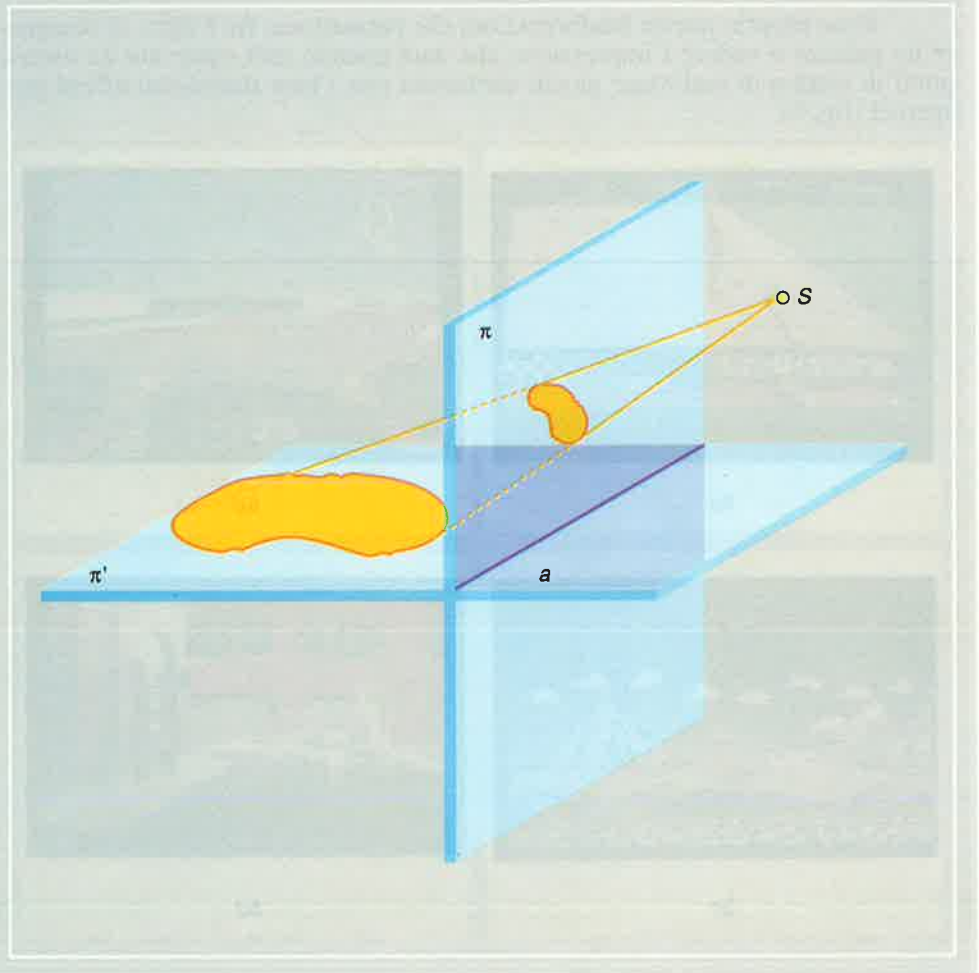
## Un modello per realizzare una trasformazione proiettiva

Una trasformazione proiettiva – si è detto nel paragrafo 1 – si ottiene per esempio in questo modo: si espone un telaio quadrettato alla luce di un piccolo proiettore (vedi fig. 7, p. 220) e si esamina l'ombra prodotta su un tavolino; l'ombra è la figura trasformata del telaio in una *trasformazione proiettiva*, detta anche *proiettività*.

Per scoprire le relazioni che legano i punti del telaio alle ombre corrispondenti, conviene realizzare il seguente esperimento (fig. 1): si illumina con un proiettore  $S$  una lastra trasparente che è tagliata perpendicolarmente da un cartone; la lastra e il cartone realizzano due piani  $\pi$  e  $\pi'$ , che si tagliano lungo la retta  $a$ .

Così, disegnando una figura su  $\pi$ , se ne potrà osservare l'ombra su  $\pi'$ .

**Figura 1**  
Un modello per studiare le  
trasformazioni proiettive



### Le rette limite di una proiettività

Si osserva, in particolare, che ogni retta  $r$  del piano  $\pi$  dà come ombra una retta  $r'$  del piano  $\pi'$  (fig. 2):  $r'$  si ottiene intersecando  $\pi'$  con il piano che contiene  $S$  e  $r$ .

Analogamente si può trovare che una retta  $r'$  di  $\pi'$  è l'ombra di una retta  $r$  di  $\pi$ .

Ci sono però due rette particolari (fig. 3):

- il piano che passa per  $S$  e è parallelo a  $\pi'$ , taglia  $\pi$  lungo la retta  $h$  che non può avere ombra su  $\pi'$  (fig. 3a);
- il piano che passa per  $S$  e è parallelo a  $\pi$ , taglia  $\pi'$  lungo una retta  $k'$  che non può essere l'ombra di una retta di  $\pi$  (fig. 3b).

Le due rette  $h$  e  $k'$  prendono il nome di *rette limite*.

### Le equazioni della proiettività

Finora la corrispondenza fra il piano  $\pi$  e il piano  $\pi'$  è stata stabilita solo dal modello di fig. 1 o dalla sua schematizzazione grafica (fig. 2); ma la stessa corrispondenza può anche essere descritta con delle equazioni che legano le coordinate  $(x; y)$  di un punto  $A$  di  $\pi$  alle coordinate  $(x'; y')$  della sua ombra  $A'$  su  $\pi'$ .

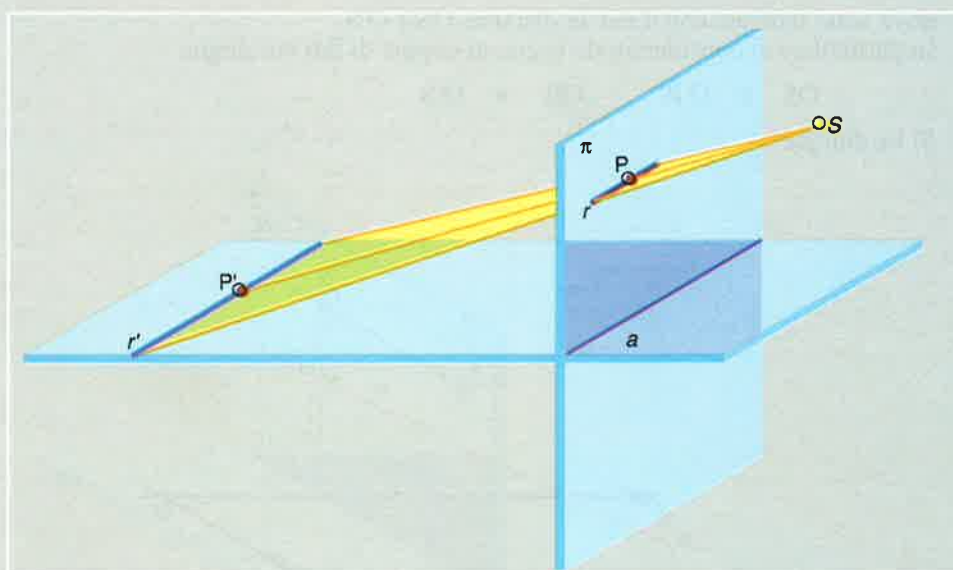


Figura 2  
Una retta di  $\pi$  dà come ombra una retta di  $\pi'$

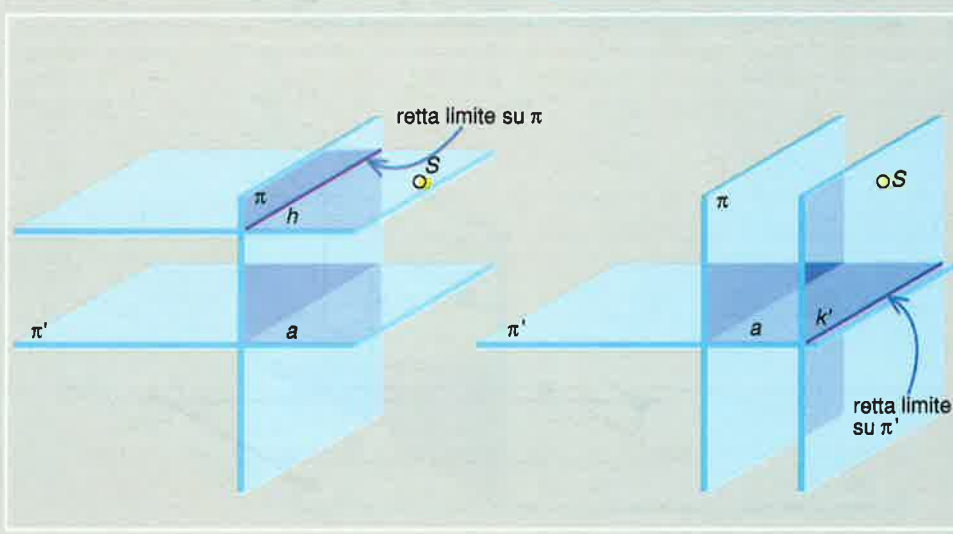


Figura 3  
Le rette limite

Per questo occorre stabilire sui due piani due riferimenti cartesiani  $Oxy$  e  $O'x'y'$  che conviene scegliere nel modo seguente:

- l'asse delle  $x$  sul piano  $\pi$  è la retta limite  $h$  e l'asse delle  $x'$  sul piano  $\pi'$  è la retta limite  $k'$ , orientate come in fig. 4;
- si considera il piano che passa per  $S$  e è perpendicolare sia a  $\pi$  che a  $\pi'$ ; questo piano determina su  $\pi$  l'asse delle  $y$  e su  $\pi'$  l'asse delle  $y'$ , orientati come in fig. 4.

Sui due assi il verso è scelto in modo che (fig. 4) un punto  $P$  che occupa il I quadrante del piano  $\pi$  dia un'ombra  $P'$  nel I quadrante del piano  $\pi'$ . La fig. 5 visualizza le coordinate di  $P(x; y)$  e  $P'(x'; y')$ :

$$x = \overline{OA} = \overline{PB} = \overline{ML} \quad y = \overline{OB} \quad x' = \overline{O'A'} = \overline{P'B'} \quad y' = \overline{O'B'}$$

Ecco allora come si può ragionare per scoprire il legame fra le coordinate  $(x; y)$  e  $(x'; y')$  (fig. 6).

1. *Relazione fra  $y$  e  $y'$*

Si fissa l'attenzione su due triangoli rettangoli simili (fig. 6a):

$OBS$  e  $O'B'S$

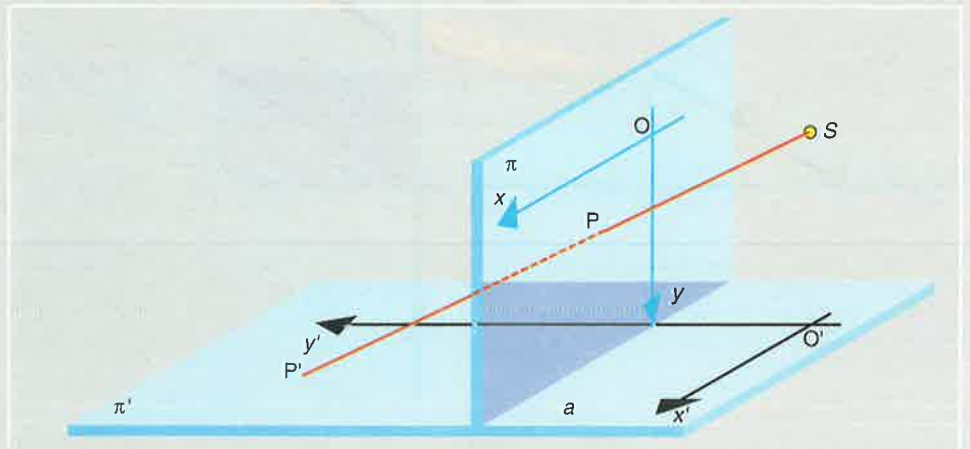
dove sono indicate con  $d$  e  $d'$  le distanze  $OS$  e  $O'S$ .

In particolare si considerano le seguenti coppie di lati omologhi:

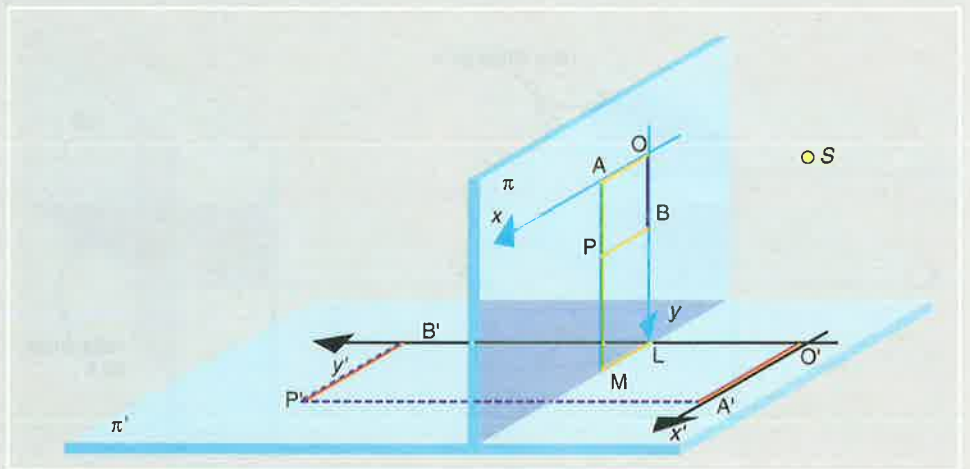
$OS$  e  $O'B'$        $OB$  e  $O'S$

Si ha dunque:

**Figura 4**  
Il riferimento  
cartesiano su  $\pi$  e  $\pi'$



**Figura 5**  
Le coordinate di un  
punto  $P$  e della sua  
ombra  $P'$



$$\frac{O'B'}{OS} = \frac{O'S}{OB} \quad \text{ossia} \quad \frac{y'}{d} = \frac{d'}{y}$$

Ricavando quindi  $y'$ , si trova:

$$y' = \frac{dd'}{y} \quad (1)$$

## 2. Relazione fra $x$ e $x'$

Si fissa l'attenzione su altri due triangoli rettangoli simili (fig. 6b):

$O'B'P'$  e  $O'LM$

dove  $O'L$  è ancora lungo  $d$ .

In particolare si considerano le seguenti coppie di lati omologhi:

$P'B'$  e  $LM$        $O'B'$  e  $O'L$

Si ha:

$$\frac{P'B'}{LM} = \frac{O'B'}{O'L} \quad \text{ossia} \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{d}$$

Ricavando quindi  $x'$ , si trova:

$$x' = \frac{x}{d} \cdot y'$$

e, sostituendo a  $y'$  l'espressione (1) si ha:

$$x' = \frac{x}{d} \cdot \frac{dd'}{y} \quad \text{ossia} \quad x' = \frac{d'x}{y} \quad (2)$$

Le (1) e le (2) insieme forniscono le *equazioni della proiettività*, che sono dunque le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \frac{d'x}{y} \\ y' = \frac{dd'}{y} \end{cases} \quad (3)$$

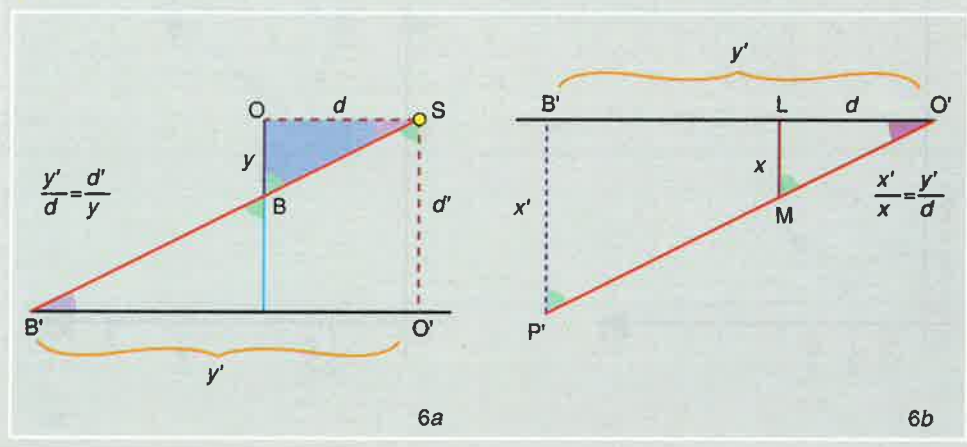


Figura 6  
Le equazioni  
della proiettività



### Costruire l'ombra di una figura applicando le equazioni della proiettività

Le equazioni appena trovate possono essere usate per determinare l'ombra di una figura, sostituendo l'esperimento con i calcoli. Ecco un esempio.

Sul piano  $\pi$  si disegna il quadrato che ha i seguenti vertici (fig. 7a):

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \quad B\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \quad C\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Questo quadrato viene proiettato sul piano  $\pi'$  da una sorgente di luce  $S$  che dista 1 metro dai due piani. Quale sarà l'ombra su  $\pi'$ ? Non c'è bisogno di eseguire l'esperimento per disegnare l'ombra; basta valersi delle equazioni (3) in cui si ha:

$$d = d' = 1$$

Per esempio, l'ombra  $A'$  del punto  $A$  avrà le coordinate seguenti:

$$x' = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \qquad y' = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

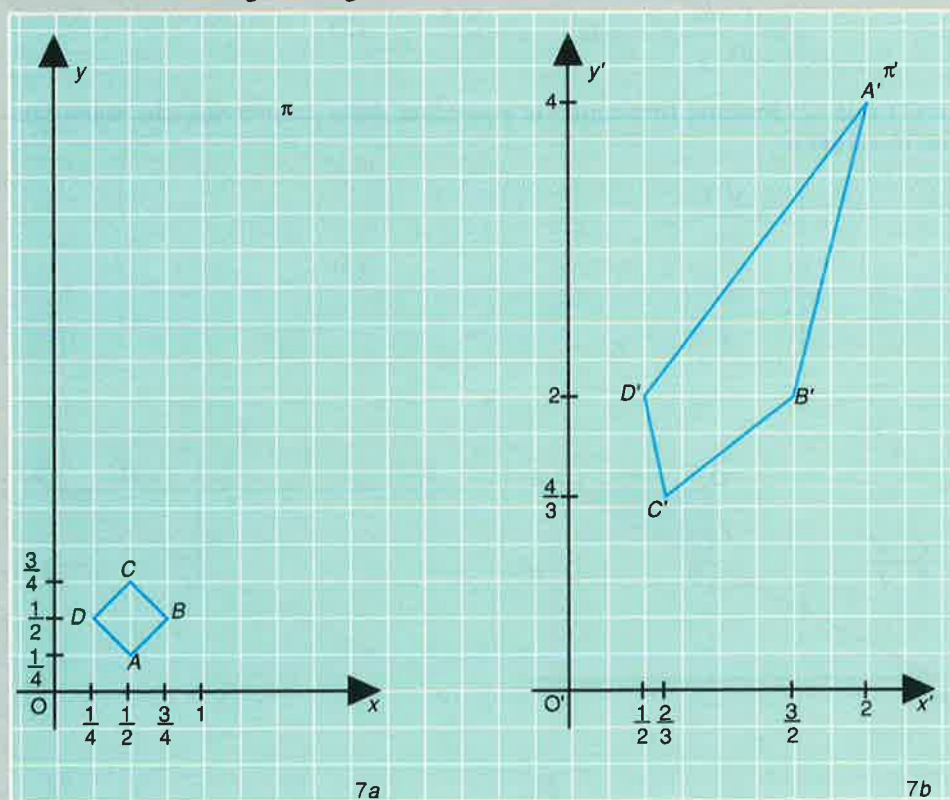
Si ha dunque:  $A'(2; 1)$

In modo del tutto analogo si possono ricavare le coordinate dei punti trasformati degli altri vertici del quadrato; si ha:

$$B'\left(\frac{3}{2}; 2\right) \quad C'\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) \quad D'\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

Si ottiene così il disegno di fig. 7b.

**Figura 7**  
Costruire l'ombra di una figura valendosi delle equazioni della proiettività



### Disegnare in prospettiva con le equazioni della proiettività

Le equazioni della proiettività possono essere anche utilizzate per un altro scopo: tradurre in formule il procedimento grafico seguito dai pittori per disegnare in prospettiva. Questo metodo è illustrato in fig. 8 da una stampa di Albrecht Dürer, celebre pittore tedesco del XV-XVI secolo.

Nella stampa di fig. 8 si riconosce subito il dispositivo di fig. 1 (p. 282), che viene ora utilizzato «in senso inverso»: i raggi di luce provengono dall'oggetto disposto su  $\pi'$  e attraversano il piano  $\pi$  prima di arrivare al punto S.

Perciò al dispositivo si possono sostituire le equazioni della proiettività (3) in cui ora sono note le coordinate  $(x'; y')$  e si debbono ricavare le coordinate  $(x; y)$ ; si dovranno cioè utilizzare le equazioni della trasformazione inversa e cioè:

$$\begin{cases} x = \frac{dx'}{y'} \\ y = \frac{dd'}{y'} \end{cases} \quad (4)$$

Sono proprio formule come queste che permettono oggi di realizzare con il calcolatore dei disegni in prospettiva come quello di fig. 9, che può essere realizzato con il seguente procedimento.

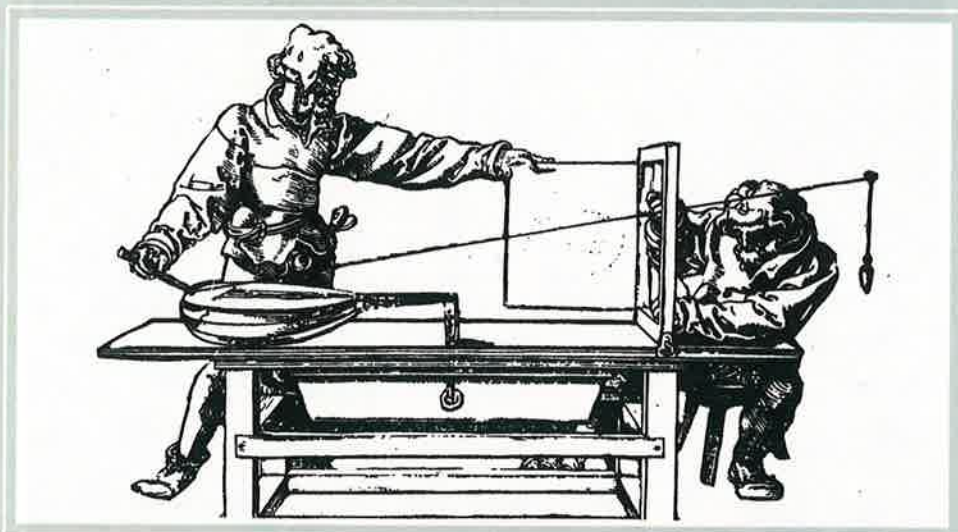


Figura 8  
Il metodo per disegnare  
in prospettiva secondo  
Dürer

Si immagina che il campo reale sia sul piano  $\pi'$  disposto come in fig. 10, così i solchi paralleli diventano tante rette parallele all'asse delle  $y'$ . Il foglio da disegno è invece il piano  $\pi$ , disposto, per esempio, a 0,5 metri dall'occhio S, che guarda il campo dall'altezza di 2 metri. Così nelle equazioni (4) si considera:

$$d = \frac{1}{2} \quad d' = 2$$

e le equazioni (4) diventano dunque:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x'}{y'} \\ y = \frac{1}{y'} \end{cases} \quad (5)$$

Le rette del piano  $\pi'$  che si vogliono disegnare su  $\pi$  sono parallele all'asse delle  $y'$ , rette che hanno dunque equazioni del tipo:

$$x' = a$$

Perciò un punto  $P'(a; y')$ , che percorre una di queste rette, avrà come corrispondente sul disegno un punto  $P$  che ha le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{y'} \\ y = \frac{1}{y'} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{y'} \\ y = \frac{1}{y'} \end{cases}$$

**Figura 9**  
*Irrigazione a goccia*,  
immagine realizzata  
col calcolatore  
da Tom Prentiss



Si trova così che il punto  $P$  ha le coordinate  $(x; y)$  legate dall'equazione:

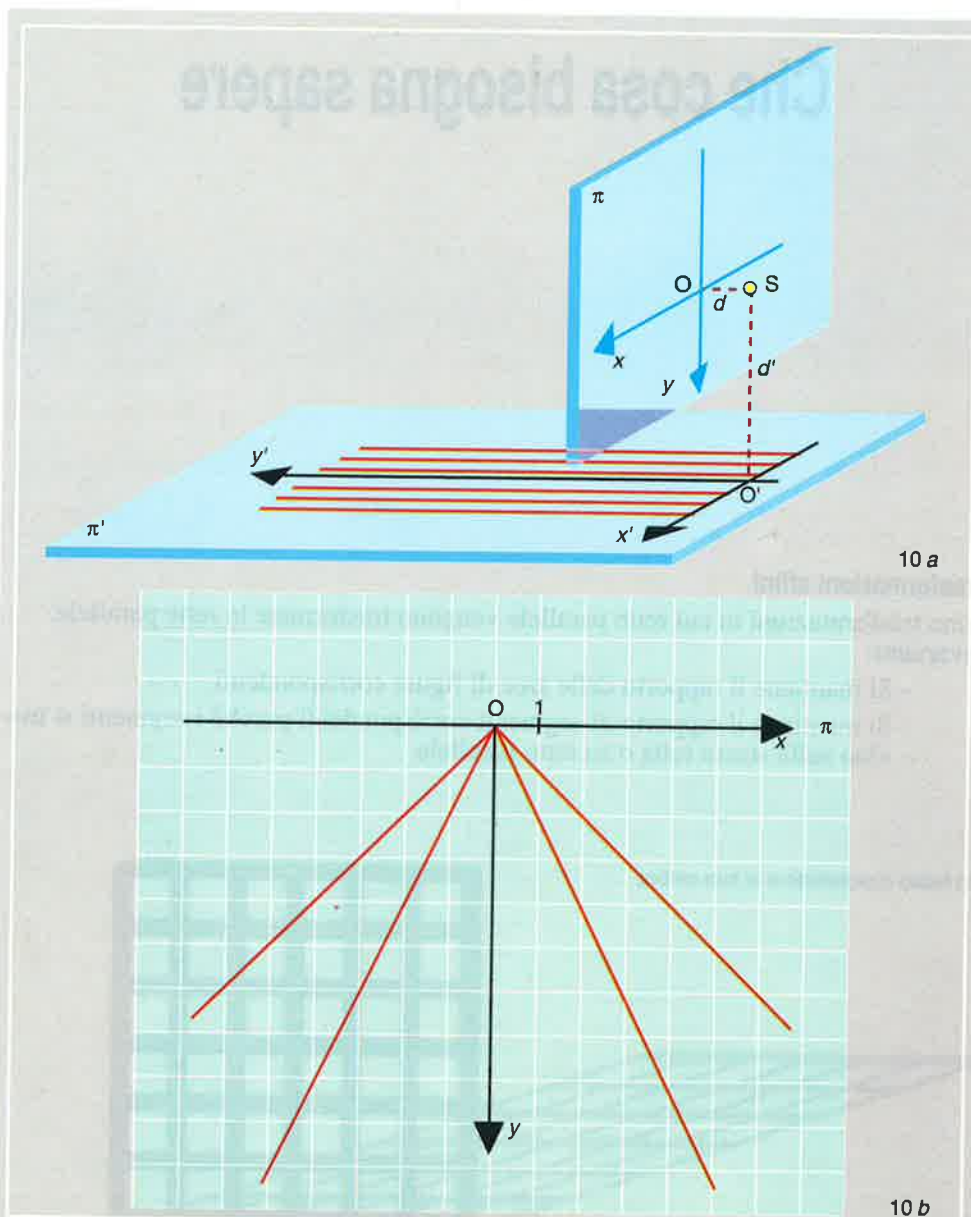
$$x = \frac{a}{2} y$$

Ecco qualche esempio che permette di tracciare il disegno di fig. 10b:

- la retta di equazione  $x' = 0$  diventa  $x = 0$



Figura 10  
Disegno  
in prospettiva realizzato  
con le equazioni  
della proiettività



- la retta di equazione  $x' = 1$  diventa  $x = \frac{1}{2}y$  ossia  $y = 2x$
- la retta di equazione  $x' = 2$  diventa  $x = y$  ossia  $y = x$
- la retta di equazione  $x' = -1$  diventa  $x = -\frac{1}{2}y$  ossia  $y = -2x$
- la retta di equazione  $x' = 2$  diventa  $x = -y$  ossia  $y = -x$

Si trova dunque che *alle rette di  $\pi'$  parallele all'asse delle ordinate corrispondono, su  $\pi$ , rette passanti per l'origine  $O$ .*

Questa conclusione esprime matematicamente un ben noto fatto visivo: guardando da  $S$  i solchi paralleli sembrano incontrarsi in un punto.



# Che cosa bisogna sapere

## Trasformazioni affini

Sono trasformazioni in cui rette parallele vengono trasformate in rette parallele.

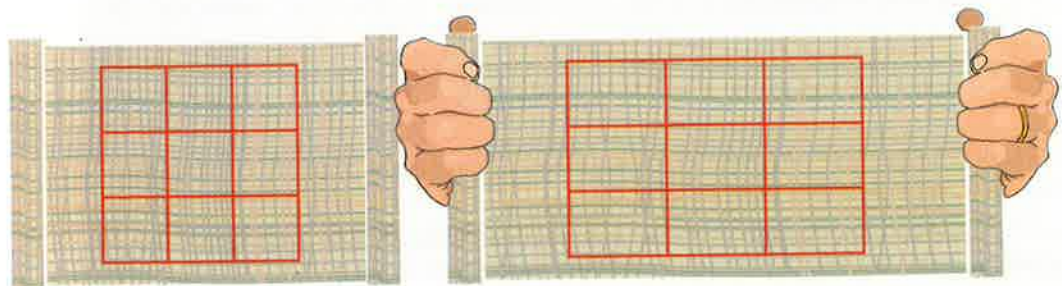
Invarianti:

- Si mantiene il rapporto delle aree di figure corrispondenti.
- Si mantiene il rapporto di segmenti corrispondenti purché i segmenti si trovino sulla stessa retta o su rette parallele.

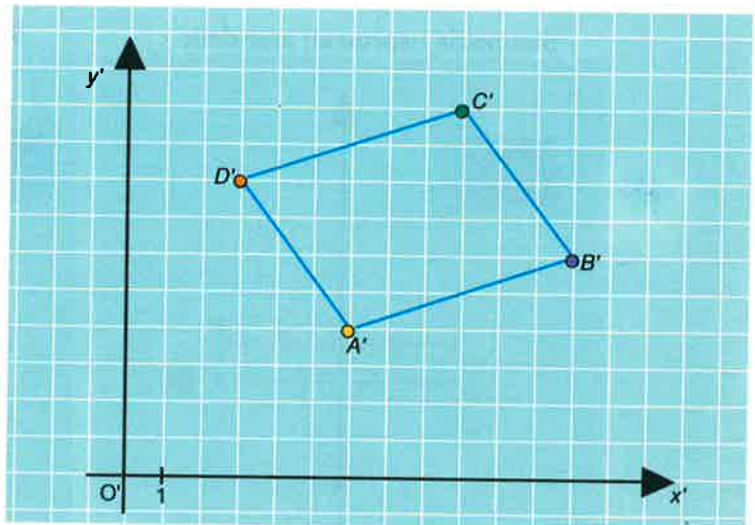
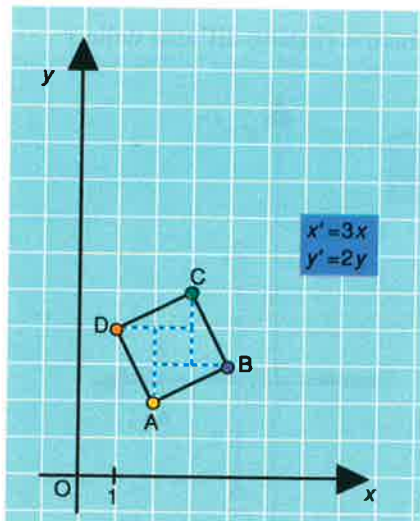
Un telaio quadrettato e la sua ombra



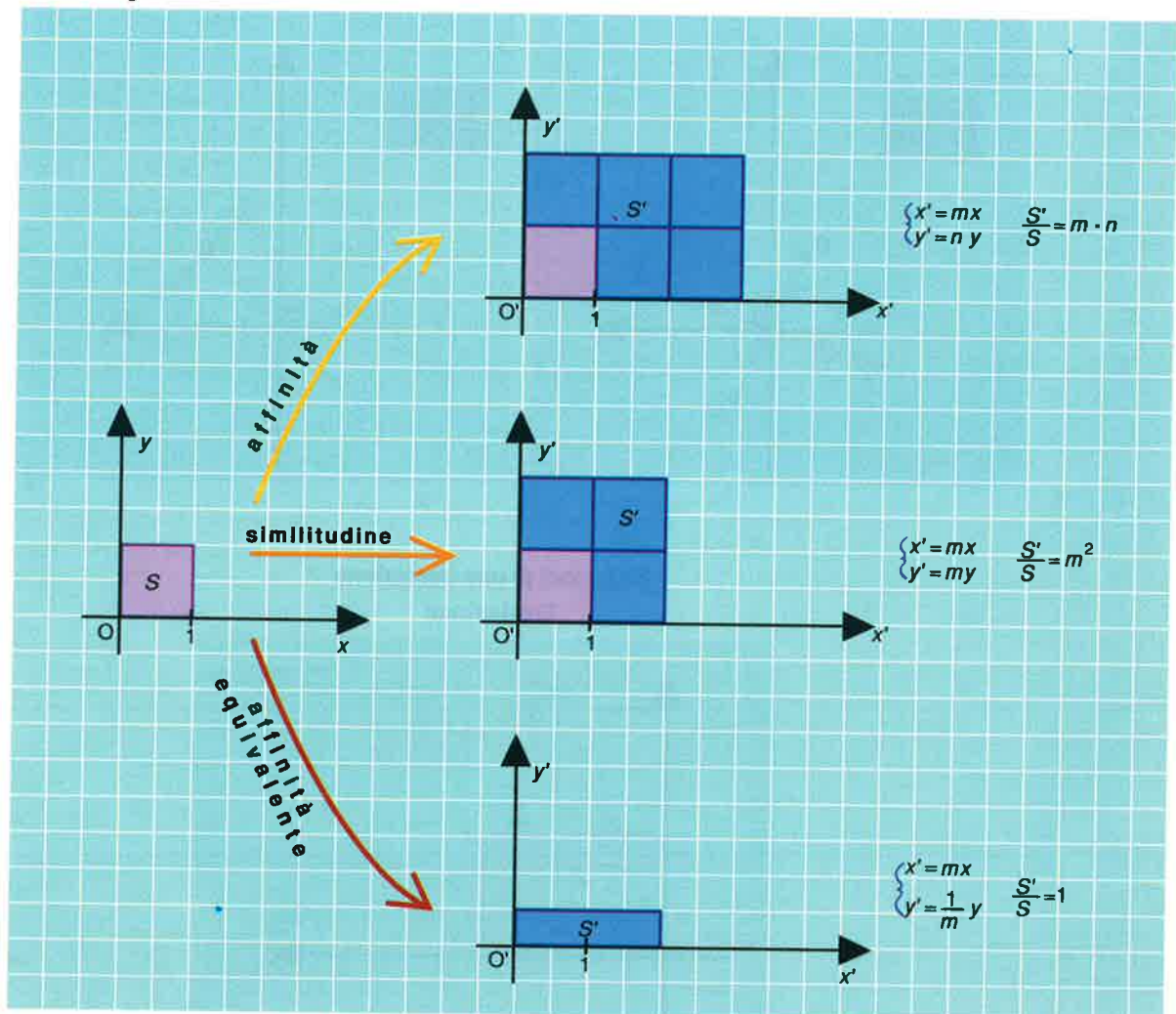
Una figura su una tela elastica che viene tirata



# Un quadrato e il parallelogramma trasformato per affinità



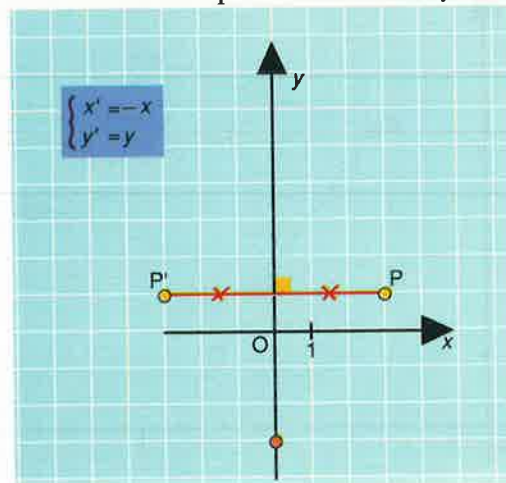
## Aree di figure affini



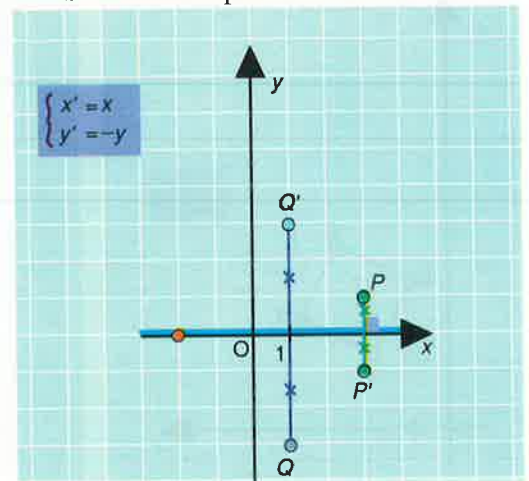
Che cosa bisogna sapere

## Equazioni di una simmetria

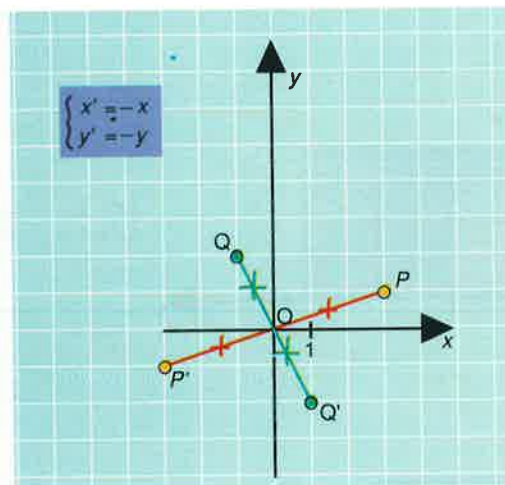
Simmetria rispetto all'asse delle y



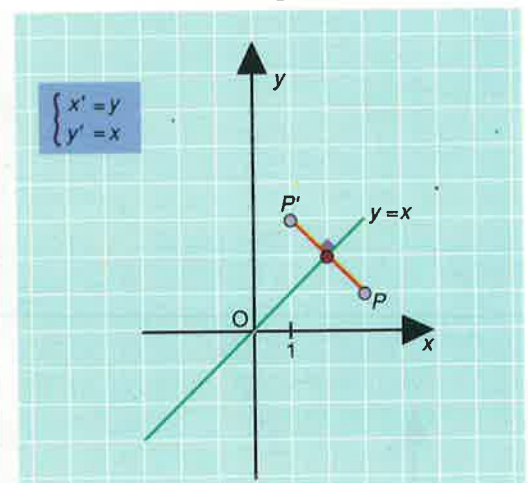
Simmetria rispetto all'asse delle x



Simmetria rispetto all'origine O

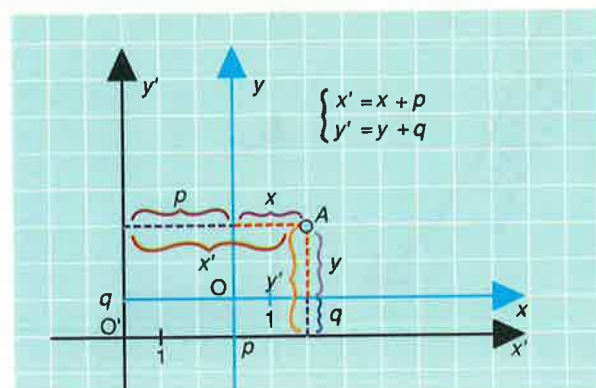


Simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante



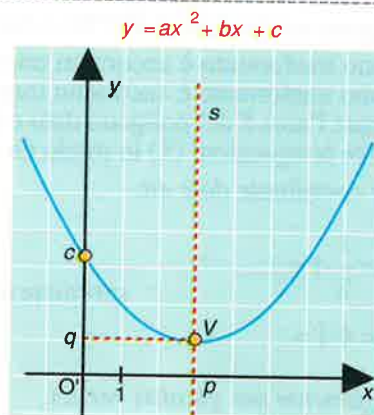
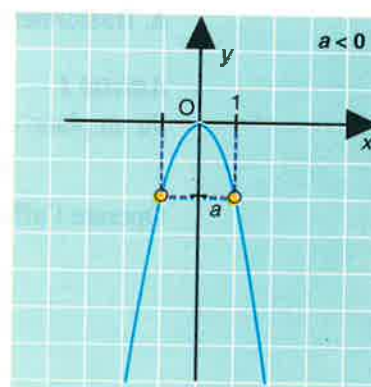
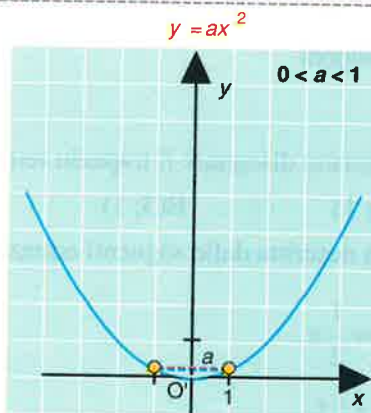
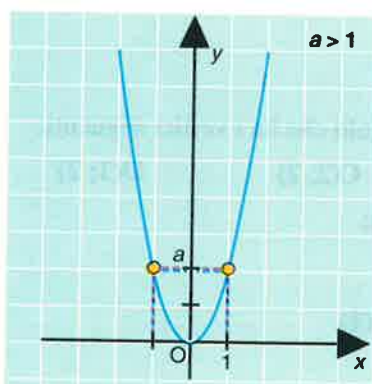
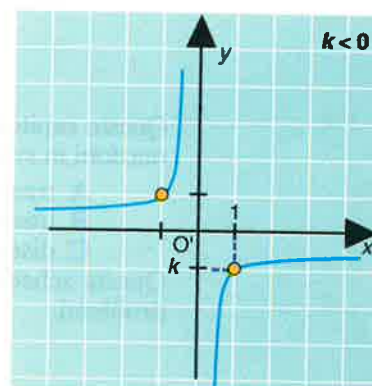
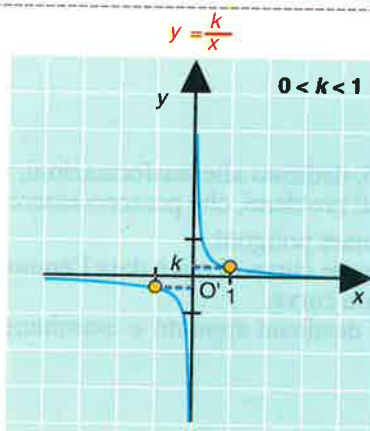
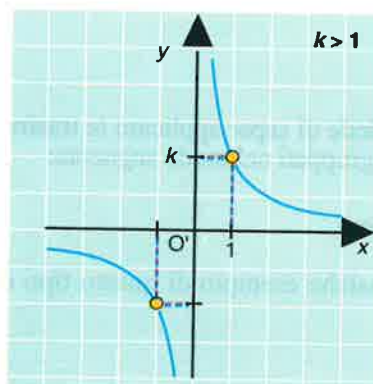
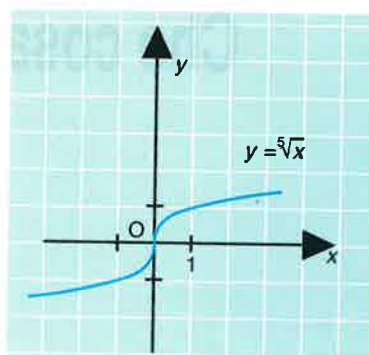
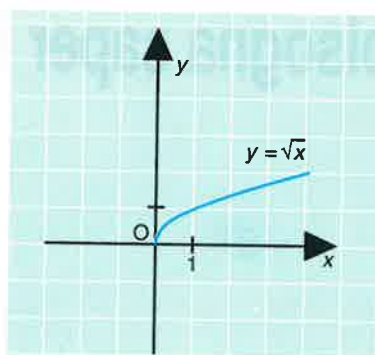
## Equazioni di una traslazione

Traslazione





## Curve esaminate con le trasformazioni



Che cosa bisogna sapere



## Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo 6, dedicato alle trasformazioni, richiede di saper applicare le trasformazioni in svariati problemi, che possono essere raggruppati nel modo seguente:

- A. trasformare poligoni;
- B. trasformare curve di cui è data l'equazione;
- C. disegnare curve.

Questa scheda è destinata appunto a esaminare qualche esempio di questo tipo di problemi.

### A. Trasformare poligoni

#### Attività 1

Su un piano cartesiano disegnare il trapezio rettangolo che ha i vertici seguenti:

A(1; 1)

B(3; 1)

C(2; 2)

D(1; 2)

Operare l'affinità descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 4y \end{cases} \quad (1)$$

Disegnare il poligono trasformato A'B'C'D' e risolvere i seguenti quesiti:

- a. il poligono trasformato è ancora un trapezio?
- b. il poligono trasformato è ancora un trapezio rettangolo?
- c. determinare l'area S del poligono dato e l'area S' del poligono trasformato;
- d. modificare le equazioni (1) in modo da ottenere un'affinità equivalente.

Il vertice A' ha le coordinate date da:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \cdot 1 = \dots \\ y' = 4 \cdot 1 = \dots \end{cases} \quad \text{si ottiene dunque } A'(\dots; \dots)$$

Procedere analogamente per gli altri vertici.

### Attività 2

Modificare le equazioni (1) in modo da ottenere una similitudine; disegnare il poligono trasformato e rispondere ai seguenti quesiti:

- il poligono trasformato è ancora un trapezio rettangolo?
- determinare l'area  $S$  del poligono dato e l'area  $S'$  del poligono trasformato.

### Attività 3

Disegnare i poligoni che si ottengono trasformando il precedente trapezio ABCD con le seguenti isometrie:

- simmetria rispetto all'asse delle  $y$ ;
- simmetria rispetto all'asse delle  $x$ ;
- simmetria rispetto all'origine  $O$ ;
- simmetria rispetto alla retta d'equazione  $y = x$ ;
- traslazione descritta dalle equazioni 
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

## B. Trasformare curve

### Attività 4

Disegnare sul piano cartesiano la parabola di equazione  $y = x^2$ ; disegnare le curve che si ottengono trasformando la curva data con una sola delle trasformazioni seguenti, determinandone vertice e asse di simmetria:

- affinità che dimezza le ordinate;
- traslazione di 2 unità lungo l'asse delle  $y$  verso l'alto;
- traslazione di 4 unità lungo l'asse delle  $x$  verso destra.

Scrivere le equazioni delle curve ottenute.

a. l'affinità è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (2)$$

Per trasformare l'equazione bisogna ricavare dalle (2)  $x$  e  $y$  per poterle sostituire nell'equazione assegnata. Si ottiene l'equazione:

$$y' = \frac{1}{2}x'^2$$

### Attività 5

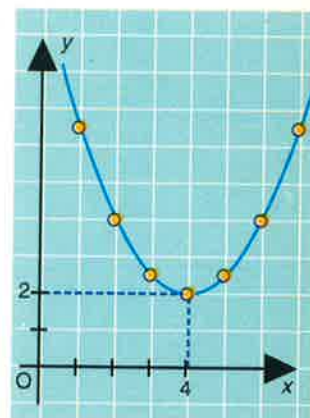
Disegnare sul piano cartesiano la parabola di equazione  $y = x^2$ ; spiegare perché, operando successivamente le tre trasformazioni date nell'esercizio precedente, si ottiene la curva disegnata in fig. 1, che ha l'equazione seguente:

$$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 \quad \text{ossia} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$$

Determinare il vertice e l'asse di simmetria della curva trasformata.

Chi cosa bisogna saper fare

Figura 1



## C. Disegnare curve

### Attività 6

Esaminare le seguenti equazioni:

$$y = -x^2 + 2x$$

$$y = -x^3 + 2x^2$$

$$y = -x + 2$$

$$y = -x^2 + 2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare le equazioni che rappresentano parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, motivando la scelta;
  - disegnare le corrispondenti parabole.
- a. l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y è sempre del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

rappresenta quindi una parabola l'equazione

$$y = -x^2 + 2x$$

del tipo (3) con:

$$a = -1 \quad b = \dots\dots \quad c = \dots\dots$$

E analogamente rappresenta una parabola l'ultima equazione perché del tipo ..... con .....

**Non** rappresentano parabole le altre due equazioni perché .....

- per disegnare la parabola d'equazione

$$y = -x^2 + 2x$$

completare il seguente procedimento:

- si calcola l'ascissa p del vertice, data da:

$$p = \frac{-\dots\dots}{2(\dots\dots)} = 1$$

- si calcola l'ordinata q del vertice, data da:

$$q = -(\dots\dots)^2 + 2 \cdot \dots\dots = 1$$

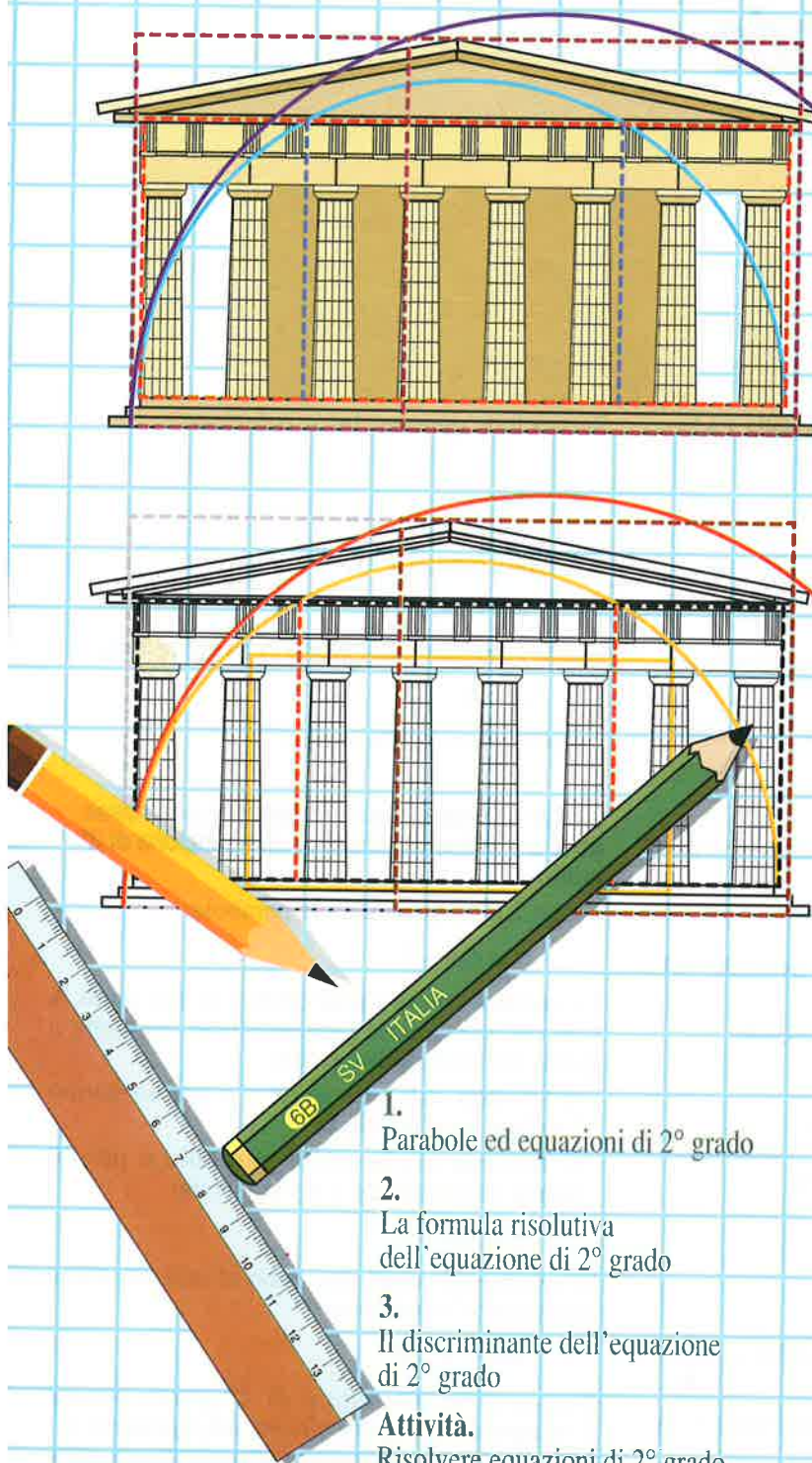
- si disegna il vertice V (.....; ..... ) e l'asse di simmetria s;
- si determina qualche altro punto della parabola, per esempio a sinistra dell'asse di simmetria completando la seguente tabella:

x	$y = -x^2 + 2x$	Punti
0	$y = -0^2 + 2 \cdot 0 = \dots\dots$	A(.....; .....)
-1	$y = \dots\dots\dots$	B(.....; .....)

- si rappresentano i punti e, raccordandoli, si disegna l'arco di parabola a sinistra dell'asse di simmetria;
- si completa il grafico con il ramo simmetrico.



# EQUAZIONI, DISEQUAZIONI E SISTEMI DI 2° GRADO



1. Parabole ed equazioni di 2° grado

2. La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

3. Il discriminante dell'equazione di 2° grado

**Attività.**  
Risolvere equazioni di 2° grado

**Scheda storica.**  
La sezione aurea

4. Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado

5. La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado

**Scheda informativa.**  
Il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado

6. Il segno di un trinomio di 2° grado

7. Le disequazioni di 2° grado

8. Equazioni e disequazioni equivalenti

**Attività.**  
Studiare il segno di un trinomio e risolvere disequazioni di 2° grado

**Scheda applicativa.**  
Equazioni e disequazioni di 2° grado nella fisica

**Scheda informativa.**  
Relazioni di equivalenza

9. I sistemi di 2° grado

**Attività.**  
Risolvere sistemi di 2° grado

**Scheda applicativa.**  
I sistemi di 2° grado nella fisica

10. Le equazioni di 2° grado a coefficienti letterali

**Scheda informativa.**  
I sistemi di 2° grado a coefficienti letterali

**Sintesi.**  
Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**  
Che cosa bisogna saper fare



# 1

## Parabole ed equazioni di 2° grado

**L'intersezione di una retta con l'asse delle  $x$  e la soluzione di un'equazione di 1° grado**

In fig. 1 è rappresentata la retta:

$$y = 4x - 1$$

La retta incontra l'asse delle  $x$  nel punto A, che presenta le seguenti caratteristiche:

- si trova sull'asse delle  $x$  e perciò ha l'ordinata  $y$  che vale 0;
- si trova anche sulla retta e perciò ha le coordinate  $x$  e  $y$  legate da:

$$y = 4x - 1$$

L'ascissa  $x$  del punto A si trova allora risolvendo l'equazione:

$$4x - 1 = 0$$

Per risolvere quest'equazione si procede nel modo seguente:

- si aggiunge ai due membri 1, ottenendo:

$$4x = 1$$

- si moltiplicano i due membri per  $\frac{1}{4}$ , ottenendo:

$$x = \frac{1}{4}$$

Così si trova che:

- l'equazione  $4x - 1 = 0$  ha la soluzione  $x = \frac{1}{4}$ ;
- la retta  $y = 4x - 1$  incontra l'asse delle  $x$  in  $A\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ .

Si conclude dunque che la soluzione

$$x = \frac{1}{4}$$

dell'equazione di 1° grado:

$$4x - 1 = 0$$

indica l'ascissa  $x$  del punto A in cui la retta

$$y = 4x - 1$$

incontra l'asse delle ascisse.

**Le due intersezioni di una parabola con l'asse delle  $x$  e le due soluzioni di un'equazione di 2° grado**

In fig. 2 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 1$$

La curva incontra l'asse delle  $x$  in due punti A e B che presentano caratteristiche analoghe a quelle indicate prima, e cioè:

- si trovano sull'asse delle  $x$  e perciò hanno l'ordinata  $y$  che vale 0;
- si trovano anche sulla parabola e perciò hanno le coordinate  $x$  e  $y$  legate da:

$$y = 4x^2 - 1$$

Le ascisse di questi due punti si trovano allora risolvendo l'equazione

$$4x^2 - 1 = 0$$

*L'equazione ottenuta è di 2° grado perché l'incognita  $x$  compare elevata ad esponente 2. Si tratta di un'equazione particolarmente semplice che può essere risolta con un procedimento analogo a quello seguito prima e cioè:*

- si aggiunge ai due membri 1, ottenendo:

$$4x^2 = 1$$

- si moltiplicano i due membri per  $\frac{1}{4}$ , ottenendo:

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

- si ricavano i due numeri che, elevati al quadrato, danno  $\frac{1}{4}$ , ottenendo:

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

I due numeri così ottenuti sono *le soluzioni* dell'equazione e vengono anche indicati nel modo seguente:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

I numeri 1 e 2 scritti «al piede» della lettera  $x$  si chiamano *pedici* o *deponenti* e vengono usati per elencare ordinatamente più elementi dello stesso tipo; in questo caso vengono usati per contare le due soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Attenzione a non confondere i deponenti con gli esponenti, si ha in particolare:

$$x^1 = x \quad x^2 = x \cdot x \quad (1 \text{ e } 2 \text{ sono esponenti})$$

$x_1 \quad x_2$  indicano le soluzioni di un'equazione di 2° grado (1 e 2 sono deponenti)

Si trova dunque che:

- l'equazione  $4x^2 - 1 = 0$  ha le *due soluzioni*

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{2};$$

- la parabola  $y = 4x^2 - 1$  incontra l'asse delle  $x$

nei due punti  $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  e  $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .

Si conclude che *le due soluzioni*

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

dell'equazione di 2° grado :

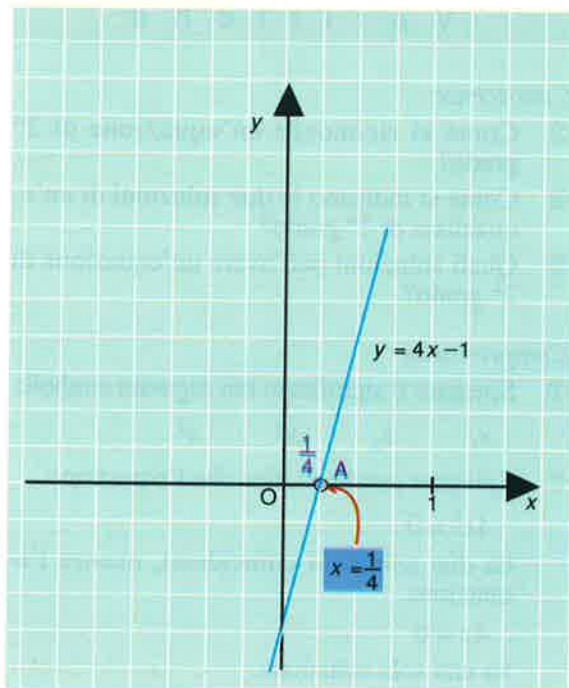
$$4x^2 - 1 = 0$$

indicano le ascisse dei due punti A e B in cui la parabola

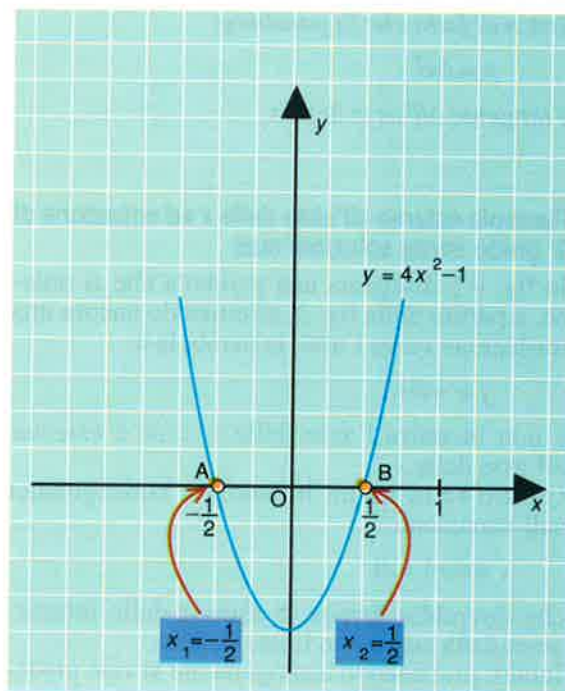
$$y = 4x^2 - 1$$

incontra l'asse delle  $x$ .

**Figura 1**  
Una retta e l'equazione di 1° grado



**Figura 2**  
Una parabola e l'equazione di 2° grado



### Parabola tangente all'asse delle $x$ ed equazione di 2° grado con le due soluzioni coincidenti

In fig. 3 sono disegnate alcune parabole che si ottengono effettuando una traslazione lungo l'asse delle  $y$  verso l'alto, a partire dalla parabola di fig. 2.

Si osserva che le due intersezioni con l'asse delle  $x$  si avvicinano sempre di più, fino a sovrapporsi quando il vertice della parabola arriva proprio sull'asse delle  $x$ . In tal caso si dice che la parabola (in rosso in fig. 3) è *tangente* all'asse delle  $x$ , cioè *incontra l'asse delle  $x$  in due punti coincidenti* con l'origine  $O$ . Dal punto di vista algebrico, la parabola è:

$$y = 4x^2$$

Per determinare le ascisse delle intersezioni con l'asse delle  $x$ , si dovrebbe risolvere l'equazione:

$$4x^2 = 0$$

In questo caso, moltiplicando i due membri per

$$\frac{1}{4}, \text{ si ottiene:}$$
$$x^2 = 0$$

cioè un'equazione di 2° grado che ha le due soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Si conclude dunque che l'equazione:

$$4x^2 = 0$$

ha le due soluzioni coincidenti in corrispondenza al fatto che la parabola:

$$y = 4x^2$$

è tangente all'asse delle  $x$ .

### Parabola esterna all'asse delle $x$ ed equazione di 2° grado senza soluzioni reali

In fig. 4 è disegnata una parabola che si ottiene, a partire dalla fig. 3, effettuando ancora una traslazione verso l'alto; la parabola è:

$$y = 4x^2 + 1$$

e non incontra l'asse delle  $x$ , cioè è *esterna* all'asse delle  $x$ .

Questo fatto ha un'immediata conseguenza sull'equazione:

$$4x^2 + 1 = 0$$

che dovrebbe fornire le ascisse delle intersezioni della curva con l'asse delle  $x$ .

Infatti, procedendo analogamente ai casi prece-

denti per risolvere l'equazione, si ha:

$$4x^2 = -1 \quad \text{e quindi} \quad x^2 = -\frac{1}{4}$$

Si arriva così ad un'equazione che non ha soluzioni reali, perché il quadrato di un numero reale non può essere in nessun caso negativo. Si conclude dunque che l'equazione:

$$4x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali in corrispondenza al fatto che la parabola:

$$y = 4x^2 + 1$$

non incontra l'asse delle  $x$ .

### Sintesi dei risultati ottenuti

I casi numerici esaminati suggeriscono qualche conclusione di carattere più generale e cioè:

a. in un'equazione di 2° grado compare l'incognita  $x$  elevata al massimo a esponente 2, come per esempio nelle equazioni seguenti:

$$4x^2 - 1 = 0 \quad 4x^2 = 0 \quad 4x^2 + 1 = 0$$

b. un'equazione di 2° grado può avere:

- due soluzioni reali e distinte  $x_1$  e  $x_2$ ;
- due soluzioni reali e coincidenti  $x_1 = x_2$ ;
- nessuna soluzione reale.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Come si riconosce un'equazione di 2° grado?
- ② Come si indicano le due soluzioni di un'equazione di 2° grado?
- ③ Quali soluzioni può avere un'equazione di 2° grado?

### Comprensione

- ① Spiegare il significato dei seguenti simboli:  
 $x_1 \quad x_2 \quad x^1 \quad x^2$
- ② Spiegare perché si dice che l'equazione  
 $4x^2 = 0$   
ha due soluzioni coincidenti, mentre l'equazione  
 $4x = 0$   
ha una sola soluzione.

- ③ Spiegare perché l'equazione:  
 $4x^2 + 1 = 0$   
 non ha soluzioni reali, mentre l'equazione:  
 $4x + 1 = 0$   
 ha una soluzione.

#### Applicazioni

- ① Esaminare le seguenti equazioni:  
 $9x - 4 = 0$                        $9x^2 - 4 = 0$
- Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. indicare quale equazione è di 1° grado e quale di 2° grado;  
 b. determinare le soluzioni di ogni equazione;  
 c. interpretare graficamente le soluzioni ottenute.
- ② Ripetere l'esercizio a partire dalle seguenti equazioni:  
 $9x = 0$                                $9x^2 = 0$
- ③ Ripetere l'esercizio a partire dalle seguenti equazioni:  
 $9x + 4 = 0$                                $9x^2 + 4 = 0$

#### Collegamento con i capitoli precedenti

- ① Come si ricavano i numeri che, elevati al

quadrato, danno  $\frac{1}{4}$ ?

(Vedere il capitolo 6, paragrafo 7)

- ② Spiegare perché fra i numeri reali non si trovano i numeri che, elevati al quadrato, danno  $-\frac{1}{4}$ .

(Vedere il capitolo 6, paragrafo 7)

- ③ Descrivere brevemente il procedimento per tracciare il grafico delle seguenti parabole:

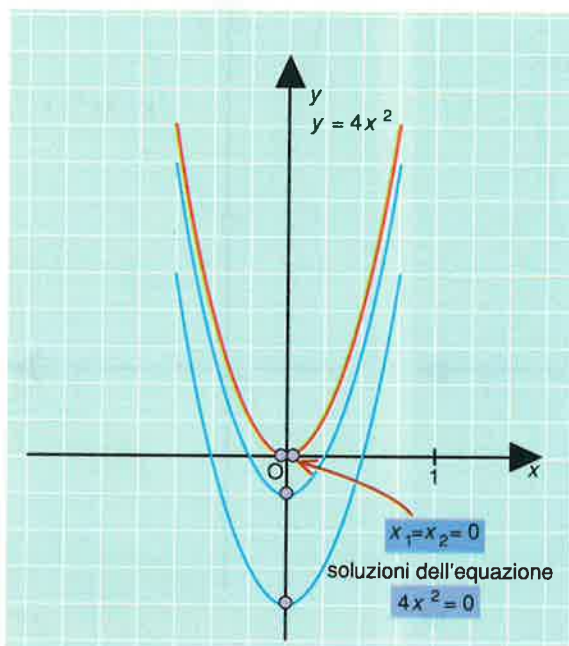
$$y = 4x^2 - 1 \quad y = 4x^2 \quad y = 4x^2 + 1$$

(Vedere il capitolo 6, paragrafo 9)

#### Collegamento con il primo volume

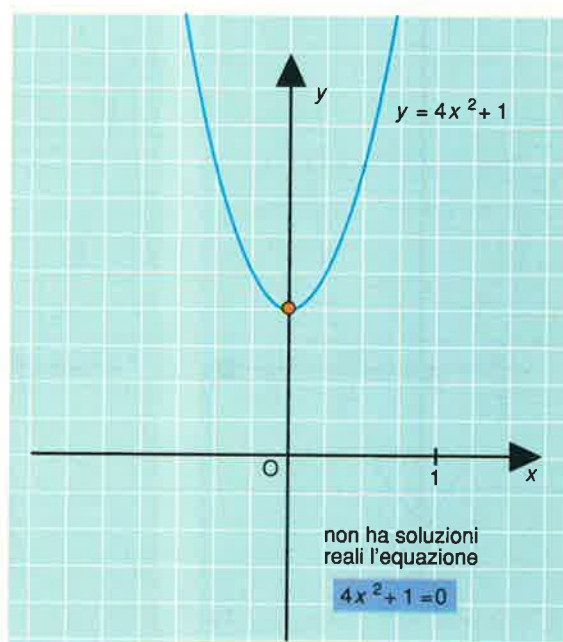
- ① Spiegare il significato dei termini seguenti:  
 - equazione di 1° grado;  
 - soluzione di un'equazione di 1° grado.  
 (Vedere il capitolo 9, pp. 373-374)
- ② Esporre il procedimento da seguire per risolvere un'equazione di 1° grado.  
 (Vedere il capitolo 9, pp. 373-376)
- ③ Un'equazione di 1° grado ha sempre una soluzione?  
 (Vedere il capitolo 9, pp. 377-378)

**Figura 3**  
Una parabola tangente all'asse delle x



1. Parabole ed equazioni di 2° grado

**Figura 4**  
Una parabola esterna all'asse delle x





# La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

## La forma più generale di un'equazione di 2° grado

Nel paragrafo precedente sono stati esaminati tre casi particolari di equazioni di 2° grado:

$$4x^2 - 1 = 0 \quad 4x^2 = 0 \quad 4x^2 + 1 = 0$$

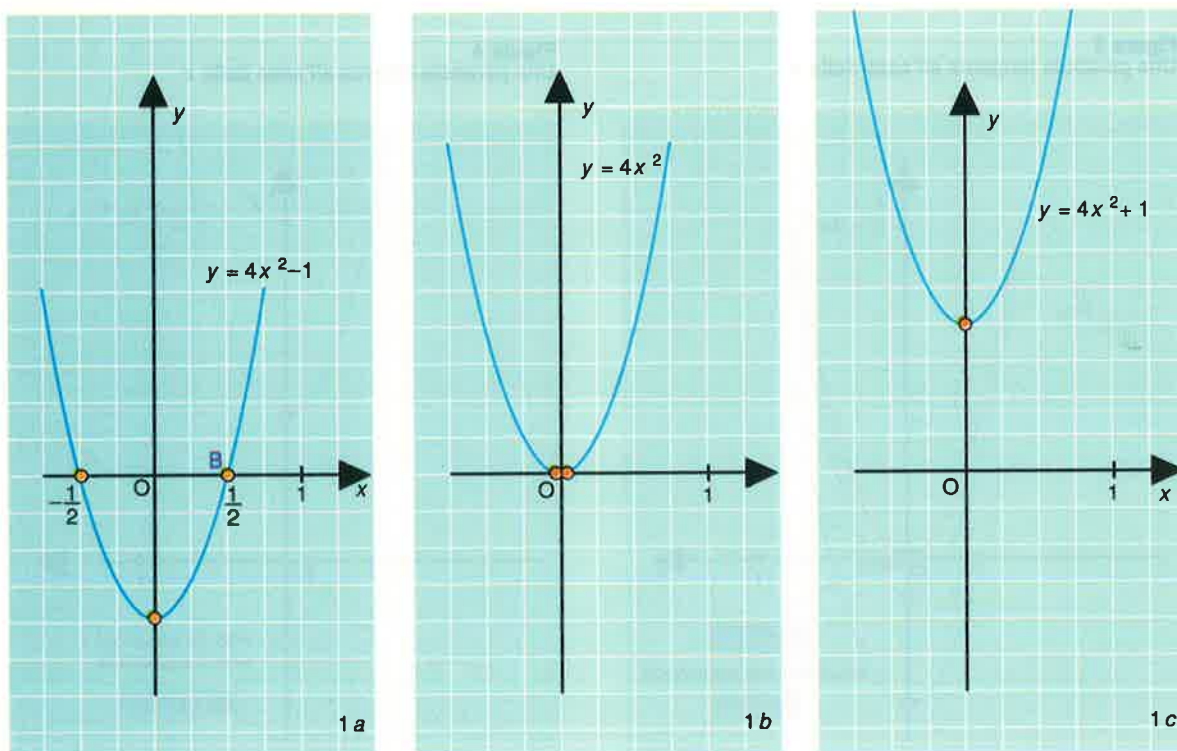
Queste equazioni sono legate alle intersezioni con l'asse delle  $x$  di parabole che hanno tutte

una caratteristica comune (fig. 1): l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle  $y$ .

Più in generale, una parabola può avere l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$ ; ecco qualche esempio.

In fig. 2 sono disegnate le parabole ottenute, a partire da quelle di fig. 1, con una traslazione di due unità lungo l'asse delle  $x$  verso destra.

**Figura 1**  
Tre parabole che hanno l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle  $y$



Esaminiamo in dettaglio i tre casi seguenti.

A. In fig. 2a è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 - 1$$

ossia

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che interseca l'asse delle ascisse in due punti A e B. Le ascisse di questi punti sono le due soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  dell'equazione

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

B. In fig. 2b è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 \quad \text{ossia} \quad y = 4x^2 - 16x + 16$$

che è tangente all'asse delle ascisse in due punti coincidenti nel vertice V e perciò ha le due soluzioni coincidenti l'equazione

$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$

C. In fig. 2c è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 + 1$$

ossia

$$y = 4x^2 - 16x + 17$$

che non interseca l'asse delle  $x$  e perciò non ha soluzioni reali l'equazione

$$4x^2 - 16x + 17 = 0$$

In generale, una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$  è sempre del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Perciò, per determinare le intersezioni di questa parabola con l'asse delle  $x$ , bisogna risolvere la corrispondente equazione di 2° grado, ottenuta sostituendo 0 a  $y$ .

Si conclude dunque che *un'equazione di 2° grado si presenta sempre nella forma seguente:*

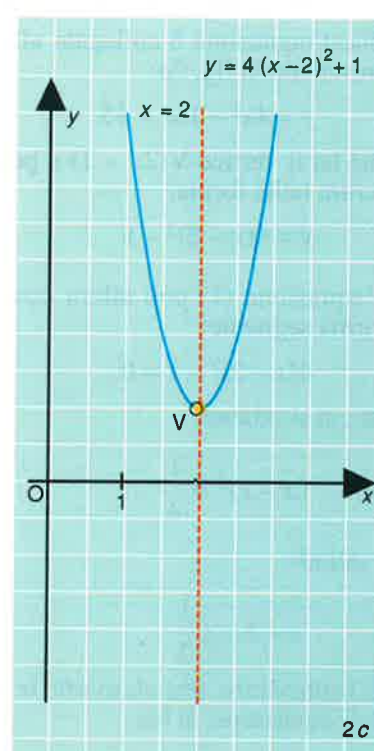
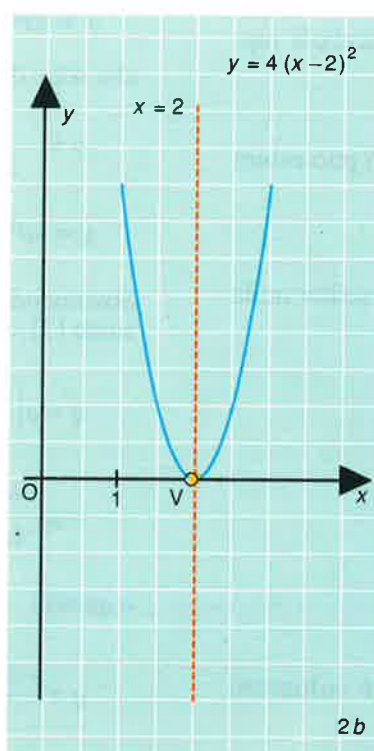
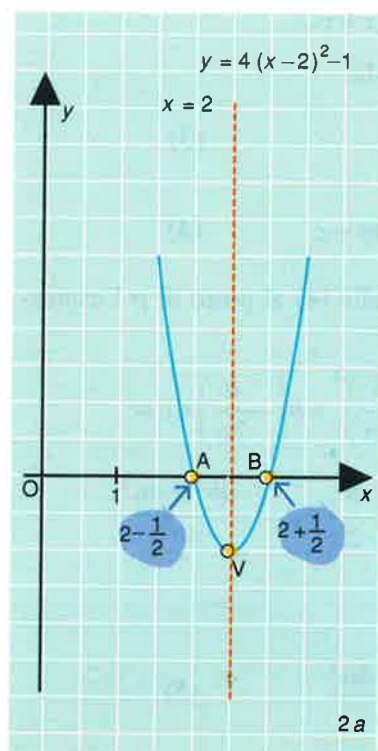
$$ax^2 + bx + c = 0$$

In questa formula si ha che:

- la lettera  $x$  indica l'incognita;
- le lettere  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono i coefficienti dell'equazione, in particolare  $a$  e  $b$  sono i coefficienti dell'incognita,  $c$  è il termine noto;
- i coefficienti sono dei numeri reali che si possono scegliere liberamente, rispettando un unico vincolo:

$$a \neq 0$$

**Figura 2**  
Tre parabole traslate lungo l'asse delle  $x$



Infatti, scegliendo  $a = 0$ , l'equazione diventa:

$$bx + c = 0$$

e perciò non è più di 2° grado, ma di 1°.

### Come si risolve una particolare equazione di 2° grado

La fig. 2 conduce anche a prevedere le soluzioni che può dare un'equazione di 2° grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si avranno infatti (fig. 2):

- due soluzioni reali e distinte  $x_1$  e  $x_2$  se la parabola taglia l'asse delle  $x$ ;
- due soluzioni reali e coincidenti  $x_1 = x_2$  se la parabola è tangente all'asse delle  $x$ ;
- nessuna soluzione reale se la parabola non taglia l'asse delle  $x$ .

Come si possono determinare le soluzioni di un'equazione di 2° grado?

Ecco un caso numerico che condurrà a un procedimento di carattere generale.

Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \quad (1)$$

Quest'equazione è collegata alla parabola rappresentata in fig. 2a:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che ha il vertice  $V(2; -1)$  e perciò può essere scritta nella forma:

$$y = 4(x - 2)^2 - 1$$

L'equazione (1) può allora essere scritta nella forma seguente:

$$4(x - 2)^2 - 1 = 0$$

da cui si ottiene:

$$(x - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

e quindi:

$$x - 2 = \pm \frac{1}{2}$$

È immediato ora ricavare le due soluzioni dell'equazione; si ha:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2} \quad x_2 = 2 + \frac{1}{2}$$

Riprendendo le figure 1a e 2a si può interpretare graficamente il risultato ottenuto: le due soluzioni indicate in fig. 1a sono state traslate di due unità verso destra e si trovano quindi disposte simmetricamente rispetto all'asse della parabola traslata, che è:

$$x = 2.$$

### La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

Il procedimento seguito prima è piuttosto lungo, perciò si preferisce arrivare a una formula che fornisca direttamente le soluzioni, senza dover ripetere i calcoli ogni volta che si deve risolvere un'equazione di 2° grado.

Per ottenere questa formula basta ripetere il procedimento indicato prima in generale, cioè a partire dall'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

dove  $a, b, c$  sono tre qualunque numeri reali (con  $a \neq 0$ ).

Ecco dunque come si procede.

1. Si determinano le coordinate del vertice  $V(p; q)$  della parabola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

che sono date da:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad (3)$$

$$q = ap^2 + bp + c \quad (4)$$

Sostituendo nella (4) al posto di  $p$  l'espressione (3) si ha:

$$\begin{aligned} q &= a \left( -\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left( -\frac{b}{2a} \right) + c = \\ &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2} \end{aligned}$$

e quindi:

$$q = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad (5)$$

2. Si scrive l'equazione (2) nella forma:

$$a(x-p)^2 + q = 0$$

da cui si ricava:

$$(x-p)^2 = -\frac{q}{a}$$

e quindi:

$$x-p = \pm \sqrt{-\frac{q}{a}}$$

Così le due soluzioni sono:

$$x_1 = p - \sqrt{-\frac{q}{a}} \quad x_2 = p + \sqrt{-\frac{q}{a}} \quad (6)$$

3. Si ricorda che  $p$  e  $q$  sono date dalle espressioni (3) e (5) e si trova:

$$-\frac{q}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

e quindi:

$$\sqrt{-\frac{q}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Perciò le (6) diventano:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abitualmente le due soluzioni così ottenute vengono riunite nella formula seguente, che prende il nome di *formula risolutiva dell'equazione di 2° grado*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Applicare la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

La formula appena ottenuta è molto utile, perché permette di risolvere rapidamente un'equazione di 2° grado: basta conoscere il valore dei coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  per calcolare le due soluzioni.

Ecco un esempio. Risolvere l'equazione:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Si tratta di un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i cui coefficienti sono:

$$a = 2 \quad b = 7 \quad c = 3$$

La formula risolutiva diventa perciò:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \text{ossia} \quad x = \frac{-7 \pm 5}{4}$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque:

$$x_1 = \frac{-7 - 5}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

In definitiva si ottengono le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

### Verificare che le soluzioni ottenute sono esatte

È importante, alla conclusione dei calcoli, verificare che le soluzioni ottenute siano esatte. Per verificare se una soluzione è esatta si procede così:

- si sostituisce la soluzione al posto di  $x$  nell'equazione data;
- si svolgono i calcoli;
- si controlla che il primo membro sia uguale al secondo.

Ecco il procedimento svolto per l'equazione ora risolta, e cioè:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

1. Soluzione  $x_1 = -3$

I membro:

$$2(-3)^2 + 7(-3) + 3 = 2 \cdot 9 - 21 + 3 = 0$$

II membro: 0

La soluzione è esatta perché il primo membro risulta uguale al secondo membro.



2. Soluzione  $x_1 = -\frac{1}{2}$

I membro:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 3 = 0$$

Il membro: 0

La soluzione è esatta.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Scrivere l'equazione di 2° grado nella forma più generale spiegando il significato delle lettere.
- ② Scrivere la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado, spiegando il significato delle lettere.

### Comprensione

- ① A che cosa serve la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado?

### Applicazioni

- ① Risolvere le seguenti equazioni, verificando se le soluzioni ottenute sono esatte:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0 \qquad 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

- ② Risolvere le seguenti equazioni verificando se le soluzioni ottenute sono esatte.

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

### Collegamenti con i capitoli precedenti

- ① Riprendere le tre parabole rappresentate in fig. 1 ed effettuare una traslazione di due unità lungo l'asse delle  $x$  verso sinistra; scrivere le equazioni delle parabole traslate e determinarne le intersezioni con l'asse delle  $x$ .  
(Vedere il capitolo 6, p. 240)

- ② Spiegare perché le coordinate del vertice  $V(p; q)$  di una parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

sono date dalle formule seguenti:

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad (3)$$

$$q = ap^2 + bp + c \qquad (4)$$

(Vedere il capitolo 6, pp. 272-275)

- ③ Spiegare perché una parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$  e il vertice  $V(p; q)$  si può sempre scrivere nella forma:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

(Vedere il capitolo 6, pp. 272-275)

### Collegamenti con il primo volume

- ① Spiegare come si procede per verificare se la soluzione di un'equazione è esatta.

(Vedere p. 375)

# Il discriminante dell'equazione di 2° grado

## Le soluzioni di un'equazione di 2° grado esaminate graficamente

Nelle figure 1-3 (vedi p. 308) sono rappresentate di nuovo le tre parabole disegnate nel paragrafo precedente.

- In fig. 1 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che taglia l'asse delle  $x$  in due punti A e B; perciò ha due soluzioni reali e distinte l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \quad (1)$$

- In fig. 2 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 16$$

che è tangente all'asse delle  $x$ ; perciò ha due soluzioni reali e coincidenti l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0 \quad (2)$$

- In fig. 3 si trova la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 17$$

che non incontra l'asse delle  $x$ ; perciò non ha soluzioni reali l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0 \quad (3)$$

## Le soluzioni di un'equazione di 2° grado esaminate mediante la formula risolutiva

La formula risolutiva trovata nel paragrafo precedente, e cioè:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

permette di trovare rapidamente le soluzioni di un'equazione di 2° grado, come le tre scritte prima.

Ma, ci si chiede, la formula (4) permette anche di prevedere quante saranno le soluzioni di un'equazione, senza dover più tracciare dei grafici?

Ecco che cosa si ottiene applicando la formula nei tre casi.

1. *Equazione con le due soluzioni reali e distinte.*

L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \quad (1)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \quad b = -16 \quad c = 15$$

Perciò le due soluzioni dell'equazione sono date da:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8}$$

Le due soluzioni sono perciò:

$$x_1 = \frac{16 - 4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{16 + 4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

2. *Equazione con le due soluzioni reali e coincidenti.*

L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0 \quad (2)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \quad b = -16 \quad c = 16$$

Perciò le due soluzioni sono date da:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4}$$

da cui 
$$x = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{8}$$

Le due soluzioni coincidenti sono perciò:

$$x_1 = x_2 = \frac{16}{8} = 2$$

3. *Equazione senza soluzioni reali.*

L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0 \quad (3)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \quad b = -16 \quad c = 17$$

Perciò le due soluzioni sono date da:

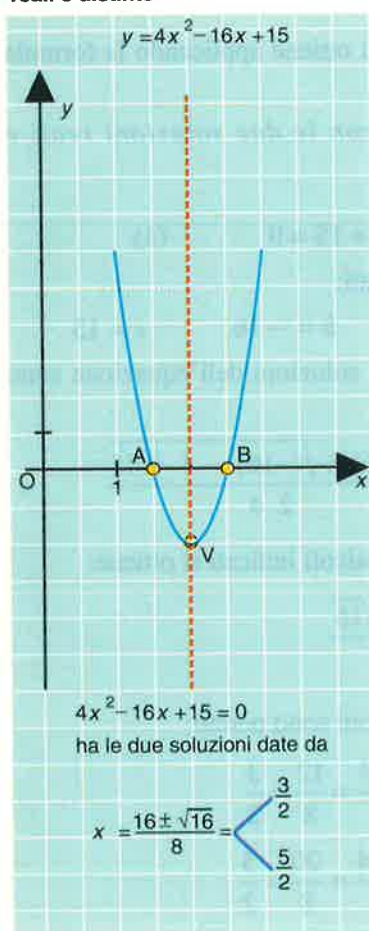
$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 17}}{2 \cdot 4}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

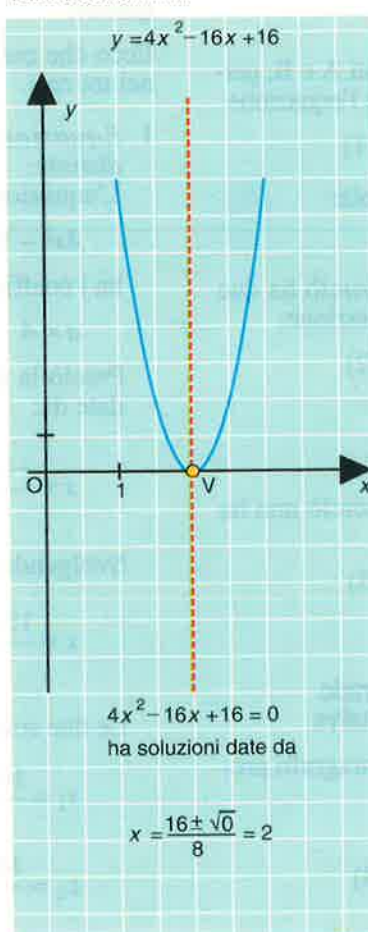
$$x = \frac{16 \pm \sqrt{-16}}{8}$$

Dunque, l'equazione non ha soluzioni reali perché non si trova fra i numeri reali la radice

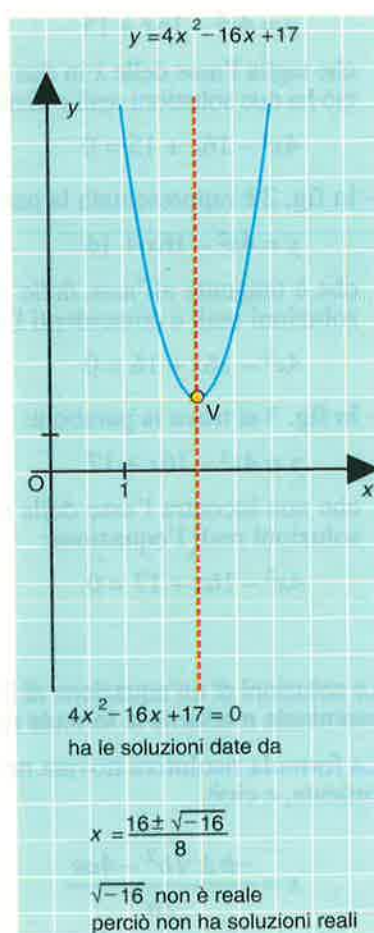
**Figura 1**  
Una parabola che taglia l'asse delle  $x$  determina un'equazione di 2° grado con due soluzioni reali e distinte



**Figura 2**  
Una parabola tangente all'asse delle  $x$  determina un'equazione di 2° grado con due soluzioni reali e coincidenti



**Figura 3**  
Una parabola esterna all'asse delle  $x$  determina un'equazione di 2° grado senza soluzioni reali



ce quadrata di un numero negativo; in particolare si ha che:

$\sqrt{-16}$  non è un numero reale

### Il discriminante di un'equazione di 2° grado

È dunque il radicando del radicale quadratico a distinguere, ossia a *discriminare*, i vari casi; per questo tale numero prende il nome di *discriminante* dell'equazione di 2° grado ed è contrassegnato dalla lettera  $\Delta$ , che è la «d» maiuscola nella lingua greca e si legge «delta». Consideriamo dunque il discriminante delle equazioni esaminate prima.

1. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

risulta:

$$\Delta = 16 > 0$$

e l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte, date da:

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{\Delta}}{8} \quad x_2 = \frac{16 + \sqrt{\Delta}}{8}$$

2. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$

risulta:

$$\Delta = 0$$

e l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti, date da:

$$x_1 = x_2 = \frac{16}{8}$$

3. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0$$

risulta:

$$\Delta = -16 < 0$$

e l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, nella formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

il discriminante  $\Delta$  è dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

e si trovano i seguenti casi possibili:

1.  $\Delta > 0$  l'equazione ammette le due soluzioni reali e distinte:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2.  $\Delta = 0$  l'equazione ammette le due soluzioni reali e coincidenti:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3.  $\Delta < 0$  l'equazione non ha soluzioni reali.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

① Completare le seguenti frasi:

a. un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = \dots\dots\dots$$

b. se risulta  $\Delta \dots 0$  l'equazione ha due soluzioni  $\dots\dots\dots$

c. se risulta  $\Delta \dots 0$  l'equazione ha due soluzioni  $\dots\dots\dots$

d. se risulta  $\Delta \dots 0$  l'equazione non ha ....  
 $\dots\dots\dots$

### Comprensione

① Spiegare perché un'equazione di 2° grado non ha soluzioni reali quando il discriminante è negativo.

### Applicazioni

① Esaminare le seguenti equazioni:

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \quad 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x + 3 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare il discriminante di ogni equazione;

b. basarsi sul segno del discriminante per dire quante soluzioni ha ogni equazione.

### Collegamenti con i capitoli precedenti

① Spiegare il significato dei seguenti termini:

- «radicando»;

- «radicale quadratico».

Portare degli esempi di radicali quadratici che non hanno risultato reale.

(Vedere il capitolo 1, paragrafo 5, pp. 23-25)



# Risolvere equazioni di 2° grado

## Equazioni incomplete

La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado è cioè:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

permette di risolvere tutte le equazioni del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

Ma in alcuni casi particolari le equazioni (2) possono essere risolte più brevemente senza valersi della formula (1); si tratta delle equazioni in cui vale 0 almeno uno dei coefficienti, restando però  $a \neq 0$ , altrimenti l'equazione non è più di 2° grado.

Ecco i vari casi che si possono presentare:

- |                |                    |                   |
|----------------|--------------------|-------------------|
| 1. $b = 0$     | equazione del tipo | $ax^2 + c = 0$ ;  |
| 2. $c = 0$     | equazione del tipo | $ax^2 + bx = 0$ ; |
| 3. $b = c = 0$ | equazione del tipo | $ax^2 = 0$ .      |

Le equazioni di questi tre tipi vengono dette *incomplete*, perché vi mancano alcuni dei monomi che compaiono nell'equazione (2).

Equazioni di questi tre tipi verranno ora risolte in due modi:

- valendosi della formula risolutiva;
- senza valersi della formula risolutiva.

## Attività 1

Risolvere l'equazione

$$9x^2 - 4 = 0$$

completando i due procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \dots \quad b = 0 \quad c = \dots$  $x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \dots}}{2 \dots}$  $x_1 = \dots \quad x_2 = \dots$	<p>Si aggiunge ai due membri ....., che è l'opposto di ..... e si ha:</p> $9x^2 = \dots$ <p>Si moltiplicano i due membri per ....., che è il reciproco di ..... e si ha:</p> $x^2 = \dots$ <p>Si trovano i due numeri che ..... e si ha:</p> $x = \pm \frac{2}{3}$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$9x^2 + 4 = 0$$

### Attività 2

Risolvere l'equazione

$$2x^2 + 3x = 0$$

completando i due procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \dots \quad b = \dots \quad c = 0$  $x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots^2 - 4 \cdot \dots \cdot 0}}{2 \dots}$  $x_1 = \dots \quad x_2 = \dots$	<p>Si raccoglie il fattore comune <math>x</math>:</p> $x(2x + 3) = 0$ <p>Si ricorda che un prodotto vale 0 solo se vale 0 uno dei due fattori e perciò si ha:</p> $x = 0 \quad \text{oppure} \quad 2x + 3 = 0$ <p>Le soluzioni sono quindi:</p> $x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{3}{2}$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$2x^2 - 3x = 0$$

### Attività 3

Risolvere l'equazione

$$\frac{1}{4}x^2 = 0$$

completando i procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \dots \quad b = 0 \quad c = 0$ $x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot \dots \cdot 0}}{2 \dots}$ $x_1 = \dots \quad x_2 = \dots$	<p>Si moltiplicano i due membri per ....., che è il reciproco di ..... e si ha:</p> $x^2 = \dots$ <p>Si trovano i due numeri che ..... e si ha:</p> $x_1 = x_2 = 0$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$-\frac{1}{4}x^2 = 0$$

### La formula ridotta

Un caso particolare di equazione di 2° grado è quello in cui il coefficiente  $b$  è un multiplo di 2. Ecco qualche esempio.

$$\begin{array}{ll} 3x^2 + 4x + 1 = 0 & \text{cioè} \quad 3x^2 + 2 \cdot 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 & \text{cioè} \quad x^2 + 2(-3)x + 9 = 0 \\ 3x^2 + 26x + 16 = 0 & \text{cioè} \quad 3x^2 + 2 \cdot 13x + 16 = 0 \end{array}$$

In generale si tratta di equazioni che si possono scrivere nella forma:

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

### Attività 4

Completare i procedimenti presentati nella tabella seguente per risolvere:

- l'equazione particolare  $3x^2 + 26x + 16 = 0$
- l'equazione generale  $ax^2 + 2\beta x + c = 0$

$3x^2 + 26x + 16 = 0$	$ax^2 + 2\beta x + c = 0$
$a = \dots \quad b = 2 \cdot 13 \quad c = \dots$ $x = \frac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{(2 \cdot 13)^2 - 4 \cdot \dots \cdot \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{4 \cdot 13^2 - 4 \cdot \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{4 \cdot (13^2 - \dots)}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2 \cdot 13 \pm 2\sqrt{13^2 - \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{2(-13 \pm \sqrt{13^2 - \dots})}{2 \dots}$ $x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 3 \cdot 16}}{3}$	$a \quad b = 2\beta \quad c$ $x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4 \cdot \dots \cdot \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4 \cdot \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2 \cdot \beta \pm \sqrt{4 \cdot (\beta^2 - \dots)}}{2 \dots}$ $x = \frac{-2 \cdot \beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \dots}}{2 \dots}$ $x = \frac{2(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \dots})}{2 \dots}$ $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - a \cdot c}}{a}$

L'ultima formula ottenuta, e cioè:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - a \cdot c}}{a}$$

è anche detta *formula ridotta* e si applica solo quando il coefficiente  $b$  è un multiplo di 2, cioè l'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

### Attività 5

Esaminare le seguenti equazioni:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$4x^2 + 7x + 4 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché si può usare la formula ridotta per risolvere le prime due equazioni, ma non per risolvere l'ultima;
- risolvere le tre equazioni.

### Attività 6

Date le seguenti equazioni:

$$25x^2 + 50x + 21 = 0$$

$$7x^2 - 60x + 108 = 0$$

risolverle in due modi, e cioè:

- usando la formula risolutiva;
- usando la formula ridotta.

Confrontare i due procedimenti.

### Attività 7

Risolvere le seguenti equazioni valendosi del procedimento che si ritiene più opportuno:

$$5x^2 + 40x = 0$$

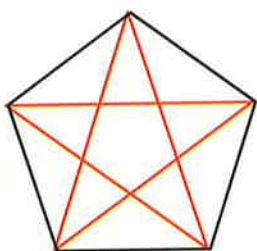
$$x^2 + 40x + 400 = 0$$

$$-\frac{1}{9}x^2 = 0$$

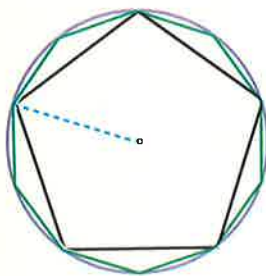


## La sezione aurea

**Figura 1**  
Un pentagono regolare e un  
pentagono regolare stellato



**Figura 2**  
Un decagono e un pentagono  
regolari inscritti in  
una circonferenza



### Il pentagono regolare nella scuola pitagorica

Risale alla scuola pitagorica (intorno al 500 a.C.) la costruzione del pentagono regolare con riga e compasso; il simbolo di questa scuola era infatti il pentagono regolare stellato (in rosso in fig. 1), la cui costruzione si basa appunto su quella del pentagono regolare (in nero in fig. 1).

Quando si parla di «costruzione con riga e compasso» ci si riferisce alla costruzione di un poligono regolare a partire da una circonferenza. In particolare, per costruire il pentagono regolare inscritto in una circonferenza, conviene costruire prima il *decagono regolare* inscritto (in verde in fig. 2); congiungendo un vertice sì ed uno no del decagono, si otterrà poi il pentagono (in nero in fig. 2).

Ma come si iscrive un decagono regolare in una circonferenza?

### Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza

Inscrivere un decagono regolare in una circonferenza significa determinarne la lunghezza del lato; ecco come si può ragionare per determinare il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario.

1. Si immagina di aver costruito il decagono e lo si divide in 10 triangoli isosceli tutti uguali fra loro (fig. 3a); si fissa quindi l'attenzione su uno di questi triangoli, per esempio ABO (fig. 3b) in cui si ha che:
  - AB è il lato incognito del decagono, e perciò si scrive:

$$AB = x$$

- l'angolo  $\hat{O}$  è la decima parte dell'angolo giro, perciò risulta:

$$\hat{O} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

- i lati OA e OB sono raggi della circonferenza, perciò il triangolo OBA è isoscele e si ha:

$$OA = OB = 1$$

- i due angoli  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono uguali e si determinano ricordando che la somma degli angoli interni del triangolo vale  $180^\circ$ , perciò risulta:

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

2. Si conduce la bisettrice di uno degli angoli alla base, per esempio  $\hat{B}$ , fino a incontrare il lato AO in S (fig. 3c); si determina così il triangolo ABS, che ha gli angoli uguali a quelli del triangolo ABO, dato che risulta:

- l'angolo  $\hat{A} = 72^\circ$ ;

- l'angolo  $\hat{A}BS = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ ;

- l'angolo  $\hat{A}SB = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$ .

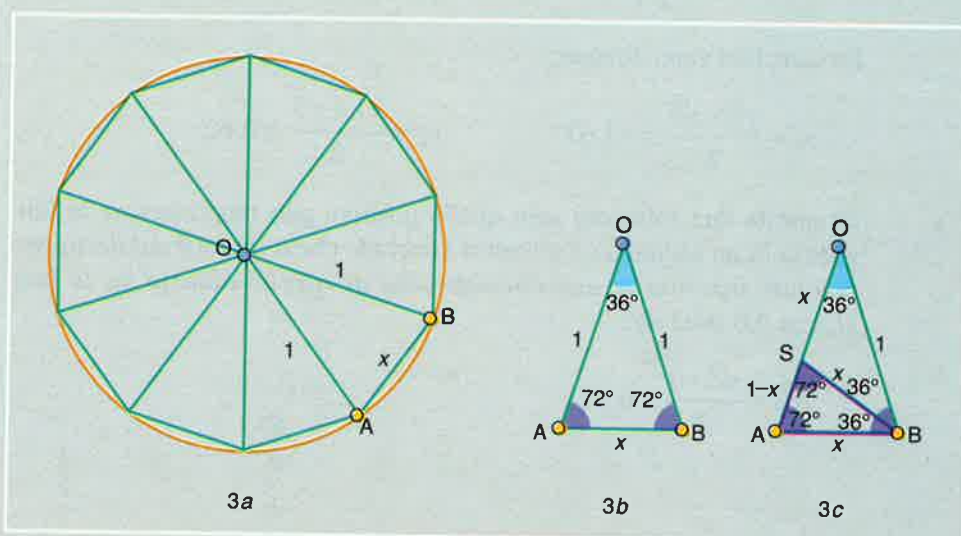


Figura 3  
Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza

Il secondo criterio di similitudine (vedi il capitolo terzo, p. 99) garantisce allora che i due triangoli sono simili e perciò hanno i lati omologhi in proporzione. Si considerano, in particolare, i seguenti lati omologhi dei due triangoli AOB e ABS:

OB (lato di AOB)	e	AB (lato di ABS)
AB (base di AOB)	e	AS (base di ABS)

Si scrive la seguente proporzione:

$$OB:AB = AB:AS \quad (1)$$

3. Si considerano le misure dei segmenti presenti nella relazione (1) e si trova che (fig. 3c):

$$OB = 1 \quad AB = x \quad AS = 1 - x$$

Perciò la (1) diventa:

$$1:x = x:(1-x)$$

$$\text{da cui } x^2 = 1 - x$$

e quindi:

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (2)$$

Dunque, per determinare il lato del decagono regolare bisogna risolvere l'equazione (2), che è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -1$$

Le soluzioni sono dunque date dalla formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che in questo caso diventa:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

Le soluzioni sono dunque:

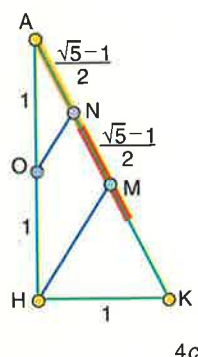
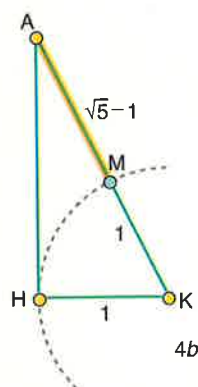
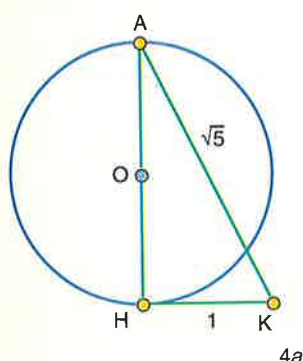
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cong -1,62$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cong 0,62$$

Di queste due soluzioni solo quella positiva può rappresentare la lunghezza di un segmento e quindi si conclude che il lato  $AB$  del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario ha la lunghezza  $AB$  data da:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0,62$$

**Figura 4**  
Costruire il lato del decagono regolare



### Come costruire il lato del decagono regolare

Il segmento appena ottenuto con un procedimento algebrico si può ottenere con riga e compasso, seguendo la costruzione illustrata in fig. 4, che si può organizzare nel modo seguente:

1. A partire dalla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $OH$  lungo 1, si costruisce il triangolo rettangolo  $AHK$  (fig. 4a), che ha:
  - il cateto  $HK$  lungo 1;
  - il cateto  $AH$  lungo 2;
  - l'ipotenusa  $AK$  che, per il teorema di Pitagora, è lunga:

$$\overline{AK} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

2. Si traccia una circonferenza di centro  $K$  e raggio 1, fino a intersecare  $AK$  in  $M$ , determinando un segmento  $AM$ , che ha lunghezza (fig. 4b):

$$\overline{AM} = \sqrt{5} - 1$$

3. Si congiunge  $H$  con  $M$  e da  $O$  si traccia la parallela a  $HM$ , fino a incontrare il segmento  $AM$  in  $N$ , ottenendo un segmento  $AN$ , che, per il teorema di Talete, ha la lunghezza data da (fig. 4c):

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

e perciò è proprio il lato del decagono regolare.



## La sezione aurea

La costruzione del lato del decagono regolare porta a trovare, a partire da un segmento OA, un segmento OS caratterizzato da una singolare proprietà espressa dalla (1), che si può anche riscrivere nella forma seguente (fig. 5):

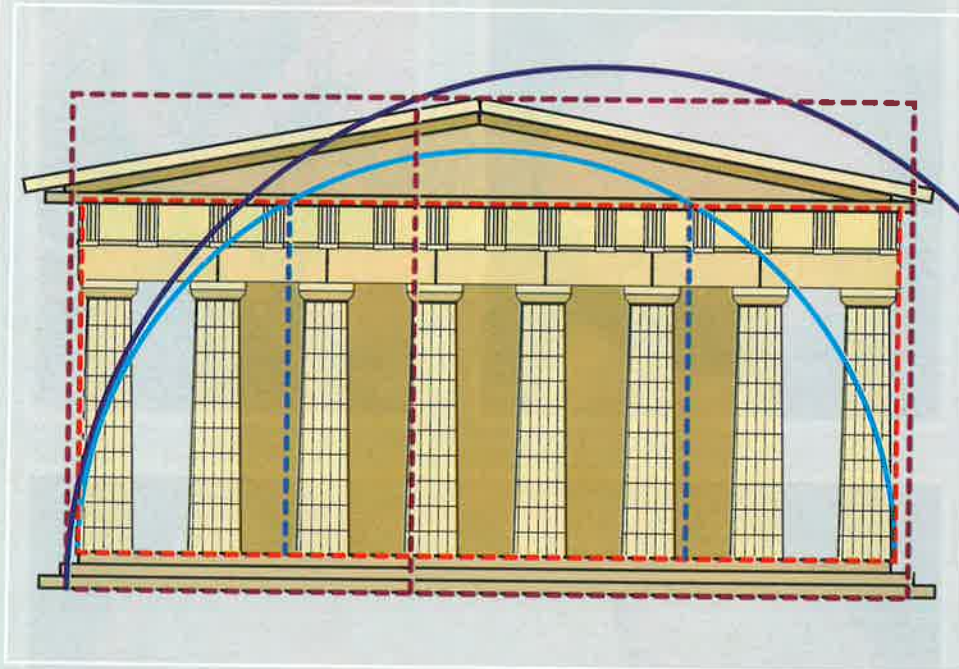
$$OA:OS = OS:(OA - OS)$$

La proprietà si legge così: *il segmento OS è medio proporzionale fra l'intero segmento OA e la parte rimanente OA - OS.*

È questa proprietà caratteristica che aveva suscitato l'interesse dei pitagorici.

Perché questo interesse?

Si trattava prima di tutto di una questione estetica: si era osservato, per esempio, che un rettangolo con le dimensioni proporzionali a OA e OS era più gradevole alla vista di qualunque altro rettangolo; proprio per questo il Partenone (fig. 6) fu costruito scegliendo delle proporzioni di questo tipo.



Nel Rinascimento, col ricercare ovunque, nella pittura, nella scultura e soprattutto nell'architettura, un senso di armonia e di equilibrio, si riscoprirono le proporzioni del Partenone.

In particolare, Luca Pacioli pubblicò nel 1509 un grosso volume illustrato da Leonardo da Vinci, dal titolo *De divina proportione* (fig. 7): la «divina proporzione» è

la lunghezza del segmento ottenuto prendendo i  $\frac{62}{100}$  di un dato segmento OA, cioè approssimando il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio OA.

Molto più tardi, agli inizi del secolo scorso, quella parte di segmento venne chiamata *sezione aurea*; il nome è legato a un passo del matematico tedesco del Seicento Giovanni Keplero, che scriveva così: «La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora e l'altro è la divisione di un segmento in media ed estrema ragione. Possiamo paragonare il primo ad una misura d'oro e il secondo ad un prezioso gioiello».

Si dice dunque che *il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio.*

La sezione aurea continuò nei secoli a sollecitare ricerche da vari punti di

Figura 5  
La sezione aurea

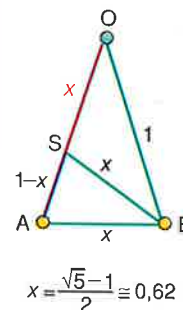
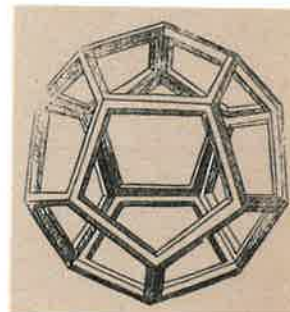


Figura 6  
Il Partenone

Figura 7  
Un disegno di Leonardo per  
il libro di Luca Pacioli  
*De divina proportione*





vista: nell'Ottocento iniziò, a opera di scienziati tedeschi, una serie di studi per scoprire se la sezione aurea fosse presente anche in natura; indagini e misure accurate hanno condotto a scoprire che la sezione aurea compare, per esempio:

- nella disposizione delle foglie e delle gemme di alcune piante;
- nella disposizione dei petali di alcuni fiori (fig. 8);
- in alcune stelle di mare (fig. 9).

Ma l'armonia di proporzioni legata alla sezione aurea mantiene ancora oggi inalterato il suo fascino, come testimoniano alcune opere di artisti contemporanei: il pittore spagnolo Salvador Dalí ha dipinto un suo famoso quadro (fig. 10) in un rettangolo con le proporzioni auree, inserendovi un grande dodecaedro che, con le sue facce pentagonali, richiama appunto la sezione aurea.

**Figura 8** (a sinistra)  
Una *camellia japonica*, i cui petali sono distribuiti secondo uno schema legato alla sezione aurea



**Figura 9** (a destra)  
Una stella marina pentagonale



**Figura 10**  
La cena di Salvador Dalí (1955), quadro progettato e realizzato seguendo le proporzioni auree



# Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado

## Equazioni di 2° grado che «mostrano» le soluzioni

Ecco un'equazione di 2° grado su cui riflettere:

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \quad (1)$$

Per risolvere quest'equazione conviene applicare la legge di annullamento del prodotto: un prodotto vale 0, se vale 0 almeno uno dei due fattori; perciò un numero che rende 0 uno dei due fattori rende 0 tutto il prodotto e, quindi, è soluzione dell'equazione. Dalla (1) si ricava dunque:

$$x - 2 = 0 \quad \text{oppure} \quad x - 3 = 0$$

Ci si riduce così a risolvere due equazioni di 1° grado, trovando che le soluzioni dell'equazione (1) sono:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

E così per risolvere l'equazione:

$$(x + 5)(x - 2) = 0 \quad (2)$$

basta risolvere le due equazioni di 1° grado:

$$x + 5 = 0 \quad \text{oppure} \quad x - 2 = 0$$

Si trova:

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2$$

Dunque, equazioni come la (1) o la (2) mostrano direttamente le soluzioni, perciò non è certo il caso di eseguire il prodotto dei due binomi per poter poi applicare la formula risolutiva.

## Relazioni fra soluzioni e coefficienti

È interessante eseguire il prodotto dei due

binomi dopo aver determinato le soluzioni; ecco che cosa si ottiene.

- Per l'equazione (1):

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

con le soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

che danno:

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

- Per l'equazione (2):

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

con le soluzioni:

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2$$

che danno:

$$x_1 + x_2 = -5 + 2 = -3 \quad x_1 \cdot x_2 = (-5) \cdot 2 = -10$$

Sembra dunque che ci siano delle relazioni che collegano le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado, relazioni che conviene studiare in generale, cioè a partire dall'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

che ha le soluzioni date da:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

con:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ecco come si può procedere.

1. Si addizionano le due soluzioni.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \\ &= \frac{-b - b - \sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \end{aligned}$$

Risulta in definitiva:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Si moltiplicano le due soluzioni.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \\ &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{2a \cdot 2a} \end{aligned}$$

Si calcola immediatamente il risultato del denominatore:

$$2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$$

Per sviluppare il numeratore conviene applicare il prodotto notevole presentato nel primo volume, p. 267, e cioè:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

considerando

$$-b \text{ al posto di } a \text{ e } \sqrt{\Delta} \text{ al posto di } b$$

Si ottiene:

$$(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta}) = (-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2 = b^2 - \Delta$$

e, dato che risulta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si trova poi:

$$b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = b^2 - b^2 + 4ac = 4ac$$

Si ha dunque:

$$\frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{2a \cdot 2a} = \frac{4ac}{4a^2}$$

e quindi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si conclude dunque che in un'equazione di 2° grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  sono legate ai coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dalle relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (3)$$

### Applicazioni delle relazioni fra soluzioni e coefficienti

Le relazioni (3) diventano particolarmente espressive nel caso in cui valga 1 il coefficiente  $a$  dell'equazione di 2° grado; si ha infatti:

$$a = 1 \quad x_1 + x_2 = -b \quad x_1 \cdot x_2 = c \quad (4)$$

Queste relazioni hanno varie applicazioni, fra le quali le due seguenti.

A. Risolvere un'equazione «a vista».

Ecco un esempio. Per l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

che ha:

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2$$

deve essere:

$$x_1 + x_2 = 3 \quad x_1 \cdot x_2 = 2$$

e quindi le soluzioni saranno:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

B. Scrivere un'equazione che abbia due soluzioni assegnate.

Ecco un esempio. Scrivere un'equazione di 2° grado con il coefficiente  $a$  che valga 1 e che abbia le seguenti soluzioni:

$$x_1 = 2\sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

L'equazione si può scrivere subito nella forma:

$$(x - 2\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

quindi si esegue il prodotto dei due binomi valendosi delle regole del calcolo letterale.

Si possono però abbreviare i calcoli con il seguente procedimento.

- Si calcola la somma e il prodotto delle soluzioni, ottenendo:

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 = -4$$

- Basandosi sulle relazioni (4) si scrivono i coefficienti dell'equazione; si ha:

$$a = 1 \quad b = -\sqrt{2} \quad c = -4$$

Si ottiene così l'equazione richiesta, che è:

$$x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Scrivere le due relazioni che legano soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado, spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.

### Comprensione

- ① Spiegare come si ottengono le due relazioni che legano i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di 2° grado.
- ② Come si modificano le relazioni fra soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado, nel caso in cui le due soluzioni siano coincidenti?

### Applicazioni

- ① Indicare le soluzioni delle seguenti equazioni, senza usare la formula risolutiva.

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad x^2 - x - 6 = 0$$

- ② Scrivere rapidamente un'equazione che ha le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

### Collegamento con i capitoli precedenti e con il primo volume

- ① Spiegare perché risulta:

$$(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$$

(Vedere il capitolo 6, pp. 258-261)

- ② Elencare le proprietà delle operazioni applicate per scrivere che risulta:

$$2a \cdot 2a = 4a^2 \quad (5)$$

(Vedere il primo volume, pp. 244-246)

- ③ Elencare le proprietà delle operazioni applicate per scrivere che risulta:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (6)$$

(Vedere il primo volume, p. 267)

- ④ Le due uguaglianze (5) e (6) sono identità o equazioni?

(Vedere il primo volume, p. 383)



# La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado

## L'equazione di 2° grado e il corrispondente trinomio

Nei precedenti paragrafi si sono trovati, fra l'altro, i seguenti risultati:

- un'equazione di 2° grado si può sempre scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0 \quad (1)$$

- l'equazione ha le soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  legate ai coefficienti  $a, b, c$  dalle due relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Il primo membro della (1) e cioè il polinomio:

$$ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

prende il nome di *trinomio di 2° grado*, per ricordare che:

- è un polinomio somma di *tre* monomi;
  - il monomio di grado massimo è di *2° grado*.
- Le soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  dell'equazione (1) sono dette *radici del trinomio*.

## Come si scompone in fattori un trinomio con due radici reali e distinte

Le relazioni (2) che legano le radici di un trinomio ai suoi coefficienti portano a scrivere il trinomio come prodotto di due binomi di 1° grado, scrittura ricca di applicazioni nel campo del calcolo letterale.

Ecco come si procede, a partire dal trinomio:

$$ax^2 + bx + c$$

1. Si scrivono i coefficienti del trinomio nella forma seguente:

$$ax^2 + a\frac{b}{a}x + a\frac{c}{a}$$

2. Si raccoglie il fattore comune  $a$  e si ottiene:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

3. Si applicano le relazioni (2), scrivendo:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

4. Si sviluppano i prodotti indicati dentro le parentesi quadre e si ha:

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2]$$

5. Si raccoglie il fattore comune  $x$  fra i primi due termini e il fattore comune  $-x_2$  fra gli ultimi due termini, ottenendo:

$$a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$$

6. Si raccoglie il fattore comune  $(x - x_1)$ , scrivendo:

$$a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

In conclusione, risulta:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

Così un trinomio di 2° grado viene scritto come prodotto dei due binomi di 1° grado  $(x - x_1)$  e  $(x - x_2)$ , ossia il *trinomio viene scomposto in fattori di 1° grado*.

## Un esempio di scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con due radici reali e distinte

Ecco un esempio di applicazione della scomposizione in fattori ora ottenuta.

L'equazione:

$$15x^2 - 7x - 2 = 0$$

ha le soluzioni date da:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 15(-2)}}{2 \cdot 15} = \frac{7 \pm 13}{30}$$

Le soluzioni sono dunque:

$$x_1 = \frac{7-13}{30} = -\frac{6}{30} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{7+13}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Si può allora applicare la scomposizione indicata dalla formula (3), dove si ha:

$$a = 15 \quad b = -7 \quad c = -2$$

$$x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Si ha:

$$15x^2 - 7x - 2 = 15 \left[ x - \left( -\frac{1}{5} \right) \right] \left( x - \frac{2}{3} \right)$$

ossia:

$$15x^2 - 7x - 2 = 15 \left( x + \frac{1}{5} \right) \left( x - \frac{2}{3} \right)$$

### Scomporre in fattori un trinomio con due radici reali e coincidenti

Una particolare situazione si ha quando le radici del trinomio sono coincidenti e cioè si ha:

$$x_1 = x_2$$

In tal caso la formula (3) diventa:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1)$$

ossia:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \quad (4)$$

Si trova dunque che un trinomio di 2° grado con le due radici reali e coincidenti si può sempre scrivere come quadrato di un binomio, moltiplicato per il coefficiente  $a$ .

### Un esempio di scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con due radici reali e coincidenti

Ecco un esempio di applicazione dell'ultimo risultato ottenuto.

L'equazione:

$$25x^2 - 20x + 4 = 0$$

ha le soluzioni date da:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4}}{2 \cdot 25} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50}$$

Quindi le soluzioni coincidenti sono:

$$x_1 = x_2 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

Si può allora applicare la scomposizione indicata dalla formula (4), considerando che risulta:

$$a = 25 \quad b = -20 \quad c = 4 \quad x_1 = \frac{2}{5}$$

Si ottiene:

$$25x^2 - 20x + 4 = 25 \left( x - \frac{2}{5} \right)^2$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato dei termini:
  - trinomio di 2° grado;
  - radici di un trinomio di 2° grado.
- ② Dire come si scompone in fattori di 1° grado un trinomio di 2° grado nei due casi seguenti:
  - il trinomio ha le radici reali e distinte;
  - il trinomio ha le radici coincidenti.

### Comprensione

- ① Spiegare come si ricava la scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado nei due casi seguenti:
  - il trinomio ha le radici reali e distinte;
  - il trinomio ha le radici coincidenti.

### Applicazioni

- ① Scomporre in fattori i seguenti trinomi di 2° grado:
$$x^2 + 4x + 3 \quad 6x^2 - 13x + 6$$
$$x^2 - 6x + 9 \quad 4x^2 + 20x + 25$$

### Collegamento con i paragrafi precedenti

- ① Perché in un'equazione di 2° grado deve essere  $a \neq 0$ ?  
(Vedere il paragrafo 2)

### Collegamento con il primo volume

- ① Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono vere purché sia  $a \neq 0$ .

$$a \frac{b}{a} = b \quad a \frac{c}{a} = c$$

(Vedere il capitolo 9, p. 383)

- ② Su quale proprietà delle operazioni ci si basa per raccogliere un fattore comune?  
(Vedere il capitolo 9, p. 264)

## Il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado

### Due casi particolari

Determinare il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado senza risolverla può essere utile in vari problemi: per esempio, se l'incognita rappresenta una grandezza positiva, scoprire che l'equazione ha solo soluzioni negative porta a dichiarare subito il problema impossibile, evitando di eseguire laboriosi calcoli.

Questa previsione del segno delle soluzioni può essere ottenuta a partire dal grafico della parabola corrispondente; ecco due esempi.

1. In fig. 1 è rappresentato il grafico di una parabola del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si tratta della parabola:

$$y = 3x^2 - 9x + 4$$

Il grafico presenta le seguenti caratteristiche:

- l'asse di simmetria  $s$  ha equazione:

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ in questo caso } x = -\frac{-9}{2 \cdot 3}$$

ossia:

$$x = \frac{3}{2}$$

- il punto P di intersezione con l'asse delle  $y$  ha l'ascissa  $x = 0$  e perciò ha le coordinate:

$$P(0; 4)$$

- la parabola incontra l'asse delle  $x$  in due punti d'ascissa positiva. Quest'ultima caratteristica permette di concludere che l'equazione

$$3x^2 - 9x + 4 = 0$$

ha le due soluzioni reali e distinte che sono certamente positive.

2. A partire dalla parabola:

$$y = 3x^2 + 9x + 4$$

si può ripetere un procedimento analogo; si trova che (fig. 2):

- l'asse di simmetria  $s$  è:

$$x = -\frac{3}{2}$$

- l'intersezione con l'asse delle  $y$  è  $P(0; 4)$ ;
  - la curva taglia l'asse delle  $x$  in due punti d'ascissa negativa.
- Si conclude che l'equazione

$$3x^2 + 9x + 4 = 0$$

ha le due soluzioni reali entrambe negative.

### Dal grafico della parabola al segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado

Generalizzando le osservazioni precedenti, si riesce a stabilire il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado senza risolverla. Ecco come ragionare per arrivare a una regola generale.

Il grafico di una parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

viene caratterizzato da due elementi indicati nei casi particolari:

- l'asse di simmetria  $s$  che ha l'equazione:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- il punto di intersezione con l'asse delle  $y$  che è  $P(0; c)$ .

Si distinguono due casi:

- la parabola volge la concavità verso l'alto e perciò risulta  $a > 0$ ;
- la parabola volge la concavità verso il basso e perciò risulta  $a < 0$ .

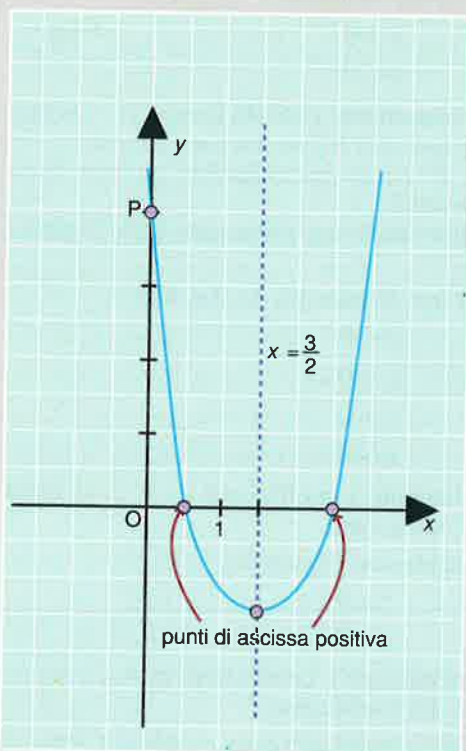


Figura 1 (a sinistra)  
Una parabola che incontra  
l'asse delle  $x$  in due punti  
d'ascissa positiva

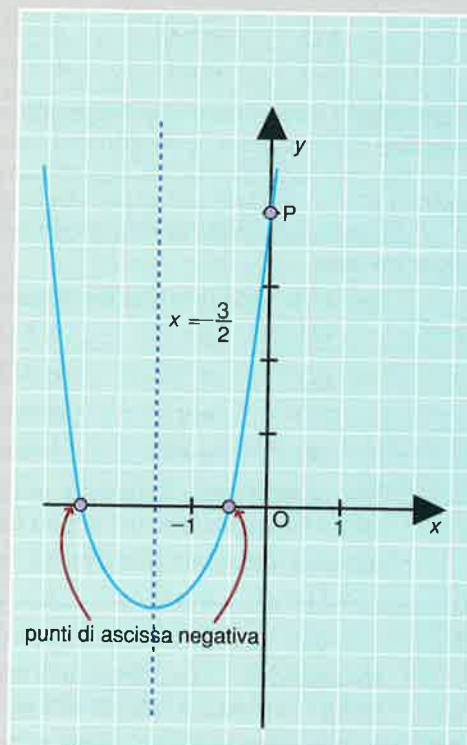


Figura 2 (a destra)  
Una parabola che incontra  
l'asse delle  $x$  in due punti  
d'ascissa negativa



I.  $a > 0$

Riprendendo la fig. 1, si nota che:

- i punti di  $s$  hanno l'ascissa positiva, cioè risulta:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \quad \text{e quindi } b < 0$$

- il punto  $P(0; c)$  ha ordinata positiva, cioè risulta:

$$c > 0$$

- le due soluzioni sono positive, cioè risulta:

$$x_1 > 0 \quad \text{e} \quad x_2 > 0$$

Si conclude dunque che la situazione di fig. 3a è caratterizzata da:

$$x_1 > 0 \quad \text{e} \quad x_2 > 0$$

con

$$a > 0 \quad b < 0 \quad c > 0$$

Analizzando nello stesso modo le altre situazioni che si possono presentare, si ottengono i risultati esposti in fig. 3.

II.  $a < 0$

Analoghe considerazioni si possono ripetere nei casi in cui la parabola rivolge la concavità verso il basso, ottenendo i risultati esposti in fig. 4.

### La regola dei segni o regola di Cartesio

Le figure 3 e 4 sembrano mostrare tanti risultati diversi difficilmente memorizzabili; si può invece trarre una semplice regola generale osservando che si trovano le due soluzioni positive nei seguenti casi (figure 3a e 4a):

(1)	$a > 0$	$b < 0$	$c > 0$
(2)	$a < 0$	$b > 0$	$c < 0$

In ambedue i casi si nota che, leggendo ordinatamente i coefficienti  $a, b, c$ , si trovano due cambiamenti, o meglio *due variazioni*, nel segno dei coefficienti.

Si conclude che *in un'equazione di 2° grado due soluzioni positive sono legate a due variazioni nel segno dei coefficienti*.

Esaminando nello stesso modo le altre situazioni presentate nelle figure 3 e 4, si trovano:

- una soluzione positiva nei seguenti casi (figure 3b, 3c, 4b, 4c):

(1)	$a > 0$	$b < 0$	$c < 0$
(2)	$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$
(3)	$a < 0$	$b > 0$	$c > 0$
(4)	$a < 0$	$b < 0$	$c > 0$

Nei quattro casi, leggendo ordinatamente i coefficienti  $a, b, c$ , si trova una sola variazione nel segno dei coefficienti.

- nessuna soluzione positiva nei seguenti casi (figure 3d, 4d):

(1)	$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$
(2)	$a < 0$	$b < 0$	$c < 0$

In ambedue i casi, leggendo ordinatamente i coefficienti  $a, b, c$ , non si trova nessuna variazione nel segno dei coefficienti.

Queste osservazioni possono essere sintetizzate nella seguente *regola dei segni* o

*regola di Cartesio: un'equazione di 2° grado ha tante soluzioni positive quante sono le variazioni di segno dei suoi coefficienti.*

### La regola dei segni vale solo se le soluzioni sono reali

Un'osservazione importante: la regola dei segni appena trovata ha significato solo se l'equazione esaminata ha soluzioni reali; infatti tutto il procedimento perde senso se l'equazione non ha soluzioni reali e perciò la corrispondente parabola non interseca l'asse delle  $x$ .

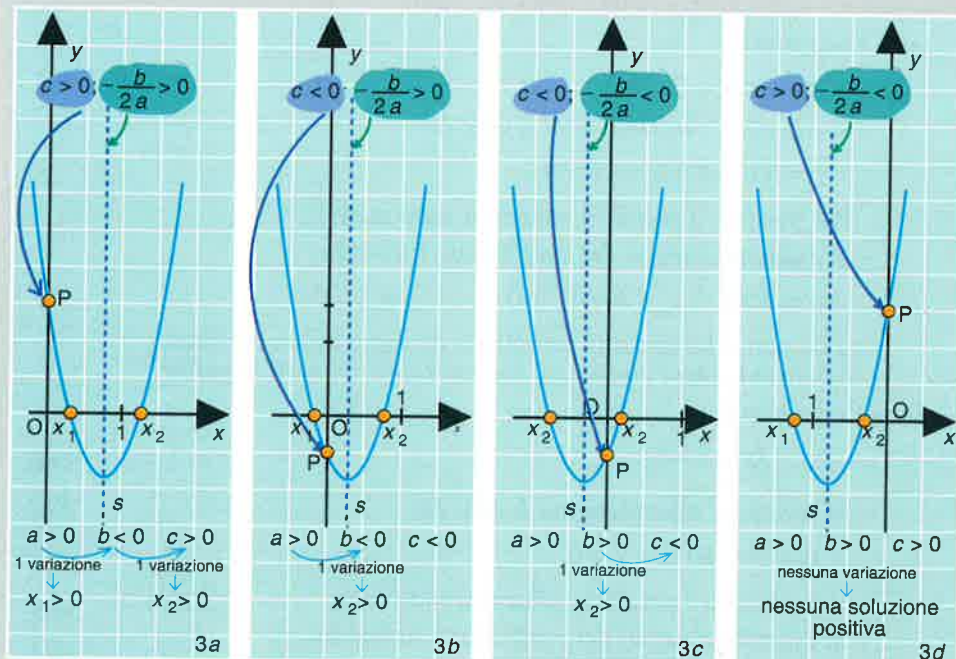


Figura 3  
Il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado nel caso  $a > 0$

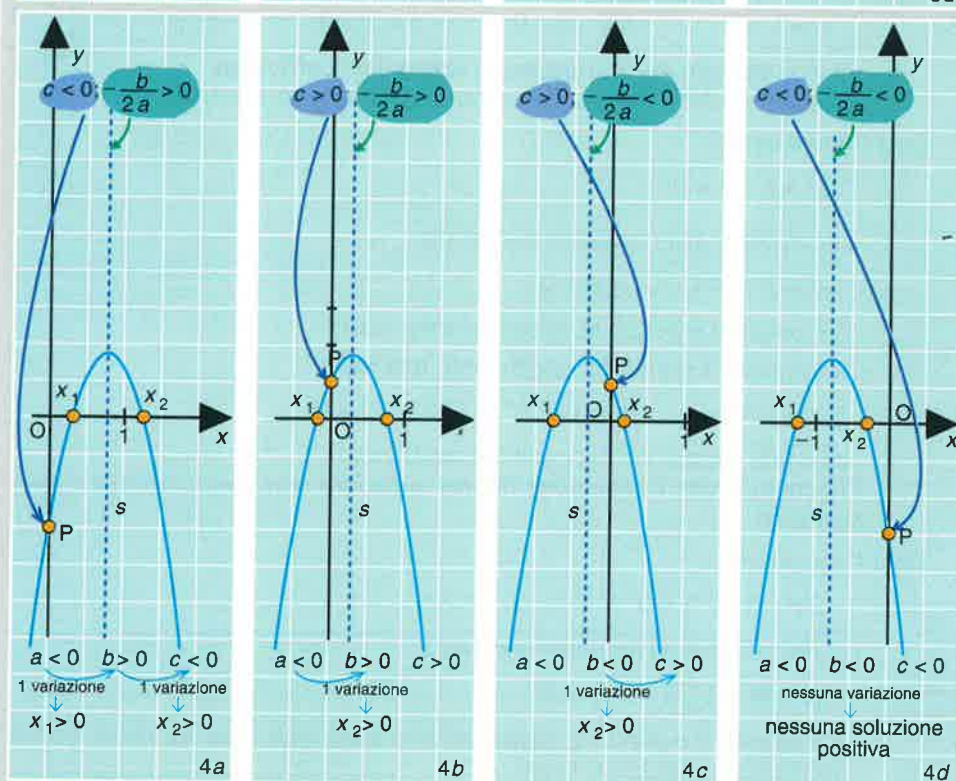


Figura 4  
Il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado nel caso  $a < 0$

Quindi, prima di applicare la regola dei segni, bisogna sempre controllare che l'equazione assegnata abbia soluzioni reali, studiando il segno del discriminante  $\Delta$ , infatti *l'equazione ha soluzioni reali solo se risulta:*

$$\Delta \geq 0$$

### Applicazioni della regola dei segni

Ecco qualche applicazione della regola dei segni.

1. Data l'equazione:

$$5x^2 + 11x + 2 = 0$$

- si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 81 > 0$$

$\Delta$  è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- si esamina il segno dei coefficienti, trovando:

$$a = 5 > 0 \quad b = 11 > 0 \quad c = 2 > 0$$

cioè non si ha nessuna variazione di segno dei coefficienti.

Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali negative.*

2. Data l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

- si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$$

$\Delta$  è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- si esamina il segno dei coefficienti, trovando:

$$a = 1 > 0 \quad b = -3 < 0 \quad c = 2 > 0$$

cioè si trovano due variazioni di segno dei coefficienti.

Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali positive.*

3. Data l'equazione:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

- si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$$

$\Delta$  è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- si esamina il segno dei coefficienti, trovando:

$$a = 1 > 0 \quad b = 1 > 0 \quad c = -2 < 0$$

cioè una variazione di segno dei coefficienti.

Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali, una positiva e una negativa.*

4. Data l'equazione:

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

- si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$$

$\Delta$  è negativo e perciò le soluzioni non sono reali; non ha senso quindi applicare la regola dei segni.



# Il segno di un trinomio di 2° grado

## Dal grafico della parabola al segno del trinomio di 2° grado

Il grafico delle parabole del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

ha condotto alla scoperta di vari risultati algebrici, fra cui la formula risolutiva dell'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

Questa formula è stata ottenuta osservando che l'equazione (2) indica le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse delle  $x$ , punti che sono caratterizzati da una proprietà: hanno l'ordinata  $y=0$ .

Ma sono al massimo due i punti della parabola con l'ordinata che vale 0, mentre gli altri punti avranno l'ordinata  $y$  positiva o negativa (fig. 1). Proprio esaminando i punti di ordinata positiva o negativa, si arriva a stabilire il *segno del trinomio di 2° grado* scritto al secondo membro della (1); si tratta di determinare

- i valori di  $x$  per cui risulta:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

- i valori di  $x$  per cui risulta:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

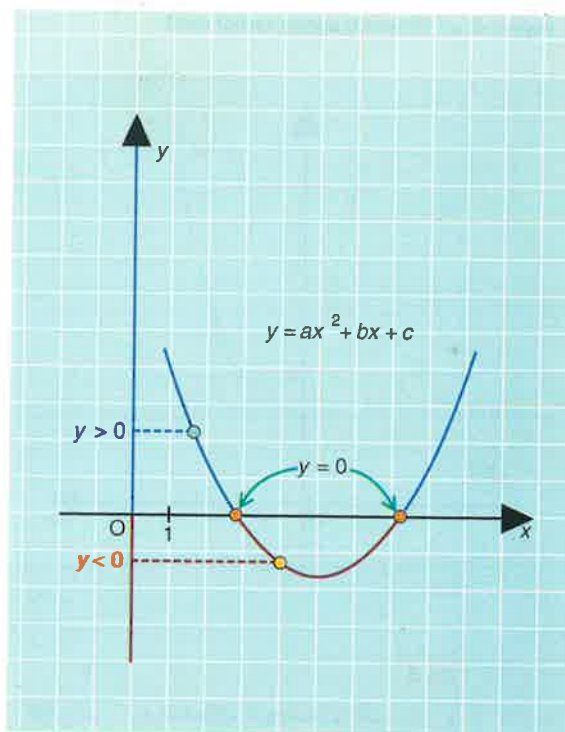
Per questo conviene distinguere i tre casi seguenti:

- I. la parabola non incontra l'asse delle  $x$ , cioè il trinomio non ha radici reali;
- II. la parabola tocca l'asse delle  $x$  in un punto, cioè il trinomio ha due radici reali e coincidenti;
- III. la parabola taglia l'asse delle  $x$  in due punti, cioè il trinomio ha due radici reali e distinte.

Per ognuno dei tre casi si distinguono poi due situazioni:

- A. la parabola rivolge la concavità verso l'alto, cioè il trinomio presenta il coefficiente  $a$  *positivo*;
- B. la parabola rivolge la concavità verso il basso, cioè il trinomio presenta il coefficiente  $a$  *negativo*.

Figura 1  
Il segno di un trinomio di 2° grado





## I. Il segno di un trinomio senza radici reali

### A. Coefficiente $a > 0$

Cominciamo ad esaminare il trinomio

$$y = x^2 - 2x + 5 \quad (3)$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

- il coefficiente  $a = 1 > 0$ ;
- nessuna radice reale, dato che, nella corrispondente equazione, risulta  $\Delta = -16 < 0$ .

Rappresentando la funzione (3) sul piano cartesiano (fig. 2a) si ottiene una curva con le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva non interseca l'asse delle  $x$ .

La parabola si trova dunque tutta al disopra dell'asse delle  $x$  e perciò tutti i suoi punti hanno l'ordinata  $y$  positiva.

Si conclude che, per il trinomio (3) senza soluzioni reali, risulta:

$y > 0$  per qualunque valore di  $x$   
ossia:

$$x^2 - 2x + 5 > 0 \quad \text{per qualunque valore di } x$$

### B. Coefficiente $a < 0$

Considerazioni analoghe si possono ripetere a partire dal trinomio

$$y = -x^2 + 2x - 5 \quad (4)$$

che è rappresentato in fig. 2b e presenta le seguenti caratteristiche:

- il coefficiente  $a = -1 < 0$ ;
- nessuna radice reale, dato che, nella corrispondente equazione, risulta  $\Delta = -16 < 0$ .

Ora la parabola si trova tutta al disotto dell'asse delle  $x$  e perciò tutti i suoi punti hanno l'ordinata  $y$  negativa.

Dunque, per il trinomio (4) senza radici reali, risulta:

$y < 0$  per qualunque valore di  $x$   
ossia:

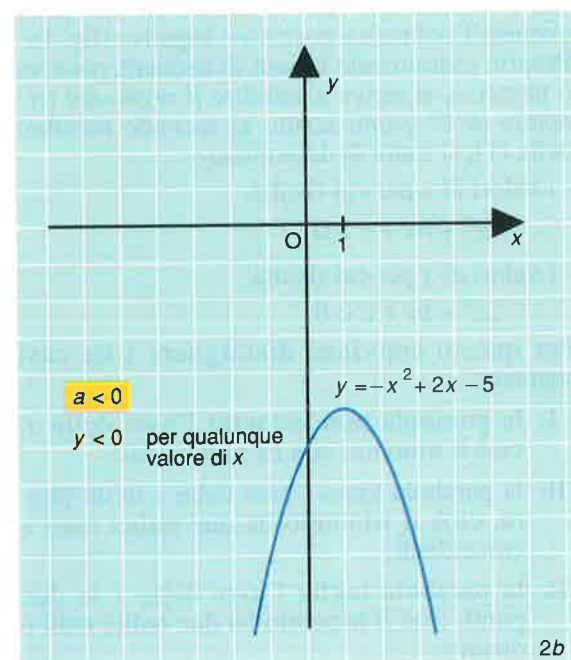
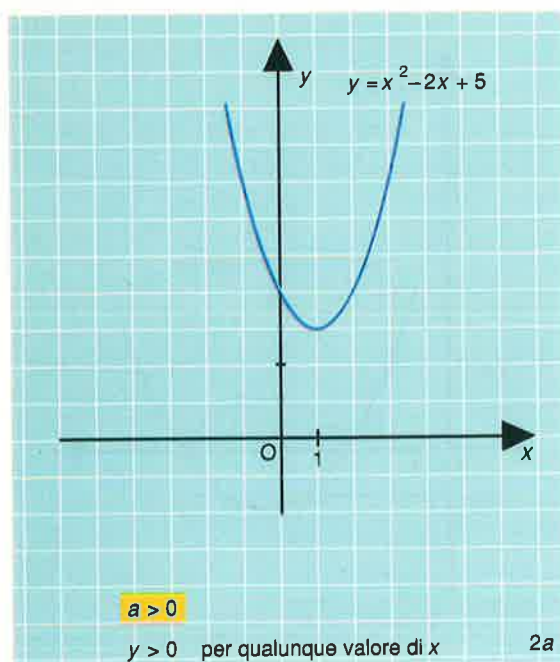
$$-x^2 + 2x - 5 < 0 \quad \text{per qualunque valore di } x$$

Il procedimento ora esposto può sempre essere ripetuto per esaminare il segno di un trinomio di 2° grado senza soluzioni reali. Si può tuttavia evitare di tracciare il grafico, osservando che il segno del trinomio dipende solo dal segno del primo coefficiente  $a$ :

- dato  $a$  positivo, il trinomio è sempre positivo;
- dato  $a$  negativo, il trinomio è sempre negativo.

Si conclude che un trinomio di 2° grado senza radici reali mantiene il segno del coefficiente  $a$  per qualunque valore reale di  $x$ .

Figura 2  
Il segno di un trinomio senza radici reali



## II. Segno di un trinomio con le radici reali e coincidenti

### A. Coefficiente $a > 0$

Esaminiamo ora il trinomio

$$y = x^2 - 6x + 9 \quad (5)$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

- coefficiente  $a = 1 > 0$ ;
- due radici coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$ .

Rappresentando la funzione (5) sul piano cartesiano si ottiene la curva di fig. 3a, con le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva è tangente all'asse delle  $x$  nel vertice  $V(3; 0)$ .

Dal grafico risulta che i punti della parabola hanno tutti l'ordinata  $y$  positiva, con un'unica eccezione: il punto  $V(3; 0)$ , in cui la curva tocca l'asse delle  $x$ .

Dunque, per il trinomio (5) con le due radici reali e coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$ , risulta:

$y > 0$  per qualunque valore di  $x \neq 3$   
ossia:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \text{ per qualunque valore di } x \neq 3$$

### B. Coefficiente $a < 0$

È facile ora esaminare il trinomio

$$y = -x^2 + 6x - 9 \quad (6)$$

che è rappresentato in fig. 3b e presenta le seguenti caratteristiche:

- coefficiente  $a = -1 < 0$ ;
- due radici coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$ .

In questo caso tutti i punti della parabola hanno l'ordinata  $y$  negativa, escluso il punto  $V(3; 0)$ , in cui la curva tocca l'asse delle  $x$ .

Dunque, per il trinomio (6) con le due radici reali e coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$ , risulta:

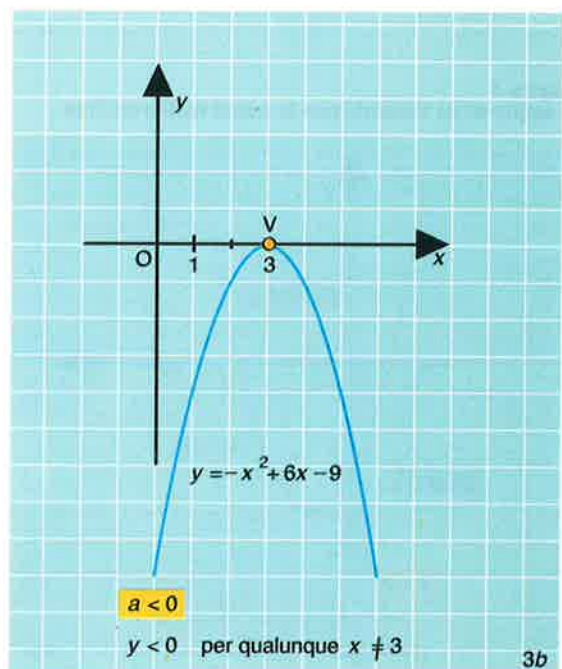
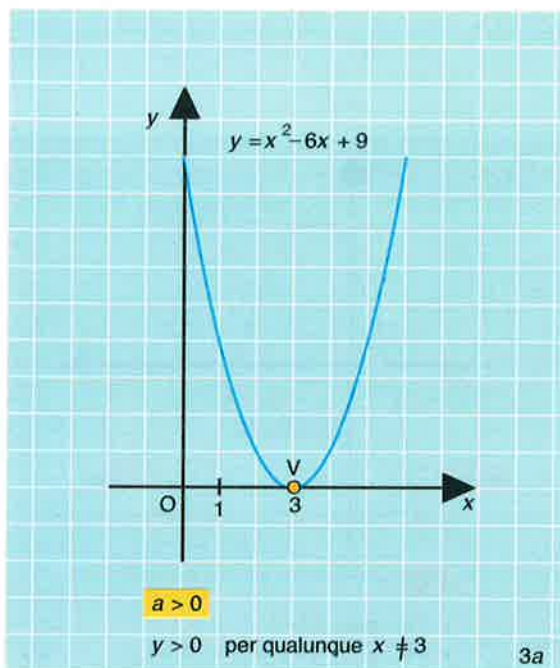
$$y < 0 \text{ per qualunque valore di } x \neq 3$$

ossia:

$$x^2 - 6x + 9 < 0 \text{ per qualunque valore di } x \neq 3$$

Le considerazioni svolte hanno carattere generale e si possono riassumere nella seguente regola: *un trinomio di 2° grado con due radici reali e coincidenti  $x_1 = x_2$  mantiene il segno del coefficiente  $a$  per qualunque valore reale di  $x \neq x_1$ .*

**Figura 3**  
Il segno di un trinomio con due radici reali e coincidenti



### III. Segno di un trinomio con le radici reali e distinte

#### A. Coefficiente $a > 0$

Presenta invece una maggior varietà di situazioni il trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (7)$$

che ha:

- il coefficiente  $a=1>0$ ;
- le due radici reali e distinte  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$ .

La parabola corrispondente è rappresentata in fig. 4a e presenta le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva taglia l'asse delle  $x$  nei punti A(-1; 0) e B(3; 0).

Il grafico mostra dunque una parabola che si trova in parte sopra e in parte sotto l'asse delle  $x$ . Osserviamo prima di tutto l'arco al disotto dell'asse delle  $x$  (in rosso in fig. 4a); quest'arco è formato da punti che presentano le seguenti caratteristiche:

- hanno tutti l'ordinata  $y$  negativa, dato che si trovano al disotto dell'asse delle  $x$ ;
- hanno le ascisse che «riempiono» sull'asse delle  $x$  il segmento che è delimitato dalle due radici e può essere descritto dalla formula:

$$-1 < x < 3$$

Si possono sintetizzare queste osservazioni scrivendo che risulta:

$$y < 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

Occupiamoci ora dei punti della parabola che si trovano al disopra dell'asse delle  $x$  e perciò

hanno l'ordinata  $y$  positiva.

Questi punti si trovano su due archi di parabola (in blu in fig. 4a) e perciò le loro ascisse riempiono sull'asse delle  $x$  due semirette ben separate:

- una semiretta è delimitata a destra dalla radice più piccola (cioè -1) e può essere descritta dalla formula:

$$x < -1$$

- l'altra semiretta è delimitata a sinistra dalla radice più grande (cioè 3) e può essere descritta dalla formula:

$$x > 3$$

Queste osservazioni si riassumono scrivendo che risulta:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 3$$

Dunque, per il trinomio (7) con le due radici reali e distinte  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$ , risulta:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 3$$

$$y < 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

ossia:

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 3$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

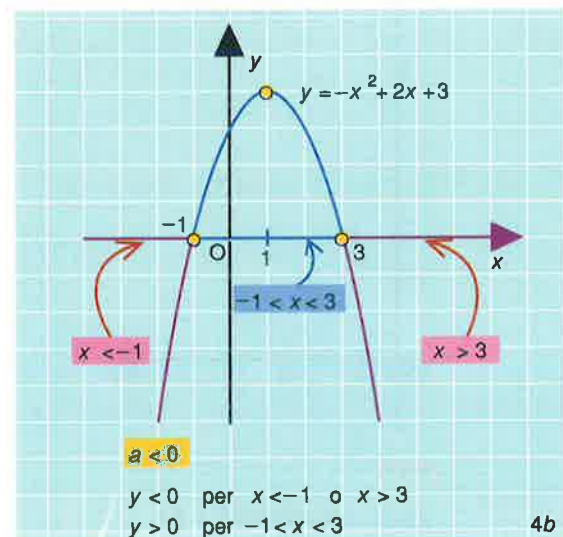
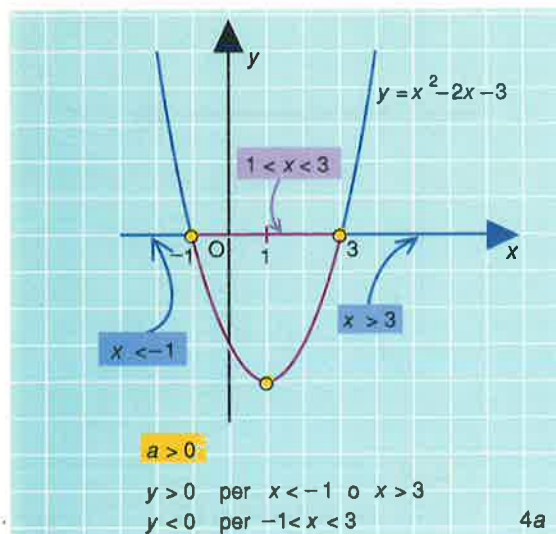
#### B. Coefficiente $a < 0$

Si possono ora ripetere considerazioni analoghe, pur con qualche indispensabile modifica, per esaminare il trinomio:

$$y = -x^2 + 2x + 3 \quad (8)$$

che è rappresentato in fig. 4b e presenta le seguenti caratteristiche:

Figura 4  
Il segno di un trinomio con le radici reali e distinte



- il coefficiente  $a = -1 < 0$ ;  
 - le due radici reali e distinte  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$ .  
 Anche questa parabola taglia l'asse delle  $x$  e perciò si trova in parte sopra e in parte sotto l'asse delle  $x$ ; ora risulta però:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

$$y < 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 3$$

ossia:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

$$-x^2 + 2x + 3 < 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 3$$

Per riassumere questo terzo caso con una regola più facile da ricordare, si chiama *intervallo delimitato dalle radici* o *intervallo delle radici* il segmento formato dai numeri  $x$  per cui risulta:

$$-1 < x < 3$$

Così si può dare la seguente regola generale: *un trinomio di 2° grado con due radici reali e distinte ha:*

- il segno opposto a quello del coefficiente  $a$  per qualunque valore reale di  $x$  contenuto nell'intervallo delle radici;
- lo stesso segno del coefficiente  $a$  per qualunque valore reale di  $x$  esterno all'intervallo delle radici.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado senza radici reali.
- ② Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado con le radici reali e coincidenti.
- ③ Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado con le radici reali e distinte.

### Comprensione

- ① Spiegare il significato della frase «stabilire il segno di un trinomio di 2° grado».
- ② Spiegare perché il grafico della parabola permette di determinare il segno di un trinomio di 2° grado, portando degli esempi diversi da quelli presentati nel testo.
- ③ Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori.
  - a. Il trinomio  $y = x^2 + x + 1$  non ha soluzioni reali, perciò non è possibile studiarne il segno.
  - b. Il trinomio  $y = x^2 - 2x + 1$  ha le soluzioni  $x_1 = x_2 = 1$ , perciò risulta:  
 $y > 0$  per  $x > 1$
  - c. Il trinomio  $y = x^2 - 3x$  ha le soluzioni

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 3, \text{ perciò risulta:}$$

$$y > 0 \quad \text{per} \quad 3 < x < 0$$

### Applicazioni

- ① Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:  
 $y = 2x^2 - x + 1$        $y = -2x^2 + x - 1$
- ② Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:  
 $y = 4x^2 - 4x + 1$        $y = -4x^2 + 4x - 1$
- ③ Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:  
 $y = 2x^2 - 3x + 1$        $y = -2x^2 + 3x - 1$

### Collegamenti con i paragrafi 3 e 5 di questo capitolo

- ① Spiegare perché non hanno radici reali i trinomi  
 $y = -x^2 + 2x - 5$        $y = x^2 - 2x + 5$
- ② Spiegare perché hanno le radici reali e coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$  i trinomi  
 $y = x^2 - 6x + 9$        $y = -x^2 + 6x - 9$
- ③ Spiegare perché hanno le radici reali e distinte  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$  i trinomi  
 $y = x^2 - 2x - 3$        $y = -x^2 + 2x + 3$

### Collegamenti col primo volume

- ① Spiegare come si stabilisce l'ordinata  $y$  di un punto del piano cartesiano.  
*(Vedere pp. 330-332)*
- ② Spiegare perché la formula  
 $x < -1$   
 descrive sull'asse delle  $x$  la semiretta che è delimitata a destra dal numero  $-1$ .  
*(Vedere pp. 88-90)*
- ③ Spiegare perché la formula  
 $x > 3$   
 descrive sull'asse delle  $x$  la semiretta che è delimitata a sinistra dal numero  $3$ .  
*(Vedere pp. 88-90)*
- ④ Spiegare perché la formula  
 $-1 < x < 3$   
 descrive sull'asse delle  $x$  il segmento delimitato a sinistra dal numero  $-1$  e a destra dal numero  $3$ .  
*(Vedere p. 90)*
- ⑤ Spiegare perché non si può trovare il segmento descritto dalle seguenti disuguaglianze:  
 $3 < x < -1$   
*(Vedere p. 90)*



# Le disequazioni di 2° grado

## Disequazioni di 2° grado

Nel paragrafo precedente lo studio del segno di trinomi di 2° grado ha condotto a scrivere formule come le seguenti:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \quad (2)$$

$$-x^2 + 2x - 5 > 0 \quad (3)$$

Le precedenti formule sono tutte *disequazioni di 2° grado*, cioè formule del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c < 0$$

dove  $a, b, c$  indicano tre qualunque numeri reali, scelti con l'unico vincolo che sia  $a \neq 0$ .

## Le soluzioni di una disequazione di 2° grado

Per le disequazioni di 2° grado si possono ripetere alcune delle considerazioni svolte per le disequazioni di 1° grado (vedi il primo volume, pp. 426-428); in particolare si ha che:

- le disequazioni sono delle formule che diventano proposizioni quando a  $x$  si sostituisce un numero reale; per esempio dalla (1) si ottengono le proposizioni seguenti:
  - sostituendo 0 a  $x$ :  
 $0^2 - 2 \cdot 0 - 3 < 0$     cioè     $-3 < 0$     vera
  - sostituendo 4 a  $x$ :  
 $4^2 - 2 \cdot 4 - 3 < 0$     cioè     $5 < 0$     falsa
- le soluzioni di una disequazione di 2° grado sono i numeri che, sostituiti a  $x$ , trasformano la disequazione in una proposizione vera; per esempio, 0 è una soluzione della disequazione (1), mentre 4 non lo è.

## Come si risolve una disequazione di 2° grado

Per determinare rapidamente tutte le soluzioni di una disequazione di 2° grado scritta in una delle forme seguenti:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c < 0$$

conviene procedere così:

- si studia il segno del corrispondente trinomio  $y = ax^2 + bx + c$ ;
- dai risultati ottenuti si traggono i valori di  $x$  che trasformano la disequazione in una proposizione vera.

Ecco qualche esempio.

1. Risolvere la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad (1)$$

- Si studia il segno del trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

$$\begin{array}{ll} \text{ha le radici reali} & x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3 \\ \text{ha il coefficiente} & a = 1 > 0 \end{array}$$

Il trinomio ha dunque (fig. 1):

- segno negativo quando  $x$  varia nell'intervallo delle radici;
- segno positivo quando  $x$  varia all'esterno dell'intervallo delle radici.
- La disequazione (1) richiede di determinare i valori di  $x$  che rendono il trinomio negativo, perciò tutte le soluzioni richieste sono i numeri reali che formano l'intervallo delle radici.

Si può concludere scrivendo:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

2. Risolvere la disequazione:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \quad (2)$$

- Si studia il segno del trinomio:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

ha le radici reali e coincidenti  $x_1 = x_2 = 3$

ha il coefficiente  $a = 1 > 0$

Il trinomio ha dunque segno positivo per qualunque valore reale di  $x$  diverso da 3 (fig. 2).

- La disequazione (2) richiede di determinare i valori di  $x$  che rendono il trinomio positivo, perciò le soluzioni della disequazione (2) sono tutti i numeri reali escluso 3.

Si può dunque concludere scrivendo:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \quad \text{per} \quad \text{qualunque } x \neq 3$$

3. Risolvere la disequazione:

$$-x^2 + 2x - 5 > 0 \quad (3)$$

- Si studia il segno del trinomio

$$y = -x^2 + 2x - 5$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

non ha soluzioni reali

ha il coefficiente  $a = -1 < 0$

Il trinomio ha dunque segno negativo per qualunque valore reale di  $x$  (vedi il paragrafo 6, p. 330).

- La disequazione (3) porta a cercare i valori di  $x$  che rendono il trinomio positivo, perciò la disequazione non ha soluzioni.

### Uno schema grafico per descrivere il segno di un trinomio di 2° grado

Si osserva dunque che il procedimento per risolvere le disequazioni di 2° grado è tutto basato sui risultati ottenuti studiando il segno di un trinomio di 2° grado.

Figura 1  
Il segno del trinomio  $y = x^2 - 2x - 3$

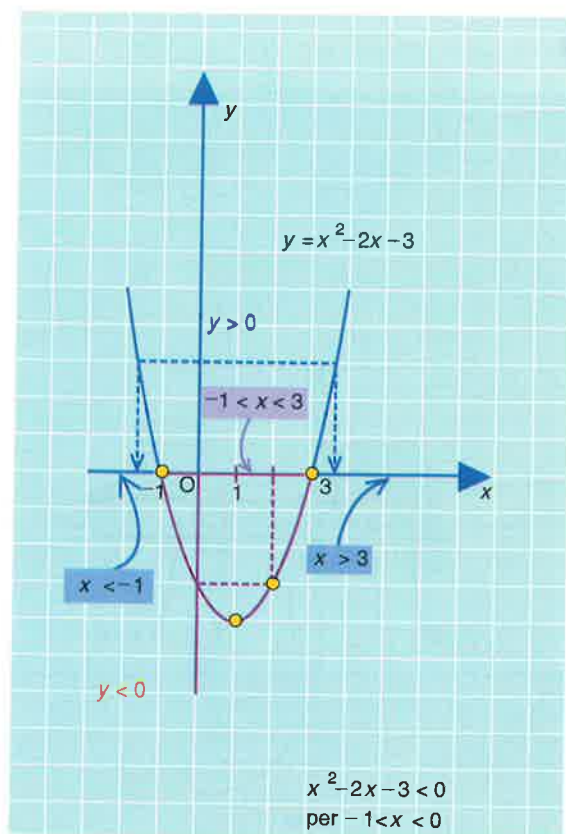
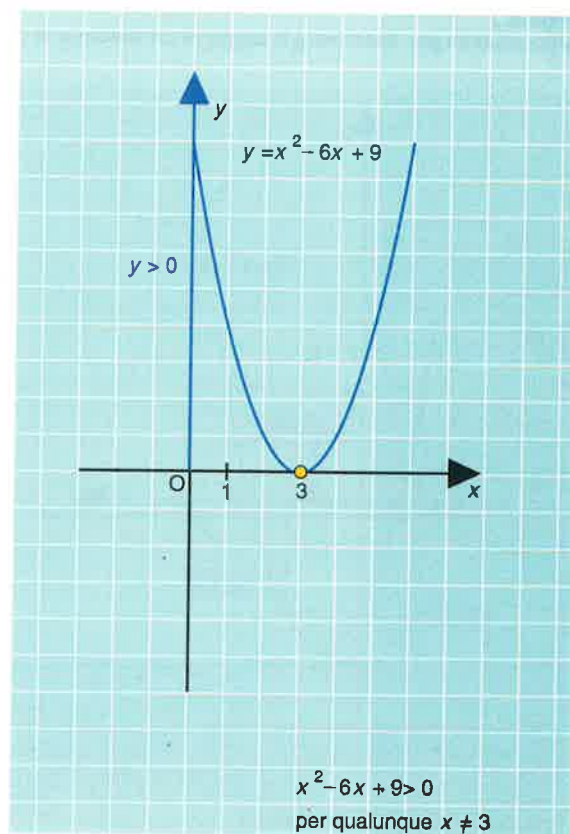


Figura 2  
Il segno del trinomio  $y = x^2 - 6x + 9$



Perciò può essere utile visualizzare questi risultati con uno schema grafico, che vediamo a partire da un esempio.  
Dopo aver studiato il segno del trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3$$

si procede nel modo seguente (fig. 3b):

- si disegna il solo asse delle  $x$ ;
- si indicano sull'asse le radici del trinomio e cioè  $-1$  e  $3$ ;
- si disegna un tratto continuo sotto i numeri che, sostituiti a  $x$ , rendono  $y > 0$ ;
- si disegna una linea tratteggiata sotto i numeri che, sostituiti a  $x$ , rendono  $y < 0$ ;
- si disegna un grosso punto in corrispondenza delle due radici del trinomio, cioè dei numeri che, sostituiti a  $x$ , rendono  $y = 0$ .

In questo modo si vedono subito le soluzioni di una disequazione; per esempio:

- la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

ha come soluzioni i numeri indicati dalla linea continua;

- la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

ha come soluzioni i numeri indicati dalla linea tratteggiata.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Che cos'è una disequazione di 2° grado?
- ② Che cosa sono le soluzioni di una disequazione di 2° grado?
- ③ Come si risolve una disequazione di 2° grado?

### Comprensione

- ① Portare qualche esempio di disequazione di 2° grado che non ha soluzioni.

### Applicazioni

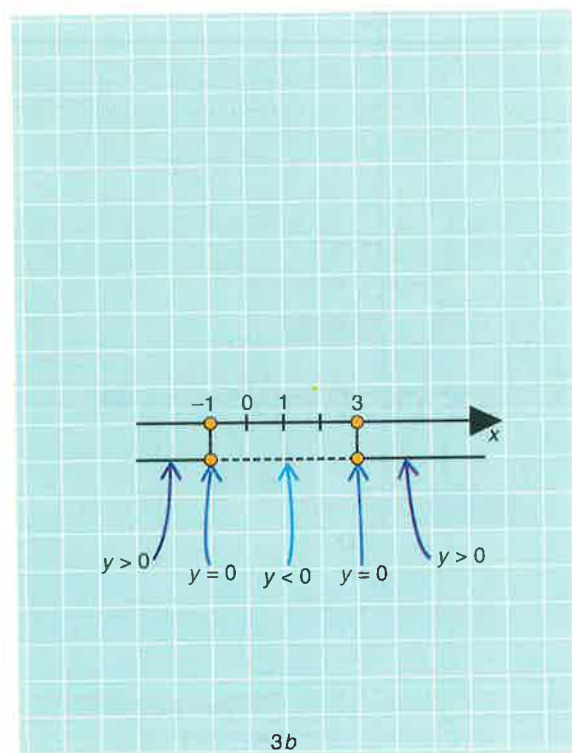
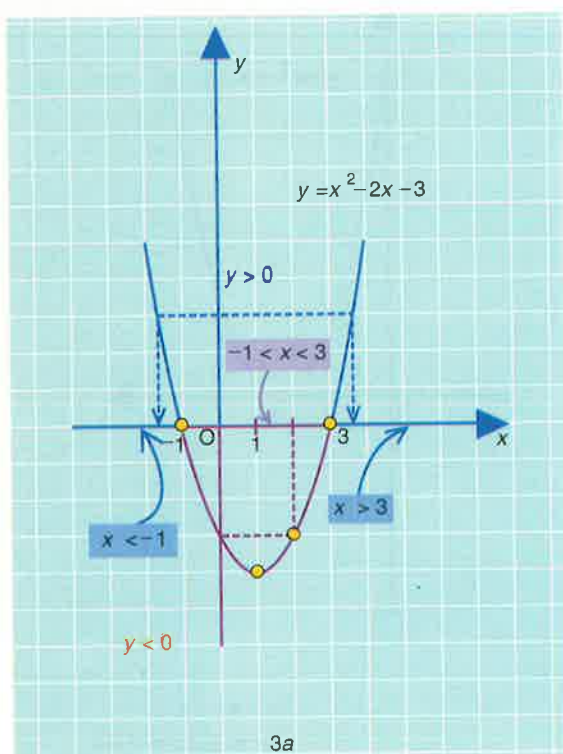
- ① Risolvere le seguenti disequazioni:

$$x^2 - 6x + 9 < 0 \quad x^2 - 2x + 5 > 0$$

- ② Risolvere le seguenti disequazioni:

$$-x^2 + 2x + 3 < 0 \quad -x^2 + 2x + 3 > 0$$

**Figura 3**  
Uno schema per descrivere il segno di un trinomio di 2° grado



# Equazioni e disequazioni equivalenti

## Dal grafico di parabole a equazioni di 2° grado equivalenti

In fig. 1 sono rappresentate le tre parabole seguenti:

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (1)$$

$$y = 2x^2 - 4x - 6 \quad (2)$$

$$y = -x^2 + 2x + 3 \quad (3)$$

Le tre curve intersecano l'asse delle  $x$  negli stessi punti:

$$A(-1; 0) \quad B(3; 0)$$

Questo significa che le tre equazioni:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (4)$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad (5)$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (6)$$

hanno tutte le stesse soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Equazioni che hanno le stesse soluzioni si dicono *equivalenti*, perciò le equazioni (4), (5) e (6) sono equivalenti.

È immediato osservare che queste tre equazioni possono anche presentarsi nella forma:

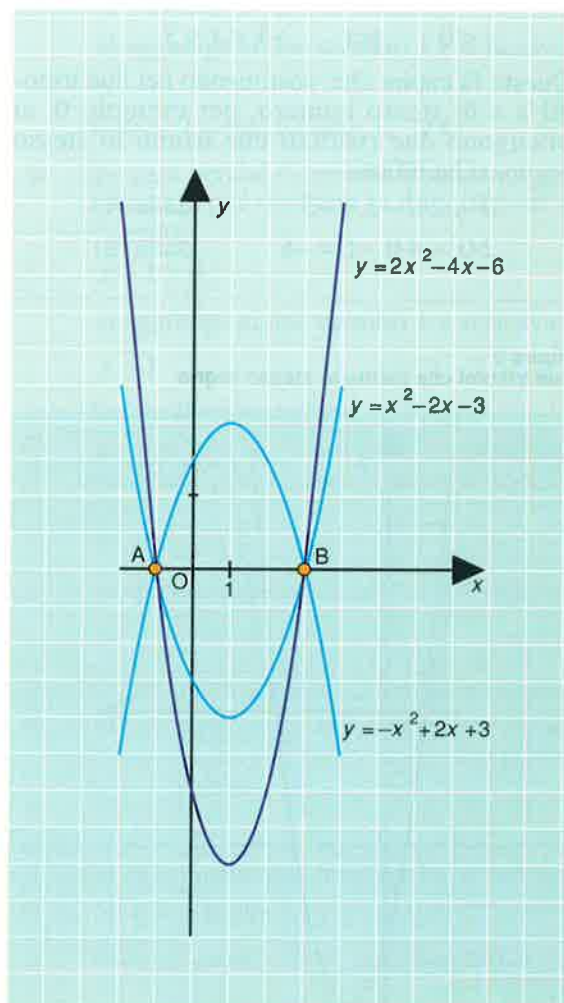
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 2x - 3) = 2 \cdot 0$$

$$(-1)(x^2 - 2x - 3) = (-1) \cdot 0$$

Si ritrova così un noto risultato (vedi il primo volume, p. 374): *moltiplicando i due membri di un'equazione per uno stesso numero si ottiene un'equazione equivalente.*

**Figura 1**  
Tre parabole che tagliano l'asse delle  $x$  negli stessi due punti





# Studiare il segno di un trinomio e risolvere disequazioni di 2° grado

## Attività 1

Studiare il segno del trinomio:

$$y = 2x^2 - x + 3 \quad (1)$$

Completare il procedimento seguente:

1. Si calcola il discriminante  $\Delta$  dell'equazione:

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

e si ottiene:

$$\Delta = \dots\dots\dots = \dots\dots < 0$$

Si conclude che il trinomio  $2x^2 - x + 3$  non ha .....

2. A questo punto si hanno le due alternative seguenti:

A. si traccia il grafico della parabola (1);

B. si ricordano a memoria le conclusioni indicate nel paragrafo 6.

A. Per tracciare il grafico necessario a studiare il segno del trinomio  $2x^2 - x + 3$ , basta tenere presente che:

- il coefficiente  $a = \dots > 0$  e perciò la parabola ha la concavità rivolta verso .....

- risulta  $\Delta < 0$  e perciò la parabola non ..... l'asse delle  $x$ .

Fra le parabole di fig. 1 scegliere quella che può rappresentare il trinomio dato motivando la scelta.

Si conclude che il trinomio ha sempre segno .....

B. Si ricorda che un trinomio senza radici reali ha il segno del ..... e perciò il trinomio dato ha sempre segno .....

3. Il risultato ottenuto può essere schematizzato con il procedimento indicato nel paragrafo 8. Fra gli schemi di fig. 2 scegliere quello che visualizza questo risultato, motivando la scelta.

## Attività 2

Dopo aver svolto l'attività 1, risolvere le due disequazioni seguenti:

$$2x^2 - x + 3 > 0$$

$$2x^2 - x + 3 < 0$$

Completare il procedimento seguente:

- La disequazione:

$$2x^2 - x + 3 > 0$$

ha per soluzioni tutti i ..... , dato che il trinomio

$$y = 2x^2 - x + 3$$

..... ,

- La disequazione:

$$2x^2 - x + 3 < 0$$

non ha ..... , dato che .....

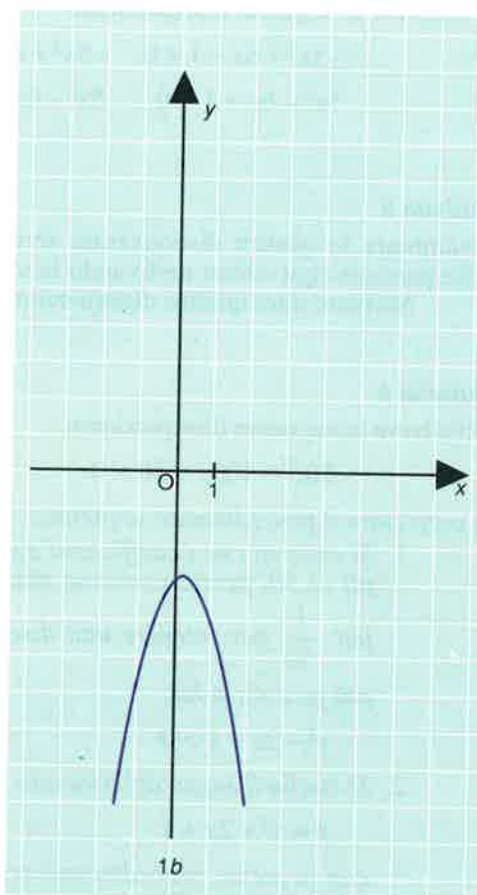
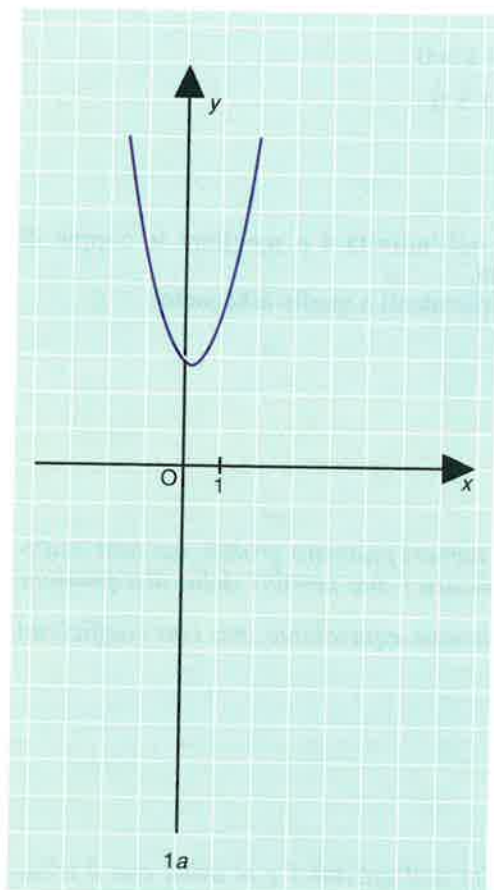


Figura 1  
Scegliere la parabola che può rappresentare il trinomio  $y = 2x^2 - x + 3$

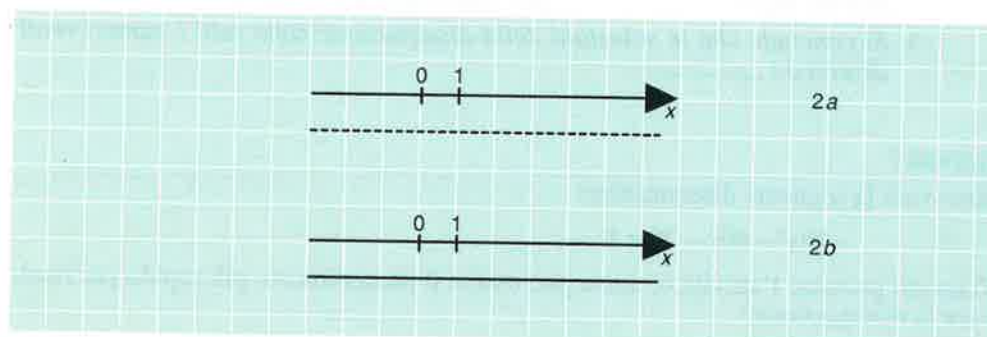


Figura 2  
Scegliere lo schema che visualizza il segno del trinomio  $y = 2x^2 - x + 3$

### Attività 3

Studiare il segno del trinomio:

$$y = -2x^2 + x - 3 \quad (2)$$

e risolvere le due disequazioni:

$$-2x^2 + x - 3 < 0 \quad -2x^2 + x - 3 > 0$$

### Attività 4

Studiare il segno dei due trinomi:

$$y = -5x^2 + 6x - 1 \quad (3)$$

$$y = 5x^2 - 6x + 1 \quad (4)$$

e risolvere le seguenti disequazioni:

$$-5x^2 + 6x - 1 < 0 \quad -5x^2 + 6x - 1 > 0$$

$$5x^2 - 6x + 1 < 0 \quad 5x^2 - 6x + 1 > 0$$

### Attività 5

Esaminare le quattro disequazioni scritte nell'attività 4 e scegliere le coppie di disequazioni equivalenti motivando la scelta.

Scrivere altre quattro disequazioni equivalenti a quelle assegnate.

### Attività 6

Risolvere la seguente disequazione:

$$50x^2 - 100x + 50 > 0$$

Completare il procedimento seguente:

1. Si osserva che i coefficienti sono numeri piuttosto grandi, ma tutti multipli di 50, perciò conviene moltiplicare i due membri della disequazione per  $\frac{1}{50}$  per ottenere una disequazione equivalente, ma con coefficienti più piccoli; si ha:

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

2. Si studia il segno del trinomio:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

con lo stesso procedimento seguito nell'attività 1 e si trova che il trinomio ha segno ..... per qualunque  $x \neq$  .....

3. Si conclude che le soluzioni della disequazione sono tutti i numeri reali diversi da .....

### Attività 7

Risolvere la seguente disequazione:

$$-20x^2 - 40x - 20 < 0$$

Tenendo presente l'attività 6, quale può essere il procedimento più rapido per risolvere la disequazione?

## Equazioni e disequazioni di 2° grado nella fisica

Nella fisica spesso si ricorre alla risoluzione di equazioni e disequazioni di 2° grado per risolvere vari problemi. In questa scheda si trovano alcuni di questi problemi, legati in particolare al movimento ad accelerazione costante.

### La caduta libera

Un sasso viene lasciato cadere dall'alto di una roccia (fig. 1); in tal caso, trascurando la resistenza dell'aria, la distanza  $s$  del corpo dal punto di caduta  $R$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \quad (1)$$

dove la lettera  $a$  indica l'accelerazione di gravità che, sulla Terra, vale  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Delle tre grandezze  $s$ ,  $a$  e  $t$  che compaiono nella legge (1), soltanto il tempo  $t$  compare al 2° grado; perciò si ottiene un problema che conduce ad un'equazione di 2° grado nel modo seguente:

- sono date  $s$  e  $a$ ;
- si deve ricavare  $t$ .

Ecco due problemi di questo tipo.

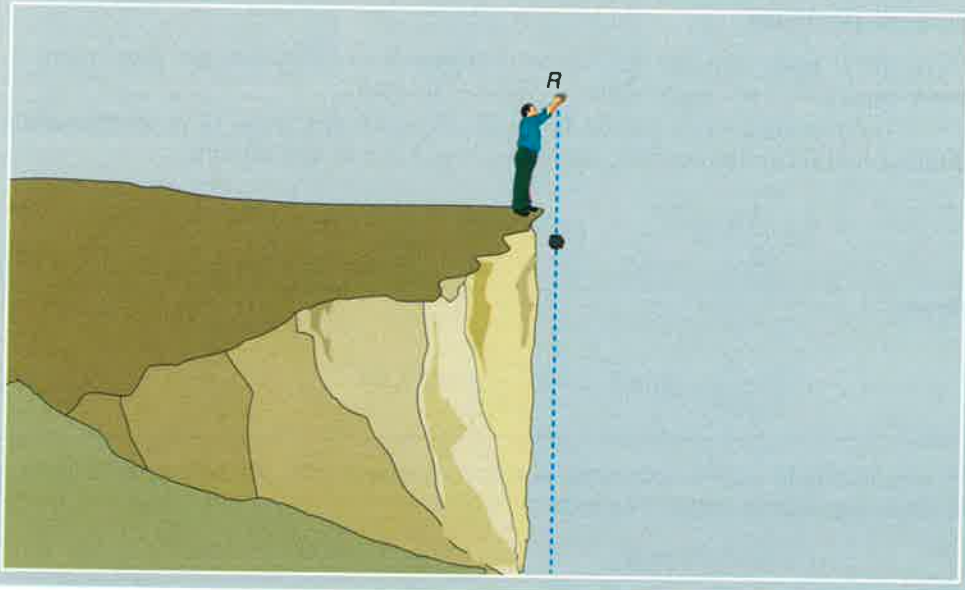


Figura 1  
La caduta libera  
di un sasso



### Primo problema

Quanto tempo impiega il sasso a percorrere una distanza lunga 1 metro?  
Sono dati:

$$s = 1 \quad a = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Perciò la (1) diventa:

$$1 = \frac{1}{2} 9,8 t^2 \quad \text{ossia} \quad 4,9 t^2 = 1$$

Si tratta di un'equazione di 2° grado incompleta, in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera  $t$ , invece che dalla lettera  $x$ .

Questo fatto non altera di certo il procedimento risolutivo, che può essere il seguente (vedi anche l'«Attività» di p. 310):

- si moltiplicano i due membri per  $\frac{1}{4,9}$  e si ha:

$$t^2 = \frac{1}{4,9}$$

- si estrae la radice quadrata e si ottiene:

$$t = \pm \sqrt{\frac{1}{4,9}} \cong \pm 0,45$$

Delle due soluzioni solo quella positiva può essere la misura di un tempo trascorso, e quindi si conclude che, per percorrere 1 metro, il corpo impiega un tempo  $t$  dato approssimativamente da:

$$t \cong 0,45 \text{ secondi}$$

### Secondo problema

Dato che il sasso impiega 0,45 secondi a percorrere 1 metro, per percorrere 2 metri impiegherà un tempo doppio, cioè 0,9 secondi?

La risposta è «no» perché la legge (1) non è una legge di proporzionalità diretta (vedi il capitolo quinto, paragrafo 2, p. 176); si trova infatti:

$$2 = \frac{1}{2} 9,8 t^2 \quad \text{ossia} \quad 4,9 t^2 = 2$$

da cui:

$$t^2 = \frac{2}{4,9} \quad \text{e quindi} \quad t = \pm \sqrt{\frac{2}{4,9}} \cong \pm 0,64$$

E, considerando solo la soluzione positiva, si ricava che, per percorrere 2 metri, il sasso impiega un tempo  $t$  dato da:

$$t \cong 0,64 \text{ secondi}$$

### Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto

A partire dallo stesso punto R (fig. 2) un sasso viene lanciato in direzione verticale verso l'alto con una velocità iniziale indicata con la lettera  $v_0$  (che si legge «vu con zero»).

In tal caso, sempre trascurando la resistenza dell'aria, la distanza  $s$  del corpo dal punto R varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad (2)$$

Fissiamo il valore dell'accelerazione di gravità, che sulla Terra vale  $9,8 \text{ m/s}^2$ , e fissiamo anche il valore della velocità iniziale, per esempio  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ .

La legge (2) diventa:

$$s = -4,9t^2 + 10t \quad (3)$$

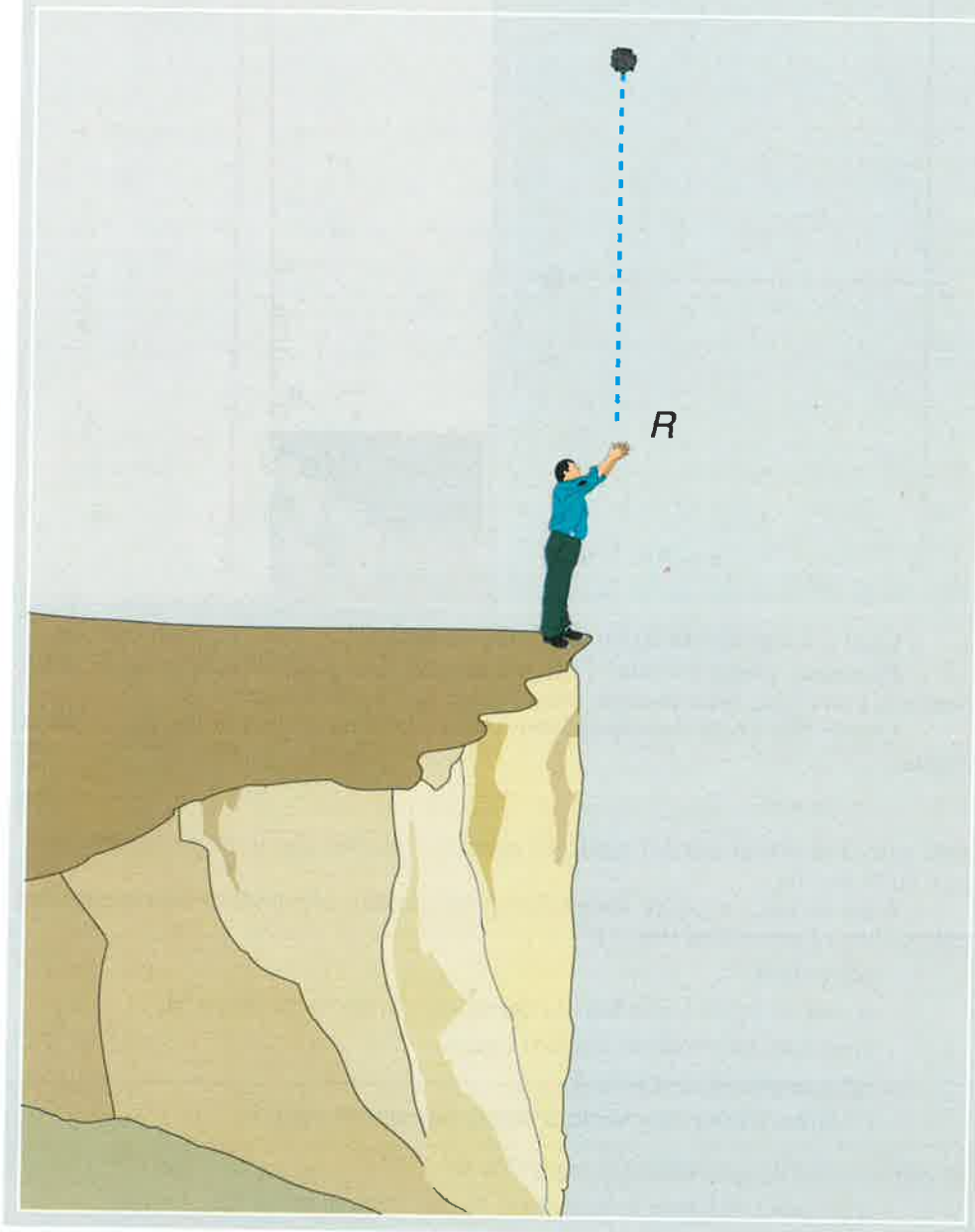
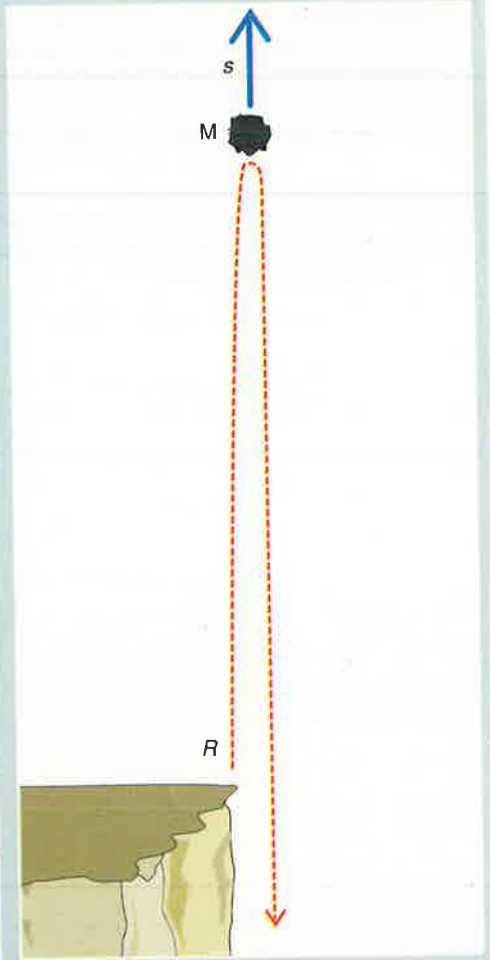
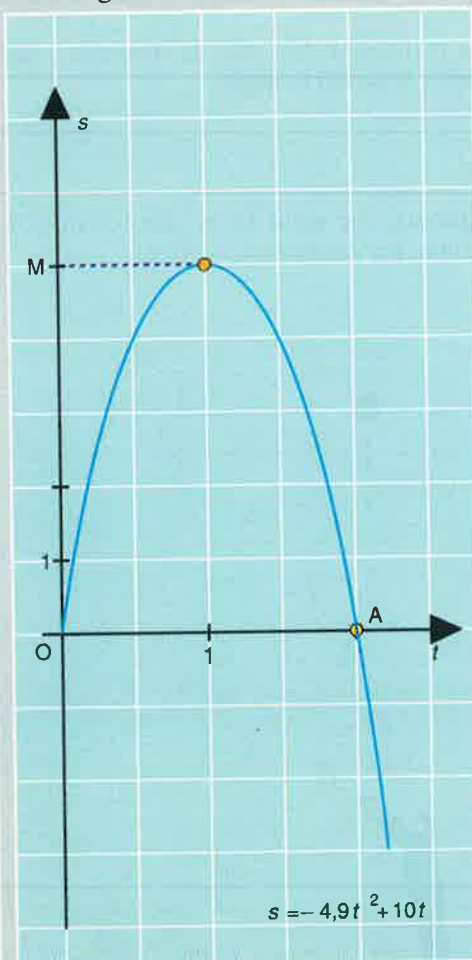


Figura 2  
Un sasso lanciato  
verticalmente verso l'alto

È interessante rappresentare questa legge sul piano cartesiano, tenendo presente che il tempo  $t$  può assumere solo valori positivi: si otterrà la parabola rappresentata in fig. 3.

**Figura 3 (a sinistra)**  
La legge del movimento  
ad accelerazione costante

**Figura 4 (a destra)**  
Il movimento  
ad accelerazione costante



Qual è il significato fisico del grafico ottenuto?

Fissiamo prima di tutto l'attenzione sui due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse: sono i punti O e A della figura.

Questi due punti corrispondono a una particolare situazione: per il sasso risulta:

$$s = 0$$

cioè vale 0 la distanza  $s$  dal punto R; questo vuol dire che il corpo si trova proprio sulla roccia.

Così si riesce a capire il significato del grafico, seguendo il movimento del sasso, che si muove così (fig. 4):

- parte da R;
- si muove verso l'alto fino a raggiungere la quota massima M;
- discende, muovendosi verso il basso;
- ripassa per la posizione R;
- continua a muoversi verso il basso, trovandosi sotto R.

Si capisce così il significato dei punti O e A:

- il punto O descrive la situazione di partenza, in cui si ha:

- $s = 0$ , cioè il corpo si trova sulla roccia R;
- $t = 0$ , cioè è appena scattato il cronometro.
- il punto A descrive la situazione in cui il corpo ripassa per la posizione R; in tal caso si ha:
  - $s = 0$ , perché il corpo si trova a distanza 0 dalla roccia R;
  - non si conosce, tuttavia, il tempo trascorso.

Ecco allora alcuni problemi che si pongono su questa situazione.

### **Terzo problema**

*Quanto tempo impiega il sasso a ripassare per il punto di lancio?*

Si tratta di risolvere l'equazione:

$$0 = -4,9t^2 + 10t$$

È ancora un'equazione di 2° grado incompleta, in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera  $t$ , invece che dalla lettera  $x$ .

Questo fatto non altera il procedimento risolutivo, che può essere il seguente (vedi anche l'«Attività» di p. 310):

- nel secondo membro si raccoglie il fattore comune  $t$  e si ha:

$$0 = t(-4,9t + 10)$$

- si tiene presente la legge di annullamento del prodotto e si ricava che deve essere:

$$t = 0 \quad \text{oppure} \quad -4,9t + 10 = 0$$

- le due soluzioni sono dunque:

$$t_1 = 0$$

che caratterizza il punto O, cioè il momento del lancio;

$$t_2 = \frac{10}{4,9} \cong 2$$

che indica appunto il tempo trascorso quando il sasso ripassa per il punto di lancio.

### **Quarto problema**

*In quali istanti il sasso rimane al disopra del punto di lancio?*

Si tratta ora di esaminare la situazione (figure 3 e 4), notando che:

$s > 0$  significa che il sasso si trova al disopra del punto di lancio;

$s < 0$  significa che il sasso si trova al disotto del punto di lancio.

Si è condotti perciò ad esaminare il segno del trinomio:

$$s = -4,9t^2 + 10t \quad (3)$$

rappresentato graficamente in fig. 3.

Avendo appena trovato che il trinomio (3) ha le radici reali e distinte:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 \cong 2$$

si può concludere che il sasso si trova al disopra del punto di lancio, cioè si ha:

$$s > 0$$

nell'intervallo di tempo:

$$0 < t < 2$$



## Relazioni di equivalenza

Il termine «equivalente» ricorre spesso in questo volume e in quello precedente; si è detto che:

- a. sono equivalenti due equazioni con le stesse soluzioni;
- b. sono equivalenti due disequazioni con le stesse soluzioni;
- c. sono equivalenti due frazioni che danno luogo allo stesso punto sulla retta;
- d. sono equivalenti due poligoni somma o differenza di poligoni uguali.

Si trova dunque lo stesso termine «equivalente» in contesti molto diversi.

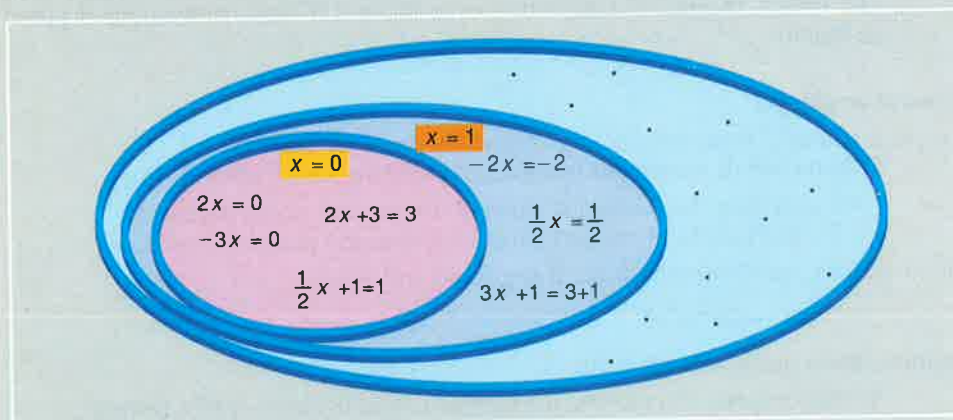
Tuttavia, dai vari contesti sembra emergere un analogo intento: classificare gli elementi di un insieme, in modo da poterli esaminare più facilmente.

Per esempio, sono moltissime le equazioni di 1° grado che si possono scrivere, ma ci si può orientare più facilmente in questo vasto insieme se le equazioni vengono classificate in base alla loro soluzione (fig. 1). Il procedimento di risoluzione consisterà poi nel cercare l'equazione che è equivalente a quella data, ma è scritta nella forma più semplice.

E così, classificando le frazioni in base alla loro rappresentazione sulla retta, è più facile orientarsi nel vasto insieme dei numeri razionali, e scegliere in ogni occasione la frazione più conveniente.

Cerchiamo ora di capire che cosa accomuna questi procedimenti di classificazione.

Figura 1  
Una classificazione delle equazioni di 1° grado



### Una relazione di equivalenza in un insieme

Cominciamo a riflettere sulla classificazione delle equazioni di 1° grado in base alla soluzione; questa classificazione si basa su un semplice procedimento: si esaminano due equazioni, fissando l'attenzione su una sola caratteristica e cioè la soluzione.

Si ignorano invece tutte le altre caratteristiche, come i coefficienti, la lettera che indica l'incognita, e così via.

Si trovano così due soli casi possibili: le due equazioni hanno la stessa soluzione oppure questo non si verifica; nel primo caso vengono accomunate nella stessa classe (fig.1), nel secondo caso vengono inserite in due classi diverse.

In questo modo si stabilisce nell'insieme delle equazioni di 1° grado *una relazione*; più precisamente si tratta della relazione espressa dalla frase «avere la stessa soluzione».

Ed è proprio su questa relazione che è basata tutta la classificazione. Il processo di classificazione viene reso più rapido dalle seguenti tre proprietà della relazione stabilita.

- I.** Ogni coppia di equazioni va esaminata una volta sola, perché il fatto che un'equazione è equivalente ad una seconda equazione, implica sempre che anche la seconda è equivalente alla prima.

Ecco un esempio: dire che  $2x = 0$  è equivalente a  $x = 0$  implica che  $x = 0$  è equivalente a  $2x = 0$  e viceversa, cioè:

$$2x = 0 \text{ equivalente } x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ equivalente } 2x = 0$$

Questa proprietà prende il nome di *proprietà simmetrica*.

- II.** L'esame delle equazioni diventa ancora più rapido valendosi della seguente proprietà: il fatto che un'equazione è equivalente ad una seconda e la seconda è equivalente ad una terza, implica sempre che anche prima e terza sono equivalenti. Ecco un esempio:

$$x = 0 \text{ equivalente a } 2x = 0 \text{ e } 2x = 0 \text{ equivalente a } 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \text{ equivalente a } 2x + 3 = 3$$

Questa proprietà prende il nome di *proprietà transitiva*, perché l'equivalenza sembra «transitare», cioè passare dalla prima alla terza equazione.

- III.** Infine si può classificare anche una sola equazione, perché ogni equazione ha la stessa soluzione di se stessa, cioè ogni equazione è equivalente a se stessa; si trova così anche *la proprietà riflessiva*.

Le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva caratterizzano una *relazione di equivalenza*, permettendo un processo di classificazione rapido ed efficiente.

Queste considerazioni possono essere generalizzate dicendo che: *si stabilisce in un insieme una relazione di equivalenza se valgono le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva*.

È facile ora scoprire che le tre proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva) sono valide anche per le altre relazioni elencate all'inizio e si possono scoprire anche altre relazioni di equivalenza; per esempio l'uguaglianza fra le figure piane.

### Relazioni che non sono di equivalenza

Ma non tutte le relazioni in un insieme sono relazioni di equivalenza. Ecco un primo «controesempio»: nell'insieme dei numeri reali si può stabilire la relazione «essere maggiore»; per questa relazione non si trova la proprietà riflessiva (un numero non è maggiore di se stesso).

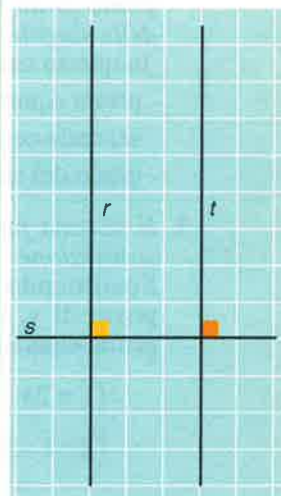
Inoltre, non si trova neanche la proprietà simmetrica; per esempio:

$$5 > 3 \text{ non implica } 3 > 5!$$

E ancora, nell'insieme delle rette del piano, per la relazione «essere perpendicolari» non si trova la proprietà riflessiva (una retta non è perpendicolare a se stessa) e **non** si trova neanche la proprietà transitiva (fig. 2):

$r$  perpendicolare a  $s$  e  $s$  perpendicolare a  $t$  non implica  $r$  perpendicolare a  $t$ . Si ha invece che  $r$  è parallela a  $t$ .

**Figura 2**  
La relazione di perpendicolarità non è transitiva



# I sistemi di 2° grado

## L'intersezione fra due rette e un sistema di 1° grado

La fig. 1 ricorda i seguenti risultati ottenuti nel primo volume (pag. 395-397):

1. Per calcolare le coordinate del punto d'intersezione A fra due rette si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

Le due rette di fig. 1 hanno le seguenti equazioni:

$$y = 2x \qquad y = -3x + 5$$

Il sistema formato dalle due equazioni si scrive nel modo seguente:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

2. Il sistema ottenuto è di 1° grado, perché il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

In questo caso si ha infatti:

- prima equazione di 1° grado;
- seconda equazione di 1° grado;
- grado del sistema =  $1 \cdot 1 = 1$ .

3. Il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione.

Sostituendo nella seconda equazione, al posto di  $y$ , l'espressione  $2x$  fornita dalla prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -3x + 5 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa così un'equazione di 1° grado in un'incognita, equazione che si risolve facilmente ottenendo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 5x = 5 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \end{cases}$$

Per ottenere poi il valore di  $y$ , basta sostituire, nella prima equazione, il valore di  $x$  appena ottenuto; si trova dunque che la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (1; 2)$$

4. La soluzione del sistema di 1° grado è una coppia ordinata di numeri tali che, sostituendo il primo numero a  $x$  ed il secondo numero a  $y$ , le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

Nel caso assegnato si ha infatti che:

$$(1; 2) \text{ è la soluzione di } \begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

$$\text{perché risulta } \begin{cases} 2 = 2 \cdot 1 \\ 2 = -3 \cdot 1 + 5 \end{cases}$$

## Le intersezioni di una parabola con una retta e un sistema di 2° grado

In fig. 2 sono rappresentate la retta e la parabola che hanno le seguenti equazioni:

$$y = 2x - 3 \qquad y = x^2 - 2x - 3$$



La figura mostra che le curve si incontrano in due punti A e B; come si possono determinare le coordinate di questi due punti?

Anche in questo caso un punto di intersezione deve trovarsi su entrambe le curve e perciò deve avere le coordinate che soddisfano entrambe le equazioni; dunque si avrà ancora che:

1. Le coordinate dei punti d'intersezione fra la retta e la parabola si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due curve.

Il sistema si scriverà nel modo seguente:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

2. Il sistema ottenuto è di 2° grado, dato che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

In questo caso si ha infatti:

- prima equazione di 1° grado;
- seconda equazione di 2° grado;
- grado del sistema =  $1 \cdot 2 = 2$ .

3. Il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione.

Sostituendo nella seconda equazione, al posto di  $y$ , l'espressione  $2x-3$  fornita dalla prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa così un'equazione di 2° grado in un'incognita, equazione che si risolve facilmente, purché venga scritta nella forma:

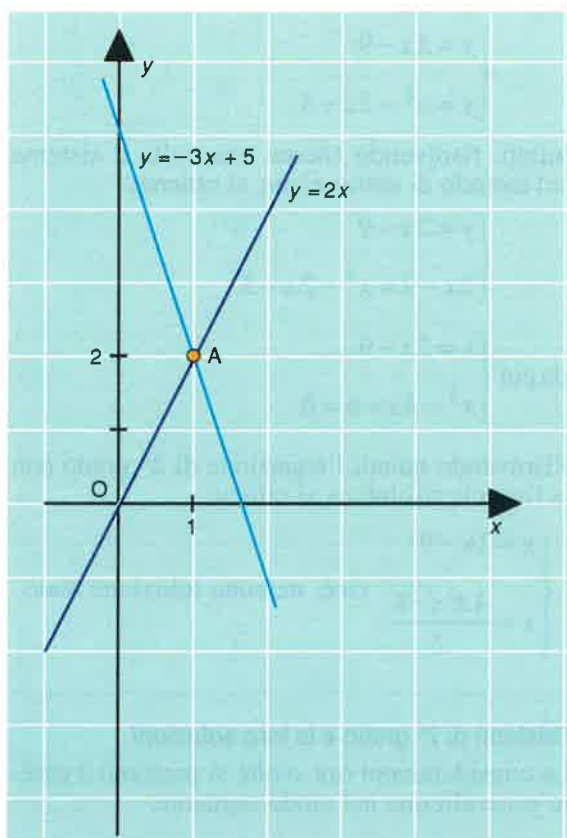
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per questo basta sottrarre ai due membri dell'equazione l'espressione  $2x-3$ ; si ottiene:

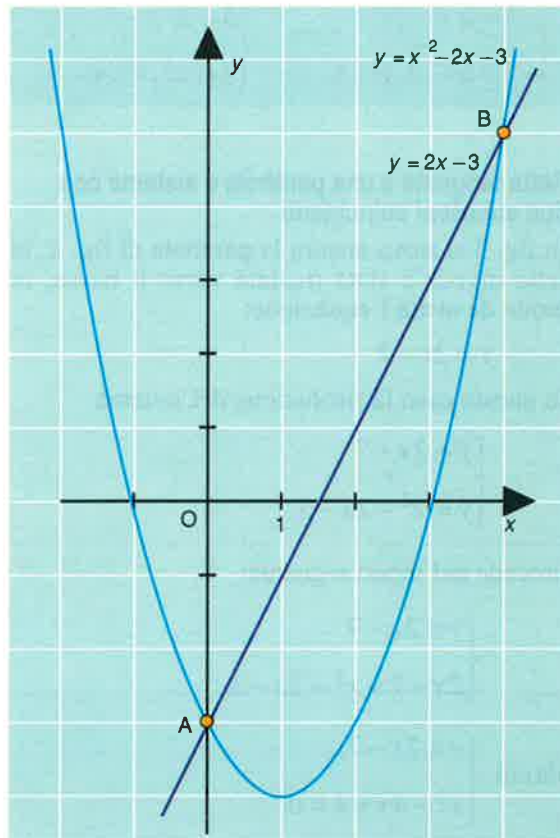
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

Risolvendo quindi l'equazione incompleta ottenuta (vedi p. 310), si ottengono le due ascisse dei punti d'intersezione; si ha:

**Figura 1**  
Il punto di intersezione fra due rette



**Figura 2**  
I punti di intersezione fra una retta e una parabola





$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x(x - 4) = 0 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \end{cases}$$

Per ottenere poi il valore delle ordinate basta sostituire i valori di  $x$  appena ottenuti nella prima equazione; le soluzioni del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

ossia  $A(0; -3)$   $B(4; 5)$

4. Le soluzioni del sistema di 2° grado sono due coppie ordinate di numeri tali che, sostituendo il primo numero a  $x$  e il secondo numero a  $y$ , le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

Nel caso assegnato si ha infatti che le due coppie di numeri sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

dato che risulta:

Per la coppia (0; -3)	Per la coppia (4; 5)
$\begin{cases} -3 = 2 \cdot 0 - 3 \\ -3 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 5 = 2 \cdot 4 - 3 \\ 5 = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 \end{cases}$

#### Retta tangente a una parabola e sistema con due soluzioni coincidenti

In fig. 3 si trova ancora la parabola di fig. 2; la retta invece è stata traslata verso il basso, in modo da avere l'equazione:

$$y = 2x - 7$$

In questo caso la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

procede nel modo seguente:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x - 7 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

da cui 
$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado con la formula risolutiva, si ha:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} y = 2x - 7 \\ x_1 = x_2 = 2 \end{cases}$$

In conclusione, le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = -3 \\ x_1 = x_2 = 2 \end{cases}$$

ossia  $T(2; -3)$  contato due volte

Questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica (fig. 3): la retta è tangente alla parabola nel punto T.

#### Retta esterna a una parabola e sistema senza soluzioni reali

In fig. 4 si ha sempre la stessa parabola, mentre la retta è stata ancora traslata verso il basso, non incontra più la parabola e ha l'equazione:

$$y = 2x - 9$$

Ci aspettiamo allora che non abbia soluzioni reali il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

Infatti, risolvendo ancora una volta il sistema col metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ 2x - 9 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

da cui 
$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ x^2 - 4x + 6 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo quindi l'equazione di 2° grado con la formula risolutiva, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \end{cases} \text{ cioè nessuna soluzione reale}$$

#### I sistemi di 2° grado e le loro soluzioni

Le considerazioni ora svolte si prestano a essere generalizzate nel modo seguente:

1. Un sistema di 2° grado di due equazioni in due incognite, abitualmente indicate con  $x$  e  $y$ , è formato da un'equazione di 1° grado e una di 2° grado.
2. Il sistema si risolve col metodo di sostituzione.
3. Per risolvere il sistema si è condotti a risolvere un'equazione di 2° grado in una sola incognita, equazione che può avere:
  - due soluzioni reali e distinte;
  - due soluzioni reali e coincidenti;
  - nessuna soluzione reale.
 In corrispondenza il sistema avrà come soluzioni:
  - due coppie di numeri reali e distinte;
  - una coppia di numeri contata due volte;
  - nessuna coppia di numeri reali.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Che cosa si intende col termine «sistema di 2° grado»?
- ② Come si risolve un sistema di 2° grado?

- ③ Spiegare che cosa si intende col termine «soluzione di un sistema» e quali soluzioni può avere un sistema di 2° grado.

### Comprensione

- ① Esaminare il sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. verificare che il sistema ha la soluzione (3; 3);
- b. stabilire se il sistema ha due soluzioni coincidenti, motivando adeguatamente la conclusione.

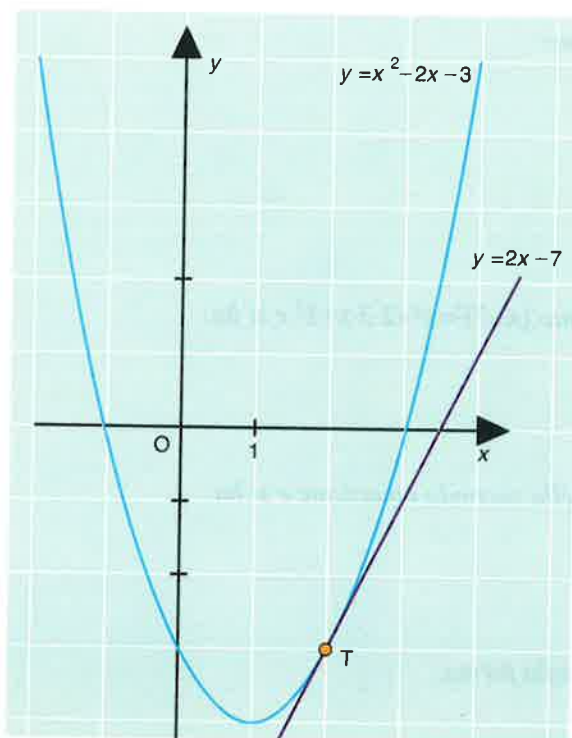
### Applicazioni

- ① Risolvere i seguenti sistemi, interpretando graficamente le soluzioni ottenute.

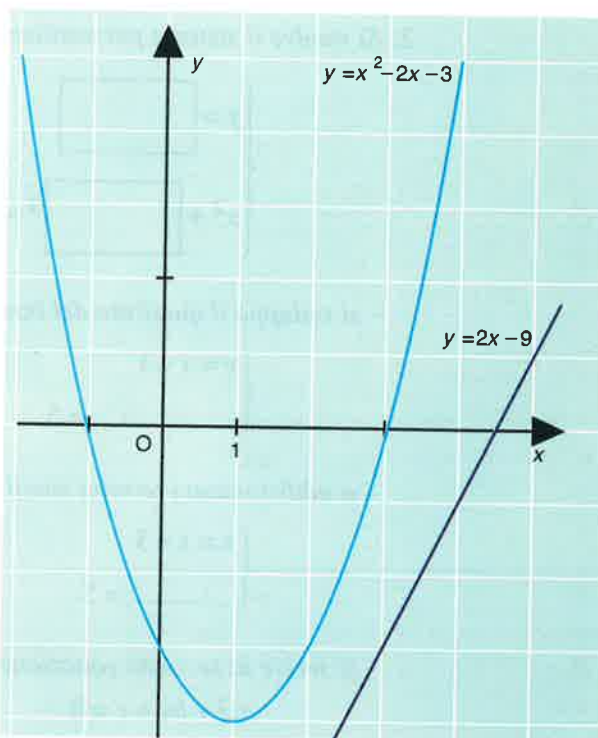
$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{4}x + 1 \end{cases}$$

Quale dei due sistemi ha una soluzione contata due volte?

**Figura 3**  
Una retta tangente a una parabola



**Figura 4**  
Una retta esterna a una parabola



# Risolvere sistemi di 2° grado

## Attività 1

Rappresentare su un riferimento cartesiano il cerchio e la retta che hanno le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$y = x + 3$$

Determinare le coordinate dei loro punti di intersezione, completando il procedimento seguente.

1. Si scrive il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

2. Si risolve il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} y = \boxed{\phantom{000}} \\ x^2 + \boxed{\phantom{000}}^2 = 5 \end{cases}$$

- si sviluppa il quadrato del binomio  $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$  e si ha:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ \dots\dots\dots = 5 \end{cases}$$

- si addizionano i termini simili nella seconda equazione e si ha:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ \dots\dots\dots = 5 \end{cases}$$

- si scrive la seconda equazione nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- si aggiunge ai due membri  $-5$  e si ha:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ \dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

- la seconda equazione ha tutti i coefficienti multipli di 2, perciò, moltiplicandone i membri per il reciproco di 2, si ottiene un'equazione equivalente, ma con i coefficienti più piccoli; si ha:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

- si risolve la seconda equazione con la formula risolutiva e si ha:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots^2 - 4 \cdot \dots \cdot \dots}}{2 \cdot \dots} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y = x + 3 \\ x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots}}{2 \cdot \dots} \end{cases}$$

- si ottengono finalmente le soluzioni del sistema date da:

$$\begin{cases} y_1 = \dots & y_2 = \dots \\ x_1 = \dots & x_2 = \dots \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque le due coppie reali e distinte:

$$A(-2; 1) \quad B(-1; 2)$$

### Attività 2

Risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

### Attività 3

Risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ xy = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Completare il procedimento seguente.

1. È opportuno ricordare che l'equazione:

$$xy = 3$$

è di 2° grado perché è di 2° grado il monomio  $xy$ , prodotto di due monomi di 1° grado.



2. Si risolve il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} y = \boxed{\phantom{000}} \\ x \boxed{\phantom{000}} = 3 \end{cases}$$

- si esegue la moltiplicazione  $x(-x+4)=x(-x)+x \cdot 4$  e si ottiene:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ \dots\dots\dots = 3 \end{cases}$$

- si scrive la seconda equazione nella forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

- si aggiunge ai due membri  $-3$  e si ha:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ \dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

- si risolve la seconda equazione con la formula risolutiva e si ha:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots^2 - 4 \cdot (-\dots) \cdot (-\dots)}}{2 \cdot (-\dots)} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y = -x + 4 \\ x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots}}{-2} \end{cases}$$

- si ottengono finalmente le soluzioni del sistema date da:

$$\begin{cases} y_1 = \dots \\ x_1 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque le due coppie reali e distinte:

$$A(1; 3) \quad B(3; 1)$$

### I sistemi simmetrici

Le soluzioni appena ottenute e cioè le coppie:

$$(1; 3) \quad (3; 1)$$

presentano una caratteristica *simmetria*, che poteva essere prevista da due diversi punti di vista, sia grafico che algebrico.

I. Interpretando graficamente il sistema (1), e cioè rappresentando graficamente le due equazioni presenti nel sistema, si ha (fig. 1):

$$y = -x + 4 \quad \text{che è una retta}$$

$$xy = 3 \quad \text{ossia} \quad y = \frac{3}{x} \quad \text{che è un'iperbole.}$$

Si osserva che entrambi i grafici sono simmetrici rispetto alla retta  $y=x$  (fig. 2) e

questo vuol dire che, scambiando  $x$  con  $y$ , il disegno rimane inalterato; è chiaro allora che questa simmetria deve valere anche per le due coppie di soluzioni.

II. Alle stesse conclusioni si può arrivare da un punto di vista algebrico, riscrivendo il sistema (1) nella forma seguente:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \quad (2)$$

Osservando le due equazioni si nota infatti che, scambiando  $x$  con  $y$ , il sistema rimane inalterato; perciò, se si trova la soluzione:

$(1; 3)$

l'altra soluzione deve essere ottenuta appunto scambiando  $x$  con  $y$ , e cioè:

$(3; 1)$

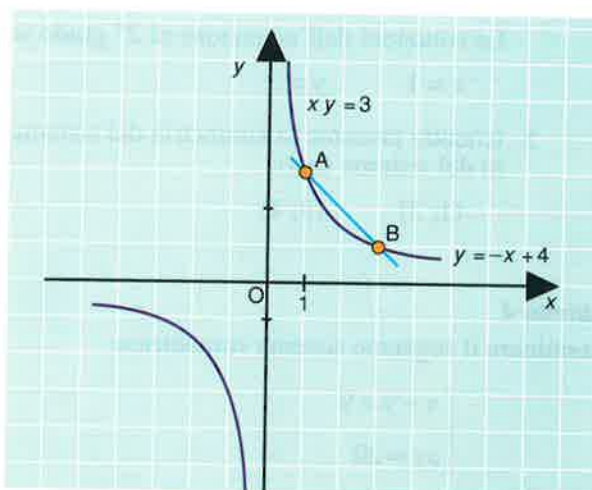
Proprio per questo motivo il sistema (1) si dice *simmetrico*.

In generale un *sistema di 2° grado simmetrico* si presenta nella forma seguente:

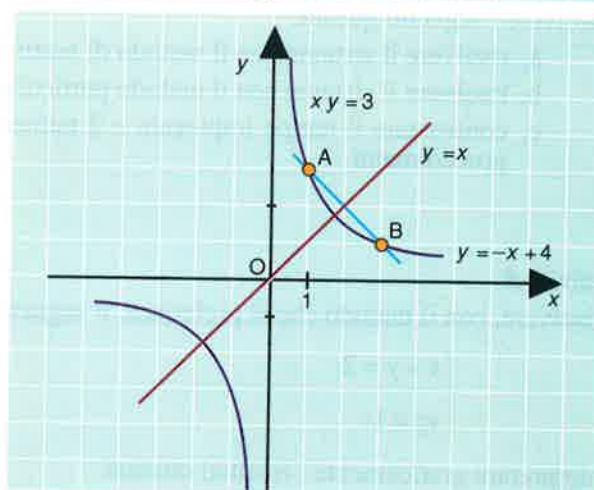
$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

dove  $s$  e  $p$  sono due numeri reali qualunque.

**Figura 1**  
Le due equazioni  
di un sistema simmetrico



**Figura 2**  
Le due curve sono  
simmetriche rispetto a  $y = x$



### Un metodo particolare per risolvere i sistemi simmetrici

Si può arrivare più rapidamente alle soluzioni di un sistema simmetrico con il seguente procedimento, mostrato sempre a partire dal sistema (2) e cioè

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

1. si considerano  $x$  e  $y$  come se fossero le due soluzioni di un'equazione di 2° grado, soluzioni di cui si conosce la somma (4) e il prodotto (3);
2. si indica l'incognita dell'equazione di 2° grado con un'altra lettera, per esempio  $t$ , dato che  $x$  è già presente nel procedimento per indicare una soluzione dell'equazione;
3. si scrive l'equazione di 2° grado di cui si conosce la somma e il prodotto delle soluzioni, tenendo presente il ragionamento seguito nel paragrafo 4, e si ha:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

4. si risolve l'equazione ottenendo:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione di 2° grado sono dunque:

$$x = 1 \quad y = 3$$

5. tenendo presente la simmetria del sistema, si conclude che le due soluzioni del sistema sono:

$$(1; 3) \quad (3; 1)$$

#### Attività 4

Esaminare il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. risolvere il sistema con il metodo di sostituzione;
- b. risolvere il sistema con il metodo particolare appena descritto;
- c. confrontare il tempo impiegato e il numero di calcoli necessari per i due procedimenti.

#### Attività 5

Risolvere, con il metodo che si preferisce, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

## I sistemi di 2° grado nella fisica

Nella fisica si ricorre spesso alla risoluzione di sistemi di 2° grado per risolvere vari problemi. In questa scheda si trovano alcuni esempi di questi problemi legati al movimento ad accelerazione costante, già esaminato nella scheda applicativa di p. 343.

### La caduta libera

In fisica si studia il movimento di un corpo che percorre una traiettoria rettilinea con accelerazione costante  $a$ . Il caso più comune di movimento ad accelerazione costante è quello di un sasso lasciato cadere da una roccia; in tal caso, trascurando la resistenza dell'aria, la distanza  $s$  del sasso dal punto di caduta R varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (1)$$

dove  $a$  è l'accelerazione di gravità che, sulla Terra, vale  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Durante il movimento varia anche la velocità istantanea  $v$  del corpo secondo la legge:

$$v = at \quad (2)$$

In queste leggi compaiono quattro lettere che indicano diverse grandezze fisiche e cioè:

- $s$  indica la distanza del corpo dal punto R;
- $v$  indica la velocità istantanea del corpo;
- $a$  indica l'accelerazione costante;
- $t$  indica il tempo che trascorre, e è l'unica lettera che compare al 2° grado.

Le due leggi (1) e (2) valgono sempre simultaneamente e permettono di risolvere vari problemi che conducono a sistemi di 2° grado, purché una delle incognite sia il tempo  $t$ . Ecco un esempio.



### Primo problema

Un sasso viene lasciato cadere e percorre una distanza di 78,4 metri; quanto è durata la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine della caduta?

Nel problema sono dati:

- l'accelerazione, che vale  $9,8 \text{ m/s}^2$ , cioè  $a = 9,8$
- la distanza, che vale 78,4 metri, cioè  $s = 78,4$

Sono invece incognite la durata della caduta e la velocità alla fine della caduta, incognite che vengono indicate con le lettere  $t$  e  $v$ .

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} 78,4 = \frac{1}{2} 9,8 t^2 \\ v = 9,8 t \end{cases}$$

Il sistema è già scritto in modo da presentare un'equazione di 2° grado in una sola incognita: è la prima equazione, che è incompleta.

Per risolvere il sistema si risolve la prima equazione e si sostituiscono le soluzioni ottenute nella seconda equazione; si ha:

$$\begin{cases} t^2 = \frac{2 \cdot 78,4}{9,8} = 16 \\ v = 9,8 t \end{cases}$$

Il sistema ha dunque le seguenti due soluzioni:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ v_1 = 9,8 \cdot 4 = 39,2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = -4 \\ v_2 = 9,8 \cdot (-4) = -39,2 \end{cases}$$

Delle due soluzioni si considera soltanto la prima, dato che il tempo assume solo valori positivi; si conclude che la caduta è durata 4 secondi e il corpo ha raggiunto la velocità di 39,2 metri al secondo.

### Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto

Si può porre un problema analogo a quello precedente in condizioni un po' diverse: un sasso viene lanciato con una velocità iniziale verticale verso l'alto, velocità che viene abitualmente indicata con  $v_0$ .

In tal caso, sempre trascurando la resistenza dell'aria, la distanza  $s$  del sasso dal punto R varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = -\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \quad (3)$$

Durante il movimento varia anche la velocità istantanea  $v$  del corpo secondo la legge:

$$v = v_0 - g t \quad (4)$$

In queste leggi compaiono le stesse quattro lettere viste prima, che indicano le stesse grandezze fisiche, con l'aggiunta questa volta di  $v_0$ , che indica la velocità iniziale impressa al sasso.

Le due leggi (3) e (4) valgono ancora una volta simultaneamente e permettono di risolvere vari problemi che conducono a sistemi di 2° grado, purché una delle incognite sia il tempo  $t$ , che è di nuovo l'unica lettera che compare al 2° grado. Ecco un esempio analogo a quello risolto prima.

### Secondo problema

*Un sasso che viene lanciato, con una fionda, a una velocità verticale verso l'alto di 49 m/s, percorre una distanza di 78,4 metri; quanto è durata la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine della caduta?*

Nel problema sono dati:

- la velocità iniziale, che è di 49 m/s, cioè  $v_0 = 49$
- l'accelerazione, che vale 9,8 m/s<sup>2</sup>, cioè  $a = 9,8$
- la distanza, che è di 78,4 metri, cioè  $s = 78,4$

Sono invece incognite la durata della caduta e la velocità alla fine della caduta, incognite che vengono indicate con le lettere  $t$  e  $v$ .

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} 78,4 = 49t - \frac{1}{2} 9,8t^2 \\ v = 49 - 9,8t \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} 4,9t^2 - 49t + 78,4 = 0 \\ v = 49 - 9,8t \end{cases}$$

Anche in questo caso il sistema è già scritto in modo da presentare un'equazione di 2° grado in una sola incognita: è la prima equazione, che ora non è incompleta e perciò deve essere risolta valendosi della formula risolutiva; si ha:

$$\begin{cases} t = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 78,4}}{2 \cdot 4,9} = \frac{49 \pm 29,4}{9,8} \\ v = 49 - 9,8t \end{cases}$$

Il sistema ha dunque le seguenti due soluzioni:

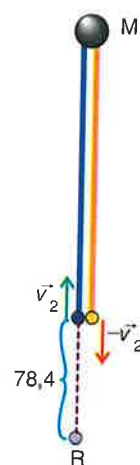
$$\begin{cases} t_1 = 8 \\ v_1 = 49 - 9,8 \cdot 8 = -29,4 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = 2 \\ v_2 = 49 - 9,8 \cdot 2 = 29,4 \end{cases}$$

Si capisce il significato di queste due soluzioni esaminando il movimento del sasso (fig. 1): viene lanciato dal punto R, sale con la velocità rivolta verso l'alto e, dopo 2 secondi, ha percorso 78,4 metri e ha raggiunto la velocità  $v_2 = 29,4$  m/s; successivamente il sasso continua a salire, raggiunge la quota massima M.

A partire dalla quota massima inizia a discendere e, dopo 8 secondi, ritorna alla distanza di 78,4 metri dal punto di lancio con la stessa velocità di 29,4 m/s, ma rivolta verso il basso. Questo spiega perché in un caso la velocità è positiva e nell'altro è negativa.

Questo problema conduce quindi a porsi una domanda: quando e dove il sasso raggiunge la quota massima? Ecco allora, espresso in termini più precisi, un terzo problema.

Figura 1  
Il movimento  
di un corpo  
lanciato verso l'alto



### Terzo problema

Un sasso viene lanciato, con una fionda, a una velocità verticale verso l'alto di 49 m/s; dopo quanto tempo raggiunge la quota massima e a quale distanza dal punto di partenza si trova tale quota massima?

Il problema si risolve facilmente tenendo presente una proprietà che caratterizza la quota massima: arrivato proprio alla quota massima il sasso si ferma, cioè ha la velocità istantanea che vale zero (fig. 2).

Ecco allora i dati di questo problema:

- la velocità iniziale, che è di 49 m/s, cioè  $v_0 = 49$
- l'accelerazione, che vale 9,8 m/s<sup>2</sup>, cioè  $a = 9,8$
- la velocità istantanea, che vale 0, cioè  $v = 0$

Sono invece incognite  $t$  e  $s$ .

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

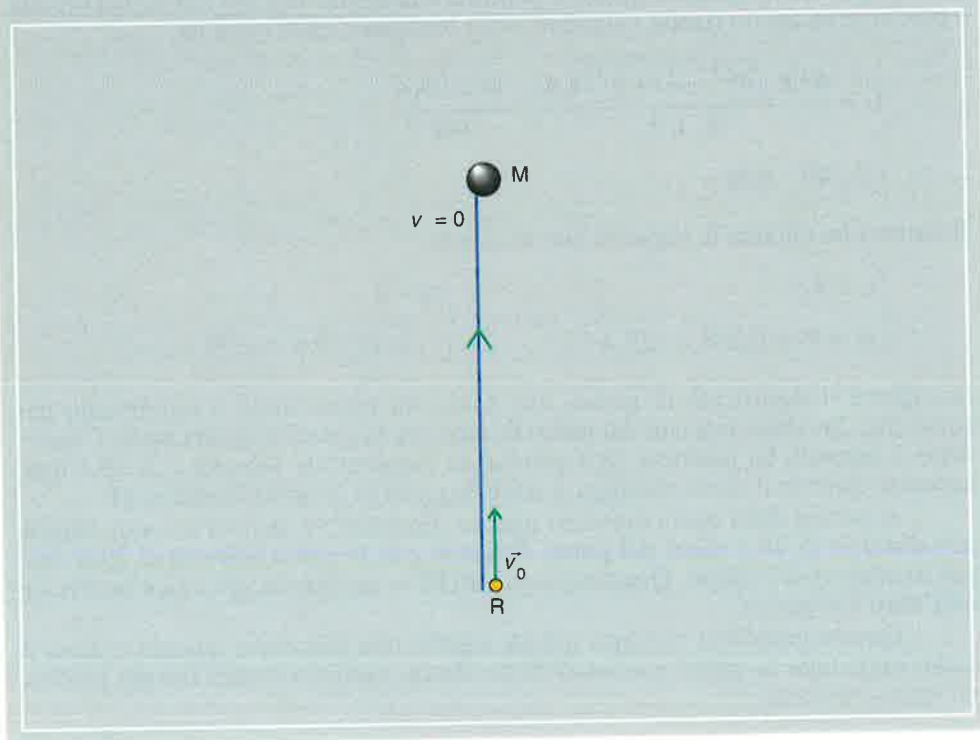
$$\begin{cases} s = 49t - \frac{1}{2}9,8t^2 \\ 0 = 49 - 9,8t \end{cases}$$

In questo caso l'equazione con una sola incognita è la seconda, che fornisce subito il valore di  $t$  da sostituire nella prima; si ha:

$$\begin{cases} s = 49 \cdot 5 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 5^2 = 122,5 \\ t = \frac{49}{9,8} = 5 \end{cases}$$

Si conclude dunque che il sasso raggiunge la quota massima dopo 5 secondi, a una distanza di 122,5 metri dal punto di partenza R.

Figura 2  
La velocità del corpo alla quota massima vale zero





# Le equazioni di 2° grado a coefficienti letterali

**Un problema che conduce a un'equazione di 2° grado letterale**

In fig. 1 è rappresentata (in rosso) la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1$$

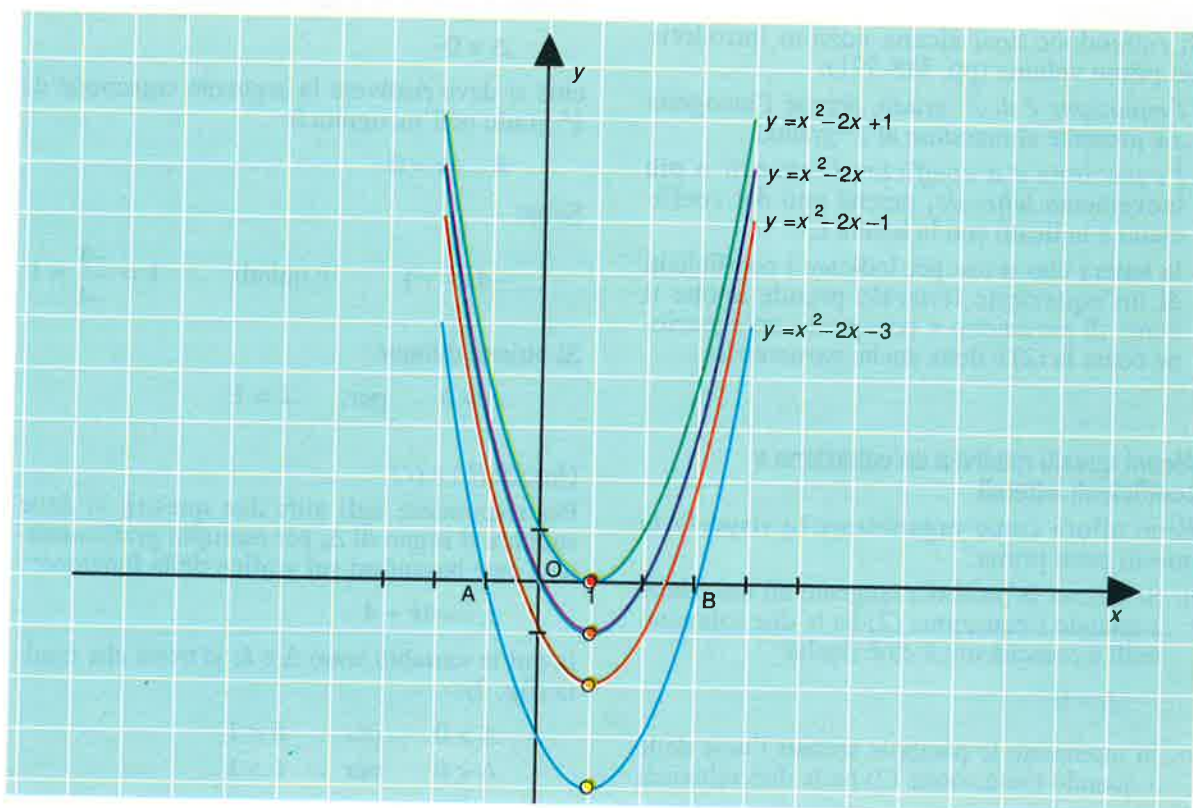
Insieme a questa parabola sono state rappresentate altre curve che si ottengono effettuando

una traslazione lungo l'asse delle  $y$ .

A proposito di questo insieme di parabole si possono porre vari quesiti, fra i quali, i seguenti:

- qual è la parabola tangente all'asse delle  $x$ ?
- quali sono le parabole secanti l'asse delle  $x$ ?
- quali sono le parabole esterne all'asse delle  $x$ ?

**Figura 1**  
Un insieme di parabole





Per rispondere a queste domande si può tradurre il disegno in formule:

- con la traslazione di 1 verso l'alto si ottiene (vedi il capitolo 6, paragrafo 9) la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 + 1 \quad \text{cioè} \quad y = x^2 - 2x + 0$$

- con la traslazione di 2 verso l'alto si ottiene la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 + 2 \quad \text{cioè} \quad y = x^2 - 2x + 1$$

- con la traslazione di 2 verso il basso si ottiene la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 - 2 \quad \text{cioè} \quad y = x^2 - 2x + (-3)$$

Si osserva che le parabole sono descritte da formule analoghe in cui varia solo l'ultimo coefficiente, perciò possono essere tutte riunite in un'unica formula, scrivendo al posto dell'ultimo coefficiente una lettera (che non sia  $y$  né  $x$ ); si scrive per esempio:

$$y = x^2 - 2x + k \quad (1)$$

Le ascisse dei punti d'intersezione di tutte le parabole (1) con l'asse delle  $x$  sono date allora dalla seguente equazione:

$$x^2 - 2x + k = 0 \quad (2)$$

Si ottiene dunque un'equazione di 2° grado a coefficienti letterali, detta anche equazione parametrica.

Si riprendono così alcune nozioni introdotte nel primo volume (pp. 388-391):

- l'equazione è di 2° grado, perché l'incognita  $x$  è presente al massimo al 2° grado;
- l'equazione è a coefficienti letterali o più brevemente letterale, perché uno dei coefficienti è indicato con la lettera  $k$ ;
- la lettera che si usa per indicare i coefficienti di un'equazione letterale prende anche il nome di *parametro* e per questo un'equazione come la (2) è detta anche *parametrica*.

### Alcuni quesiti relativi a un'equazione a coefficienti letterali

Ecco allora come organizzare la risposta ai quesiti posti prima.

- Si ottiene la parabola tangente all'asse delle  $x$  quando l'equazione (2) ha le due soluzioni reali e coincidenti, e cioè risulta:

$$\Delta = 0$$

- Si ottengono le parabole secanti l'asse delle  $x$  quando l'equazione (2) ha le due soluzioni

reali e distinte, e cioè risulta:

$$\Delta > 0$$

- Si ottengono le parabole esterne all'asse delle  $x$  quando l'equazione (2) non ha soluzioni reali, e cioè risulta:

$$\Delta < 0$$

Per rispondere ai tre quesiti bisogna dunque calcolare il discriminante  $\Delta$  dell'equazione:

$$x^2 - 2x + k = 0 \quad (2)$$

in cui risulta:

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = k$$

Perciò il calcolo di

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

fornisce:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k$$

ossia:

$$\Delta = 4 - 4k$$

Ecco allora le risposte ai tre quesiti indicati prima.

#### Quesito (a)

Per rispondere al primo quesito, si deve determinare il valore di  $k$  per cui risulta:

$$\Delta = 0$$

cioè si deve risolvere la seguente equazione di 1° grado nell'incognita  $k$ :

$$4 - 4k = 0$$

Si ha:

$$-4k = -4 \quad \text{e quindi} \quad k = \frac{-4}{-4} = 1$$

Si ottiene dunque:

$$\Delta = 0 \quad \text{per} \quad k = 1$$

#### Quesiti (b) e (c)

Per rispondere agli altri due quesiti, si deve studiare il segno di  $\Delta$ , per esempio graficamente, e cioè basandosi sul grafico della funzione:

$$\Delta = -4k + 4$$

in cui le variabili sono  $\Delta$  e  $k$ ; si trova che risulta (fig. 2):

$$\begin{array}{lll} \Delta > 0 & \text{per} & k < 1 \\ \Delta < 0 & \text{per} & k > 1 \end{array}$$

Si può dunque concludere che l'equazione:

$$x^2 - 2x + k = 0$$

- ha due soluzioni reali e coincidenti per  $k=1$ ;
- ha due soluzioni reali e distinte per  $k<1$ ;
- non ha soluzioni reali per  $k>1$ .

Queste conclusioni si interpretano graficamente nel modo seguente. Fra le parabole:

$$y = x^2 - 2x + k$$

si trova (fig. 3):

- la parabola tangente l'asse delle  $x$  per  $k = 1$ ;
- le parabole secanti l'asse delle  $x$  per  $k < 1$ ;
- le parabole esterne all'asse delle  $x$  per  $k > 1$ .

### Un altro esempio di equazione di 2° grado letterale

Ecco un'altra equazione di 2° grado letterale:

$$mx^2 - 2mx + 3 = 0 \quad (3)$$

Quest'equazione offre qualche difficoltà in più rispetto a quella esaminata prima, visto che il parametro è presente anche nel 1° coefficiente;

si tratta infatti di un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

in cui è dato:

$$a = m \quad b = -2m \quad c = 3$$

Si pone dunque prima di tutto il seguente quesito:

- In quale caso l'equazione non è più di 2° grado?

La risposta è immediata: l'equazione non è di 2° grado se risulta:

$$m = 0$$

In tal caso si ottiene la seguente equazione:

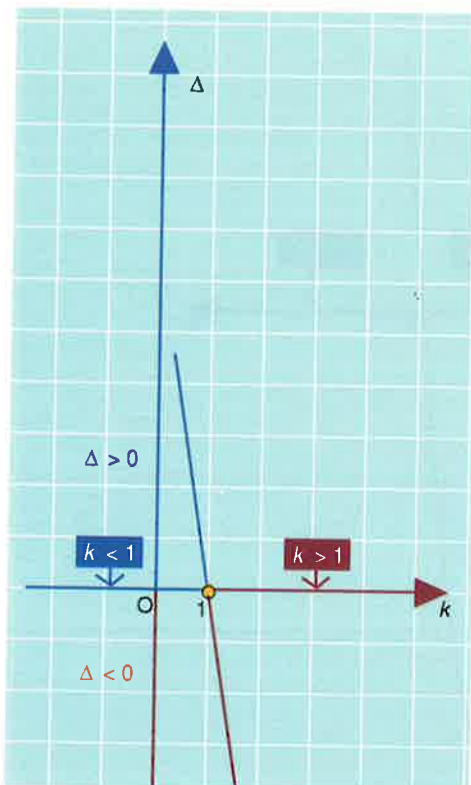
$$0x^2 - 2 \cdot 0 \cdot x + 3 = 0 \quad \text{cioè} \quad 3 = 0$$

che è un'equazione impossibile.

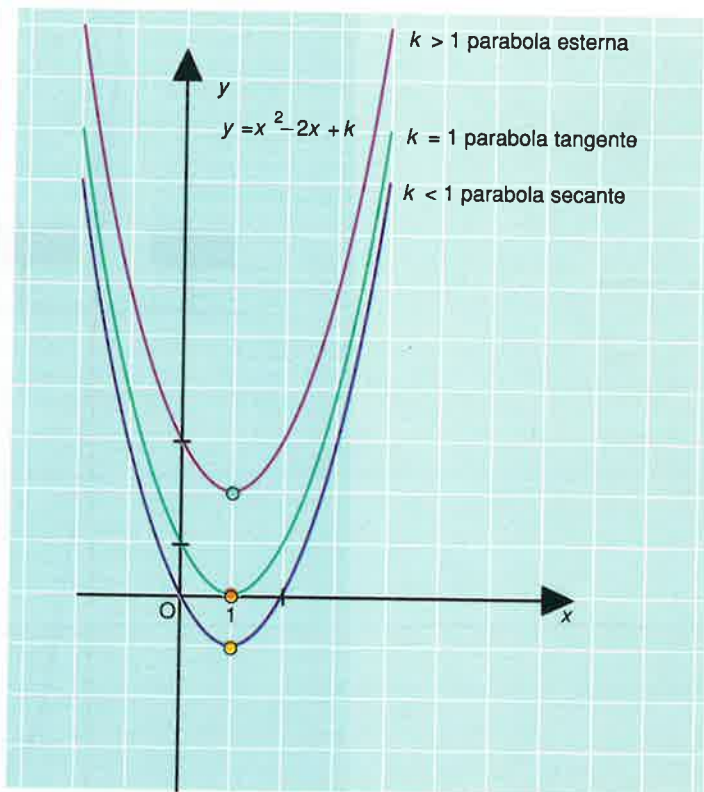
Se risulta  $m \neq 0$ , si possono risolvere quesiti analoghi a quelli studiati nel caso della precedente equazione letterale, e cioè:

- per quali valori di  $m$  l'equazione ha le soluzioni coincidenti?

**Figura 2**  
Il segno del discriminante per  $\Delta = 4 - 4k$



**Figura 3**  
La posizione delle parabole rispetto all'asse delle  $x$



- c. per quali valori di  $m$  l'equazione ha soluzioni reali?  
 d. per quali valori di  $m$  l'equazione non ha soluzioni reali?

Per rispondere a queste domande bisogna esaminare il discriminante  $\Delta$ , che è dato da:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = 4m^2 - 12m$$

Ecco le risposte ai tre quesiti.

**Quesito (b)**

Per rispondere al quesito (b) si debbono individuare i valori di  $m$  per cui risulta:

$$\Delta = 0$$

perciò si deve risolvere la seguente equazione di 2° grado nell'incognita  $m$ :

$$4m^2 - 12m = 0$$

Si tratta di un'equazione incompleta le cui soluzioni si possono ottenere raccogliendo il fattore comune  $4m$ ; si ha:

$$4m(m-3) = 0 \quad \begin{cases} 4m = 0 \\ m-3 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene dunque:

$$\Delta = 0 \quad \text{per} \quad m_1 = 0 \quad \text{o} \quad m_2 = 3$$

Ma, sostituendo 0 al posto di  $m$  nella (3), si ottiene un'equazione che non è più di 2° grado; perciò, solo sostituendo 3 a  $m$  si individua un'equazione di 2° grado con le soluzioni coincidenti. Si tratta dell'equazione seguente:

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

**Quesiti (c) e (d)**

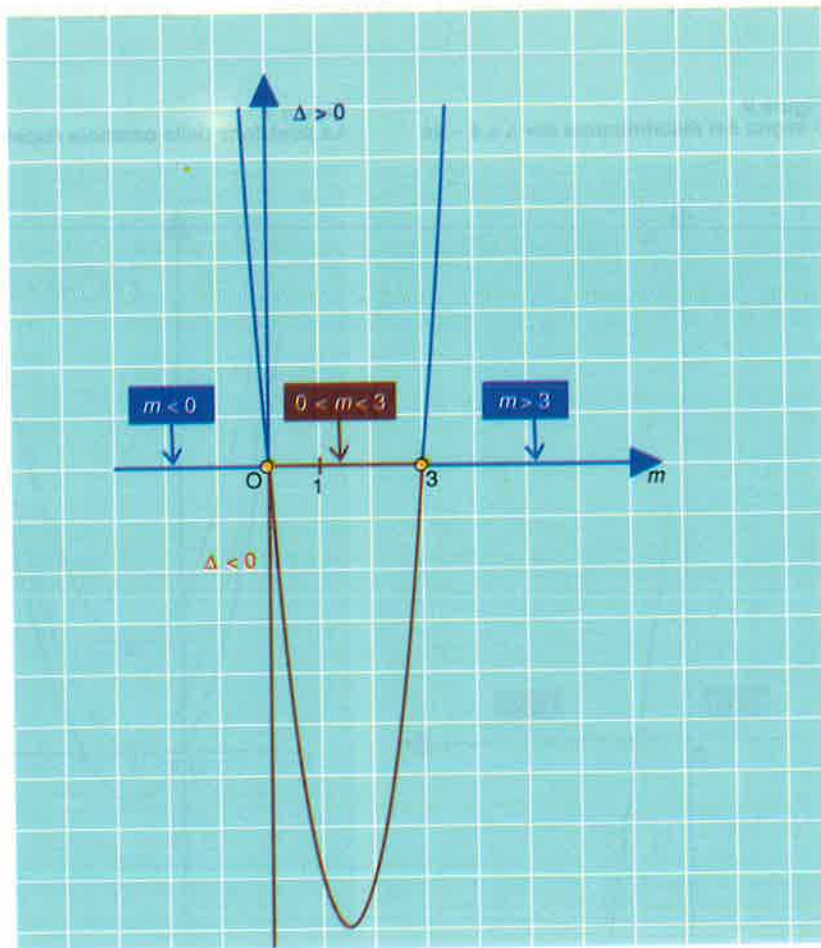
Per rispondere alle altre due domande, bisogna invece individuare i casi in cui risulta:

$$\Delta > 0 \quad \text{oppure} \quad \Delta < 0$$

Si è dunque condotti a studiare, per esempio graficamente, il segno del trinomio:

$$\Delta = 4m^2 - 12m$$

**Figura 4**  
 Il segno del discriminante  
 $\Delta = 4m^2 - 12m$



in cui le variabili sono  $\Delta$  e  $m$ ; si ha (fig. 4):

$$\begin{array}{ll} \Delta > 0 & \text{per } m < 0 \quad \text{oppure} \quad m > 3 \\ \Delta < 0 & \text{per } 0 < m < 3 \end{array}$$

Si arriva dunque alle seguenti conclusioni, valide per l'equazione:

$$mx^2 - 2mx + 3 = 0$$

- l'equazione non è più di 2° grado per  $m_1 = 0$ ;
- l'equazione è di 2° grado con le soluzioni coincidenti per  $m_2 = 3$ ;
- l'equazione è di 2° grado con due soluzioni reali per  $m < 0$  oppure  $m > 3$ ;
- l'equazione è di 2° grado senza soluzioni reali per  $0 < m < 3$ .

### Considerazioni valide per tutte le equazioni letterali

Le considerazioni svolte a partire da quest'ultimo esempio possono essere ripetute a partire da qualunque altra equazione letterale e si ha dunque che:

- un'equazione di 2° grado letterale è un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con i coefficienti letterali;

- i quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale sono i seguenti:
  - descrivere i casi in cui l'equazione non è di 2° grado, e cioè risulta  $a = 0$ ;
  - descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni coincidenti, cioè risulta  $a \neq 0$  e  $\Delta = 0$ ;
  - descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni reali, cioè risulta  $a \neq 0$  e  $\Delta > 0$ .

### Incognita e coefficienti in un'equazione letterale

Nel primo volume (p. 391), a proposito delle equazioni letterali si erano date due alternative:

- indicare l'incognita con  $x$  e i coefficienti con altre lettere dell'alfabeto;
- usare liberamente le lettere, ma dire esplicitamente quale lettera indica l'incognita.

Queste considerazioni sono ancora valide, tenendo presente però un'osservazione: un'equazione letterale è di 2° grado solo se l'incognita è elevata a esponente 2.

Così, per esempio, l'equazione seguente:

$$m^2p - 3m + 2 = 0$$

è:

- di 1° grado nell'incognita  $p$ ;
- di 2° grado nell'incognita  $m$ , e in tal caso dovrebbe essere scritta nella forma seguente:

$$pm^2 - 3m + 2 = 0$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- Come si riconosce un'equazione di 2° grado letterale?
- Quali sono i quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale?

### Comprensione

- Fra le seguenti equazioni indicare quella che non è a coefficienti letterali, motivando la scelta.

$$2x^2 - bx = 0 \quad k^2 - 2k + 5 = 0 \quad nx^2 + n = 0$$

- Fra le seguenti equazioni a coefficienti letterali indicare quali sono di 2° grado, motivando la scelta.

$$m^2x - 1 = 0 \quad mx^2 - 1 = 0 \quad m^2x^2 - x = 0$$

- Scrivere qualche equazione di 2° grado letterale, indicando i coefficienti con lettere a piacere.

### Applicazioni

- Esaminare la seguente equazione letterale:

$$bx^2 + bx - 1 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- descrivere il caso in cui l'equazione diventa di 1° grado;
- descrivere i casi in cui l'equazione ha le soluzioni coincidenti;
- descrivere i casi in cui l'equazione ha le soluzioni reali.



# I sistemi di 2° grado a coefficienti letterali

## Un problema che conduce ad un sistema di 2° grado letterale

Consideriamo di nuovo l'insieme di parabole:

$$y = x^2 - 2x + k$$

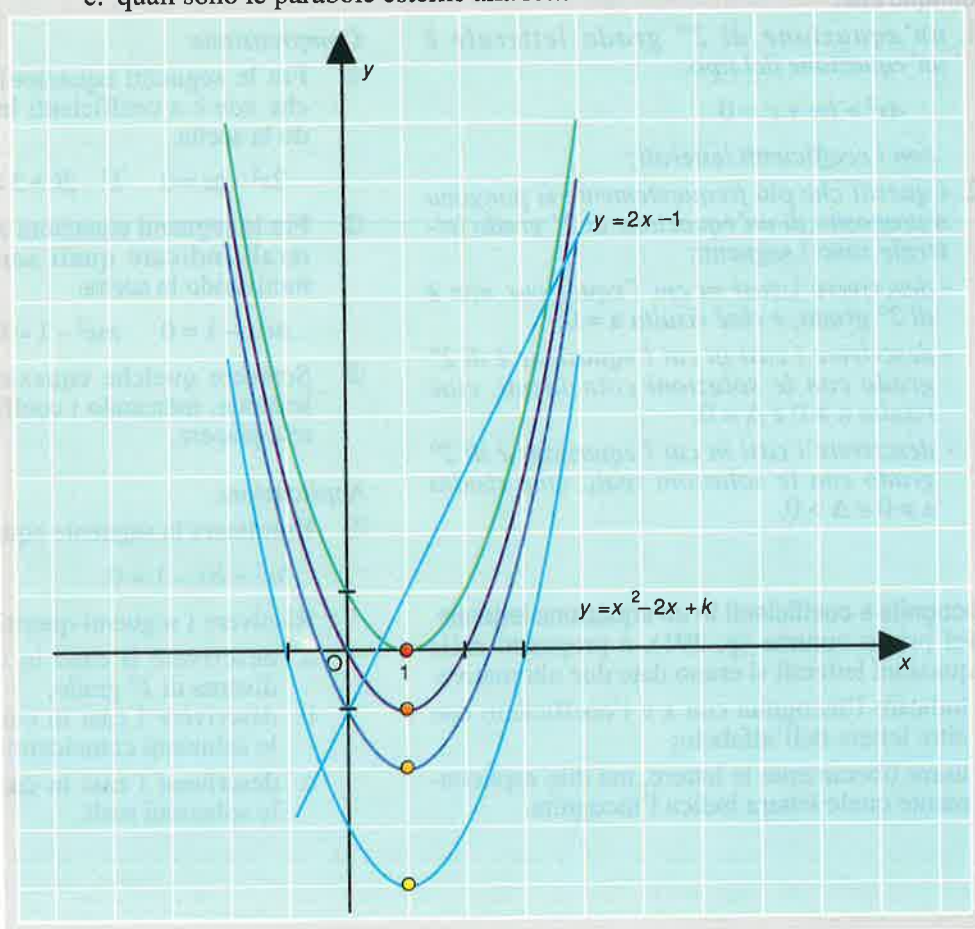
esaminato nel paragrafo 10 per studiare la posizione delle curve rispetto ad un'altra retta, per esempio la retta  $r$  di fig. 1, e cioè:

$$y = 2x - 1$$

Ci si chiede:

- qual è la parabola tangente alla retta  $r$ ?
- quali sono le parabole secanti la retta  $r$ ?
- quali sono le parabole esterne alla retta  $r$ ?

**Figura 1**  
La posizione di  
un insieme di parabole  
rispetto ad una retta



Gli stessi quesiti possono anche essere posti nella forma seguente:

- qual è la parabola che ha due intersezioni coincidenti con la retta  $r$ ?
- quali sono le parabole che hanno due intersezioni distinte con la retta  $r$ ?
- quali sono le parabole che non hanno intersezioni con la retta  $r$ ?

Si è così condotti a ricordare che, per determinare le intersezioni fra due curve, bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve; nel caso assegnato bisogna esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + k \end{cases}$$

Si tratta di un *sistema letterale*, detto anche *sistema parametrico*.

### **Risolvendo per sostituzione un sistema letterale si arriva a un'equazione di 2° grado letterale**

Risolvendo il sistema per sostituzione, si ha:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = x^2 - 2x + k \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 4x + 1 + k = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ottenuta, cioè quella che fornisce le ascisse dei punti d'intersezione, è:

$$x^2 - 4x + 1 + k = 0 \quad (1)$$

cioè è un'equazione di 2° grado letterale. Perciò si può dire che:

- se l'equazione (1) ha due soluzioni coincidenti, anche il sistema avrà due soluzioni coincidenti;
- se l'equazione (1) ha due soluzioni reali e distinte, anche il sistema avrà due soluzioni reali e distinte;
- se l'equazione (1) non ha soluzioni reali, anche il sistema non avrà soluzioni reali.

Si è così condotti a ripetere il procedimento seguito nel paragrafo 10 per esaminare l'equazione (1), in cui risulta:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 1 + k$$

e quindi:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + k) = 16 - 4 - 4k$$

ossia:

$$\Delta = 12 - 4k \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$\Delta = 0 \quad \text{per} \quad k = 3$$

Esaminando poi il segno di  $\Delta$  al variare di  $k$  si trova (fig. 2):

$$\Delta > 0 \quad \text{per } k < 3$$

$$\Delta < 0 \quad \text{per } k > 3$$

Si può dunque concludere che il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + k \end{cases}$$

- ha due soluzioni reali e coincidenti per  $k = 3$ ;
- ha due soluzioni reali e distinte per  $k < 3$ ;
- non ha soluzioni reali per  $k > 3$ .

Queste conclusioni si interpretano graficamente nel modo seguente (fig. 3): fra le parabole:

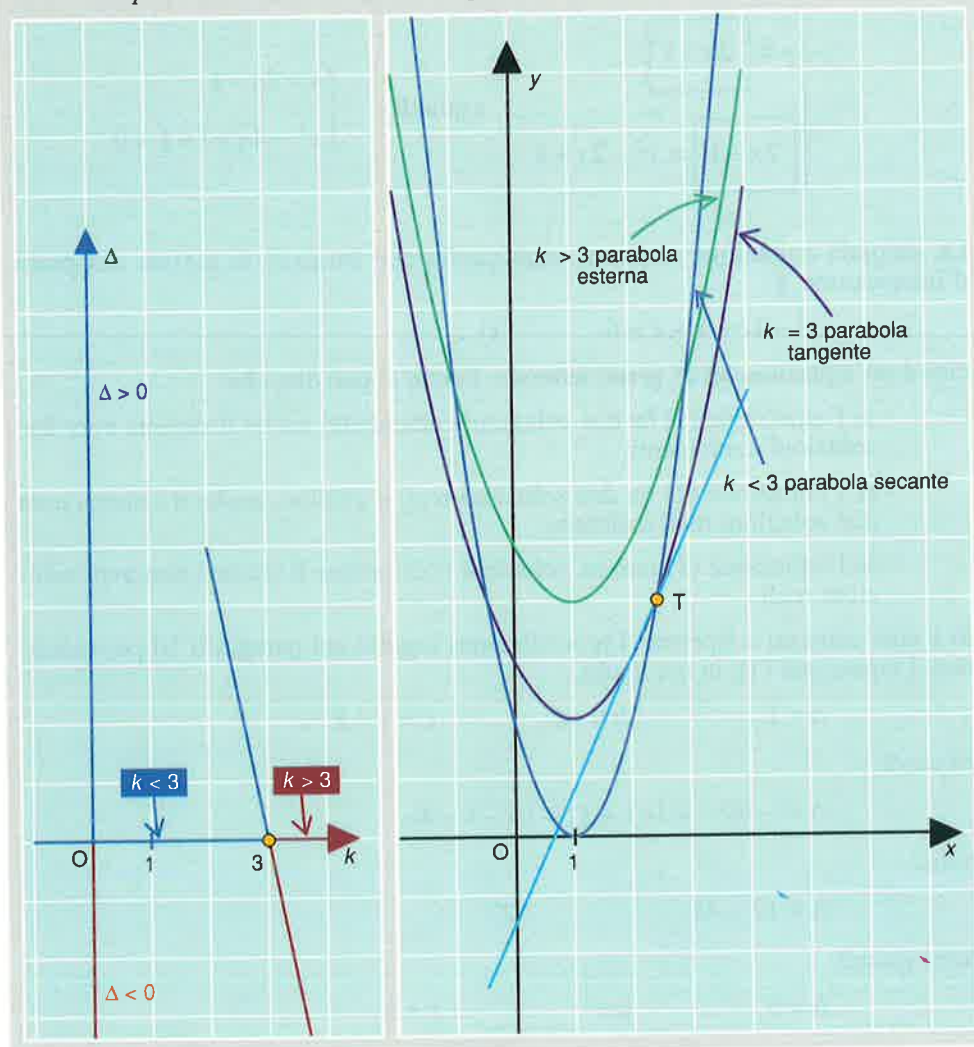
$$y = x^2 - 2x + k$$

si trova:

- la parabola tangente alla retta  $r$  per  $k = 3$ ;
- le parabole secanti la retta  $r$  per  $k < 3$ ;
- le parabole esterne alla retta  $r$  per  $k > 3$ .

**Figura 2 (a sinistra)**  
Il segno del discriminante  
 $\Delta = 12 - 4k$

**Figura 3 (a destra)**  
La posizione delle  
parabole rispetto alla retta



### Un altro esempio di sistema letterale

Ecco un altro esempio di sistema a coefficienti letterali da esaminare:

$$\begin{cases} x + y = k \\ xy = 1 \end{cases}$$

A proposito di questo sistema si possono porre quesiti analoghi a quelli precedenti, e cioè:

- per quali valori di  $k$  il sistema ha due soluzioni coincidenti?
- per quali valori di  $k$  il sistema ha due soluzioni distinte?
- per quali valori di  $k$  il sistema non ha soluzioni reali?

Per rispondere ai quesiti si comincia col risolvere il sistema per sostituzione e per questo occorre ricavare un'incognita, per esempio  $y$ , dalla prima equazione e sostituire l'espressione ottenuta nella seconda; si ha:

$$\begin{cases} y = -x + k \\ x(-x + k) = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = -x + k \\ -x^2 + kx - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ottenuta, cioè quella che fornisce le ascisse dei punti d'intersezione, è:

$$-x^2 + kx - 1 = 0 \quad (3)$$

Si tratta dunque di un'equazione di 2° grado letterale nell'incognita  $x$ .

Si è così condotti a ripetere il procedimento seguito nel paragrafo 10 per esaminare l'equazione (3), in cui risulta:

$$a = -1 \quad b = k \quad c = -1$$

e quindi:

$$\Delta = k^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

ossia:

$$\Delta = k^2 - 4 \quad (4)$$

Si ha quindi:

$$\Delta = 0 \quad \text{per} \quad k^2 = 4 \quad \text{ossia} \quad k = \pm 2$$

Esaminando poi il segno di  $\Delta$  al variare di  $k$  si trova:

$$\Delta > 0 \quad \text{per} \quad k < -2 \quad \text{o} \quad k > 2$$

$$\Delta < 0 \quad \text{per} \quad -2 < k < 2$$

Si può dunque concludere che il sistema:

$$\begin{cases} x + y = k \\ xy = 1 \end{cases}$$

- ha due soluzioni reali e coincidenti per  $k = -2$  o  $k = 2$ ;
- ha due soluzioni reali e distinte per  $k < -2$  o  $k > 2$ ;
- non ha soluzioni reali per  $-2 < k < 2$ .



### L'interpretazione grafica del sistema letterale

Per interpretare graficamente le conclusioni ottenute bisogna rappresentare sul piano cartesiano le equazioni in due variabili che formano il sistema; si ha che (fig. 4):

- l'equazione:

$$xy = 1 \quad \text{ossia} \quad y = \frac{1}{x}$$

ha come grafico un'iperbole (fig. 4a);

- l'equazione:

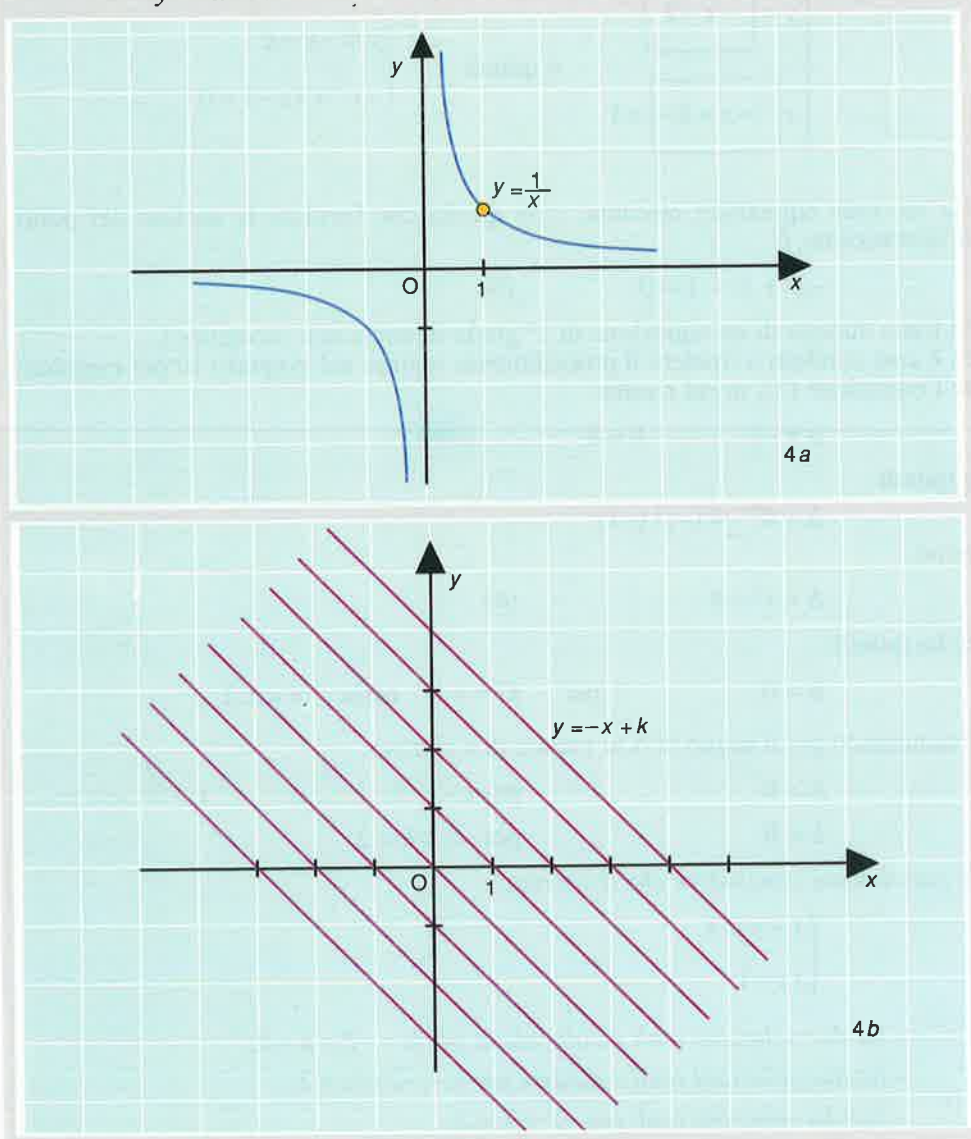
$$x + y = k \quad \text{ossia} \quad y = -x + k$$

ha come grafico un insieme di rette che hanno tutte la stessa pendenza  $(-1)$  e intersecano l'asse delle  $y$  in punti di ordinata  $k$  (fig. 4b).

Così si può dire che (figure 5 e 6): fra le rette:

$$y = -x + k$$

Figura 4  
Un'iperbole e un insieme  
di rette



si trovano:

- le rette tangenti all'iperbole per  $k = -2$  o  $k = 2$ ;
- le rette secanti l'iperbole per  $k < -2$  o  $k > 2$ ;
- le rette esterne all'iperbole per  $-2 < k < 2$ .

### Considerazioni valide per i sistemi letterali

L'interpretazione grafica visualizza efficacemente i risultati algebrici ottenuti studiando un sistema di 2° grado letterale, ma non è indispensabile; sono invece sempre valide le considerazioni seguenti:

1. un sistema di 2° grado letterale o parametrico è un sistema di 2° grado con i coefficienti letterali;
2. risolvendo il sistema con il metodo di sostituzione si arriva a un'equazione di 2° grado letterale;
3. i casi in cui l'equazione ottenuta ha soluzioni reali e coincidenti, reali e distinte o non ha soluzioni reali diventano casi in cui il sistema ha soluzioni reali e coincidenti, reali e distinte o non ha soluzioni reali.

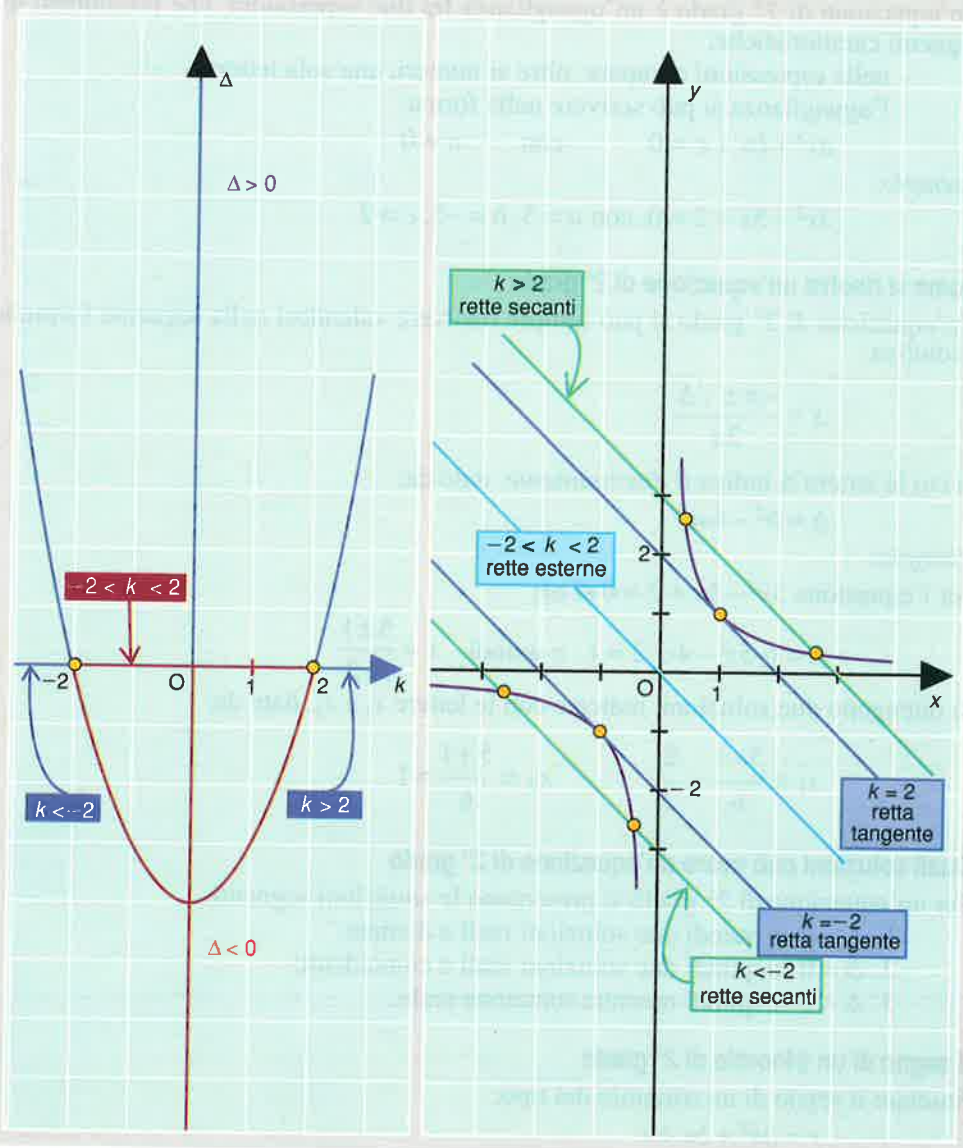


Figura 5 (a sinistra)  
Il segno del discriminante  
per  $\Delta = k^2 - 4$

Figura 6 (a destra)  
La posizione delle rette  
rispetto all'iperbole

# Che cosa bisogna sapere

## Come si riconosce un'equazione di 2° grado in un'incognita

Un'equazione di 2° grado è un'uguaglianza fra due espressioni, che presentano le seguenti caratteristiche:

- nelle espressioni compare, oltre ai numeri, una sola lettera;
- l'uguaglianza si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

*Esempio:*

$$3x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ con } a = 3, b = -5, c = 2$$

## Come si risolve un'equazione di 2° grado

Un'equazione di 2° grado si può sempre risolvere valendosi della seguente formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

in cui la lettera  $\Delta$  indica *il discriminante*, dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

*Esempio:*

Per l'equazione  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  si ha:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 3}$$

Si ottengono due soluzioni, indicate con le lettere  $x_1$  e  $x_2$ , date da:

$$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

## Quali soluzioni può avere un'equazione di 2° grado

Per un'equazione di 2° grado si presentano le situazioni seguenti:

1.  $\Delta > 0$  e quindi due soluzioni reali e distinte;
2.  $\Delta = 0$  e quindi due soluzioni reali e coincidenti;
3.  $\Delta < 0$  e quindi nessuna soluzione reale.

## Il segno di un trinomio di 2° grado

Studiare il segno di un trinomio del tipo:

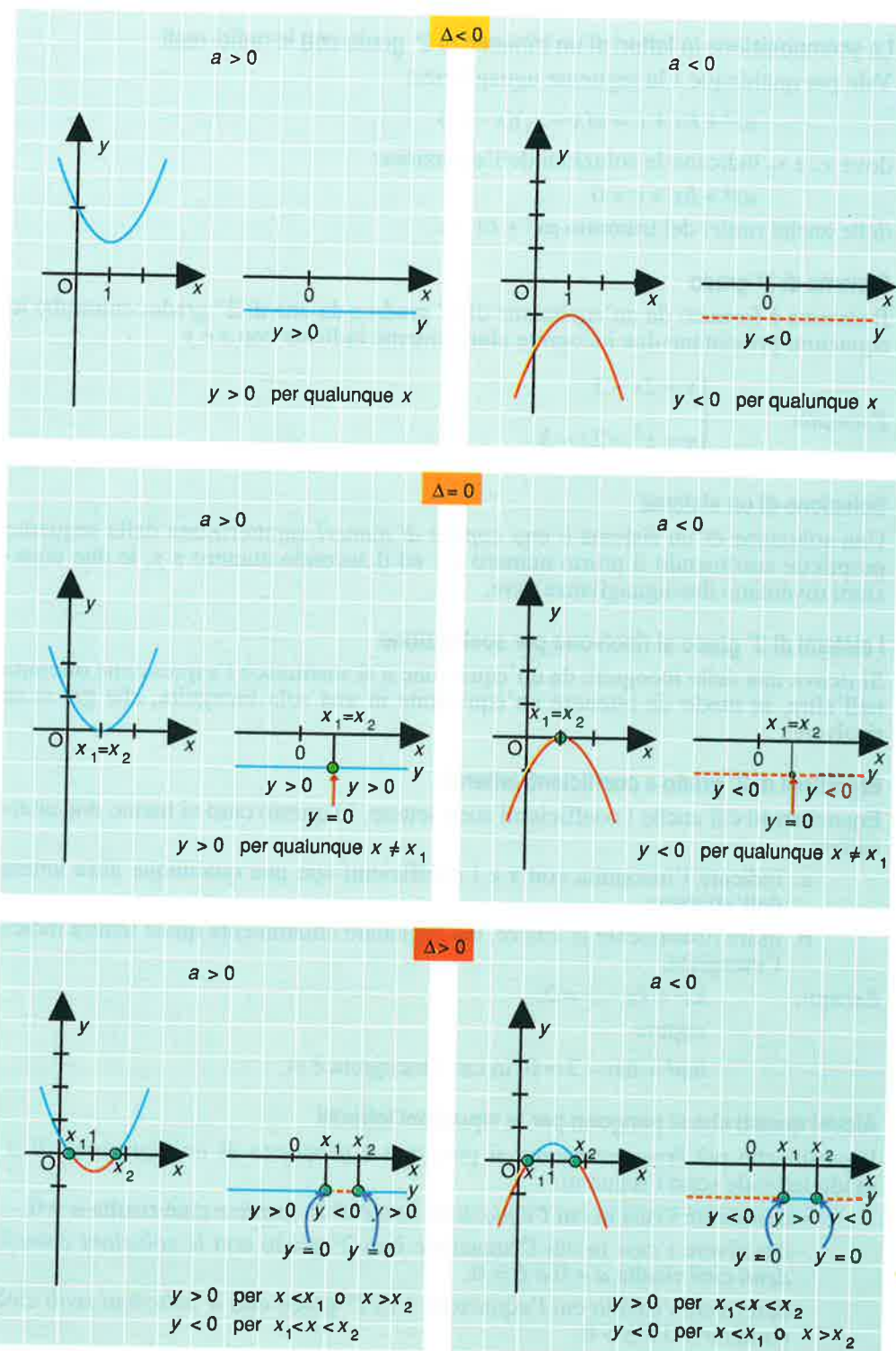
$$y = ax^2 + bx + c$$

vuol dire determinare per quali valori di  $x$  risulta:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad ax^2 + bx + c < 0$$

Indicando con  $y$  il valore che assume il trinomio, il problema può essere risolto con l'aiuto della geometria analitica, come è mostrato qui sotto.

Il segno di  $y = ax^2 + bx + c$



Che cosa bisogna sapere



## Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado

Le soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  di un'equazione di 2° grado sono legate ai coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dalle relazioni seguenti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con le radici reali

Vale per qualunque  $x$  la seguente uguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  indicano le soluzioni dell'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dette anche *radici* del trinomio  $ax^2 + bx + c$ .

## Sistema di 2° grado

Il sistema è formato da un'equazione di 1° grado e da una di 2° grado; entrambe le equazioni presentano due incognite abitualmente indicate con  $x$  e  $y$ .

Esempio: 
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

## Soluzione di un sistema

Una soluzione di un sistema è una coppia di numeri caratterizzata dalla seguente proprietà: sostituendo il primo numero a  $x$  ed il secondo numero a  $y$ , le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

## I sistemi di 2° grado si risolvono per sostituzione

Si ricava una delle incognite da un'equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nell'altra, in modo da ottenere un'equazione in una sola incognita, che già si sa risolvere.

## Equazioni di 2° grado a coefficienti letterali

Equazioni in cui anche i coefficienti sono lettere; in questo caso si hanno due alternative:

- indicare l'incognita con  $x$  e i coefficienti con una qualunque altra lettera dell'alfabeto;
- usare liberamente le lettere, ma segnalare chiaramente quale lettera indica l'incognita.

Esempi:  $kx^2 + kx - 3 = 0$ ,  
oppure  
 $bm^2 + bm - 3 = 0$ , in cui l'incognita è  $m$

## Alcuni quesiti che si pongono per le equazioni letterali

I quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale sono i seguenti:

- descrivere i casi in cui l'equazione non è di 2° grado e cioè risulta  $a = 0$ ;
- descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni coincidenti cioè risulta  $a \neq 0$  e  $\Delta = 0$ ;
- descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni reali cioè risulta  $a \neq 0$  e  $\Delta > 0$ .

# Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo propone le nozioni fondamentali per risolvere equazioni, disequazioni e sistemi di 2° grado, completando il capitolo nono del primo volume; vi si ritrovano dunque caratteristiche analoghe: non basta conoscere le varie nozioni, bisogna anche saperle applicare, scegliendo il procedimento adatto al caso che si presenta.

Gli esercizi si possono dividere anche ora in tre categorie:

- I. esercizi sulle equazioni;
- II. esercizi sulle disequazioni;
- III. esercizi sui sistemi.

All'interno di queste categorie si trovano poi esercizi di due tipi:

- A. esercizi di calcolo (per esempio risoluzione di un'equazione);
- B. risoluzione di problemi che richiedono di applicare i calcoli.

## I. Esercizi sulle equazioni

### A. Esercizi di calcolo

#### Attività 1

Esaminare la seguente equazione:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. stabilire se l'equazione è di 2° grado e indicarne i coefficienti;
  - b. stabilire se l'equazione ha soluzioni reali;
  - c. calcolare le eventuali soluzioni;
  - d. verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.
- a. L'equazione è di 2° grado perché è del tipo:

$$a \dots + b \dots + c = 0$$

con:

$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

$$c = \dots$$

- b. Si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In questo caso si ottiene:

$$\Delta = \dots\dots\dots = 25$$

L'equazione ha dunque .....

c. Le soluzioni sono date dalla formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

In questo caso si ottiene:

$$x = \frac{-\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots}}{2 \cdot \dots\dots} = \frac{-\dots\dots \pm \dots\dots}{\dots\dots}$$

Si ottengono dunque le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

d. Verifica che la soluzione  $x_1$  è esatta:

$$\text{I membro} = 2(\dots\dots)^2 + 7(\dots\dots) + 3 = 0 \qquad \text{II membro} = \dots\dots$$

Verifica che la soluzione  $x_2$  è esatta:

$$\text{I membro} = 2(\dots\dots)^2 + 7(\dots\dots) + 3 = 0 \qquad \text{II membro} = \dots\dots$$

Perciò le soluzioni sono .....

## Attività 2

Esaminare la seguente equazione a coefficienti letterali:

$$(k-1)x^2 - x - k = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- stabilire in quale caso l'equazione non è di 2° grado;
- stabilire in quali casi l'equazione ha le soluzioni coincidenti;
- stabilire in quali casi l'equazione ha le soluzioni reali.

a. L'equazione è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con:

$$a = \dots\dots \qquad b = \dots\dots \qquad c = \dots\dots$$

Perciò l'equazione non è più di 2° grado se risulta:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{ossia} \quad k = 1$$

In tal caso l'equazione diventa:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{con} \quad \text{la soluzione} \quad x = \dots\dots\dots$$

b. Si calcola il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In questo caso si ottiene:

$$\Delta = \dots\dots\dots = (2k-1)^2$$

L'equazione ha due soluzioni coincidenti se risulta:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{ossia} \quad k = \frac{1}{2}$$

In tal caso l'equazione diventa:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{con} \quad \text{la soluzione} \quad x_1 = x_2 = \dots\dots\dots$$

c. L'equazione ha le soluzioni reali per qualunque valore di  $k \neq \dots\dots\dots$ , perché risulta:

$$\dots\dots\dots > 0 \quad \text{per} \quad \dots\dots\dots$$

## B. Problemi che conducono a equazioni di 2° grado

### Attività 3. Un problema di geometria

È dato un triangolo rettangolo isoscele con i cateti AB e AC lunghi 6 cm. Da un punto P variabile su AB si conduce la parallela all'ipotenusa BC, fino a incontrare l'altro cateto in Q; da P e da Q si conducono le perpendicolari all'ipotenusa, fino a incontrare l'ipotenusa stessa in R e T.

Determinare la posizione di P per cui il rettangolo PQRT ha l'area  $S=8 \text{ cm}^2$ .

Il problema si può risolvere procedendo ordinatamente per passi successivi nel modo seguente.

1. Si visualizza il problema con dei disegni

Si comincia con qualche disegno che visualizzi il problema (fig. 1):

- il punto P inizialmente è sovrapposto ad A (fig. 1a); in tal caso il rettangolo si riduce a un segmento (PR) e perciò l'area S vale:

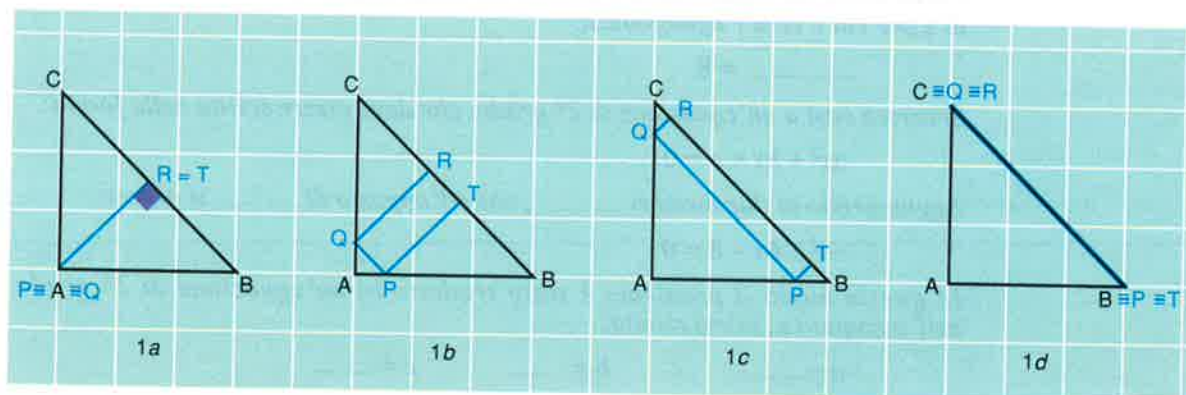
$$S = \dots\dots\dots$$

- il punto P «scorre» sul cateto AB (figure 1b, 1c);

- il punto P arriva a sovrapporsi su B (fig. 1d); così il rettangolo si riduce di nuovo ad un segmento (BC) e l'area S vale:

$$S = \dots\dots\dots$$

Figura 1  
Visualizzare un problema con dei disegni



Che cosa bisogna saper fare



2. Si sceglie l'incognita

Le figure fanno capire che si può «fermare» il punto  $P$  mentre scorre su  $AB$ , fissando la distanza  $AP$ ; perciò si sceglie (fig. 2):

$$x = \overline{AP}$$

La fig. 2 mostra inoltre che  $x$  può assumere solo valori positivi e più piccoli di 6; sarà dunque:

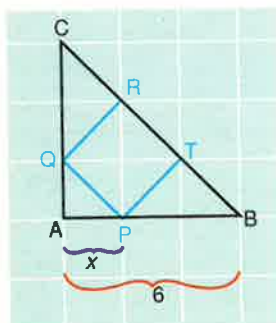
$$0 \leq x \leq 6$$

e, in particolare:

$x = 0$  quando  $P$  coincide con  $A$ ;

$x = 6$  quando  $P$  coincide con  $B$ .

**Figura 2**  
La scelta dell'incognita



3. Si traduce il problema in un'equazione

Avendo indicato con  $x$  la lunghezza di  $AP$ , si può esprimere per mezzo di  $x$  l'area  $S$  del rettangolo, data da (fig. 2):

$$S = \overline{PQ} \cdot \overline{QR}$$

Per questo bisogna esprimere i due lati del rettangolo in funzione di  $x$ ; si ha che (fig. 3):

-  $PQ$  è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele  $APQ$ , che ha i due cateti lunghi  $x$ , perciò, applicando il teorema di Pitagora, si trova:

$$\overline{PQ}^2 = \dots\dots\dots \quad \text{ossia} \quad \overline{PQ}^2 = 2\dots\dots\dots$$

da cui si ricava:

$$\overline{PQ} = x\sqrt{2}$$

-  $QR$  è un cateto del triangolo rettangolo isoscele  $CRQ$ , che ha l'ipotenusa lunga  $6-x$ , perciò, applicando il teorema di Pitagora, si trova:

$$(6-x)^2 = \dots\dots\dots \quad \text{ossia} \quad (6-x)^2 = 2\dots\dots\dots$$

da cui si ricava:

$$\overline{QR} = \frac{(6-x)}{\sqrt{2}}$$

L'area  $S$  è dunque data da:

$$S = \dots\dots\dots = 6x - x^2$$

Ora la frase «Determinare la posizione di  $P$  per cui il rettangolo  $PQRT$  ha l'area  $S = 8 \text{ cm}^2$ » può essere espressa nel modo seguente: determinare il valore di  $x$  per cui è vera l'uguaglianza:

$$\dots\dots\dots = 8$$

Si arriva così a un'equazione di 2° grado, che deve essere scritta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

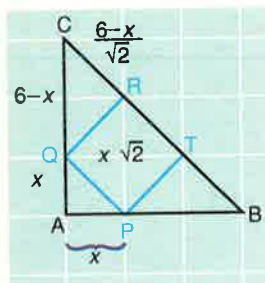
Aggiungendo ai due membri  $\dots\dots\dots$ , che è l'opposto di  $\dots\dots\dots$ , si ottiene:

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

In questo modo il problema è stato tradotto in un'equazione di 2° grado nell'incognita  $x$ , in cui risulta:

$$a = \dots\dots\dots \quad b = \dots\dots\dots \quad c = \dots\dots\dots$$

**Figura 3**  
Esprimere l'area del rettangolo in funzione dell'incognita



4. Si risolve l'equazione  
Valendosi della formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

si ottiene:

$$\Delta = (\dots)^2 - \dots = 4$$

e quindi:

$$x = \frac{\dots \pm \dots}{2(-1)} = \dots$$

Si ottengono dunque le soluzioni seguenti:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 4$$

5. Si controlla che le soluzioni ottenute siano esatte  
Si sono così trovate due posizioni di  $P$  richieste dal problema:  $P$  può trovarsi a distanza 2 oppure a distanza 4 da  $A$ . È immediato verificare che, in entrambi i casi, si ottiene un rettangolo di area 8 (fig. 4).

### Il procedimento per risolvere un problema di geometria

I problemi di geometria possono essere risolti seguendo un procedimento analogo a quello precedente; si tratta di percorrere ordinatamente le seguenti tappe:

1. visualizzare il problema con opportuni disegni;
2. scegliere l'incognita  $x$ , precisando le limitazioni che deve rispettare;
3. tradurre il problema in un'equazione che legghi i dati all'incognita;
4. risolvere l'equazione;
5. controllare che le soluzioni ottenute siano esatte.

### Attività 4

Risolvere di nuovo il problema dell'attività 3, considerando però i cateti del triangolo lunghi 12 e l'area del rettangolo  $S = 16$ .

Confrontare questo problema con il precedente e spiegare perché i dati sono raddoppiati, ma le soluzioni non sono raddoppiate. (Vedi il capitolo 6, paragrafo 3)

Modificare solo il valore dell'area  $S$  in modo da ottenere un problema che abbia le soluzioni doppie di quelle date nel problema precedente.

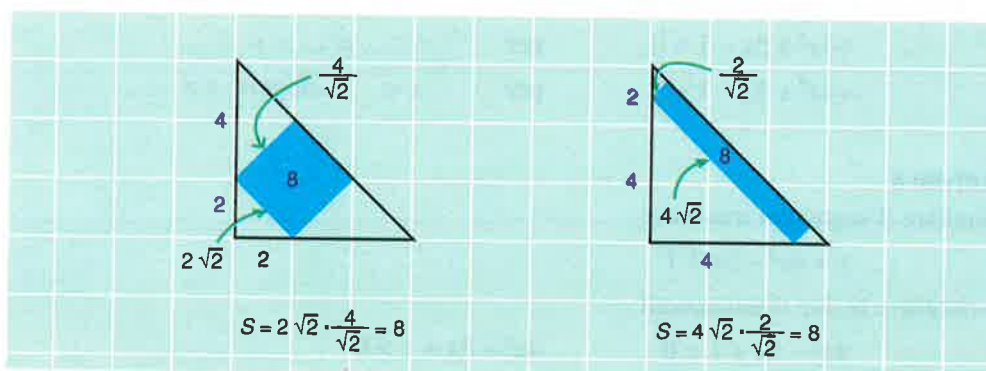


Figura 4  
Le soluzioni  
del problema

## II. Esercitazioni sulle disequazioni

### A. Esercizi di calcolo

#### Attività 5

Studiare il segno del trinomio:

$$y = -4x^2 + 5x - 1 \quad (1)$$

e risolvere le due disequazioni:

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \quad -4x^2 + 5x - 1 > 0$$

1. Si calcola il discriminante  $\Delta$  dell'equazione:

$$-4x^2 + 5x - 1 = 0$$

e si ottiene:

$$\Delta = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots > 0$$

Si conclude che il trinomio  $-4x^2 + 5x - 1$  ha  $\dots\dots\dots$  date da:

$$x = \dots\dots\dots$$

Il trinomio ha dunque le due radici date da:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

2. A questo punto si hanno le due alternative seguenti

A. Si traccia il grafico della parabola (1);

B. Si ricordano a memoria le conclusioni indicate nel paragrafo 6.

A. Per tracciare il grafico necessario a studiare il segno del trinomio  $-4x^2 + 5x - 1$  basta tenere presente che:

- il coefficiente  $a = \dots\dots < 0$  e perciò la parabola ha la concavità rivolta verso  $\dots\dots\dots$ ;

- la parabola incontra l'asse delle  $x$  nei punti  $\dots\dots\dots$ .

Si conclude che il trinomio ha segno positivo quando  $x$  varia nell'intervallo  $\dots\dots\dots$ , ha segno negativo quando  $x$  varia al di fuori dell'intervallo  $\dots\dots\dots$ .

B. Si ricorda che un trinomio con le radici reali e distinte ha il segno del coefficiente  $\dots\dots\dots$  quando  $x$  varia nell'intervallo  $\dots\dots\dots$  e segno opposto a quello del coefficiente  $\dots\dots\dots$  quando  $x$  varia al di fuori dell'intervallo  $\dots\dots\dots$ ; perciò il trinomio assegnato ha segno positivo quando  $x$  varia nell'intervallo  $\dots\dots\dots$ , ha segno negativo quando  $x$  varia al di fuori dell'intervallo  $\dots\dots\dots$ .

3. Schematizzare i risultati ottenuti con il procedimento indicato nel paragrafo 8 e scrivere le soluzioni delle due disequazioni, completando le formule seguenti:

$$-4x^2 + 5x - 1 > 0 \quad \text{per} \quad \dots\dots\dots < \dots\dots\dots < \dots\dots\dots$$

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \quad \text{per} \quad x < \dots\dots\dots \text{ oppure } x > \dots\dots\dots$$

#### Attività 6

Studiare il segno del trinomio:

$$y = 4x^2 - 5x + 1$$

e risolvere le due disequazioni:

$$4x^2 - 5x + 1 < 0 \quad 4x^2 - 5x + 1 > 0$$

### Attività 7

Le attività 5 e 6 portano a risolvere le seguenti disequazioni:

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \qquad -4x^2 + 5x - 1 > 0$$

$$4x^2 - 5x + 1 < 0 \qquad 4x^2 - 5x + 1 > 0$$

Fra di esse scegliere quelle equivalenti motivando la scelta.

## B. Problemi che conducono a studiare il segno di un trinomio di 2° grado

### Attività 8

Una fabbrica artigianale che produce biciclette offre degli sconti ai negozianti che comprano all'ingrosso più biciclette dello stesso tipo: il prezzo base di una bicicletta è di 240 000 lire, ma questo prezzo viene ridotto di 1000 lire per ogni bicicletta acquistata. Per esempio, un cliente che acquista 10 biciclette paga ogni bicicletta:

$$240\,000 - 10 \cdot 1000 = 230\,000$$

La ditta si chiede: qual è il numero di biciclette che conviene vendere ad ogni cliente con questo sconto?

Per questo valuta anche le spese di produzione, che sono:

- 20 000 lire per ogni bicicletta per le materie prime;
- 2 100 000 lire per spese fisse.

*Per esaminare il problema occorre stabilire come variano il ricavo R e le spese S al variare del numero di biciclette vendute. Indicando con x il numero di biciclette vendute, si ha (in migliaia di lire):*

$$R = (\dots\dots\dots - \dots\dots\dots x)x \qquad S = \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots$$

*Il profitto y della fabbrica varia al variare di x secondo la legge:*

$$y = \dots\dots\dots - (\dots\dots\dots)$$

*ossia:*

$$y = -x^2 + 220x - 2100 \qquad (2)$$

*Si ha che lo sconto è conveniente per la fabbrica solo se risulta:*

$$y > 0$$

*Per rispondere al quesito occorre dunque studiare il segno del trinomio (2).*

*- Si determinano le radici del trinomio risolvendo l'equazione:*

$$-x^2 + 220x - 2100 = 0$$

*Valendosi della formula ridotta (vedi pp. 312-313) si ha:*

$$x = \frac{-\dots\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots}}{\dots\dots\dots} = \frac{-\dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

*Le radici sono dunque:*

$$x_1 = \dots\dots\dots \qquad x_2 = \dots\dots\dots$$



Esaminando anche il grafico (fig. 5) della parabola:

$$y = -x^2 + 220x - 2100$$

si trova che risulta:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad \dots < x < \dots$$

Si conclude che alla fabbrica conviene praticare lo sconto solo se un cliente acquista più di 10 e meno di 210 biciclette.

La stessa fig. 5 suggerisce anche un altro risultato: si ha il profitto massimo quando  $y$  raggiunge la «massima quota», e cioè in corrispondenza del vertice  $V$  della parabola.

Il vertice  $V$  ha l'ascissa  $p$  data da:

$$p = \dots = 110$$

e l'ordinata  $q$  data da:

$$q = \dots = 10000$$

Si trova così che la fabbrica raggiunge il profitto massimo di 10 000 000 di lire vendendo allo stesso negoziante 110 biciclette.

### III. Esercizi sui sistemi

#### A. Esercizi di calcolo

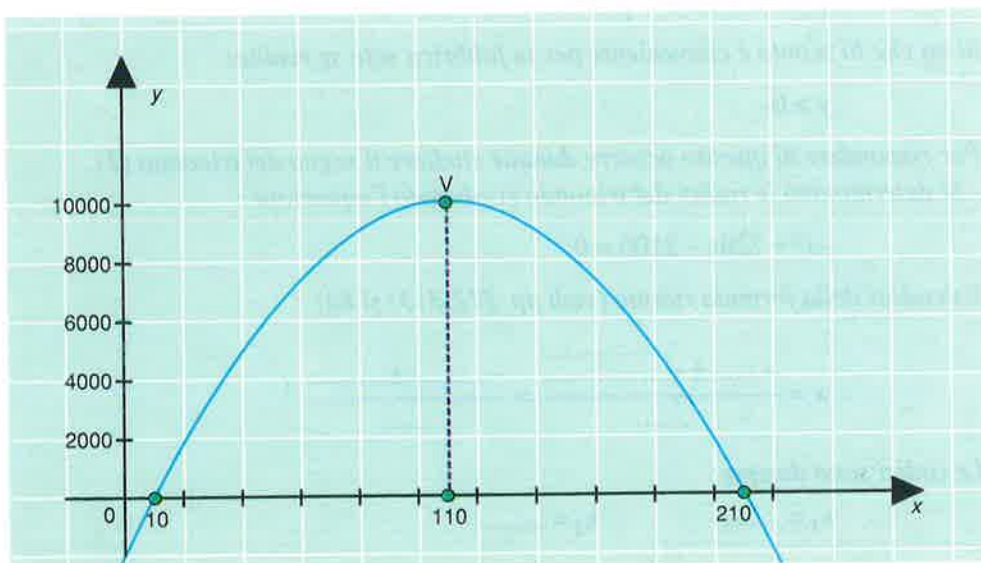
##### Attività 9

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 4x^2 - x - 2 \end{cases}$$

Verificare che le soluzioni ottenute sono corrette.

**Figura 5**  
Il profitto  $y$  al variare  
del numero  $x$  di  
biciclette vendute



Procedendo col metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ \dots = 4x^2 - x - 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 4x^2 - \dots = 0 \end{cases}$$

e infine:

$$\begin{cases} y_1 = \dots \\ x_1 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

Si ottengono dunque le soluzioni (0; -2) e (1; 1).

Per verificare se le soluzioni sono corrette, completare la seguente tabella:

Per la coppia (0; -2)	Per la coppia (1; 1)
$\begin{cases} -2 = 3 \cdot \dots - 2 \\ -2 = 4 \cdot \dots - \dots - \dots \end{cases}$	$\begin{cases} 1 = 3 \cdot \dots - 2 \\ 1 = 4 \cdot \dots - \dots - \dots \end{cases}$

## B. Problemi che conducono a sistemi di 1° grado

### Attività 10

Date le due curve che hanno le seguenti equazioni:

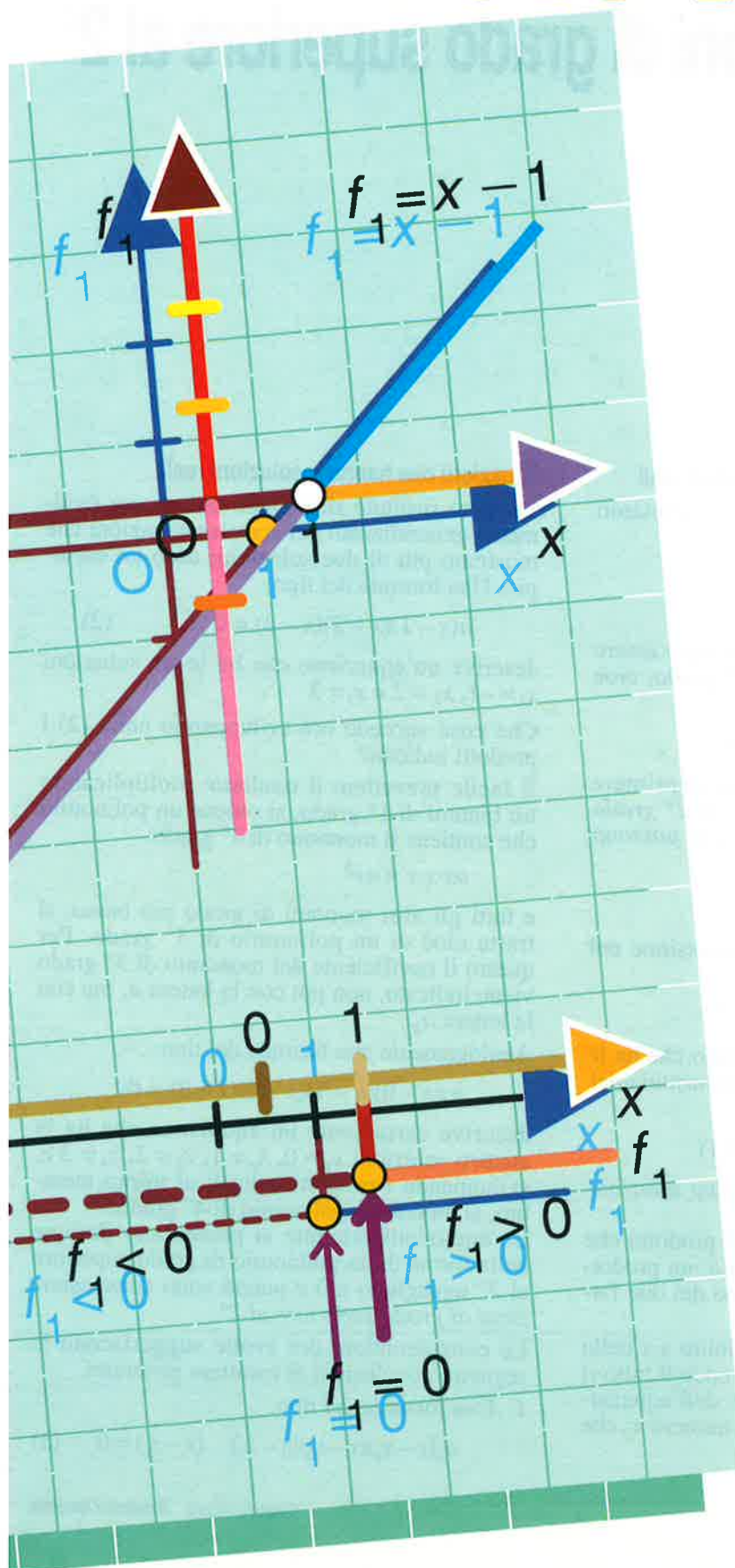
$$y = 2x + 1 \qquad y = x^2 + 2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i loro punti d'intersezione;
- stabilire se le curve sono secanti, tangenti o esterne;
- visualizzare i risultati ottenuti, tracciando il grafico delle due curve.



# IL CALCOLO LETTERALE



1.  
Equazioni di grado superiore al 2°

2.  
Divisibilità di un polinomio per  $(x-a)$

**Scheda informativa.**

Le radici razionali di un polinomio

3.  
Divisione di polinomi

**Scheda informativa.**

La regola di Ruffini

4.  
Scomporre in fattori un polinomio

5.  
Le radici multiple di un polinomio

**Attività.**

Risolvere equazioni di grado superiore al 2°

**Scheda storica.**

Equazioni e formule risolutive

6.  
Le frazioni algebriche

**Attività.**

Risolvere equazioni fratte

**Scheda informativa.**

Il segno di un polinomio e di un quoziente di polinomi

7.  
Le equazioni irrazionali

**Scheda informativa.**

Le disequazioni irrazionali

8.  
Sistemi di grado superiore al 2°

**Sintesi.**

Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**

Che cosa bisogna saper fare



# Equazioni di grado superiore al 2°

## Equazioni di 2° grado con due soluzioni reali

Nel capitolo settimo (paragrafo 5) abbiamo trovato i due seguenti risultati:

1. Un trinomio di 2° grado:

$$ax^2 + bx + c$$

con le radici reali  $x_1$  e  $x_2$ , può sempre essere scomposto in due fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Questo stesso risultato si può esprimere dicendo che tutte le equazioni di 2° grado con due soluzioni reali  $x_1$  e  $x_2$  si possono scrivere nella forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

2. Viceversa, sviluppando un'espressione del tipo:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

si ottiene un trinomio di 2° grado che ha le due radici reali  $x_1$  e  $x_2$ , cioè una formula del tipo:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (1)$$

descrive un'equazione con le due soluzioni  $x_1$  e  $x_2$ .

È la legge di annullamento del prodotto che garantisce quest'ultimo risultato: un prodotto vale 0, se vale 0 almeno uno dei due fattori.

Perciò il numero  $x_1$ , che, sostituito a  $x$  nella (1), rende 0 il primo fattore, rende 0 tutto il prodotto e quindi è soluzione dell'equazione; altrettanto si può dire del numero  $x_2$  che rende 0 il secondo fattore.

## Equazioni che hanno $n$ soluzioni reali

L'ultimo risultato richiamato può essere facilmente generalizzato per scrivere equazioni che mostrano più di due soluzioni; ecco un esempio. Una formula del tipo:

$$a(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \quad (2)$$

descrive un'equazione che ha le tre soluzioni  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$

Che cosa succede ora sviluppando nella (2) i prodotti indicati?

È facile prevedere il risultato: moltiplicando tre binomi di 1° grado, si ottiene un polinomio che contiene il monomio di 3° grado:

$$ax \cdot x \cdot x = ax^3$$

e tutti gli altri monomi di grado più basso; si tratta cioè di un polinomio di 3° grado. Per questo il coefficiente del monomio di 3° grado viene indicato, non più con la lettera  $a$ , ma con la lettera  $a_3$ .

Analogamente una formula del tipo:

$$a_4(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

descrive certamente un'equazione che ha le quattro soluzioni  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$  e, sviluppando i prodotti indicati al primo membro, si ottiene un polinomio di 4° grado.

Le equazioni ottenute si presentano dunque nella forma di un polinomio di grado superiore al 2° uguagliato a 0 e perciò sono dette equazioni di grado superiore al 2°.

Le considerazioni ora svolte suggeriscono le seguenti conclusioni di carattere generale:

1. Una formula del tipo:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0 \quad (3)$$

descrive un'equazione che ha le  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

2. Sviluppando nella formula (3) i prodotti indicati al primo membro, l'equazione assume la forma:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (4)$$

in cui, al primo membro, si trova un polinomio di grado  $n$ , ordinato secondo le potenze decrescenti di  $x$ , e si ha che:

- le lettere  $a_0, a_1, \dots, a_n$  indicano i coefficienti del polinomio;
- le lettere  $x^n, \dots, x^2, x$  indicano le potenze di  $x$ .

3. Un'equazione scritta nella forma di un polinomio di grado  $n$  uguagliato a 0 prende il nome di equazione di ennesimo grado.

Nella tabella A si trova qualche altro esempio di questo tipo di equazioni.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Come si scrive un'equazione che ha  $n$  date soluzioni reali?
- ② Che cosa si intende col termine «equazione di ennesimo grado»?

### Comprensione

- ① Spiegare perché un'equazione di 2° grado è una particolare equazione di grado  $n$ .
- ② Un'equazione di 1° grado è una particolare equazione di grado  $n$ ?

### Applicazioni

- ① Scrivere un'equazione che abbia le soluzioni seguenti:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- a. stabilire il grado dell'equazione;
- b. scrivere un polinomio che abbia i numeri dati come radici.

**Tabella A**  
Equazioni di ennesimo grado

Soluzioni	Equazioni
$x_1 = -5 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$	$[x - (-5)](x - 0)(x - 2) = 0$ ossia $(x + 5)x(x - 2) = 0$ da cui $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$
$x_1 = -5 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$	$(x + 5)(x - 1)(x - 2) = 0$ ossia $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$
$x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = 1$	$2(x + 1)(x - 0)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = 0$ ossia $2x^4 - x^3 - 2x^2 + x = 0$
$x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = 0$ $x_4 = \sqrt{2} \quad x_5 = \sqrt{3}$	$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2})(x - 0)(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$ ossia $x^5 - 5x^3 + 6x = 0$

### Collegamento con i capitoli precedenti

① Che cosa si intende col termine «trinomio di 2° grado»?  
(Vedere il capitolo 7, p. 322)

② Spiegare come si trova che, per un trinomio di 2° grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c$$

con due radici reali  $x_1$  e  $x_2$ , vale l'identità:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(Vedere il capitolo 7, p. 322)

③ Confrontare i seguenti teoremi esaminati in questo paragrafo:

a. tutte le equazioni di 2° grado con le due soluzioni reali  $x_1$  e  $x_2$  si possono scrivere nella forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

b. una formula del tipo:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

descrive certamente un'equazione con due soluzioni reali  $x_1$  e  $x_2$ .

Spiegare perché i due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro.

(Vedere il capitolo 4, p. 153)

### Collegamenti con il primo volume

① Che cosa si intende con il termine «polinomio»?  
(Vedere il capitolo 6, p. 259)

② Come si valuta il grado di un polinomio?  
(Vedere il capitolo 6, p. 259)

③ Scrivere nella tabella B, accanto a ogni calcolo, la proprietà delle operazioni che è stata applicata.  
(Vedere il capitolo 6, p. 267)

④ Sviluppare i prodotti indicati al primo membro delle seguenti equazioni, indicando le proprietà delle operazioni applicate.  
(Vedere il capitolo 6, p. 267)

$$x(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$2(x + 1)(x - 0) \left( x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) = 0$$

⑤ In che cosa consiste la legge di annullamento del prodotto?  
(Vedere il capitolo 1, p. 14)

**Tabella B**  
Proprietà da applicare per calcolare il prodotto di polinomi

Calcolo	Proprietà
$(x + 5)[(x - 1)(x - 2)] = (x + 5)(x^2 - 3x + 2)$	
$(x + 5)(x^2 - 3x + 2) =$ $= x(x^2 - 3x + 2) + 5(x^2 - 3x + 2)$	
$x(x^2 - 3x + 2) + 5(x^2 - 3x + 2) =$ $= x^3 - 3x^2 + 2x + 5x^2 - 15x + 10$	
$x^3 - 3x^2 + 2x + 5x^2 - 15x + 10 =$ $= x^3 + 2x^2 - 13x + 10$	

# Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$

Nel paragrafo 1 si è arrivati alle seguenti conclusioni:

1. a partire da  $n$  numeri reali, si può *sempre* «costruire» un'equazione che ha quegli  $n$  numeri come soluzioni e l'equazione è scritta nella forma:

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)=0 \quad (1)$$

2. l'equazione ottenuta si può *sempre* scrivere nella forma seguente:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

che al primo membro presenta un polinomio con  $n$  radici reali.

Ci si chiede ora: che cosa si può dire del precedente procedimento, percorso in senso inverso? E cioè, un polinomio di grado  $n$  con  $n$  radici reali può sempre essere scomposto in fattori di 1° grado?

## Dalla scomposizione in fattori di un numero intero alla scomposizione di un polinomio

Per scoprire come scomporre un polinomio in fattori conviene riprendere la scomposizione in fattori di un numero intero, esaminando un caso particolare. Per esempio, il numero 65 può essere fattorizzato percorrendo i seguenti passi:

1. Si comincia col dividere 65 per 2 e si ottiene il quoziente 32, con resto 1, cioè:

$$65 : 2 = 32 \text{ con il resto } R = 1$$

ossia:

$$65 = 2 \cdot 32 + 1$$

Si conclude che 65 non è divisibile per 2, dato che la divisione dà un resto  $R = 1$ .

2. Si divide 65 per 3 e per 4 trovando che 65 non è divisibile per nessuno di questi numeri, dato che la divisione dà un resto  $R \neq 0$ .

3. Si divide 65 per 5 e si trova finalmente:

$$65 : 5 = 13 \text{ con il resto } R = 0$$

perciò 65 è divisibile per 5 e viene scomposto in fattori nel modo seguente:

$$65 = 5 \cdot 13$$

Questo procedimento è però molto lungo e perciò abitualmente viene abbreviato valendosi di opportuni *criteri di divisibilità*; questi criteri permettono di stabilire se un intero è divisibile per un altro senza eseguire la divisione.

Ecco gli esempi più noti:

- un intero è divisibile per 2 se l'ultima cifra è pari;
- un intero è divisibile per 5 se l'ultima cifra è 5 o 0.

Valendosi di questi criteri, si stabilisce subito, per esempio, che il numero 65 non è divisibile per 2, ma è divisibile per 5 e perciò si effettua direttamente la divisione per 5.

Un procedimento analogo si può seguire per scomporre un polinomio in fattori di 1° grado del tipo  $(x-x_1)$ ,  $(x-x_2)$ , ...,  $(x-x_n)$ , in generale del tipo  $(x-a)$ :

1. si stabilisce un criterio di divisibilità del polinomio per un binomio del tipo  $(x-a)$ ;
2. si effettua la divisione del polinomio per tutti i binomi che risultano suoi divisori.

Ecco allora il primo passo del procedimento, che verrà completato con un secondo passo nel paragrafo 3.



### Criterio di divisibilità di un polinomio per un binomio del tipo $(x-a)$

Il polinomio assegnato viene indicato con il simbolo  $P(x)$  per ricordare che è una funzione di  $x$ , cioè assume valori che variano al variare di  $x$ ; un esempio può essere:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

Effettuare la divisione di questo polinomio, per esempio per  $(x-1)$ , vuol dire scrivere la seguente uguaglianza, vera per qualunque valore di  $x$ :

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R$$

dove  $Q(x)$  indica il polinomio quoziente e  $R$  indica il resto.

L'ultima uguaglianza deve essere vera, in particolare, quando a  $x$  si sostituisce il numero 1, presente nel binomio  $(x-1)$ . Si ha:

$$\text{I membro} = P(1) = 2 \cdot 1^3 - 11 \cdot 1^2 + 17 \cdot 1 - 6 = 2$$

$$\text{II membro} = (1-1)Q(1) + R = 0 \cdot Q(1) + R = 0 + R = R$$

Si ottiene dunque:

$$R = 2$$

Si conclude che la divisione del polinomio  $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$  per il binomio  $(x-1)$  dà come resto  $R = 2$  e perciò il polinomio non è divisibile per  $(x-1)$ .

Con lo stesso metodo si può controllare se il polinomio è divisibile per  $(x-2)$ ; ecco come si procede.

- Si scrive l'uguaglianza che deve essere vera per qualunque  $x$ :

$$P(x) = (x-2)Q(x) + R$$

- Si valutano i due membri dell'uguaglianza sostituendo 2 a  $x$ ; si ha:

$$\text{I membro} = P(2) = 2 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{II membro} &= (2-2)Q(2) + R = 0 \cdot Q(2) + R = \\ &= 0 + R = R \end{aligned}$$

- Si ottiene:

$$R = 0$$

Così si conclude che il polinomio

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

è divisibile per  $(x-2)$ , dato che la divisione dà il resto  $R = 0$ .

Dunque, per stabilire che il polinomio è divisibile per  $(x-2)$ , basta il seguente procedimento:

- calcolare  $P(2)$ , cioè il valore che assume il polinomio quando si sostituisce 2 a  $x$ ;
- verificare che risulta  $P(2) = 0$ .

Il procedimento ora seguito può essere ripetuto a partire da qualunque polinomio  $P(x)$  e dal binomio del tipo  $(x-a)$ , dove  $a$  indica un qualunque numero reale; si ha così il seguente **criterio di divisibilità**: un polinomio  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$  se risulta:

$$P(a) = 0$$

ossia se il numero reale  $a$  è una radice del polinomio. Valendosi del connettivo di implicazione si può scrivere brevemente:

$$P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-a)Q(x)$$

### Un criterio per selezionare le radici intere di un polinomio

Il criterio ottenuto fa nascere subito una domanda: come trovare le radici reali di un polinomio di grado  $n$ ?

Nel caso dell'equazione di 2° grado scritta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le soluzioni si trovano con la formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

Si potrebbe allora ricercare una formula risolutiva analoga alla (3) per risolvere anche le equazioni di grado superiore al 2°; questa ricerca è stata sviluppata soprattutto nel XVI secolo e ha condotto a trovare (vedi anche la scheda storica di p. 414):

- una formula risolutiva assai complicata per le equazioni di 3° grado;

- un metodo generale ancora più lungo e complicato per risolvere le equazioni di 4° grado. Successive ricerche hanno poi dimostrato che non è possibile trovare una formula risolutiva per le equazioni di grado superiore al 4°.

Il criterio di divisibilità sembra dunque indicare un procedimento impraticabile: sostituire a  $x$  vari numeri reali per «indovinare» una radice del polinomio. Basta pensare agli infiniti numeri reali da provare per rimanere scoraggiati dall'impresa.

Ecco allora un criterio per selezionare i numeri da sostituire a  $x$ , limitandosi però ai numeri interi: *le radici intere di un polinomio a coefficienti interi si possono trovare solo fra i divisori del termine noto.*

E così, per esempio, nel polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

il termine noto è  $-6$  e i suoi divisori sono:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

Quindi i numeri da sostituire a  $x$  sono soltanto otto; effettuando la sostituzione, si trova:

$$P(2) = 0 \qquad P(3) = 0$$

In corrispondenza degli altri sei numeri, invece, il polinomio assume valori diversi da 0. Si conclude così che il polinomio ha due sole radici intere:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

Perciò è inutile sostituire altri interi come 4 o 5, perché non sono divisori di  $-6$  e dunque non possono essere radici del polinomio.

### L'origine del criterio

Come si arriva a questo criterio di notevole utilità pratica?

È facile da capire, ragionando sul modo di generare un polinomio con  $n$  radici reali:

- si scrive:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

- si sviluppano i prodotti indicati, ottenendo:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Così il termine noto  $a_0$  proviene da un prodotto del tipo:

$$a_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

e perciò una radice intera deve essere un divisore del termine noto.

Nella scheda informativa di p. 392 si trova un criterio più generale per selezionare le radici razionali di un polinomio.

### Sintesi dei criteri stabiliti

I risultati presentati in questo paragrafo possono essere sintetizzati nei due criteri seguenti:

1. *Un polinomio  $P(x)$  è divisibile per il binomio  $(x - a)$  solo se il numero reale  $a$  è una radice del polinomio;*
2. *Le radici intere di un polinomio  $P(x)$  a coefficienti interi si possono trovare solo fra i divisori del termine noto.*

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Esporre il criterio di divisibilità di un polinomio  $P(x)$  per un binomio del tipo  $(x - a)$ .
- ② Fra quali numeri si possono trovare le radici intere di un polinomio?

### 2. Divisibilità di un polinomio per $(x - a)$

### Comprensione

- ① Dimostrare il criterio di divisibilità di un polinomio  $P(x)$  per un binomio del tipo  $(x - a)$ .
- ② Spiegare l'origine del criterio per selezionare le radici intere di un polinomio.
- ③ Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^3 + 4x + 3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. verificare che risulta  $P(-1) = 0$ ;
- b. per quale binomio è divisibile il polinomio?

### Applicazioni

- ① Esaminare i seguenti polinomi e scegliere quelli divisibili per il binomio  $(x - 1)$  motivando la scelta:

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 \qquad x^3 + 2x^2 - x - 4$$

$$3x^3 + 2x^2 - x - 4$$

- ② Esaminare il seguente polinomio:

$$P(x) = 3x^4 - x^3 + 4$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;
- b. determinare le radici intere del polinomio.

### Collegamento con i capitoli o i paragrafi precedenti

- ① Descrivere l'insieme dei numeri reali, portando qualche esempio di:
  - numero intero;
  - numero razionale, ma non intero;
  - numero irrazionale, cioè reale ma non razionale.
 (Vedere il capitolo 2, paragrafo 1)
- ② Esaminare i seguenti tre teoremi:

$$\text{I. } P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - a) Q(x)$$

$$\text{II. } P(x) = (x - a) Q(x) \Rightarrow P(a) = 0$$

$$\text{III. } P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a) Q(x)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. enunciare i tre teoremi; (Vedere il capitolo 4, paragrafo 3)
- b. spiegare perché il secondo teorema è l'inverso del primo; (Vedere il capitolo 4, paragrafo 3)
- c. dimostrare il primo e il secondo teorema; (Vedere il paragrafo 1)
- d. dimostrare il terzo teorema. (Vedere il capitolo 4, paragrafo 3)

## Le radici razionali di un polinomio

### Un criterio per selezionare le radici razionali di un polinomio

Nel paragrafo 2 si è dato un criterio per selezionare le radici intere di un polinomio; ecco ora un criterio più generale che permette di selezionare i numeri da sostituire a  $x$ , considerando anche i numeri razionali: *le radici razionali di un polinomio a coefficienti interi si possono trovare solo fra le frazioni che hanno come numeratore un divisore del termine noto e come denominatore un divisore del coefficiente del monomio di grado massimo.*

### Un'applicazione del criterio

Per afferrare meglio il criterio, che ha un enunciato piuttosto complicato, conviene vederne subito un'applicazione al polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

Si ha che:

- il termine noto è  $-6$  e i divisori di  $-6$  sono:

1    -1    2    -2    3    -3    6    -6

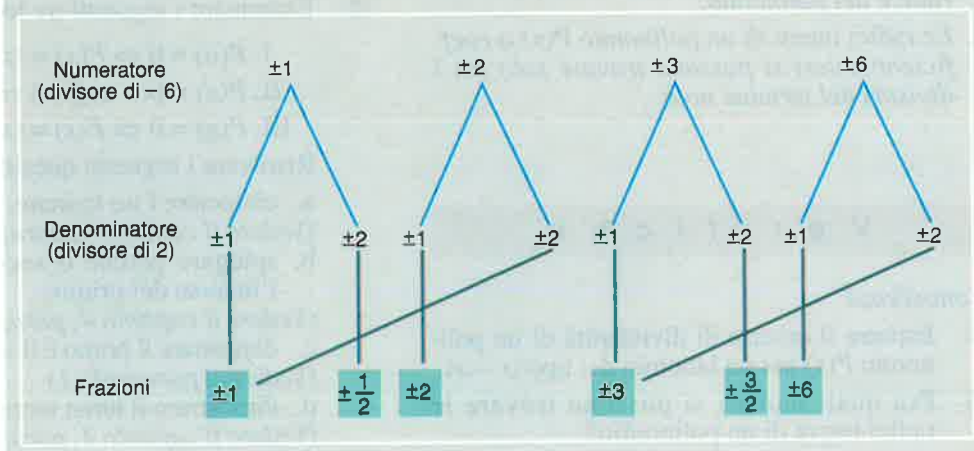
- il monomio di grado massimo è  $2x^3$ , con coefficiente 2, e i divisori di 2 sono:

1    -1    2    -2

- le frazioni che possono essere le radici razionali del polinomio sono dunque le seguenti (fig. 1):

$\pm 1$      $\pm \frac{1}{2}$      $\pm 2$      $\pm 3$      $\pm \frac{3}{2}$      $\pm 6$

**Figura 1**  
Come costruire le frazioni che possono essere radici razionali del polinomio



Si tratta dunque di soli 12 numeri razionali.

Provando a calcolare il valore che assume il polinomio in corrispondenza di questi numeri, si trova, come si è visto nel paragrafo 2:

$$P(2) = 0 \qquad P(3) = 0$$

e si trova anche:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Così si trova che il polinomio ha le tre radici razionali:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$$

L'esempio ora esaminato conduce a esporre il criterio nel modo seguente:

- si scrivono i numeri razionali nella forma di frazioni  $\frac{n}{d}$  ridotte ai minimi termini, cioè con  $n$  e  $d$  che sono due interi senza fattori comuni;
- si considera l'insieme  $F$  formato dalle frazioni  $\frac{n}{d}$  che hanno  $n$  divisore del termine noto e  $d$  divisore del coefficiente del monomio di grado massimo;
- si scrive il criterio nella forma:

$$P\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{n}{d}\right) \in F$$

Così si osserva subito che *non è vero il teorema inverso* e cioè *non è vero* che:

$$\frac{n}{d} \in F \Rightarrow P\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

perché non è detto affatto che tutti i numeri dell'insieme  $F$  siano radici del polinomio. Nel polinomio esaminato prima si aveva, per esempio,

$$1 \in F, \quad \text{ma} \quad P(1) = 2$$

### La dimostrazione del criterio

Per capire come si arriva al criterio appena esaminato conviene ragionare sempre sul polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

seguendo una dimostrazione che ha carattere generale e può essere ripetuta a partire da qualunque altro polinomio.



1. Si parte dall'ipotesi:

$$P\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \quad \text{ossia} \quad 2\left(\frac{n}{d}\right)^3 - 11\left(\frac{n}{d}\right)^2 + 17\left(\frac{n}{d}\right) - 6 = 0$$

e si sviluppano le potenze indicate, ottenendo:

$$2 \cdot \frac{n^3}{d^3} - 11 \cdot \frac{n^2}{d^2} + 17 \cdot \frac{n}{d} - 6 = 0$$

2. Si moltiplicano i due membri per  $d^3$  e si ha:

$$2n^3 - 11n^2d + 17nd^2 - 6d^3 = 0 \quad (1)$$

3. Ecco ora il centro della dimostrazione: dall'uguaglianza (1) si esplicita  $2n^3$ , ottenendo:

$$2n^3 = 11n^2d - 17nd^2 + 6d^3$$

da cui, raccogliendo al secondo membro il fattore comune  $d$ , si ha:

$$2n^3 = d(11n^2 - 17nd + 6d^2)$$

Quest'uguaglianza dice che  $d$  è un divisore del prodotto  $2n^3$ .

Ma  $d$  non può essere un divisore di  $n^3$  (perché  $n$  e  $d$  non hanno fattori comuni), perciò  $d$  è un divisore di 2, che è il coefficiente del monomio di grado massimo.

4. Analogamente, dall'uguaglianza (1) si esplicita  $6d^3$ , ottenendo:

$$6d^3 = 2n^3 - 11n^2d + 17nd^2$$

da cui:

$$6d^3 = n(2n^2 - 11nd + 17d^2)$$

e, per lo stesso motivo di prima, l'uguaglianza esprime il fatto che  $n$  è un divisore del termine noto 6.

5. Si conclude dunque che se un numero razionale è radice del polinomio, allora si trova certamente nell'insieme  $F$ .

### Un caso particolare del criterio

Questo criterio contiene quello dato nel paragrafo 2 e questo perché nell'insieme  $F$  si trovano, in particolare, gli interi che sono divisori del solo termine noto:

sono le frazioni del tipo  $\frac{n}{d}$  che hanno come denominatore 1 o  $-1$ .

# Divisione di polinomi

Per scomporre un polinomio in fattori – si è detto nel paragrafo 2 – si divide il polinomio per i binomi  $(x - a)$  che sono suoi divisori. Per esempio, esaminando il polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

si trova che risulta:

$$P(-1) = 0 \quad P(1) = 0 \quad P(2) = 0$$

cioè il polinomio ha le tre radici:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

e perciò è divisibile per  $(x + 1)$ , per  $(x - 1)$  e per  $(x - 2)$ .

Dunque, per scomporre in fattori il polinomio, bisogna dividerlo per i binomi  $(x + 1)$ ,  $(x - 1)$  e  $(x - 2)$ .

Ma come si effettua la divisione di due polinomi? Per dividere due polinomi si generalizza il procedimento per dividere due numeri interi richiamato qui sotto.

## Il procedimento per dividere due numeri interi

Ecco un esempio di divisione fra due interi. Per eseguire la divisione

$$75 : 3$$

si procede nel modo seguente:

1. Si divide 7, prima cifra del dividendo, per il divisore 3:

$$7 : 3 = 2$$

2. Si moltiplica il quoziente 2 per il divisore 3:

$$2 \cdot 3 = 6$$

3. Si sottrae 6, il numero ottenuto, da 7:

$$7 - 6 = 1$$

Questi tre passi vengono abitualmente sintetizzati con lo schema seguente:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 6 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

4. Si ripetono i primi tre passi, completando lo schema nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 6 & 25 \\ \hline 15 & \\ 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alla fine della divisione si trova dunque:

$$75 : 3 = 25$$

e quindi:

$$75 = 3 \cdot 25$$

## Il procedimento per dividere due polinomi

Vediamo ora come si generalizza il procedimento di divisione fra due interi appena richiamato per eseguire la divisione fra due polinomi. Per effettuare la divisione

$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x + 1)$$

si procede nel modo seguente:

1. Si divide il primo monomio  $2x^3$  del dividendo per il primo monomio  $x$  del divisore:

$$2x^3 : x = 2x^2$$

2. Si moltiplica il quoziente  $2x^2$  per il divisore  $(x + 1)$ :

$$2x^2(x + 1) = 2x^3 + 2x^2$$

3. Si sottrae il polinomio ottenuto dal dividendo:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 - (2x^3 + 2x^2) = -6x^2 - 2x + 4$$

Questi tre passi vengono abitualmente sintetizzati con lo schema seguente:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 & x + 1 \\ 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 \\ \hline -6x^2 - 2x + 4 & \end{array}$$

4. Si ripetono i primi tre passi, completando lo schema nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 & x + 1 \\ 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - 6x + 4 \\ \hline -6x^2 - 2x + 4 & \\ -6x^2 - 6x & \\ \hline 4x + 4 & \\ 4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alla fine della divisione si trova dunque:

$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x + 1) = 2x^2 - 6x + 4$$

e quindi:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x + 1)(2x^2 - 6x + 4)$$

### Un polinomio scomposto in fattori

Il trinomio  $2x^2 - 6x + 4$  ottenuto prima ha le radici che valgono 1 e 2, perciò può essere a sua volta scomposto in fattori nel modo seguente:

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$$

Si conclude che il polinomio dato si fattorizza nel modo seguente:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

Si è così scomposto il polinomio nel prodotto di tre binomi di 1° grado del tipo  $(x - a)$ , con  $a$  che è sempre una radice del polinomio.

### Fattorizzazione di un polinomio con $n$ soluzioni reali

Ora si può finalmente rispondere a un quesito rimasto insoluto dal paragrafo 2: un polinomio con  $n$  radici reali può sempre essere scomposto in fattori di 1° grado?

L'esempio esaminato prima suggerisce una risposta di carattere generale: a partire da un polinomio  $P(x)$  con  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , si può sempre procedere nel modo seguente:

- si divide successivamente  $P(x)$  per  $(x - x_1)$ ,  $(x - x_2)$ , ...,  $(x - x_n)$ ;

- si fattorizza il polinomio scrivendo:

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

Si estendono dunque ai polinomi di grado  $n$  i due teoremi richiamati nel paragrafo 1; si ha che:

1. Un polinomio di grado  $n$ :

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$  può sempre essere scomposto in  $n$  fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

2. Viceversa, sviluppando un'espressione del tipo:

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

si ottiene sempre un polinomio di grado  $n$  con le  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### Un polinomio di grado $n$ ha al massimo $n$ radici reali

I due teoremi ottenuti suggeriscono subito un'altra domanda: un polinomio di grado  $n$  ha sempre  $n$  radici reali?

E cioè, un'equazione di grado  $n$  ha sempre  $n$  soluzioni reali?

Già le equazioni di 2° grado hanno mostrato tanti esempi di risposta negativa a questa domanda: sono tante le equazioni senza soluzioni reali, come per esempio:

$$2x^2 + 3 = 0 \quad x^2 + x + 1 = 0$$

Ci si aspetta quindi un comportamento analogo nelle equazioni di grado superiore al 2°; basta scrivere:

$$(x - 1)(2x^2 + 3) = 0 \quad \text{ossia} \quad 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

per avere un esempio di equazione di 3° grado con una sola soluzione reale.

E così l'equazione:

$$(2x^2 + 3)(x^2 + x + 1) = 0$$

ossia:

$$2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 3 = 0$$

fornisce un esempio di equazione di 4° grado senza soluzioni reali.

Dunque, un'equazione di grado  $n$  può avere meno di  $n$  soluzioni reali (anche nessuna), ma certamente non può averne più di  $n$ .

Per esempio, un'equazione di 4° grado non può avere 5 soluzioni reali, perché, a partire da quelle 5 soluzioni, si costruiscono equazioni che sono tutte di 5° grado, non di 4°.

Si arriva dunque alla seguente conclusione: *un'equazione di grado  $n$  ha al massimo  $n$  soluzioni reali.*

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Dividere il seguente polinomio:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

per il seguente binomio:

$$(x - 2)$$

Descrivere il procedimento seguito; di che grado è il polinomio quoziente?

- ② Quante radici reali può avere al massimo un polinomio di grado  $n$ ?

### Comprensione

- ① Un'equazione di 3° grado ha sempre tre soluzioni reali?
- ② Un'equazione di 3° grado può avere quattro soluzioni reali?
- ③ Fra le seguenti frasi scegliere quella corretta motivando la scelta:
- «Un'equazione di grado  $n$  ha sempre  $n$  soluzioni reali»;
  - «Un'equazione di grado  $n$  ha al massimo  $n$  soluzioni reali».

### Applicazioni

- ① Portare un esempio di polinomio che ha 4 soluzioni reali; di che grado è il polinomio?
- ② Portare un esempio di polinomio di 4° grado che non ha soluzioni reali.
- ③ Esaminare il seguente polinomio:

$$x^3 - 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che il polinomio è divisibile per  $(x - 1)$ ;
- scomporre il polinomio in fattori di 1° o di 2° grado.

- ④ Esaminare il seguente polinomio:

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che è divisibile per  $(x + 1)$  e per  $(x - 1)$ ;
- scomporre il polinomio in fattori di 1° o di 2° grado.

### Collegamenti con i capitoli precedenti

- ① Confrontare i seguenti teoremi esaminati in questo paragrafo:
- Un polinomio di grado  $n$ :

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$  può sempre essere scomposto in  $n$  fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

- Sviluppando un'espressione del tipo:

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

si ottiene sempre un polinomio di grado  $n$  con le  $n$  radici reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Spiegare perché i due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro.

(Vedere il capitolo 4, paragrafo 3)



## La regola di Ruffini

Nel paragrafo 3 si è indicato il seguente procedimento per scomporre un polinomio  $P(x)$  in fattori:

1. individuare un binomio  $(x - a)$  per cui il polinomio sia divisibile;
2. effettuare la divisione fra  $P(x) : (x - a)$  per individuare il quoziente  $Q(x)$ ;
3. scrivere il polinomio scomposto in fattori nella forma:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Questo procedimento, che ha validità generale, può essere abbreviato esaminando la struttura che deve avere il quoziente  $Q(x)$ .

### Il quoziente della divisione di un polinomio per un binomio del tipo $(x - a)$

Si può cominciare ad esaminare un caso particolare, che suggerisce delle conclusioni di carattere generale; è dato il polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

e si è trovato che risulta:

$$P(3) = 0$$

e perciò il polinomio è divisibile per  $(x - 3)$ .

Questo vuol dire che  $P(x)$  si può scrivere nella forma:

$$P(x) = (x - 3)Q(x) \quad (1)$$

dove  $Q(x)$  è il polinomio quoziente da determinare con la divisione del polinomio  $P(x)$  per  $(x - 3)$ .

Invece di effettuare la divisione, si può ragionare così:

1.  $Q(x)(x - 3)$  deve essere un polinomio di 3° grado e perciò  $Q(x)$  deve essere di 2° grado, cioè avere la forma:

$$Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$$

dove  $q_2$ ,  $q_1$  e  $q_0$  sono tre coefficienti da determinare.

2.  $Q(x)$  deve rendere vera l'uguaglianza (1) per ogni  $x$ , cioè:

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x - 3)(q_2x^2 + q_1x + q_0) \quad (2)$$

3. Si sviluppa il secondo membro della (2) e si ottiene:

$$(x - 3)(q_2x^2 + q_1x + q_0) = q_2x^3 + (q_1 - 3q_2)x^2 + (q_0 - 3q_1)x - 3q_0$$

e quindi:

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = q_2x^3 + (q_1 - 3q_2)x^2 + (q_0 - 3q_1)x - 3q_0$$

4. Dire che l'uguaglianza ottenuta è vera per ogni  $x$  significa dire che i due polinomi hanno, ordinatamente, gli stessi coefficienti, e cioè:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 - 3q_2 = -11 \\ q_0 - 3q_1 = 17 \\ -3q_0 = -6 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3q_2 \\ q_0 = 17 + 3q_1 \\ -6 + 3q_0 = 0 \end{cases}$$

5. Si ottiene così un sistema con tre incognite ( $q_2$ ,  $q_1$  e  $q_0$ ) e quattro equazioni; il sistema è però particolarmente semplice da risolvere perché la prima equazione fornisce già l'incognita  $q_2$  che, sostituita nella seconda equazione, permette di ricavare  $q_1$  e quindi  $q_0$  dalla terza equazione. Si ha dunque:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3 \cdot 2 = -5 \\ q_0 = 17 + 3(-5) = 2 \end{cases}$$

Ora occorre verificare che la soluzione ottenuta soddisfi anche l'ultima equazione:

$$-6 + 3q_0 = 0$$

Si trova:

$$-6 + 3 \cdot 2 = 0$$

e si conclude che il polinomio quoziente ha i coefficienti:

$$q_2 = 2 \quad q_1 = -5 \quad q_0 = 2$$

6. Si scrive il polinomio quoziente che è quindi:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

### La regola di Ruffini

Il procedimento ora esposto non è certo più breve della divisione di due polinomi, ma il sistema:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3q_2 \\ q_0 = 17 + 3q_1 \\ -6 + 3q_0 = 0 \end{cases}$$

mette in rilievo una notevole regolarità nella formazione dei coefficienti ( $q_2$ ,  $q_1$  e  $q_0$ ) del polinomio quoziente  $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$  a partire da:

- i coefficienti (2, -11, 17 e -6) del polinomio dividendo  $P(x)$
- la radice 3 del polinomio  $P(x)$ .

Si trova infatti che  $Q(x)$  è un polinomio di 2° grado i cui coefficienti si trovano nel seguente modo:

1. dalla prima equazione del sistema:

$$q_2 = 2$$

si ricava il primo coefficiente  $q_2$  del polinomio  $Q(x)$ , che è uguale al primo coefficiente (2) di  $P(x)$ ;

2. dalla seconda equazione:

$$q_1 = -11 + 3q_2$$

si ricava il secondo coefficiente  $q_1$  di  $Q(x)$ , addizionando al secondo coefficiente (-11) di  $P(x)$  il prodotto di  $q_2$  per la radice 3;

3. dalla terza equazione:

$$q_0 = 17 + 3q_1$$

si ricava il terzo coefficiente con la stessa regola, cioè si aggiunge al terzo coefficiente (17) di  $P(x)$  il prodotto di  $q_1$  per la radice 3;

4. l'ultima equazione del sistema:

$$-6 + 3q_0 = 0$$

richiede di addizionare il termine noto (-6) di  $P(x)$  al prodotto di  $q_0$  per la radice 3, per verificare che la somma sia 0.

Ecco come questo procedimento può diventare più rapido disponendo i coefficienti di  $P(x)$  e la radice 3 in uno schema grafico come quello di fig. 1 in cui compaiono:

- nella prima riga i coefficienti del polinomio  $P(x)$ , ordinato secondo le potenze decrescenti di  $x$ ;
- più in basso, a sinistra, la radice 3;
- seguendo il procedimento indicato prima, si ottengono nell'ultima riga i coefficienti del polinomio  $Q(x)$ , ordinato secondo le potenze decrescenti di  $x$ .

**Figura 1**  
La regola di Ruffini

Radice	Coefficiente del monomio di 3° grado	Coefficiente del monomio di 2° grado	Coefficiente del monomio di 1° grado	Termine noto
	2	-11	17	-6
3		$2 \cdot 3 = 6$	$5 \cdot 3 = -15$	$2 \cdot 3 = 6$
		$-11 + 6 =$	$17 + (-15) =$	$-6 + 6 =$
	2	-5	2	0

Il procedimento appena indicato prende il nome di *regola di Ruffini*, dal nome del matematico italiano Paolo Ruffini (1765-1822), famoso per notevoli ricerche nel campo delle equazioni (vedi anche la scheda storica di p. 414).

La regola di Ruffini si può sempre applicare per calcolare i coefficienti del quoziente  $Q(x)$ , purché si tengano ben presenti tre avvertenze:

1. il divisore deve essere un binomio del tipo  $(x - a)$ ;
2. i polinomi debbono essere tutti ordinati secondo le potenze decrescenti di  $x$ ;
3. nello schema debbono essere scritti tutti i coefficienti di  $P(x)$ , anche quelli che valgono 0.

### Regola di Ruffini e divisione dei polinomi a confronto

Vediamo ora due casi di scomposizione di polinomi in fattori per confrontare la regola di Ruffini con la divisione dei polinomi.

1. Scomporre in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^3 - 1$$

Le radici intere del polinomio possono essere solo 1 e -1; si ha:

$$P(1) = 0$$

$$P(-1) = -2$$

si conclude che  $P(x)$  ha una sola radice intera che vale 1 e perciò  $P(x)$  è divisibile per  $(x - 1)$ .

Si deve ora calcolare il quoziente:

$$Q(x) = P(x) : (x - 1)$$

e si hanno a disposizione due procedimenti: la divisione dei polinomi e la regola di Ruffini.

- A. Con la divisione dei polinomi si ha:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 1 & x - 1 \\
 x^3 - x^2 & x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x^2 - 1 & \\
 x^2 - x & \\
 \hline
 x - 1 & \\
 x - 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

- B. Con la regola di Ruffini si procede nel modo seguente:

Radice	3° grado	2° grado	1° grado	Termine noto
	1	0	0	-1
1		$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
		$0 + 1 =$	$0 + 1 =$	$-1 + 1 = 0$
	1	1	1	



Il polinomio di 2° grado che ha i coefficienti indicati è quindi:

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

In ambedue i casi si conclude che risulta:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

2. Scomporre in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4$$

Le radici intere del polinomio possono essere:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4$$

e si ha:

$$P(-1) = 0$$

$$P(1) = 0$$

$$P(2) = 0$$

mentre in corrispondenza degli altri tre numeri il polinomio non vale 0. Si conclude che il polinomio di 5° grado  $P(x)$  ha tre radici intere che valgono :

$$-1 \quad 1 \quad 2$$

Perciò  $P(x)$  è divisibile per i seguenti binomi:

$$[x - (-1)] = (x + 1) \quad (x - 1) \quad (x - 2)$$

Dunque, il polinomio  $P(x)$  può essere scritto nella forma seguente:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)Q(x) \quad (1)$$

in cui resta da determinare  $Q(x)$ .

Ecco allora la divisione dei polinomi a confronto con la regola di Ruffini.

A. La divisione si può eseguire con qualunque coppia di polinomi, perciò si può procedere così:

- nella formula (1) si sviluppano i prodotti indicati, scrivendo:

$$P(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)Q(x)$$

- si calcola  $Q(x)$  con la divisione di polinomi e si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ x^5 - 2x^4 & -x^3 + 2x^2 \\ \hline & -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 \\ & -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

- il polinomio  $P(x)$  scomposto in fattori di 1° o 2° grado è dunque:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x^2 - 2)$$

B. La regola di Ruffini fornisce un procedimento decisamente più lungo, perché bisogna compilare tre schemi grafici successivi. Ecco come si procede:

I. Si calcola il quoziente della divisione di  $P(x)$  per  $(x + 1)$

	1	-2	-3	6	2	-4
-1		-1	3	0	-6	4
	1	-3	0	6	-4	0

Si ottiene un primo quoziente:

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 6x - 4$$

e quindi si ha:

$$P(x) = (x + 1)(x^4 - 3x^3 + 6x - 4)$$

II. Si calcola il quoziente della divisione di  $Q(x)$  per  $(x - 1)$

	1	-3	0	6	-4
+1		+1	-2	-2	4
	1	-2	-2	4	0

Si ottiene un secondo quoziente:

$$Q'(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

e quindi si ha:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$$

III. Si calcola il quoziente della divisione di  $Q'(x)$  per  $(x - 2)$

	1	-2	-2	4
2		2	0	-4
	1	0	-2	0

Si ottiene l'ultimo quoziente:

$$Q''(x) = x^2 - 2$$

Si scrive il polinomio scomposto in fattori nella forma seguente:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x^2 - 2)$$

Si conclude che:

1. La divisione fra due polinomi è un procedimento del tutto generale, mentre la regola di Ruffini si può applicare solo se il divisore è un binomio del tipo  $(x - a)$ ;
2. La regola di Ruffini richiede di imparare un procedimento che solo in alcuni casi rende i calcoli più brevi.

# Scomporre in fattori un polinomio

**Le radici reali di un polinomio di grado  $n$  si cercano scomponendo il polinomio in fattori di 1° o 2° grado**

Nei paragrafi precedenti si sono trovati i seguenti risultati:

- un polinomio di grado  $n$  ha al massimo  $n$  radici reali, cioè un'equazione di grado  $n$  ha al massimo  $n$  soluzioni reali;
- solo per le equazioni di 2° grado si trova una formula risolutiva facile da applicare.

La risoluzione delle equazioni di grado superiore al 2° offre dunque notevoli difficoltà e conduce a ricercare dei metodi semplici per risolvere almeno alcune equazioni.

Un metodo può essere ricavato da alcune equazioni esaminate finora.

Ecco un esempio su cui riflettere. L'equazione di 3° grado:

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0$$

può essere scritta in altra forma, perché nel polinomio al primo membro si può raccogliere il fattore comune  $x$ . Si ha:

$$x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10)$$

e quindi l'equazione può essere scritta nella forma:

$$x(x^2 + 3x - 10) = 0$$

In base al principio di annullamento del prodotto si è allora condotti a risolvere le due equazioni seguenti:

$$x = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Le due equazioni sono risolubili perché sono una di 1° e una di 2° grado.

Ecco allora un procedimento per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°: scomporre il polinomio al primo membro in fattori di 1° e 2° grado.

## Metodi per scomporre un polinomio in fattori

Da quanto si è detto in questo capitolo si può ricavare il seguente metodo per scomporre un polinomio in fattori:

- Dividere il polinomio per binomi del tipo  $(x - a)$ , dove  $a$  è una radice del polinomio.

Questo metodo presuppone però di conoscere qualche radice reale del polinomio, cosa non sempre possibile. Perciò conviene richiamare anche altri procedimenti per scomporre un polinomio in fattori e cioè:

- Raccogliere un fattore comune (vedi il primo volume, p. 264);
- Valersi del prodotto notevole (vedi il primo volume, p. 266);
- Valersi delle potenze di un binomio (vedi il primo volume, p. 269);
- Valersi della scomposizione di un trinomio di 2° grado (vedi il capitolo settimo, p. 322, di questo volume).

Ecco qualche applicazione di questi metodi.

## Fattorizzare un polinomio dividendolo per $(x - a)$

Il procedimento esposto nei paragrafi 2 e 3 di questo capitolo consiste nel percorrere i seguenti passi, a partire da un polinomio  $P(x)$ :

- scoprire se si trova una radice  $a$  del polinomio, tenendo presente che le radici intere del polinomio si possono trovare solo fra i divisori del termine noto;

B. in caso affermativo, eseguire la divisione

$$P(x) : (x - a).$$

Ecco qualche esempio di applicazione di questo metodo.

1. Il polinomio:

$$P(x) = x^3 + 1$$

può avere come radici intere solo i numeri  $\pm 1$  e risulta:

$$P(1) = 2$$

$$P(-1) = 0$$

perciò il polinomio è divisibile solo per:

$$[x - (-1)] = x + 1$$

Effettuando la divisione dei polinomi si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 1 & x + 1 \\ x^3 + x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -x^2 - x & \\ \hline x + 1 & \\ x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Si ha quindi:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2. Un analogo procedimento si può seguire a partire dal polinomio:

$$P(x) = x^3 + 8$$

ottenendo:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

ossia:

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$$

3. Ripetendo il procedimento, più in generale, a partire da un polinomio del tipo  $x^3 + a^3$ , si ottiene:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

#### Scomporre in fattori raccogliendo un fattore comune

Il procedimento per scomporre un polinomio in fattori raccogliendo un fattore comune è basato sulla *proprietà distributiva*, che può essere scritta nel modo seguente:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Il procedimento, già richiamato per scomporre il polinomio  $x^3 + 3x^2 - 10x$ , consiste nel percor-

rere i seguenti passi:

A. scoprire se è presente un fattore comune,

B. in caso affermativo, raccogliere il fattore comune.

Ecco due esempi di applicazione:

$$\begin{aligned} 7x^4 + 9x^3 - x^2 &= 7x^2 \cdot x^2 + 9x \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 = \\ &= x^2(7x^2 + 9x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2x + 2 &= x^2(x + 1) + 2(x + 1) = \\ &= (x^2 + 2)(x + 1) \end{aligned}$$

#### Scomporre un polinomio valendosi del prodotto notevole

Il prodotto notevole esposto nel primo volume (p. 266) può essere scritto nella forma seguente:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Questa formula suggerisce i seguenti passi per scomporre un polinomio in fattori:

A. scoprire se è presente la differenza di due quadrati ( $a^2$  e  $b^2$ );

B. in caso affermativo, scrivere la somma delle basi ( $a$  e  $b$ ) moltiplicata per la loro differenza.

Ecco qualche esempio di applicazione:

$$x^4 - 2 = (x^2)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2});$$

$$3 - x^4 = (\sqrt{3})^2 - (x^2)^2 = (\sqrt{3} + x^2)(\sqrt{3} - x^2)$$

#### Scomporre un polinomio valendosi delle potenze di un binomio

Le potenze di un binomio del tipo  $(a + b)$  che più frequentemente ricorrono possono essere scritte nella forma seguente:

Quadrato di un binomio:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Cubo di un binomio:

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$$

I passi per scomporre in fattori un polinomio valendosi del quadrato di un binomio sono allora i seguenti:

A. scoprire se è presente la somma di due quadrati ( $a^2$  e  $b^2$ ) più il doppio prodotto delle basi ( $2ab$ );

B. scrivere la somma delle basi ( $a + b$ ) elevata al quadrato.

Ecco qualche esempio di applicazione:

$$x^4 + 1 + 2x^2 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x^2 = (x^2 + 1)^2$$

$$\begin{aligned} x^4 + 9 - 6x^2 &= (x^2)^2 + (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot x^2 = \\ &= [x^2 + (-3)]^2 = (x^2 - 3)^2 \end{aligned}$$

#### 4. Scomporre in fattori un polinomio



Analogamente, per scomporre un polinomio in fattori valendosi del cubo di un binomio, si procede nel modo seguente:

A. scoprire se è presente la somma di due cubi ( $a^3$  e  $b^3$ ) più i corrispondenti tripli prodotti ( $3a^2b + 3ab^2$ );

B. scrivere la somma delle basi ( $a + b$ ) elevata al cubo.

Ecco due esempi di applicazione:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = x^3 + 1^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 = (x + 1)^3$$

$$x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = x^3 + (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot x^2 + 3 \cdot (-2)^2 x = (x - 2)^3$$

### Scomporre in fattori un polinomio biquadratico

Un trinomio di 2° grado con le radici reali  $x_1$  e  $x_2$  si può scomporre in fattori scrivendo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

Questa scomposizione in fattori si può estendere a polinomi della forma seguente:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx^2 + c \quad (2)$$

che sono anche detti *polinomi biquadratici*.

Ecco un esempio di polinomio biquadratico:

$$2x^4 - 7x^2 + 3$$

che può essere scomposto in fattori con il seguente procedimento.

1. Per raccordarsi più facilmente al caso (1) si introduce un'altra lettera, per esempio  $z$ , data da:

$$z = x^2 \quad (3)$$

in modo che risulta

$$x^4 = (x^2)^2 = z^2$$

e il polinomio dato assume la forma del seguente trinomio di 2° grado:

$$2z^2 - 7z + 3 \quad (4)$$

2. Si determinano le radici del trinomio di 2° grado, risolvendo la corrispondente equazione; si ha:

$$2z^2 - 7z + 3 = 0$$

con

$$\Delta = 25 > 0$$

Perciò l'equazione ha le soluzioni date da:

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

da cui:

$$z_1 = \frac{1}{2} \quad z_2 = 3$$

3. Dato che si sono ottenute due radici reali  $z_1$  e  $z_2$ , si scompone in fattori il trinomio (4) scrivendo

$$2z^2 - 7z + 3 = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 3)$$

4. Si ricorda il significato di  $z$  indicato dalla (3) e si arriva alla scomposizione in fattori del polinomio biquadratico data da:

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3)$$

L'esempio ora esaminato suggerisce un procedimento di carattere generale da ripetere a partire da un polinomio biquadratico del tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx^2 + c \quad (2)$$

Il procedimento è basato sui passi seguenti:

1. Si introduce un'altra lettera, per esempio  $z$ , data da:

$$z = x^2 \quad (3)$$

in modo da scrivere il polinomio (2) nella forma del seguente trinomio di 2° grado:

$$az^2 + bz + c \quad (5)$$

2. Si determinano le radici del trinomio di 2° grado, risolvendo la corrispondente equazione; si ha:

$$az^2 + bz + c = 0$$

con:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se risulta  $\Delta > 0$ , si ottengono le soluzioni reali  $z_1$  e  $z_2$  date da:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Se si sono ottenute due radici reali  $z_1$  e  $z_2$ , si scompone in fattori il trinomio (5) scrivendo:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

4. Si ricorda il significato di  $z$  indicato dalla (3) e si arriva alla scomposizione in fattori del polinomio biquadratico data da:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - z_1)(x^2 - z_2)$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato dei termini seguenti:  
- «polinomio scomposto in fattori di 1° o 2° grado»;  
- «polinomio biquadratico».
- ② Elencare i metodi, richiamati in questo paragrafo, per scomporre un polinomio in fattori.

### Comprensione

- ① Spiegare perché la scomposizione di un polinomio in fattori è utile per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°.
- ② Esaminare i seguenti polinomi e spiegare perché *non* si riescono a scomporre in fattori con i metodi esposti in questo paragrafo:

$$x^4 + 1$$

$$x^4 + 2x^2 + 5$$

### Applicazioni

- ① Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.  
 $x^4 - 4x^3 + 3x^2$        $x^4 - 4x^2 + 3$
- ② Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.  
 $x^4 - 4x^2 + 4$        $x^4 - 4$
- ③ Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.  
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$        $x^3 - 1$
- ④ Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.  
 $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$        $x^3 + 3x^2 + 6x + 8$

### Collegamento con il primo volume

- ① Come si ricava il prodotto notevole richiamato in questo paragrafo?  
(Vedere p. 266)
- ② Come si ricavano le potenze del binomio?  
(Vedere p. 269)

# Le radici multiple di un polinomio

## Nella fattorizzazione di un numero può comparire più volte lo stesso fattore

Nei paragrafi 2 e 3 si è trovato che la scomposizione in fattori di un polinomio presenta molte analogie con la scomposizione in fattori di un numero intero. Ecco una situazione da esaminare per approfondire questa analogia: molti numeri interi, una volta scomposti in fattori, mostrano dei fattori che si presentano più volte. Un primo esempio può essere la scomposizione in fattori del numero 75, organizzata nel modo seguente:

1. si trova che 75 è divisibile per 5, si effettua la divisione per 5 e si trova:

$$75 : 5 = 15 \quad \text{da cui} \quad 75 = 5 \cdot 15 \quad (1)$$

2. si trova che il quoziente 15 è ancora divisibile per 5, si effettua di nuovo la divisione per 5 e si trova:

$$15 : 5 = 3 \quad \text{da cui} \quad 15 = 5 \cdot 3 \quad (2)$$

3. considerando insieme la (1) e la (2) si scrive:

$$75 = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$$

Si osserva dunque che nella scomposizione in fattori di 75 è presente due volte il fattore 5, perché è divisibile per 5 sia il numero 75 che il quoziente della divisione  $75 : 5$ .

E così, scomponendo in fattori 875, si trova il fattore 5 ripetuto tre volte, cioè si trova:

$$875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 5^3 \cdot 7$$

perché sono divisibili per 5:

- il numero 875
- il quoziente  $q' = 875 : 5 = 175$
- il secondo quoziente  $q'' = 175 : 5 = 35$

## Nella fattorizzazione di un polinomio può comparire più volte lo stesso fattore

Anche scomponendo in fattori un polinomio si può trovare lo stesso fattore ripetuto più volte; ecco un esempio.

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

è divisibile per  $(x - 1)$ , dato che risulta:

$$P(1) = 0$$

Effettuando la divisione  $P(x) : (x - 1)$  si ottiene il quoziente  $Q(x)$  dato da:

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$$

e quindi si scrive:

$$P(x) = (x - 1)Q(x) \quad (3)$$

Ma  $Q(x)$  è ancora divisibile per  $(x - 1)$ , dato che risulta:

$$Q(1) = 0$$

Calcolando poi la divisione  $Q(x) : (x - 1)$ , si ottiene:

$$Q(x) : (x - 1) = x^2 + 2$$

e quindi:

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 + 2) \quad (4)$$

Ora, il fattore  $x^2 + 2$  è un trinomio di 2° grado senza radici reali, che non può essere scomposto in fattori; perciò il procedimento di fattorizzazione si ferma e, considerando la (3) e la (4), si scrive:

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + 2)$$

ossia:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x - 1)^2(x^2 + 2)$$

## Radici multiple di un polinomio

Si è dunque trovato che nella fattorizzazione di:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

è presente due volte il fattore  $(x - 1)$ , perché è divisibile per  $(x - 1)$  sia il polinomio  $P(x)$  che il quoziente  $Q(x) = P(x) : (x - 1)$ .

Questo vuol dire che risulta:

$$P(1) = 0 \quad \text{e} \quad Q(1) = 0$$

cioè che il numero 1 è radice sia del polinomio  $P(x)$  che del quoziente  $Q(x) = P(x) : (x - 1)$ .

Si dice in tal caso che la radice  $x_1 = 1$  deve essere contata due volte o anche che è una *radice doppia* per il polinomio  $P(x)$ .

E così, scomponendo in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$$

si trova il fattore  $(x - 1)$  tre volte, cioè si ha:

$$x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = (x - 1)^3 (x^2 + 2)$$

perché sono divisibili per  $(x - 1)$ :

- il polinomio  $P(x)$

- il quoziente

$$Q'(x) = P(x) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

- il secondo quoziente  $Q''(x) = Q'(x) : (x - 1) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

In tal caso si dice che la *radice multipla*  $x_1 = 1$  deve essere contata 3 volte.

Gli esempi suggeriscono un risultato di carattere generale: quando nella fattorizzazione di un polinomio compare un fattore del tipo  $(x - x_1)^m$ , il polinomio ha la radice multipla  $x = x_1$ .

È chiaro allora come «costruire» un polinomio che presenta una radice  $x_1$  multipla: basta inserire, fra i fattori che lo compongono, un'espressione del tipo  $(x - x_1)^m$ ; così la radice  $x_1$  deve essere contata  $m$  volte.

Ecco qualche altro esempio di polinomi con radici multiple.

$$P(x) = (x - 3)^2 (x^2 + 1)$$

ha la radice  $x_1 = 3$  contata 2 volte

$$P(x) = (x + 1)^3 (x^2 + 5)$$

ha la radice  $x_1 = -1$  contata 3 volte

$$P(x) = (x + 1)^2 (x - 3)^2$$

ha le radici  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$  contate 2 volte

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato delle due frasi seguenti:
  - «un polinomio  $P(x)$  ha la radice  $x_1$  contata due volte»;
  - «un polinomio  $P(x)$  ha la radice  $x_1$  multipla».

### Comprensione

- ① Un polinomio  $P(x)$  ha la radice  $x_1 = 3$  contata quattro volte; di quali polinomi è radice il numero 3?
- ② Un polinomio di 4° grado può avere una radice contata 5 volte?

### Applicazioni

- ① Costruire un polinomio che abbia la radice  $x_1 = 0$  contata tre volte e la radice  $x_2 = 1$  contata due volte.
- ② Fra i seguenti due polinomi indicare quello che ha delle radici multiple, motivando adeguatamente la scelta.

$$(x - 1)^2 (x + 1)^2$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

### Collegamento con il paragrafo precedente

- ① Esaminare i seguenti due polinomi:

$$(x + 1)^3$$

$$x^3 + 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. scomporre i due polinomi in fattori;
- b. spiegare perché solo nel primo polinomio la radice  $x_1 = -1$  deve essere contata tre volte.

- ② Esaminare i seguenti due polinomi:

$$(x - 1)^4$$

$$x^4 - 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. scomporre i due polinomi in fattori;
- b. spiegare perché solo nel primo polinomio la radice  $x_1 = 1$  deve essere contata quattro volte.



# Risolvere equazioni di grado superiore al 2°

Nel paragrafo 4 è indicato il metodo per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°: scomporre il polinomio al primo membro in fattori di 1° e 2° grado. Sono quindi descritti cinque metodi per scomporre in fattori un polinomio. Questi metodi permettono di risolvere alcune categorie di equazioni che vengono esaminate in questa «Attività».

## A. Equazioni di cui si individua una soluzione

### Attività 1

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 1 = 0$$

L'equazione ha la soluzione intera  $x_1 = \dots\dots\dots$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha poi:

$$x^3 + 1 = (\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$$x + 1 = 0 \quad \text{che dà la soluzione } x_1 = -1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{che dà } x = \frac{1 \pm \sqrt{\dots\dots\dots}}{2} \quad \text{e perciò non ha } \dots\dots\dots$$

Si conclude che l'equazione ha la sola soluzione reale  $x_1 = -1$ .

### Attività 2

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 8 = 0$$

## B. Equazioni in cui si individua un fattore comune

### Attività 3

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (\dots)(\dots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)(x^2 + 2) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$$x + 1 = 0 \quad \text{ossia } x = -1 \text{ che ha la soluzione } \dots$$

$$x^2 + 2 = 0 \quad \text{ossia } x^2 = -2 \text{ che non ha } \dots$$

Si conclude che l'equazione ha la soluzione  $x = -1$ .

#### Attività 4

Risolvere l'equazione:

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

### C. Equazioni in cui si individua un prodotto notevole

#### Attività 5

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 2 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^4 - 2 = (\dots)(\dots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$$x^2 + \sqrt{2} = 0 \quad \text{ossia } x^2 = -\sqrt{2} \text{ che non ha } \dots$$

$$x^2 - \sqrt{2} = 0 \quad \text{ossia } x^2 = \sqrt{2} \text{ da cui } x = \pm \dots$$

Si conclude che l'equazione ha due sole soluzioni reali:

$$x_1 = -\sqrt[4]{2}$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2}$$

#### Attività 6

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 5 = 0$$

### D. Equazioni in cui si individua la potenza di un binomio

#### Attività 7

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = (\dots)^3$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)^3 = 0 \quad (1)$$

Si è condotti così a risolvere la seguente equazione:

$$x + 1 = 0 \quad \text{che dà} \quad x = -1$$

Ma la scomposizione in fattori (1) fa capire che la soluzione ottenuta deve essere contata tre volte e perciò l'equazione ha le tre soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1$$

#### Attività 8

Risolvere l'equazione:

$$x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = 0$$

### E. Equazioni biquadratiche

#### Attività 9

Si tratta di equazioni ottenute uguagliando a 0 un polinomio biquadrato. Risolvere la seguente equazione:

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = 2(\dots)(\dots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti equazioni:

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ossia} \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{che dà} \quad x = \pm \dots$$

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{ossia} \quad x^2 = 3 \quad \text{che dà} \quad x = \pm \dots$$

Si conclude che l'equazione ha le quattro soluzioni reali:

$$x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad x_4 = \sqrt{3}$$

#### Attività 10

Risolvere l'equazione:

$$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$$

### F. Equazioni trinomie

Il procedimento che utilizza la scomposizione in fattori del trinomio di 2° grado può essere generalizzato alle equazioni del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (2)$$

Infatti, introducendo la lettera:

$$z = x^n$$

il polinomio al primo membro diventa del tipo:

$$az^2 + bz + c$$

Se allora il trinomio di 2° grado ha le radici reali  $z_1$  e  $z_2$ , si ha:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

e quindi l'equazione (2) diventa:

$$a(x^n - z_1)(x^n - z_2) = 0$$

Si è così ricondotti a risolvere due equazioni di grado più basso.

### Attività 11

Risolvere l'equazione:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = 0$$

L'equazione è trinomia perché si può scrivere nella forma:

$$(x^3)^2 + 9x^3 + 8 = 0$$

Introducendo la lettera:

$$z = \dots\dots\dots$$

si è condotti a risolvere l'equazione:

$$z^2 + 9z + 8 = 0$$

che dà le soluzioni:

$$z = \frac{-9 \pm \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

da cui:

$$z_1 = -8 \quad z_2 = -1$$

Si ha allora:

$$z^2 + 9z + 8 = \dots\dots\dots$$

e quindi:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

L'equazione diventa dunque:

$$(x^3 + 8)(x^3 + 1) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti equazioni di 3° grado:

$$(x^3 + 8) = 0 \text{ ossia } (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \text{ che dà } x_1 = -2$$

$$(x^3 + 1) = 0 \text{ ossia } (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \text{ che dà } x_2 = -1$$

Si conclude che l'equazione ha solo due soluzioni reali:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

### Attività 12

Risolvere l'equazione:

$$2x^8 - 7x^4 + 3 = 0$$



# Equazioni e formule risolutive

## Le equazioni nell'antica Grecia

Abbiamo visto nel primo volume (pp. 240-243) che solo intorno al Cinquecento fu introdotto il calcolo letterale; così, per millenni, le equazioni che traducevano i più vari problemi furono espresse in forma discorsiva o in forma geometrica.

Queste forme non simboliche rendevano difficile anche la risoluzione delle equazioni di 1° grado, e portavano a procedimenti molto laboriosi quando un problema conduceva a equazioni di 2° grado o di grado più elevato.

Per avere un'idea di queste difficoltà basta riprendere dagli *Elementi* di Euclide (scritti intorno al 300 a.C.) il procedimento per scrivere e risolvere quella che con il calcolo letterale diventa un'equazione di 2° grado.

Euclide propone un problema di questo tipo: «Applicare al segmento  $AD = 2$  un rettangolo  $FGKD$  equivalente al quadrato di lato  $AD$  ed eccedente per un quadrato».

Con la fig. 1a si riesce a orientarsi, anche se con fatica, in questo problema: indicata con  $x$  la lunghezza di  $AF$ , si costruisce il «quadrato eccedente»  $AFGH$ , che ha area  $x^2$ ; si prolunga  $GH$ , fino ad incontrare  $DC$  in  $K$  e si disegna il rettangolo  $FGKD$ . Questo rettangolo, che ha l'area  $S$  data da (fig. 1b):

$$S = x^2 + 2 \cdot x$$

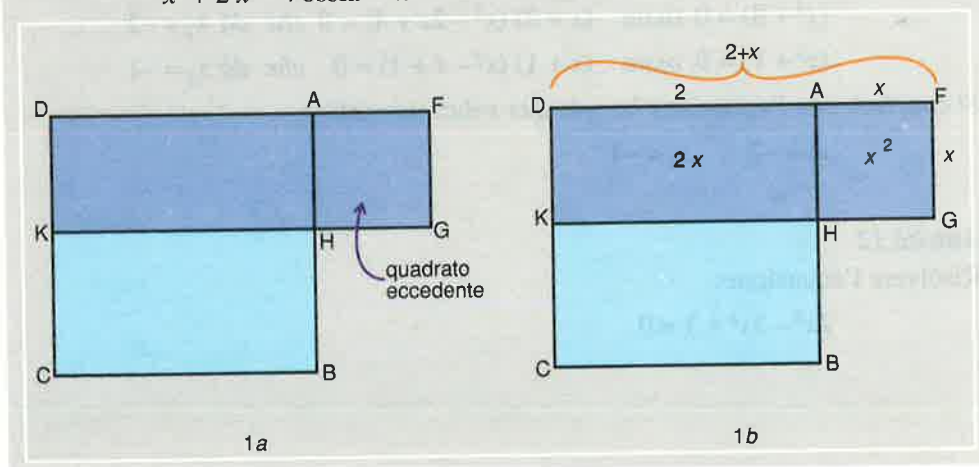
deve essere equivalente al quadrato di lato 2 e perciò deve risultare:

$$S = 4$$

Il problema si traduce dunque, nel linguaggio dell'algebra, con la frase: risolvere l'equazione:

$$x^2 + 2 \cdot x = 4 \text{ ossia } x^2 + 2x - 4 = 0$$

Figura 1  
Un problema posto  
da Euclide



A questo punto noi siamo abituati a risolvere l'equazione con la formula risolutiva, trovando le due soluzioni:

$$x_1 = -1 - \sqrt{5} \quad x_2 = -1 + \sqrt{5}$$

Di queste soluzioni solo la seconda, che è positiva, risolve il problema.

Ecco invece come procedeva Euclide per risolvere il problema con la sola geometria (fig. 2a):

- disegnava il quadrato ABCD con il lato AD lungo 2;
- dimezzava il segmento AD con il punto E;
- costruiva il segmento EB;
- prolungava DA fino al punto F in modo che risultasse  $EF = EB$ ;
- completava il quadrato AFGH;
- prolungava GH fino ad incontrare DC in K, disegnando così il rettangolo richiesto.

La fig. 2b mostra che, in questo modo, si arriva a costruire proprio il segmento:

$$AF = \sqrt{5} - 1$$

Con procedimenti geometrici di questo tipo si risolvevano problemi anche molto complicati, che però non avevano generalmente alcuna utilità pratica: la matematica era per gli antichi greci soprattutto pura indagine intellettuale e lo scopo era quello di formare il pensiero logico.

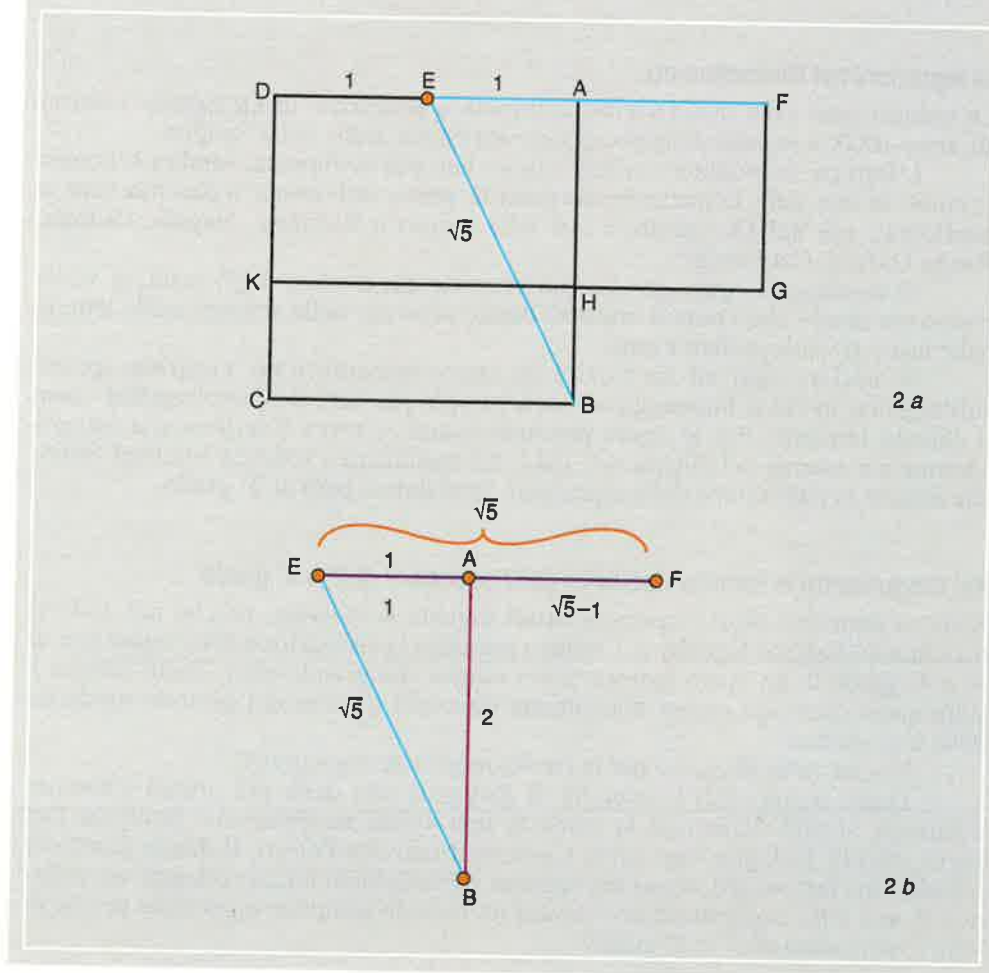


Figura 2  
La risoluzione geometrica  
del problema di Euclide

## Le equazioni nella matematica islamica

Tutt'altra mentalità sembra emergere dalle opere dei matematici arabi intorno al IX secolo d.C.

In uno dei libri più famosi di quell'epoca, intitolato *Al-jabr* (da cui la parola «algebra»), il suo autore, al-Khuwarizmi, dice di aver scritto il libro perché era stato invitato «...a comporre una breve opera sul calcolo per mezzo di complementazione e di riduzione, limitandosi a quegli aspetti più facili e più utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze, commerci e in tutti gli altri affari umani».

Non si sa quale sia esattamente il significato dei termini qui tradotti con «complementazione e riduzione», ma si ipotizza che si riferisca a due metodi utili per risolvere le equazioni di 1° grado: trasportare termini da un membro all'altro e sommare i termini simili.

Nel libro di al-Khuwarizmi si risolvono le equazioni senza valersi delle lettere  $x$  e  $x^2$ , ma parlando invece di «radici» e «quadrati». Eppure vi si trova la risoluzione di sei tipi di equazioni di 2° grado, risoluzione che consiste sempre nella «ricetta» per trovare le soluzioni.

Dopo la risoluzione delle equazioni, l'*Algebra* presenta però un'affermazione di tutt'altro tono: «Abbiamo detto abbastanza per quanto riguarda i sei tipi di equazioni. Ora però è necessario dimostrare geometricamente la verità di quei medesimi problemi che abbiamo spiegato con i numeri».

Questo passo ricorda lo spirito greco e suggerisce un'immagine di una cultura araba molto viva, che non è solo pratica, ma piuttosto sintesi di vari interessi e attività.

## Le equazioni nel Rinascimento

La cultura così viva dell'Oriente comincia a penetrare in Occidente intorno all'anno 1000, a seguito della precedente invasione araba della Spagna.

L'Europa, a contatto con una cultura ben più sviluppata, sembra scuotersi e, come in una gara impaziente, sorgono le prime università: a Salerno (per la medicina), già nel IX secolo, e nel XIII secolo a Bologna, Napoli, Padova, Parigi, Oxford, Cambridge...

Si studiano le opere greche che vengono tramandate dagli arabi, si vuole conoscere quello che i popoli orientali hanno prodotto nelle scienze, nelle lettere, nelle arti e si vuole andare avanti.

Si assiste così ad un fiorire di opere matematiche, centrate spesso sull'algebra, in cui il linguaggio diventa sempre più sintetico, evolvendosi verso il calcolo letterale. Fra le opere più interessanti si trova l'*Arithmetica integra* (Aritmetica intera) pubblicata nel 1544 dal matematico tedesco Michael Stifel, che espone la risoluzione delle equazioni, fermandosi però al 2° grado.

## Nel Cinquecento le formule risolutive delle equazioni di 3° e 4° grado

Solo un anno più tardi l'opera di Stifel diventa sorpassata, perché nel 1545 il matematico italiano Gerolamo Cardano pubblica la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado in un'opera famosa: l'*Ars magna* (La grande arte). Tanto famosa è stata quest'opera da essere considerata da molti l'inizio del periodo moderno della matematica.

Perché tanto interesse per la risoluzione delle equazioni?

Dagli archivi dell'Università di Bologna, una delle più grandi e famose d'Europa, si può ricostruire la storia di una «sfida matematica»: Scipione Del Ferro, Nicolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Raffaele Bombelli e molti altri famosi professori universitari o intellettuali a essi collegati «si sfidano» in una lotta intellettuale per trovare un metodo semplice e generale per risolvere le equazioni di 3° e 4° grado.



Ognuno lavora indipendentemente dagli altri, ognuno vuole tenere la scoperta per sé, perché scoprire un risultato importante vuol dire ottenere un posto più alto all'università.

E così la scoperta delle formule risolutive delle equazioni di 3° e 4° grado viene contesa fra Cardano, che le pubblica, Tartaglia e Del Ferro, che forse l'avevano scoperte per primi o riprese da fonti più antiche.

Si tratta di formule che offrono notevoli difficoltà; basta esaminare il caso delle equazioni di 3° grado per rendersene conto.

Le prime equazioni di 3° grado per cui si è trovata una formula risolutiva erano quelle del tipo

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

Le soluzioni di queste equazioni sono date dalla formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Successivamente si è trovato che tutte le equazioni del tipo

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

si possono ricondurre alla forma (1) introducendo una nuova incognita  $z$ , data da:

$$z = x + \frac{b}{3}$$

### Nell'Ottocento il teorema di Abel-Ruffini

Comunque, la scoperta delle formule si diffonde e stimola nuove ricerche sulle equazioni 5° grado o di grado superiore per trovare anche in questi casi una formula risolutiva, cioè una formula che esprima le radici di un'equazione polinomiale in termini di operazioni algebriche da effettuare sui coefficienti del polinomio.

Le ricerche continuano senza risultato per più di due secoli e vengono finalmente concluse da un «teorema negativo», pubblicato nel 1824 dal matematico norvegese Niels Abel: non ci può essere una formula risolutiva per trovare le radici di un'equazione di grado superiore al 4°.

Questo teorema prende il nome di «teorema di Abel-Ruffini», perché il matematico italiano Paolo Ruffini ne aveva già dato una dimostrazione nel 1799, ma questa dimostrazione non era stata considerata del tutto soddisfacente ed era passata inosservata.

La dimostrazione dell'impossibilità della soluzione dell'equazione generale di grado superiore al 4°, uno dei più famosi teoremi della matematica, fu presentata da Abel quando aveva appena diciannove anni.

È bene chiarire subito però che il teorema di Abel-Ruffini non afferma l'impossibilità di risolvere le equazioni di grado superiore al 4°, ma solo l'impossibilità di esprimere le soluzioni con una formula risolutiva generale del tipo di quella valida per le equazioni di 2° grado.



# Le frazioni algebriche

## Frazioni algebriche

Più volte nel corso di questo capitolo sono emerse analogie fra gli interi e i polinomi; gli esempi più evidenti sono dati dalla divisione fra due polinomi e dalla scomposizione in fattori di un polinomio: questi due casi sembrano un'estensione della divisione fra due interi o della scomposizione in fattori di un numero intero.

Ecco un'altra analogia: con gli interi «si co-

struiscono» le frazioni e con i polinomi si «costruiscono» le *frazioni algebriche*.

L'esempio contenuto nella tabella A mette a confronto numeri interi e polinomi per chiarire meglio l'idea.

Si trova dunque che le frazioni algebriche vengono introdotte come quoziente di due polinomi che non sono divisibili fra loro.

Nelle tabelle B e C sono confrontate le frazioni algebriche con le frazioni numeriche per scoprire altre analogie.

**Tabella A**  
Confronto tra numeri interi e polinomi

Numeri interi	Polinomi
8 è divisibile per 2 e si scrive: $8 : 2 = 4$	$(x^2 - 1)$ è divisibile per $(x - 1)$ e si scrive: $(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$
7 non è divisibile per 2 e si scrive: $7 : 2 = \frac{7}{2}$	$(x^2 - 2)$ non è divisibile per $(x - 1)$ e si scrive: $(x^2 - 2) : (x - 1) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$
$\frac{7}{2}$ è una frazione	$\frac{x^2 - 2}{x - 1}$ è una frazione algebrica
Non si può dividere per 0, perciò non si può scrivere la frazione: $\frac{7}{0}$	Non si può dividere per 0, perciò la frazione algebrica $\frac{x^2 - 2}{x - 1}$ non ha significato se risulta: $x - 1 = 0$ ossia $x = 1$

**Tabella B**  
Confronto tra frazioni numeriche e frazioni algebriche

Frazioni numeriche	Frazioni algebriche
<p>Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso intero <i>diverso da 0</i> si ottiene una frazione equivalente; si scrive, per esempio:</p> $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$	<p>Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione algebrica per una stessa espressione <i>diversa da 0</i> si ottiene una frazione equivalente; si scrive, per esempio:</p> $\frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{x(x^2 - 2)}{x(x - 1)} = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - x}$ <p><b>purché sia <math>x \neq 0</math></b></p>
<p>Una frazione che ha i due termini senza fattori comuni si dice <i>ridotta ai minimi termini</i>.</p>	<p>Una frazione algebrica che ha i due termini senza fattori comuni si dice <i>ridotta ai minimi termini</i>.</p>
<p>Anche gli interi si possono scrivere come frazioni; per esempio:</p> $4 = \frac{8}{2}$	<p>Anche i polinomi si possono scrivere come frazioni algebriche; per esempio:</p> $x + 1 = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{per } x \neq 1$

**Tabella C**  
La riduzione ai minimi termini in una frazione numerica e in una frazione algebrica

Frazione numerica	Frazione algebrica
$\frac{N}{D} = \frac{42}{30}$	$\frac{N}{D} = \frac{x^2 - x}{x^3 + x}$
<p>A. Si scompongono i due termini in fattori primi; si ha:</p> $42 = 3 \cdot 2 \cdot 7$ $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$	<p>A. Si scompongono i due termini in fattori primi; si ha</p> $x^2 - x = x(x - 1)$ $x^3 + x = x(x^2 + 1)$
<p>B. Si dividono numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni; si scrive:</p> $\frac{42}{30} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7}{5}$	<p>B. Si dividono numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni diversi da 0; si scrive:</p> $\frac{x^2 - x}{x^3 + x} = \frac{x(x - 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \quad \text{per } x \neq 0$

Si conclude dunque che:

- una frazione algebrica è una frazione che ha per termini due polinomi;

- una frazione algebrica  $\frac{N}{D}$  perde significato

in corrispondenza dei numeri, che sostituiti a  $x$ , rendono uguale a 0 il denominatore  $D$ .

A partire dalle frazioni algebriche si possono ripetere tutte le operazioni eseguite sulle frazioni e cioè:

1. ridurre ai minimi termini una frazione;
2. moltiplicare due frazioni;
3. dividere due frazioni;
4. elevare a potenza una frazione;
5. addizionare o sottrarre due frazioni;
6. semplificare espressioni frazionarie.

Ecco un rapido panorama di questi procedimenti, esaminati attraverso semplici esempi.

### Ridurre ai minimi termini una frazione algebrica

L'analogia con le frazioni numeriche suggerisce il procedimento da seguire per ridurre ai minimi termini una frazione algebrica.

Ma è opportuno esaminare attentamente l'ultima uguaglianza ottenuta nella tabella C e cioè:

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + x} = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

scrivendola nella forma seguente:

$$\frac{x}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1} \quad (1)$$

Così si capisce meglio che cosa succede sostituendo 0 a  $x$ ; si ha:

$$\text{I membro} = \frac{0}{0} \cdot (-1) \text{ senza significato}$$

$$\text{II membro} = -1$$

Dunque, sostituendo 0 a  $x$ , il primo membro non è uguale al secondo e perciò l'uguaglianza (1) è falsa.

Si ottiene questo risultato perché, al primo membro, si deve eseguire l'operazione:

$$\frac{0}{0} \text{ che è senza significato}$$

Ma l'inconveniente si incontra solo sostituendo 0 a  $x$ , dato che risulta invece:

$$\frac{x}{x} = 1 \text{ per qualunque } x \neq 0$$

Proprio per questo si scrive:

$$\frac{x}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2+1} = 1 \cdot \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

per qualunque  $x \neq 0$

### Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il procedimento per moltiplicare due frazioni è ben noto: si moltiplicano i numeratori fra loro e i denominatori fra loro.

La stessa regola si estende alle frazioni algebriche. Così si ha, per esempio:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{2x-1}{x+1} &= \\ &= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

### Divisione di frazioni algebriche

Per dividere due frazioni algebriche si estende la regola della divisione di due frazioni: si moltiplica la prima frazione per il reciproco della seconda.

Così si ha, per esempio:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x+2} : \frac{x+2}{3x^2} &= \frac{2x}{x+2} \cdot \frac{3x^2}{x+2} = \\ &= \frac{2x \cdot 3x^2}{(x+2)(x+2)} = \frac{6x^3}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

L'operazione di divisione tra frazioni algebriche si esprime talvolta con la linea di frazione; in tal caso si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2x}{x+2}}{\frac{x+2}{3x^2}} &= \frac{2x}{x+2} \cdot \frac{3x^2}{x+2} = \\ &= \frac{2x \cdot 3x^2}{(x+2)(x+2)} = \frac{6x^3}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

### Potenza di una frazione algebrica

Per l'elevazione a potenza conviene tenere presenti le proprietà delle potenze e, in particolare:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Così si ha, per esempio:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)^3 = \frac{(x-1)^3}{(x^2+2)^3}$$

Volendo sviluppare l'ultima espressione, bisogna tenere anche presenti le regole per sviluppare la potenza di un binomio.

### Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

La somma di frazioni algebriche si ottiene seguendo un procedimento analogo a quello applicato per addizionare più frazioni; tale procedimento sarà dunque basato sui seguenti passi:

- a. si scompongono in fattori i denominatori;
- b. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, cioè il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi ciascuno con il massimo esponente (per brevità, tale minimo comune multiplo viene spesso indicato con la sigla m.c.m.);
- c. a ogni frazione si sostituisce una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato, procedendo nel modo seguente:
  - I. si divide il m.c.m. per il denominatore;
  - II. il risultato si moltiplica per il numeratore;
- d. si sommano le frazioni, che hanno tutte lo stesso denominatore.

Ecco un esempio che illustra il procedimento ora descritto.

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25}$$

a.  $x^2+25+10x = (x+5)^2$

$x^2-25 = (x+5)(x-5)$

b. m.c.m. =  $(x+5)^2(x-5)$

c. • per la frazione:

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} = \frac{x+2}{(x+5)^2}$$

I.  $[(x+5)^2(x-5)] : (x+5)^2 = x-5$

II. 
$$\frac{x+2}{(x+5)^2} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+5)^2(x-5)} = \frac{x^2-3x-10}{(x+5)^2(x-5)}$$

c. • per la frazione:

$$\frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{2x-1}{(x+5)(x-5)}$$

I.  $[(x+5)^2(x-5)] : [(x+5)(x-5)] = x+5$

II. 
$$\frac{2x-1}{(x+5)(x-5)} = \frac{(2x-1)(x+5)}{(x+5)^2(x-5)} = \frac{2x^2+9x-5}{(x+5)^2(x-5)}$$

d.

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{x^2-3x-10+2x^2+9x-5}{(x+5)^2(x-5)}$$

Eseguendo le addizioni indicate al numeratore, si ottiene infine:

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{3x^2+6x-15}{(x+5)^2(x-5)}$$

Per eseguire invece la sottrazione di due frazioni algebriche basta addizionare alla prima l'opposta della seconda.

### Semplificare espressioni con frazioni algebriche

Per semplificare un'espressione in cui compaiono più operazioni diverse da svolgere anche con frazioni algebriche, si seguono le indicazioni già date per svolgere le espressioni numeriche, e cioè:

1. si svolgono le operazioni racchiuse fra parentesi;
2. in assenza di parentesi si segue la priorità delle operazioni;
3. si controlla che la frazione sia ridotta ai minimi termini.



Ecco un esempio. Scrivere nella forma più sintetica l'espressione:

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{4}{x} - 4\right)$$

1. Si eseguono le addizioni racchiuse fra parentesi e si trova:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{4}{x} - 4\right) = \\ &= \left(\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right)^2 \cdot \frac{x^2+4-4x}{x} \end{aligned}$$

2. Si esegue l'elevazione al quadrato e si trova:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right)^2 \cdot \frac{x^2+4-4x}{x} = \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \cdot \frac{x^2+4-4x}{x} \end{aligned}$$

3. Si esegue la moltiplicazione e si trova:

$$\begin{aligned} &\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \cdot \frac{x^2+4-4x}{x} = \\ &= \frac{(x-1)^2(x^2+4-4x)}{x(x-1)^2(x-2)^2} \end{aligned}$$

4. Si riduce la frazione ai minimi termini, osservando che il numeratore può essere scomposto ancora in fattori ottenendo:

$$(x-1)^2(x^2+4-4x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

e quindi risulta:

$$\begin{aligned} &\frac{(x-1)^2(x^2+4-4x)}{x(x-1)^2(x-2)^2} = \\ &= \frac{(x-1)^2(x-2)^2}{x(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

per  $x \neq 1$  e  $x \neq 2$

In definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{4}{x} - 4\right) = \frac{1}{x} \\ &\text{per } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2 \end{aligned}$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato del termine «frazione algebrica».
- ② Come si riconosce una frazione algebrica ridotta ai minimi termini?

### Comprensione

- ① Esaminare le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} \quad \frac{x}{x+1}$$

Risolvere i seguenti quesiti, spiegando i ragionamenti seguiti:

- a. spiegare perché sostituendo 1 a  $x$  la prima frazione perde significato, mentre ciò non avviene nella seconda frazione;
- b. c'è qualche altro numero che fa perdere significato alla prima o alla seconda frazione?

- ② Dire che cosa bisogna aggiungere alla seguente uguaglianza per renderla corretta:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$$

### Applicazioni

- ① Sviluppare le seguenti due espressioni:

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

Nelle due espressioni le parentesi sono disposte diversamente; quale conseguenza ha questo fatto nello sviluppo dei calcoli?

- ② Sviluppare le seguenti due espressioni:

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

Nelle due espressioni le parentesi sono disposte diversamente; quale conseguenza ha questo fatto nello sviluppo dei calcoli?

# Risolvere equazioni fratte

## Equazioni fratte

Prendono il nome di *equazioni fratte* le equazioni che si possono scrivere nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0.

Per risolvere questo tipo di equazioni basta tenere presenti le seguenti nozioni relative alla divisione fra numeri reali:

1. *non si può dividere per 0*, cioè:

$$\frac{n}{0} \quad \text{non ha significato}$$

2. risulta:

$$\frac{0}{d} = 0 \quad \text{per qualunque } d \neq 0$$

Due esempi di equazioni fratte risolte indicheranno il procedimento da seguire.

### Primo esempio

$$\frac{x-2}{x-1} = 0$$

Per risolvere l'equazione, si procede nel modo seguente:

- A. Si determinano i numeri che, sostituiti a  $x$ , rendono 0 il numeratore  $n$ , in modo che la frazione assuma il valore  $\frac{0}{d}$ ; nel caso assegnato si ha:

$$n = x - 2$$

e perciò si deve risolvere l'equazione:

$$x - 2 = 0 \quad \text{che ha la soluzione} \quad x = 2$$

- B. Si verifica che la soluzione ottenuta, sostituita a  $x$ , mantenga il denominatore  $d$  diverso da 0; nel caso assegnato si ha:

$$d = x - 1 \quad \text{e, sostituendo 2 a } x, \text{ si ottiene: } d = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

- C. Si conclude che  $x = 2$  è la soluzione dell'equazione fratta.

### Attività 1

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3x+2}{4x-3} = 0$$

A. Il numeratore della frazione è:

$$n = \dots\dots\dots$$

perciò si risolve l'equazione:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{da cui } x = \dots\dots\dots$$

B. Si verifica che  $\dots\dots\dots$ , sostituito a  $x$ , mantenga il denominatore  $\dots\dots\dots$ . Nel caso assegnato si ha:

$$d = \dots\dots\dots$$

Sostituendo  $\dots\dots\dots$  a  $x$  si ha:

$$d = \dots\dots\dots$$

C. Si conclude che  $x = -\frac{2}{3}$  è  $\dots\dots\dots$

### Secondo esempio

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$$

Bisogna prima di tutto portare l'equazione nella forma di un'unica frazione algebrica uguagliata a 0. Per questo si procede così:

a. si aggiunge ai due membri l'opposto di  $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ , ossia si «sposta» il secondo membro, dopo averlo cambiato di segno; si ha:

$$\frac{2x+3}{x-1} - \frac{x^2-x-2}{x^2-1} = 0$$

b. si esegue la differenza indicata e si ottiene:

$$\frac{(2x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2-x-2}{(x-1)(x+1)} = 0$$

e infine:

$$\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x-1)} = 0 \quad (1)$$

A questo punto si può procedere con la risoluzione seguendo il metodo indicato prima; si ha che:

A. I numeri che rendono 0 il numeratore si trovano risolvendo l'equazione

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

che ha le soluzioni date dalla formula ridotta (vedi il capitolo settimo, pp. 312-313); si ha:

$$x = -3 \pm \sqrt{9-5} \quad \text{ossia} \quad x_1 = -5 \quad x_2 = -1$$

B. Il denominatore della frazione è:

$$d = (x-1)(x+1)$$

e si ottiene:

- per  $x = -5$

$$d = (-5-1)(-5+1) = 24 \neq 0$$

- per  $x = -1$

$$d = (-1-1)(-1+1) = 0$$

C. Si conclude che l'equazione fratta ha la sola soluzione  $x = -5$ .

A questo stesso risultato si poteva arrivare più brevemente, a partire dalla (1), osservando che *la frazione algebrica al primo membro non è ridotta ai minimi termini*, dato che risulta:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+5)}{(x-1)} \quad \text{per} \quad x \neq -1$$

Così si è condotti a risolvere l'equazione più semplice:

$$\frac{(x+5)}{(x-1)} = 0$$

di cui si trova immediatamente la soluzione  $x = -5$ .

## Attività 2

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3+x^2}{1-x^2} = \frac{2}{1-x}$$

a. Si aggiunge ai due membri .....; si ha:

$$\dots\dots\dots = 0$$

b. Si esegue la differenza indicata:

$$\frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} - \frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} = 0$$

e infine:

$$\frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} = 0 \quad (2)$$



Si procede con la risoluzione.

1. Si risolve l'equazione ottenuta uguagliando il numeratore a 0; si ha:

$$\dots\dots\dots = 0$$

che ha le soluzioni date da:

$$x = \dots\dots\dots$$

Si ottiene:

$$x_1 = x_2 = \dots\dots\dots$$

2. Si calcola il valore che assume il denominatore in corrispondenza della soluzione; si ha:

$$\text{per } x = \dots\dots\dots \quad d = \dots\dots\dots$$

3. Si conclude che l'equazione assegnata non ha soluzioni.

Che cosa si ottiene riducendo ai minimi termini la frazione al primo membro della (2)?  
Si ottiene:

$$\frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{per } x \neq 1 \quad (3)$$

Risolvendo allora l'equazione:

$$\frac{1-x}{1+x} = 0$$

si ottiene la soluzione  $x=1$ , che però non si può accettare perché la riduzione ai minimi termini (3) non è valida per  $x=1$ .

### Attività 3

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3x}{x^2-9} = 1 + \frac{x}{2x-6}$$

Si arriva a risolvere l'equazione:

$$\frac{-3x^2+3x+18}{2(x-3)(x+3)} = 0$$

che ha la sola soluzione  $x = -2$ .

# Il segno di un polinomio e di un quoziente di polinomi

## Il segno di un polinomio

Le considerazioni svolte nel capitolo settimo (paragrafi 6 e 7) a proposito del segno del trinomio di 2° grado possono essere utilizzate per studiare il segno di un polinomio del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cioè per determinare i valori di  $x$  per cui risulta:

$$P(x) = 0 \quad P(x) > 0 \quad P(x) < 0$$

## Un esempio numerico

Ecco un esempio numerico su cui riflettere: studiare il segno di

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Per determinare i valori di  $x$  per cui risulta:

$$P(x) = 0 \quad \text{cioè per risolvere l'equazione } x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

si deve scomporre in fattori il polinomio, per esempio scrivendolo nella forma:

$$P(x) = x^2(x-1) - 4(x-1)$$

e quindi:

$$P(x) = (x-1)(x^2-4) \quad (1)$$

Aver scomposto il polinomio in fattori conduce a studiarne il segno riprendendo procedimenti già noti; basta ricordare che un prodotto

$$P = f_1 f_2$$

ha il segno che dipende solo dal segno dei due fattori  $f_1$  e  $f_2$  nel modo seguente:

- si ha  $P = 0$  se risulta  $f_1 = 0$  o  $f_2 = 0$ ;
- si ha  $P > 0$  solo se  $f_1$  e  $f_2$  hanno lo stesso segno;
- si ha  $P < 0$  solo se  $f_1$  e  $f_2$  hanno segno opposto.

Ecco allora come si procede.

1. Si studia il segno del binomio di 1° grado  $f_1 = x - 1$  che ha la radice  $x = 1$  ed il segno rappresentato in fig. 1.
2. Si studia il segno del trinomio di 2° grado  $f_2 = x^2 - 4$  che ha le radici reali  $x = \pm 2$  ed il segno rappresentato in fig. 2.
3. Si riuniscono i due schemi grafici delle figure 1 e 2 in un unico schema (fig. 3), dal quale si «legge» il segno del polinomio  $P$  nel modo seguente:
  - i due fattori hanno lo stesso segno quando  $x$  varia nell'intervallo  $-2 < x < 1$  o nella semiretta  $x > 2$ ; si ha dunque:

Figura 1  
Il segno del binomio  
 $f_1 = x - 1$

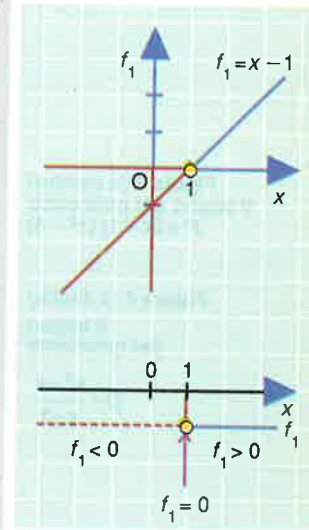
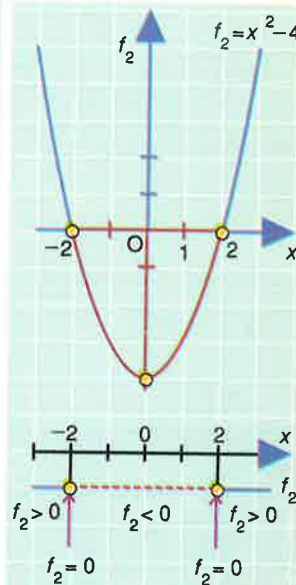


Figura 2  
Il segno del trinomio  
 $f_2 = x^2 - 4$



$$x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 1 \quad \text{o per} \quad x > 2$$

- i due fattori hanno segno opposto quando  $x$  varia nell'intervallo  $1 < x < 2$  o nella semiretta  $x < -2$ ; si ha dunque:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < 2 \quad \text{o per} \quad x < -2$$

- in corrispondenza dei numeri  $-2, 1, 2$  si annulla un fattore, quindi si ha:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

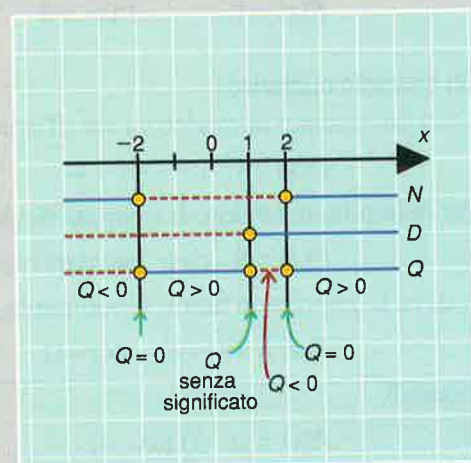
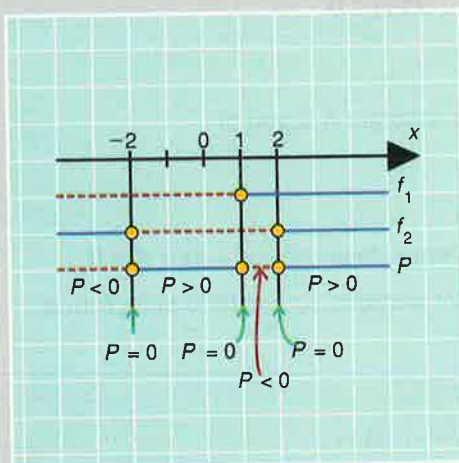
### Il procedimento per studiare il segno di un polinomio

Il procedimento seguito nell'esempio numerico ha carattere generale e può essere esteso a qualunque polinomio che sia scomposto in fattori di 1° o 2° grado. Per studiare il segno di un polinomio si procede dunque nel modo seguente:

1. si studia il segno dei singoli fattori;
2. si determina il segno del polinomio  $P$  ottenendo:
  - $P = 0$  se almeno uno dei fattori vale 0;
  - $P < 0$  solo se si ha un numero dispari di fattori negativi.

Figura 3 (a sinistra)  
Il segno del polinomio  
 $P = (x-1)(x^2-4)$

Figura 4 (a destra)  
Il segno  
del quoziente  
 $Q = \frac{x^2-4}{x-1}$



### Il segno di un quoziente di polinomi in un caso particolare

Cominciamo anche in questo caso con un esempio. È dato il quoziente:

$$Q(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Per studiarne il segno, basta ricordare che il segno di un quoziente

$$Q = \frac{N}{D}$$

dipende dal segno del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  nel modo seguente:

- si ha  $Q$  senza significato se risulta  $D = 0$ ;
- si ha  $Q = 0$  se risulta  $N = 0$  e  $D \neq 0$ ;
- si ha  $Q > 0$  se  $N$  e  $D$  hanno lo stesso segno;
- si ha  $Q < 0$  se  $N$  e  $D$  hanno segno opposto.

Ecco allora come si procede.

1. Si studia il segno del binomio di 1° grado  $D = x - 1$  che ha la radice  $x = 1$  e il segno rappresentato in fig. 1.
2. Si studia il segno del trinomio di 2° grado  $N = x^2 - 4$  che ha le radici reali  $x = \pm 2$  ed il segno rappresentato in fig. 2.
3. Si riuniscono i due schemi grafici delle figure 1 e 2 in un unico schema (fig. 4), dal quale si «legge» il segno del quoziente  $Q$  nel modo seguente:
  - numeratore  $N$  e denominatore  $D$  hanno lo stesso segno quando  $x$  varia nell'intervallo  $-2 < x < 1$  o nella semiretta  $x > 2$ ; si ha dunque che:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} > 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 1 \quad \text{o per} \quad x > 2$$

- numeratore  $N$  e denominatore  $D$  hanno segno opposto quando  $x$  varia nell'intervallo  $1 < x < 2$  o nella semiretta  $x < -2$ ; si ha dunque che:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < 2 \quad \text{o per} \quad x < -2$$

- in corrispondenza del numero 1 si annulla il denominatore  $D$  e quindi il quoziente perde significato; si ha dunque che:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \quad \text{perde significato per} \quad x = 1$$

- in corrispondenza dei numeri 2 e -2 si annulla il numeratore  $N$  ma non il denominatore  $D$ , e quindi il quoziente vale 0; si ha dunque che:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

### Il procedimento per studiare il segno di un polinomio

Il procedimento seguito nell'esempio numerico ha carattere generale e può essere esteso per studiare il segno a qualunque quoziente di polinomi (o frazione algebrica)  $Q = \frac{N}{D}$ .

Si procede nel modo seguente:

1. si studia il segno del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$ ;
2. si determina il segno del quoziente  $Q$  ottenendo:
  - $Q$  è privo di significato se risulta  $D = 0$ ;
  - $Q = 0$  vale 0 se risulta  $N = 0$  e  $D \neq 0$ ;
  - $Q > 0$  se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno;
  - $Q < 0$  se numeratore e denominatore hanno segno opposto.



# Le equazioni irrazionali

## Equazioni irrazionali

Si chiamano *irrazionali* le equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di radice. Ecco allora qualche esempio di equazioni irrazionali:

$$\sqrt{x+3} = 2x \quad \sqrt[3]{x-6} = x$$

Non sono invece irrazionali le equazioni seguenti:

$$x + \sqrt{3} = 2x \quad x - \sqrt[3]{6} = x$$

dato che sotto il segno di radice *non* compare l'incognita.

## Come si risolvono le equazioni irrazionali

Le equazioni irrazionali vengono generalmente risolte con il seguente procedimento: *si elevano i due membri dell'equazione alla stessa potenza fino a far diventare l'equazione razionale*.

Tuttavia questo procedimento deve essere seguito con cautela; basta un esempio per rendersene conto.

L'equazione:

$$x = 1 \quad (1)$$

mostra come unica soluzione il numero 1. Ma, elevando al quadrato i due membri della (1), si ottiene l'equazione:

$$x^2 = 1 \quad (2)$$

che ha le due soluzioni:

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

Questo esempio fa capire che, *elevando al quadrato i due membri di un'equazione, non si ottiene un'equazione equivalente*.

Si ottiene invece un'equazione che ha tutte le soluzioni dell'equazione di partenza, ma può ammetterne in più altre, dette *soluzioni estranee* all'equazione data, perché introdotte dal procedimento di elevazione al quadrato.

Queste considerazioni possono essere visualizzate interpretando le equazioni esaminate con la geometria analitica (fig. 1); si considera:

- l'equazione (1) come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \text{ che fornisce appunto } \begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases}$$

- l'equazione (2) come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ che fornisce appunto } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Così si vede che la retta  $y = 1$  incontra:

- la retta  $y = x$  (fig. 1a) solo nel punto A(1; 1);
- la parabola  $y = x^2$  (fig. 1b) non solo in A, ma anche in B(-1;1).

La figura suggerisce allora di ripetere le stesse considerazioni a partire da una qualunque altra potenza pari: la retta  $y = 1$  incontra, per esempio, anche la curva  $y = x^4$  nei due punti A e B (fig. 2).

Questo vuol dire che anche l'equazione

$$x^4 = 1$$

ottenuta elevando alla quarta potenza i due membri della (1) fornisce una soluzione in più di quella di partenza.

Non si hanno invece gli stessi problemi elevando i due membri di un'equazione a esponente dispari: la retta  $y = 1$  incontra, ad esempio, la curva  $y = x^3$  solo nel punto A (fig. 3), perciò l'equazione:

$$x^3 = 1$$

ha una sola soluzione reale:

$$x = 1$$

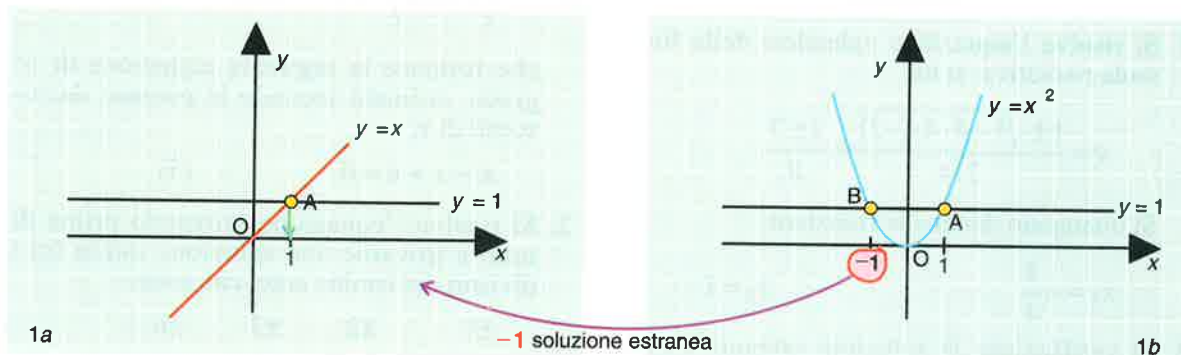
proprio come l'equazione di partenza.

Dunque, per risolvere un'equazione irrazionale si procede nel modo seguente:

1. si elevano i due membri alla stessa potenza fino a ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
2. si risolve l'equazione razionale ottenuta;
3. se i due membri dell'equazione sono stati elevati a un esponente pari, si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.

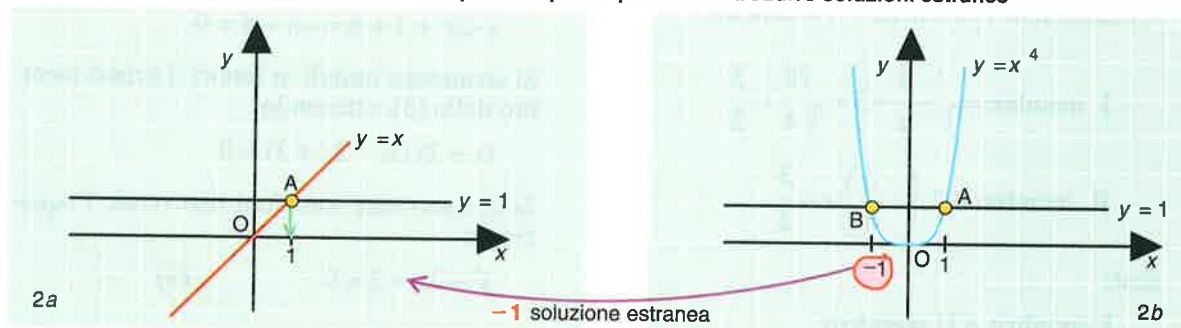
**Figura 1**

Elevando al quadrato i due membri di un'equazione si possono introdurre soluzioni estranee



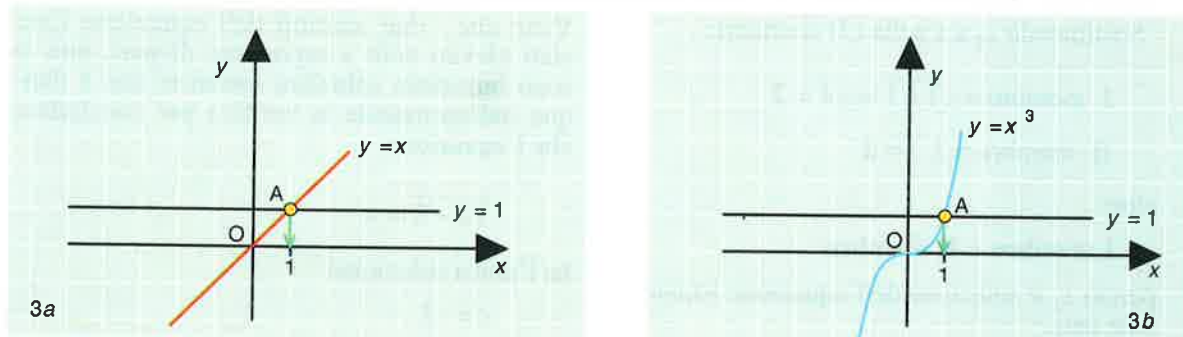
**Figura 2**

Elevando i due membri di un'equazione a esponente pari si possono introdurre soluzioni estranee



**Figura 3**

Elevando i due membri di un'equazione a esponente dispari non si introducono soluzioni estranee



## Due esempi di equazioni irrazionali risolte

### Primo esempio

Seguendo il procedimento indicato risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = 2x \quad (3)$$

1. Si elevano i due membri al quadrato e si ha:

$$(\sqrt{x+3})^2 = (2x)^2 \quad \text{ossia} \quad x+3 = 4x^2$$

che fornisce la seguente equazione di 2° grado, ordinata secondo le potenze decrescenti di  $x$ :

$$4x^2 - x - 3 = 0$$

2. Si risolve l'equazione valendosi della formula risolutiva; si ha:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 7}{8}$$

Si ottengono dunque le soluzioni:

$$x_1 = -\frac{3}{4} \qquad x_2 = 1$$

3. Si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.

- Sostituendo  $x_1$  a  $x$  nella (3) si ottiene:

$$\text{I membro} = \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{II membro} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

cioè:

**I membro  $\neq$  II membro**

perciò  $x_1$  non è soluzione dell'equazione irrazionale data.

- Sostituendo  $x_2$  a  $x$  nella (3) si ottiene:

$$\text{I membro} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{II membro} = 2 \cdot 1 = 2$$

cioè:

**I membro = II membro**

perciò  $x_2$  è soluzione dell'equazione irrazionale data.

Si conclude che l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = 2x$$

ha l'unica soluzione:

$$x = 1$$

### Secondo esempio

Risolviamo ora l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6} = x \quad (4)$$

1. Si elevano i due membri dell'equazione al cubo e si ha:

$$(\sqrt[3]{x-6})^3 = x^3 \quad \text{ossia} \quad x-6 = x^3$$

che fornisce la seguente equazione di 3° grado, ordinata secondo le potenze decrescenti di  $x$ :

$$x^3 - x + 6 = 0 \quad (5)$$

2. Si risolve l'equazione provando prima di tutto a trovarne una soluzione intera fra i divisori del termine noto, che sono:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

Si ottiene la soluzione intera  $x_1 = -2$ , dato che risulta:

$$(-2)^3 + 2 + 6 = -8 + 8 = 0$$

Si scompone quindi in fattori il primo membro della (5), ottenendo:

$$(x+2)(x^2-2x+3) = 0$$

Si cercano altre soluzioni risolvendo l'equazione:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad (6)$$

Non si trovano però altre soluzioni, dato che la (6) non ha soluzioni reali.

Visto che i due membri dell'equazione sono stati elevati solo a esponente dispari, non si sono introdotte soluzioni estranee; non è dunque indispensabile la verifica per concludere che l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6} = x$$

ha l'unica soluzione:

$$x = -2$$

## Conoscenze

- ① Spiegare come si riconosce un'equazione irrazionale.
- ② Spiegare come si risolve un'equazione irrazionale.
- ③ Spiegare il significato del termine «soluzioni estranee» di un'equazione irrazionale.
- ④ Indicare i casi in cui, risolvendo un'equazione irrazionale, si introducono delle soluzioni estranee.

## Comprensione

- ① Portare qualche esempio di equazione irrazionale diverso da quelli dati dal testo.
- ② Spiegare perché, risolvendo un'equazione irrazionale, si possono introdurre delle soluzioni estranee.

## Applicazioni

- ① Esaminare le equazioni:

$$\sqrt{x+3} = -2x \quad \sqrt[3]{x-6} = -x$$

$$x + \sqrt{3} = -2x \quad x - \sqrt[3]{6} = -x$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. scegliere le equazioni irrazionali, motivando la scelta;
- b. risolvere le equazioni irrazionali.

## Collegamento con il primo volume

- ① Risolvere le equazioni dell'esercizio precedente che non sono irrazionali; di che grado sono le due equazioni?  
(Vedere p. 373)

## Collegamenti con i capitoli precedenti

- ① Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = -2x \quad (7)$$

come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+3} \\ y = -2x \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. tracciare il grafico delle due funzioni che compaiono nel sistema, tenendo presente che:

•  $y = -2x$  ha per grafico una retta;

•  $y = \sqrt{x+3}$  ha il grafico di  $y = \sqrt{x}$  opportunamente traslato;

- b. individuare i punti d'intersezione delle due curve.

(Vedere il capitolo 6, paragrafi 5 e 7)

- ② Elevare al quadrato i due membri della (7) e ripetere l'interpretazione grafica della nuova equazione.
- ③ Confrontare i risultati degli esercizi (1) e (2).
- ④ Esaminare l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6} = -x \quad (8)$$

come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x-6} \\ y = -x \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. tracciare il grafico delle due equazioni, tenendo presente che

•  $y = -x$  ha per grafico una retta;

•  $y = \sqrt[3]{x-6}$  ha il grafico di  $y = \sqrt[3]{x}$  opportunamente traslato;

- b. individuare i punti di intersezione delle due curve.

(Vedere il capitolo 6, paragrafi 5 e 7)

- ⑤ Elevare al cubo i due membri della (8) e ripetere l'interpretazione grafica della nuova equazione.
- ⑥ Confrontare i risultati degli esercizi ④ e ⑤.



# Le disequazioni irrazionali

## Disequazioni irrazionali che si risolvono facilmente per via grafica

Analogamente alle equazioni, si chiamano *irrazionali* le disequazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

Numerosi casi di disequazioni irrazionali possono essere agevolmente risolti basandosi sulla geometria analitica; ecco i primi esempi.

$$\sqrt[3]{x} > 0 \quad \sqrt[3]{x} < 0 \quad \sqrt{x} > 0 \quad \sqrt{x} < 0$$

Le prime due disequazioni possono essere riassunte nel seguente quesito:

studiare il segno della funzione  $y = \sqrt[3]{x}$ .

Il quesito si risolve facilmente tracciando il grafico della funzione (vedi anche il capitolo sesto, p. 253); si ha (fig. 1):

$$\sqrt[3]{x} > 0 \quad \text{per } x > 0$$

$$\sqrt[3]{x} < 0 \quad \text{per } x < 0$$

Questo risultato corrisponde al ben noto risultato numerico: la radice cubica di un numero ha lo stesso segno del radicando.

Analogamente si può procedere per risolvere le ultime due disequazioni, che possono essere riassunte nel quesito: studiare il segno della funzione  $y = \sqrt{x}$ . Tracciando anche in questo caso il grafico della funzione (fig. 2), si trova che:

$$\sqrt{x} > 0 \quad \text{per } x > 0$$

$$\sqrt{x} < 0 \quad \text{senza soluzioni}$$

Questo risultato corrisponde ad un noto risultato numerico: quando si calcola la radice quadrata di un numero  $x$  si hanno due casi:

- $x < 0$  e perciò la radice non si può calcolare;
- $x \geq 0$  e la radice si può calcolare; in quest'ultimo caso il simbolo  $\sqrt{x}$  indica un numero positivo e  $-\sqrt{x}$  il suo opposto.

Quindi, il simbolo  $\sqrt{x}$  non indica mai un numero negativo.

In modo analogo possono essere esaminate anche le seguenti disequazioni:

$$\sqrt[3]{x-6} > 0 \quad \sqrt[3]{x-6} < 0 \quad \sqrt{x+3} > 0 \quad \sqrt{x+3} < 0$$

Figura 1

Il segno di  $y = \sqrt[3]{x}$

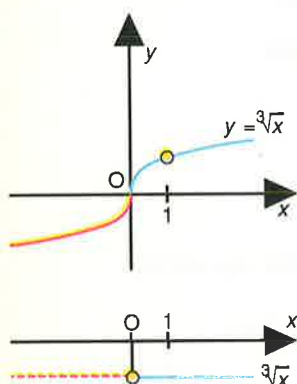
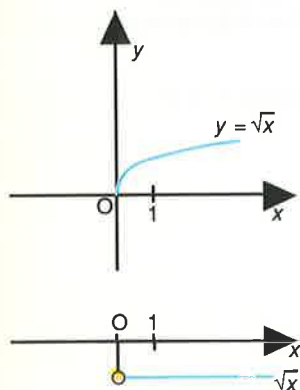


Figura 2

Il segno di  $y = \sqrt{x}$



Infatti, tracciando il grafico di  $y = \sqrt[3]{x-6}$  si trova (fig. 3):

$$\sqrt[3]{x-6} > 0 \quad \text{per } x > 6$$

$$\sqrt[3]{x-6} < 0 \quad \text{per } x < 6$$

E, tracciando il grafico di  $y = \sqrt{x+3}$ , si trova (fig. 4):

$$\sqrt{x+3} > 0 \quad \text{per } x > -3$$

$$\sqrt{x+3} < 0 \quad \text{senza soluzioni}$$

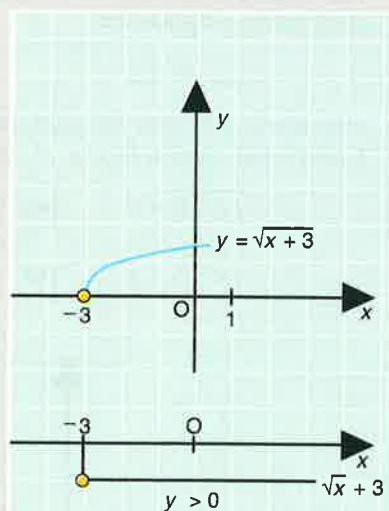
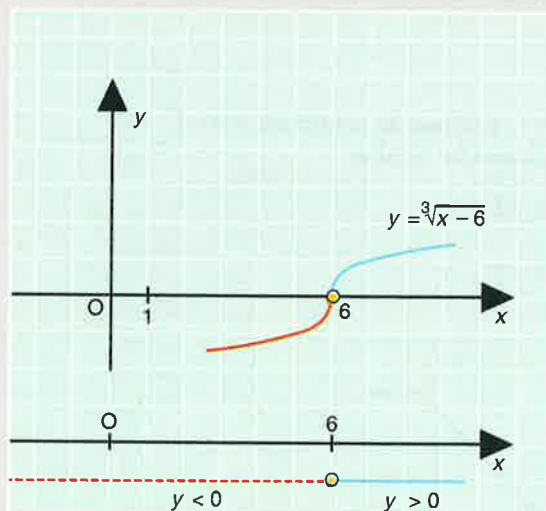


Figura 3 (a sinistra)

Il segno di  $y = \sqrt[3]{x-6}$

Figura 4 (a destra)

Il segno di  $y = \sqrt{x+3}$

### Disequazioni irrazionali che si risolvono con l'aiuto dei grafici

Ecco degli esempi di disequazioni che si possono risolvere con i grafici, completati però dalla risoluzione di un'equazione irrazionale.

A. Risolvere le due disequazioni seguenti:

$$\sqrt[3]{x-6} > x \quad \sqrt[3]{x-6} < x \quad (1)$$

Per interpretare queste formule sul piano cartesiano si traccia il grafico delle due funzioni:

$$y = \sqrt[3]{x-6} \quad y = x$$

ottenendo una curva e una retta che si incontrano nel punto A.

Si immagina ora di considerare due punti con la stessa ascissa  $x$  (fig. 5):

- R, che percorre la retta ed ha ordinata  $y_R = x$ ;

- C, che percorre la curva ed ha ordinata  $y_C = \sqrt[3]{x-6}$

Così si osserva che:

- a sinistra del punto A la curva si trova sopra la retta e perciò si ha:

$$y_C > y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} > x$$

- a destra del punto A la curva si trova sotto la retta e perciò si ha:

$$y_C < y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} < x$$

- in corrispondenza al punto A la curva e la retta si incontrano e perciò si ha:

$$y_C = y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} = x$$

Per risolvere le due disequazioni (1) basta allora determinare l'ascissa di A risolvendo l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6} = x$$

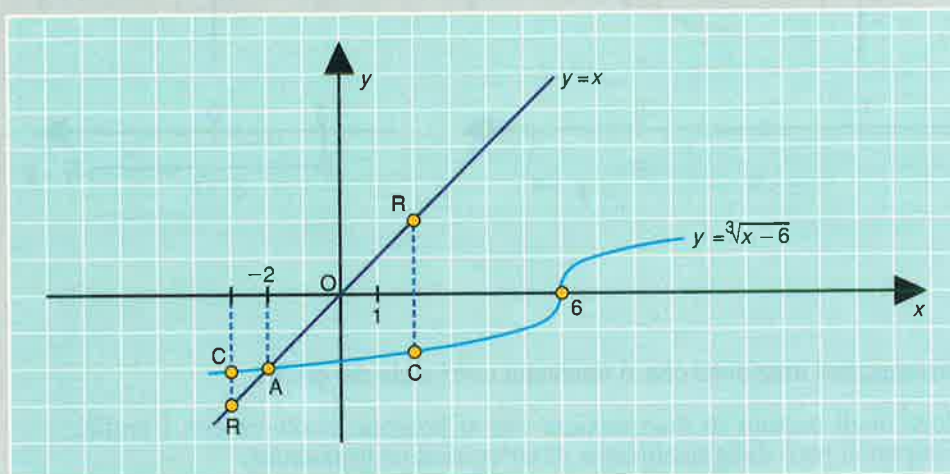
che, come si è visto nel paragrafo 7, fornisce la soluzione  $x = -2$ .

Completata così la figura, si conclude che risulta:

$$\sqrt[3]{x-6} > x \quad \text{per } x < -2$$

$$\sqrt[3]{x-6} < x \quad \text{per } x > -2$$

Figura 5  
Una disequazione risolta  
graficamente



B. Il procedimento si può ripetere per risolvere le disequazioni seguenti:

$$\sqrt{x+3} > 2x \quad \sqrt{x+3} < 2x \quad (2)$$

Tracciato il grafico delle due funzioni (fig.6):

$$y = \sqrt{x+3} \quad y = 2x$$

si ottiene ancora una curva e una retta che si incontrano nel punto A di ascissa 1, ottenuta risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = 2x$$

Il grafico suggerisce prima di tutto un risultato: per  $x < -3$  non si trovano punti della curva e perciò la disequazione non si può esaminare. Risulta poi:

$$\sqrt{x+3} < 2x \quad \text{per } x > 1$$

$$\sqrt{x+3} > 2x \quad \text{per } -3 \leq x < 1$$

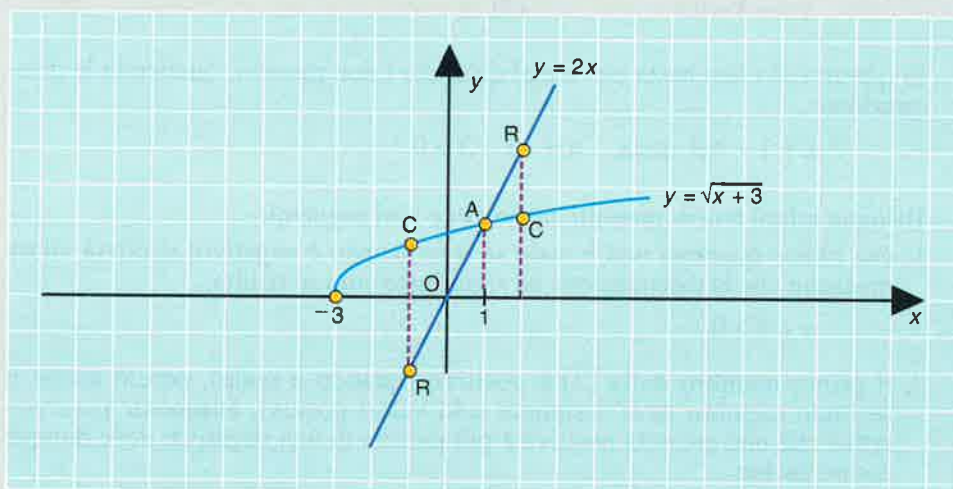


Figura 6  
Una disequazione  
risolta graficamente

### Alcune disequazioni irrazionali risolte con metodi algebrici

Il precedente metodo grafico è abbastanza rapido ed espressivo, ma non si applica quando compaiono funzioni di cui non si riesce a tracciare il grafico con i metodi illustrati nel capitolo sesto.

Di validità più generale, anche se più lunghi, sono i metodi algebrici che ora descriviamo rapidamente, distinguendo tre casi.

A. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt[3]{R(x)} > P(x) \quad \sqrt[3]{R(x)} < P(x)$$

dove  $R(x)$  e  $P(x)$  sono due polinomi.

In tal caso le disequazioni si risolvono semplicemente elevandone al cubo i due membri, dato che l'elevazione ad una potenza dispari mantiene il segno di un'espressione.

Per esempio, per risolvere:

$$\sqrt[3]{x-6} > x$$

si elevano i due membri al cubo e si ottiene la disequazione:

$$x-6 > x^3 \quad \text{ossia} \quad x^3 - x + 6 < 0$$

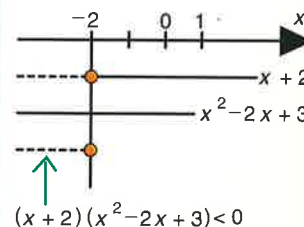
che deve essere risolta scomponendo in fattori il polinomio al primo membro; si ha (vedi p. 389):

$$x^3 - x + 6 = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$$

Esaminando insieme il segno del binomio  $(x+2)$  e il segno del trinomio di 2° grado senza soluzioni reali  $(x^2 - 2x + 3)$  si ottiene (fig. 7):

$$\sqrt[3]{x-6} > x \quad \text{per } x < -2$$

Figura 7  
Una disequazione risolta  
algebricamente





B. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt{R(x)} < P(x)$$

dove  $R(x)$  e  $P(x)$  sono due polinomi; per esempio è data:

$$\sqrt{x+3} < 2x \quad (3)$$

In questo caso non basta elevare al quadrato i due membri, ottenendo le disequazione:

$$x+3 < 4x^2 \text{ ossia } 4x^2 - x - 3 > 0$$

Bisogna infatti tenere presenti anche i due fatti seguenti:

1. una radice quadrata non è reale se il radicando è negativo; si dovrà allora precisare che la disequazione ha significato solo se risulta:

$$x+3 \geq 0$$

2. il primo membro della (3) è positivo (quando è reale), perciò anche il secondo membro deve assumere solo valori positivi, altrimenti si scriverebbe che una quantità positiva è più piccola di una negativa; deve dunque essere anche:

$$2x \geq 0$$

Si conclude che le soluzioni della (3) sono i valori di  $x$  che soddisfano contemporaneamente le seguenti disequazioni:

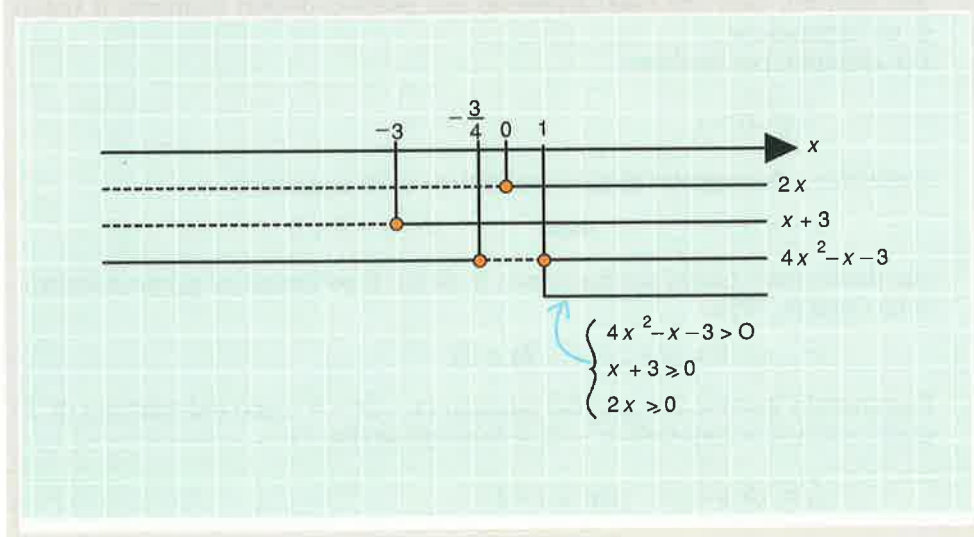
$$\begin{cases} 4x^2 - x - 3 > 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Lo schema di fig. 8 mostra che, risolvendo il sistema di disequazioni (4), si ottengono le soluzioni:

$$x > 1$$

come si era ottenuto in modo molto più rapido dal grafico.

**Figura 8**  
Una disequazione risolta  
algebricamente



Generalizzando il procedimento ora indicato, si conclude che, per risolvere una disequazione del tipo:

$$\sqrt{R(x)} < P(x)$$

bisogna risolvere simultaneamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} R(x) < [P(x)]^2 \\ R(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases}$$

C. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt{R(x)} > P(x)$$

dove  $R(x)$  e  $P(x)$  sono due polinomi; per esempio è data:

$$\sqrt{x+3} > 2x \quad (5)$$

Si può procedere così:

- si osserva che la disequazione è certamente soddisfatta se il secondo membro è negativo, purché il primo membro sia reale; dunque sono soluzioni della disequazione i valori di  $x$  per cui risulta

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$$

- se invece il secondo membro non è negativo (e il primo membro è reale), si procede come nel caso B, elevando i due membri al quadrato; perciò altre soluzioni della (5) sono i valori di  $x$  che soddisfano il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 > 4x^2 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$$

In definitiva, per risolvere la disequazione (5) bisogna risolvere i due sistemi di disequazioni. Il primo sistema è:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene (fig. 9a):

$$-3 \leq x < 0$$

Il secondo sistema è:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene (fig. 9b):

$$0 \leq x < 1$$

Tutte le soluzioni della (5) sono dunque:

$$-3 \leq x < 1$$

come si era già visto graficamente.

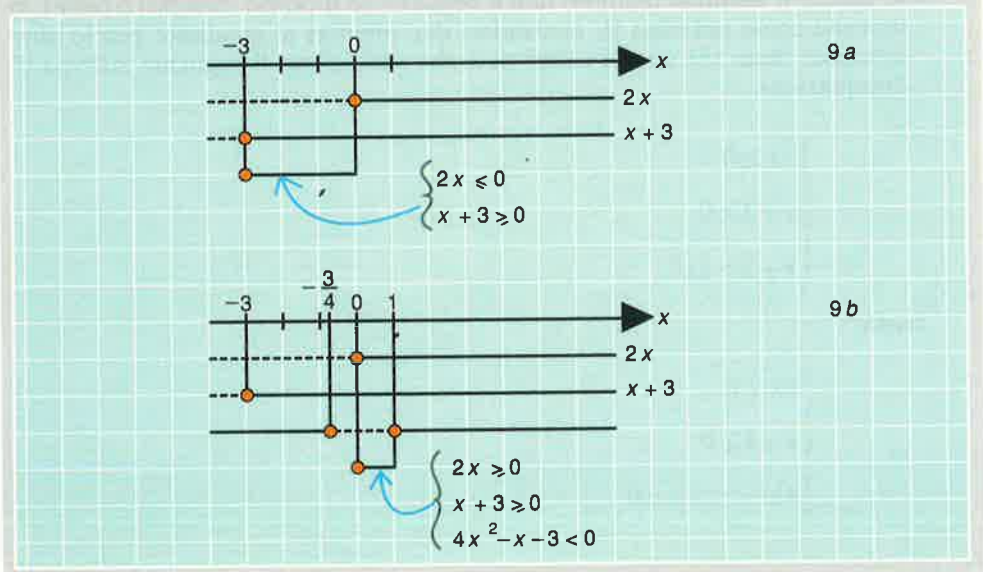
Generalizzando il procedimento ora indicato, si conclude che, per risolvere una disequazione del tipo:

$$\sqrt{R(x)} > P(x)$$

bisogna risolvere i due seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} R(x) \geq 0 \\ P(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R(x) > [P(x)]^2 \\ R(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases}$$

Figura 9  
Una disequazione risolta  
algebricamente



# Sistemi di grado superiore al 2°

**Le intersezioni di una parabola con una circonferenza conducono a un sistema di 4° grado**

La fig. 1 rappresenta la parabola e il cerchio che hanno le equazioni seguenti:

$$y = x^2 - 3$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Il grafico mostra che le curve si incontrano in quattro punti; la ricerca delle coordinate di questi punti conduce allora a risolvere il seguente sistema:

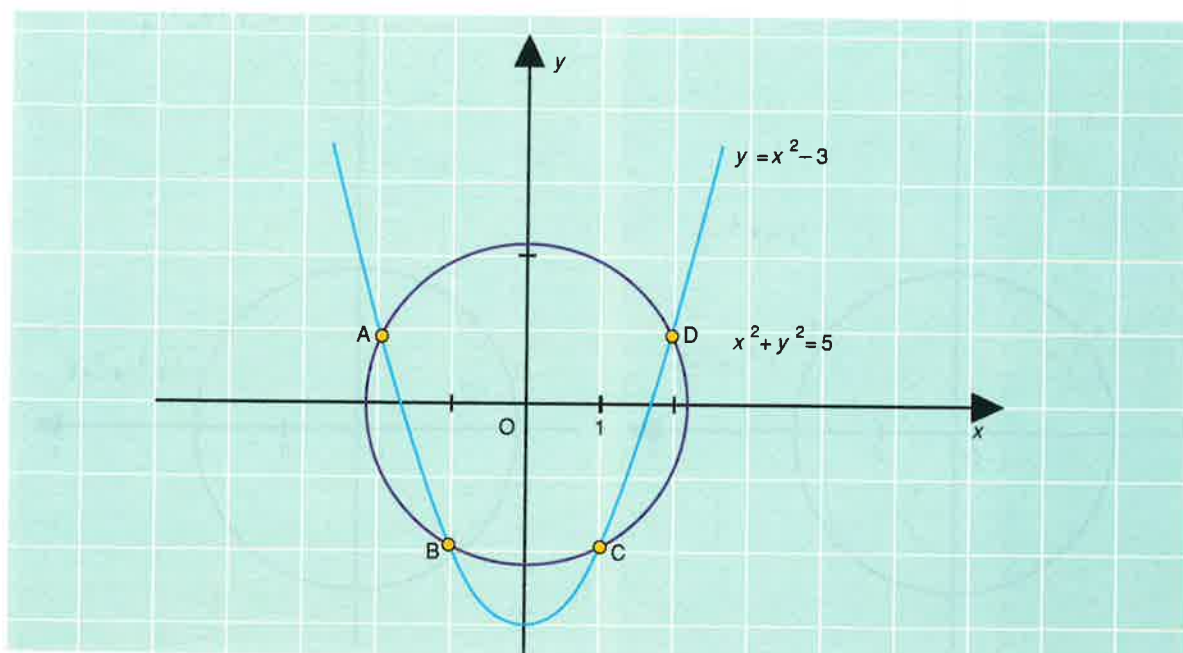
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Si osserva subito che *il sistema è di 4° grado*, dato che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

In questo caso si ha infatti:

- grado della prima equazione = 2;
- grado della seconda equazione = 2;
- grado del sistema =  $2 \cdot 2 = 4$ .

**Figura 1**  
Una parabola e una circonferenza che si incontrano in quattro punti





### Un sistema di 4° grado può avere al massimo quattro soluzioni

A questo sistema si possono estendere le considerazioni svolte nel capitolo settimo, paragrafo 9; in particolare si ha che *il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione*.

Sostituendo nella seconda equazione, al posto di  $y$ , l'espressione  $x^2 - 3$  fornita dalla prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^2 + (x^2 - 3)^2 = 5 \end{cases}$$

da cui, svolgendo i calcoli indicati nella seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa così un'equazione di 4° grado in un'incognita, equazione che in questo caso si risolve facilmente, perché si tratta di una biquadratica.

Risolviendo quindi l'equazione, si ottengono le quattro ascisse dei punti d'intersezione; si ha:

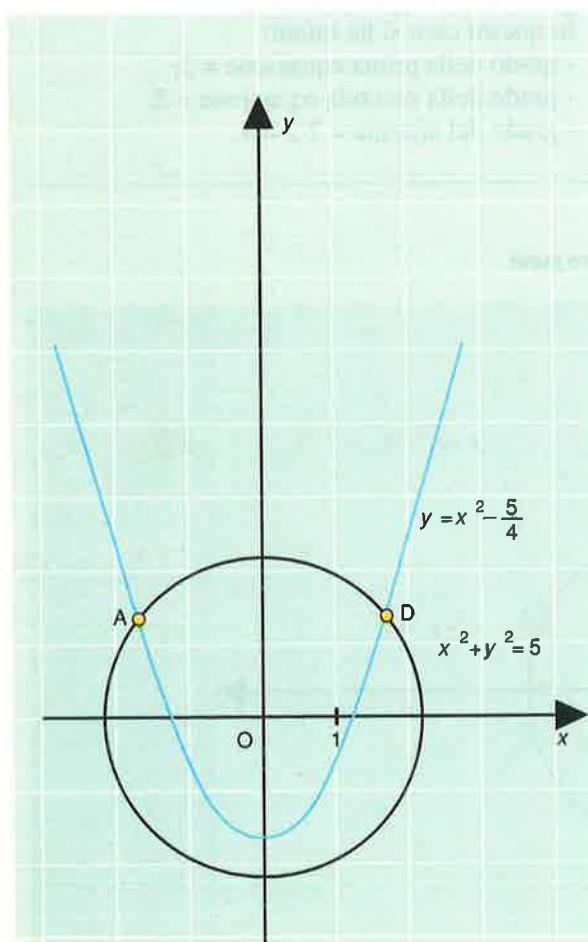
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

e quindi

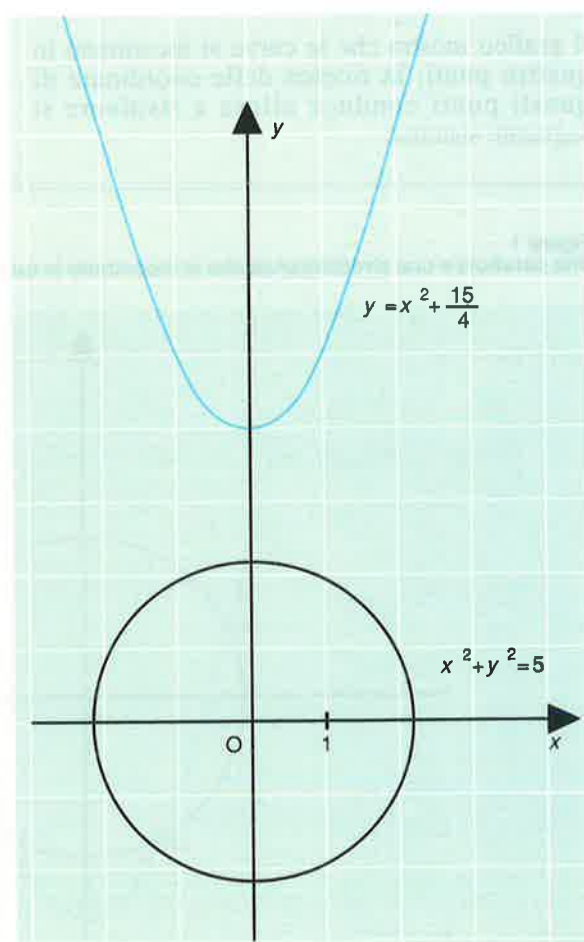
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2 \end{cases}$$

Per ottenere le ordinate basta sostituire i valori di  $x$  ottenuti nella prima equazione; le soluzioni del sistema sono:

**Figura 2**  
Una parabola e una circonferenza che si incontrano in due punti



**Figura 3**  
Una parabola e una circonferenza che non si incontrano



$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_4 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

ossia:

$$A(-2; 1) \quad B(-1; -2) \quad C(1; -2) \quad D(2; 1)$$

Questo esempio già suggerisce una considerazione di carattere generale, e cioè: *per risolvere il sistema si è condotti a risolvere un'equazione di 4° grado in una sola incognita, equazione che può avere al massimo quattro soluzioni reali, perciò il sistema ha al massimo quattro soluzioni (cioè quattro coppie di numeri che soddisfano entrambe le equazioni).*

Si capisce allora che, per le soluzioni di un sistema di 4° grado, si possono presentare tante situazioni diverse; ecco qualche caso particolarmente espressivo anche dal punto di vista grafico.

#### In sistema di 4° grado con due sole soluzioni reali

In fig. 2 si ha sempre la stessa circonferenza di fig. 1, mentre la parabola è stata traslata verso l'alto, fino ad avere l'equazione:

$$y = x^2 - \frac{5}{4}$$

Così la parabola incontra la circonferenza in due soli punti.

Si aspettiamo allora che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{5}{4} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

presenti due sole soluzioni reali.

Infatti, risolvendo ancora una volta il sistema col metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{5}{4} \\ (x^2 + \frac{11}{4})(x^2 - \frac{5}{4}) = 0 \end{cases}$$

L'equazione di 4° grado ha due sole soluzioni reali e quindi anche il sistema ha due sole soluzioni reali.

#### Un sistema di 4° grado senza soluzioni reali

In fig. 3 si ha sempre la stessa circonferenza, mentre la parabola è stata traslata ancora verso l'alto, fino ad avere l'equazione:

$$y = x^2 + \frac{15}{4}$$

La parabola ora non incontra la circonferenza e perciò ci aspettiamo che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{15}{4} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

non abbia soluzioni reali; infatti la risoluzione col metodo di sostituzione conduce a scrivere:

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{15}{4} \\ (x^2 + \frac{5}{4})(x^2 + \frac{29}{4}) = 0 \end{cases}$$

L'equazione di 4° grado ottenuta non ha soluzioni reali e quindi anche il sistema non ha soluzioni reali.

#### Curve tangenti e sistemi con soluzioni coincidenti

In fig. 4 sono rappresentati alcuni casi di curve tangenti.

1. In fig. 4a si immagina di riprendere la fig. 1 e di «allargare» la parabola fino a che i punti A e B coincidono in un punto di tangenza  $T_1$ , mentre C e D coincidono in un secondo punto di tangenza  $T_2$ ; le curve si dicono allora *bitangenti*.

È il caso delle curve d'equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \quad x^2 + y^2 = 5$$

Infatti, il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

risolto col metodo di sostituzione diventa:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ (x^2 - 4)^2 = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ (x-2)^2(x+2)^2 = 0 \end{cases}$$

Si arriva dunque a un'equazione di 4° grado che ha due soluzioni doppie (vedi anche il paragrafo 5), perciò anche il sistema ha due soluzioni doppie.

2. In fig. 4b si trova ancora la circonferenza di fig. 1, mentre la parabola è stata ora traslata verso l'alto, in modo da avere l'equazione:

$$y = x^2 - \sqrt{5}$$

Così vanno a coincidere B e C nel punto T, mentre A e D restano separati, cioè le curve sono tangenti in T. Il sistema rispecchia questa situazione perché, risolto per sostituzione, diventa:

$$\begin{cases} y = x^2 - \sqrt{5} \\ x^2(x^2 + 1 - 2\sqrt{5}) = 0 \end{cases}$$

e cioè presenta un'equazione di 4° grado con la soluzione  $x = 0$  che è doppia, e altre due soluzioni semplici; così anche il sistema ha una soluzione doppia e due semplici.

3. In fig. 4c si trova sempre la circonferenza di fig. 1, mentre la parabola di fig. 4b è stata ora «allargata», fino a avere l'equazione:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{5}}x^2 - \sqrt{5}$$

Il sistema mostra ora una situazione molto particolare perché, risolto per sostituzione, diventa:

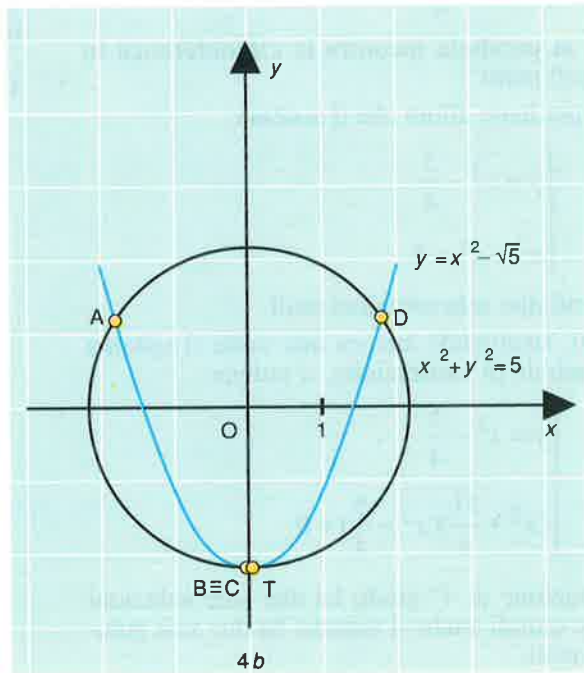
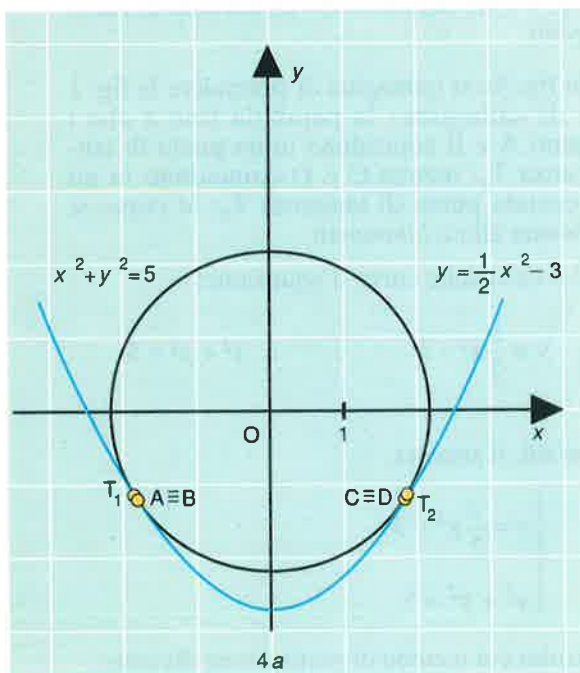
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2\sqrt{5}}x^2 - \sqrt{5} \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

e cioè presenta un'equazione di 4° grado con la soluzione  $x = 0$  contata quattro volte; questo vuol dire che anche il sistema ha la sola soluzione:

$$T(0; \sqrt{5}) \text{ contata quattro volte}$$

La situazione si intuisce facilmente dal punto di vista geometrico: nel punto T sono andati a coincidere i quattro punti A, B, C, D.

**Figura 4**  
Tre casi di parabole e circonferenze tangenti



## I sistemi di grado superiore al 2° e le loro soluzioni

Le situazioni ora esaminate non esauriscono i tanti casi che si possono presentare risolvendo un sistema di grado superiore al 2°, ma danno qualche indicazione di carattere generale e cioè:

- anche un sistema di grado superiore al 2° si risolve generalmente per sostituzione;
- un sistema di grado ennesimo ha al massimo  $n$  soluzioni;
- fra le  $n$  soluzioni reali se ne possono trovare alcune multiple;
- dal punto di vista geometrico, una soluzione multipla corrisponde a un punto di tangenza fra due curve.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Come si risolve un sistema di grado ennesimo?
- ② Quali soluzioni può avere un sistema di grado ennesimo?

### Comprensione

- ① Disegnare una parabola e una circonferenza che hanno solo due intersezioni coincidenti; in tal caso quali soluzioni darà il sistema formato dalle equazioni delle due curve?
- ② Portare un esempio di sistema di 3° grado e dire quante soluzioni può avere al massimo il sistema.

### Applicazioni

- ① Risolvere il seguente sistema:

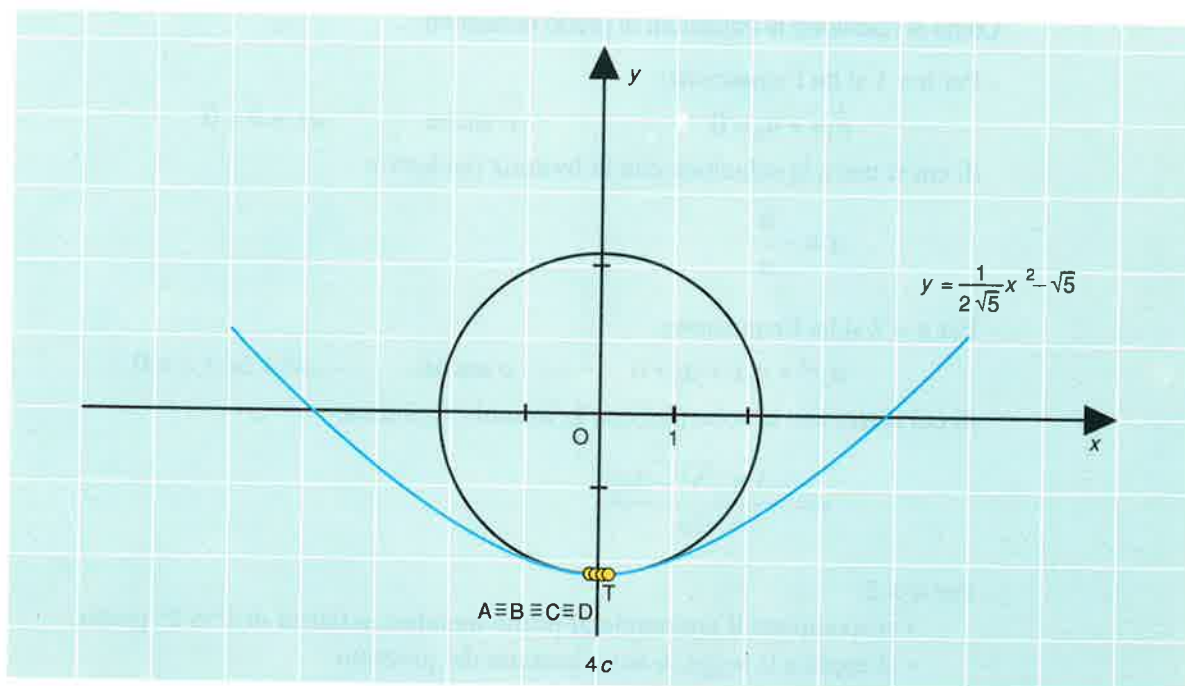
$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente le soluzioni ottenute.

- ② Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + \sqrt{5} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente le soluzioni ottenute.





# Che cosa bisogna sapere

## Equazione di grado ennesimo

È un'equazione che può essere scritta nella forma:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- ha al massimo  $n$  soluzioni reali;
- se l'equazione ha proprio  $n$  soluzioni reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , il polinomio al primo membro si può sempre scomporre in fattori nel modo seguente:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

- l'equazione ha la soluzione multipla  $x = x_1$  se nella fattorizzazione del polinomio compare un fattore del tipo  $(x - x_1)^m$ .

## Come si risolvono le equazioni di grado ennesimo

- Per  $n = 1$  si ha l'equazione:

$$a_1 x + a_0 = 0$$

o anche

$$ax + b = 0$$

di cui si trova la soluzione con la formula risolutiva:

$$x = -\frac{b}{a}$$

- Per  $n = 2$  si ha l'equazione:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

o anche

$$ax^2 + bx + c = 0$$

di cui si trovano le soluzioni con la formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Per  $n > 2$

- si scompone il polinomio al primo membro in fattori di 1° o 2° grado;
- si applica la legge di annullamento del prodotto.

## Procedimenti per scomporre un polinomio in fattori

1. Raccogliere un fattore comune, basandosi sulla proprietà distributiva

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$\text{Esempio: } x^4 + x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + x + 2)$$

2. Valersi del prodotto notevole

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

$$\text{Esempio: } x^4 - 2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2})$$

3. Valersi del quadrato di un binomio

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

$$\text{Esempio: } x^4 + 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$$

4. Valersi del cubo di un binomio

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$$

$$\text{Esempio: } x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = (x + 1)^3$$

5. Valersi della scomposizione di un trinomio di 2° grado con le radici reali  $x_1$  e  $x_2$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Esempio: } x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 + 5)(x^2 - 2)$$

ottenuto introducendo la lettera  $z = x^2$  e procedendo nel modo seguente:

A. si risolve l'equazione:

$$z^2 + 3z - 10 = 0 \quad \text{che ha le soluzioni} \quad z_1 = -5 \quad \text{e} \quad z_2 = 2$$

B. si scompone il trinomio di 2° grado, scrivendo:

$$z^2 + 3z - 10 = (z + 5)(z - 2) \quad \text{ossia} \quad x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 + 5)(x^2 - 2)$$

6. Dividere il polinomio per binomi del tipo  $(x - a)$ , dove  $a$  è una radice del polinomio

$$\text{Esempio: } x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

ottenuto procedendo nel modo seguente:

A. si trova la radice  $-2$  del polinomio, tenendo presente che le radici intere di un polinomio si possono trovare solo fra i divisori del termine noto;

B. si esegue la divisione  $(x^3 + 8) : [x - (-2)]$ .

### Criterio di divisibilità di un polinomio per un binomio $(x - a)$

Un polinomio  $P(x)$  è divisibile per un binomio  $(x - a)$  solo se  $a$  è una radice del polinomio.

Esempio:  $x^3 + 8$  è divisibile per  $[x - (-2)] = (x + 2)$  perché risulta:

$$(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

### Divisione di due polinomi

Si esegue estendendo il procedimento per la divisione fra due interi.

*Esempio:*

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x+2 \\ x^3+2x^2 & x^2-2x+4 \\ \hline -2x^2+8 & \\ -2x^2-4x & \\ \hline 4x+8 & \\ 4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

### Frazione algebrica

È una frazione che ha per termini due polinomi.

Una frazione algebrica  $\frac{N}{D}$  perde significato in corrispondenza ai numeri, che sostituiti a  $x$ , rendono uguale a 0 il denominatore  $D$ .

*Esempio:*

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

è una frazione algebrica che perde significato se risulta:

$$x - 1 = 0 \quad \text{ossia} \quad x = 1$$

A partire dalle frazioni algebriche si possono ripetere tutte le operazioni eseguite sulle frazioni numeriche e cioè:

1. ridurre ai minimi termini una frazione;
2. moltiplicare e dividere due frazioni;
3. elevare a potenza una frazione;
4. addizionare o sottrarre due frazioni;
5. semplificare espressioni frazionarie.

### Equazioni fratte

Sono equazioni che si possono scrivere nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0, cioè sono equazioni del tipo:

$$\frac{N}{D} = 0$$

dove  $N$  e  $D$  sono due polinomi.

*Esempio:*

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0$$

Si risolvono con il seguente procedimento:

1. si risolve l'equazione  $N = 0$ ;
2. si verifica che le soluzioni ottenute mantengano  $D \neq 0$ .

## Equazioni irrazionali

Si chiamano irrazionali le equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

*Esempio:*

$$\sqrt{x-6} = 2x$$

Si risolvono con il seguente procedimento:

1. si elevano i due membri alla stessa potenza fino a ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
2. si risolve l'equazione razionale ottenuta;
3. se i due membri dell'equazione sono stati elevati a un esponente pari, si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.

## Sistemi di grado ennesimo

È un sistema di due equazioni in due incognite in cui, moltiplicando i gradi delle equazioni, si ottiene il numero  $n$ .

*Esempio:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \quad \text{che è di grado} \quad n = 2 \cdot 2 = 4$$

Un sistema di grado ennesimo si può risolvere per sostituzione e ha al massimo  $n$  soluzioni reali.

Fra le soluzioni reali se ne possono trovare alcune multiple.

Rappresentando le due equazioni del sistema sul piano cartesiano, si ottengono due curve e si ha che:

- una soluzione semplice del sistema dà le coordinate del punto di intersezione fra le due curve;
- una soluzione multipla del sistema corrisponde a un punto di tangenza fra le due curve.



# Che cosa bisogna saper fare

Le nozioni svolte in questo capitolo possono essere divise in parti nel modo seguente:

1. Divisione di polinomi e fattorizzazione di un polinomio;
2. Frazioni algebriche e operazioni fra di esse;
3. Risoluzione di equazioni, da suddividere ancora in:
  - A. equazioni di grado superiore al 2°;
  - B. equazioni fratte;
  - C. equazioni irrazionali.

Queste nozioni sono largamente basate su vari argomenti precedenti e costituiscono dunque un sistema di regole complesso, in cui è necessario imparare a orientarsi scegliendo i procedimenti più adatti a ogni occasione.

Proprio a questo sono dedicati gli esercizi seguenti.

## 1. Divisione di polinomi e fattorizzazione di un polinomio

### Attività 1

Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Rispondere alle seguenti domande, motivando la risposta:

- a. nel polinomio si individua subito un fattore da raccogliere?
- b. il polinomio è un prodotto notevole?
- c. il polinomio è il quadrato o il cubo di un binomio?
- d. il polinomio è biquadrato?
- e. quale altra via rimane da provare per scomporre il polinomio in fattori?

### Attività 2

Esaminare di nuovo il polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Rispondere ai seguenti quesiti motivando la risposta:

- a. spiegare perché 3 non può essere una radice del polinomio;
- b. quali numeri interi possono essere radici del polinomio?

- c. determinare le radici intere del polinomio;
- d. elencare i binomi per cui è divisibile il polinomio.

### Attività 3

Dopo aver svolto l'attività 2, risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

si può scrivere nella forma seguente:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)Q(x) \quad (1)$$

- b. indicare il modo più rapido per determinare  $Q(x)$ ;
- c. scomporre in fattori il polinomio  $P(x)$ ;
- d. dire se il polinomio ha qualche radice multipla.

Quesito (b) *Sviluppare il prodotto dei tre binomi nella (1); si ha:*

$$[(x - 2)(x + 2)](x - 1) = (\dots\dots\dots)(x - 1) = \dots\dots\dots$$

*così la (1) diventa:*

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = (x^3 - x^2 - 4x + 4)Q(x)$$

*Per determinare  $Q(x)$  basta ora effettuare la divisione:*

$$(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8) : (x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

*completando lo schema preparato qui sotto.*

$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$	$x^3 - x^2 - 4x + 4$
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$	$x - \dots\dots\dots$
$-2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$	
$\dots\dots\dots$	
<b>0</b>	

Quesito (c) *Si ottiene:*

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 2)^2$$

### Attività 4

Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^4 - x^2 + 2$$

Rispondere ai seguenti quesiti motivando la risposta:

- a. quali numeri interi possono essere radici del polinomio?
- b. spiegare perché il polinomio non ha radici intere;
- c. spiegare perché il polinomio è biquadratico;
- d. scomporre in fattori il polinomio.

Quesito (d) *Si ottiene:*

$$P(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

## 2. Frazioni algebriche e operazioni fra di esse

### Attività 5

Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica, indicando il valore di  $x$  per cui la semplificazione non è valida.

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8}{x^2 - 1}$$

Per scomporre in fattori il numeratore, tenere presenti i risultati dell'attività 3.

### Attività 6

Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{6x-8} - \frac{4}{3x^2-4x} - 1$$

completando il seguente procedimento.

Dato che si debbono eseguire soltanto addizioni e sottrazioni, si procede così:

a. si scompongono in fattori i denominatori, trovando:

$$x \qquad 6x - 8 = 2(\dots\dots\dots) \qquad 3x^2 - 4x = x(\dots\dots\dots) \qquad (1)$$

b. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, dato da

$$\text{m.c.m.} = 2x(3x - 4)$$

c. a ogni frazione si sostituisce una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato; si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{2(3x-4)} - \frac{4}{x(3x-4)} - 1 = \\ & = \frac{(x+2)[\dots\dots\dots]}{2x(3x-4)} + \frac{(3x+2)\cdot\dots\dots}{2x(3x-4)} - \frac{4\cdot\dots\dots}{2x(3x-4)} - \frac{1\cdot[\dots\dots\dots]}{2x(3x-4)} = \\ & = \frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)} + \frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)} - \frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)} - \frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)} \end{aligned}$$

d. si addizionano le frazioni ottenute che hanno tutte lo stesso denominatore e si ottiene infine:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{2(3x-4)} - \frac{4}{x(3x-4)} - 1 = \frac{3x^2 + 14x - 24}{2x(3x-4)}$$

## 3. Risoluzione di equazioni

### A. Equazioni di grado superiore al 2°

#### Attività 7

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$$

Tenere presente la conclusione dell'attività 3.

### Attività 8

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - x^2 + 2 = 0 \quad (2)$$

e scegliere fra le seguenti affermazioni quelle corrette motivando la scelta:

- a. l'equazione (2) non ha soluzioni reali;
- b. l'equazione (2) non ha soluzioni razionali.

Tenere presente la conclusione dell'attività 4.

### B. Equazioni fratte

#### Attività 9

Risolvere l'equazione:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{6x-8} = \frac{4}{3x^2-4x} + 1$$

Tenere presente la conclusione dell'attività 6 per scrivere l'equazione nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0.  
L'equazione ha l'unica soluzione  $x = -6$ .

### C. Equazioni irrazionali

#### Attività 10

Risolvere l'equazione:

$$\sqrt{x^2 + 4} = 3x + 2$$

completando il seguente procedimento.

1. Si elevano i due membri al quadrato ottenendo:

$$\dots\dots\dots = (\dots\dots\dots)^2$$

e quindi:

$$8x^2 + 12x = 0$$

2. Si risolve l'equazione razionale ottenuta; si ha:

$$x(\dots\dots\dots) = 0$$

da cui:

$$x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = 0$$

3. Si verifica che i numeri ottenuti siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza; si ha:

$$\text{- per } x = -\frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I membro} = \sqrt{\dots\dots\dots} = \sqrt{\dots\dots\dots} = \frac{5}{2} \\ \text{II membro} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = -\frac{5}{2} \end{array} \right\} \text{ perciò } -\frac{3}{2} \text{ non è } \dots\dots\dots$$



- per  $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I membro} = \sqrt{\dots\dots\dots} = \sqrt{\dots\dots\dots} = 2 \\ \text{II membro} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = 2 \end{array} \right\} \text{ perciò } 0 \text{ è } \dots\dots\dots$$

Si conclude che l'equazione ha l'unica soluzione  $x = 0$ .

### Attività 11

Risolvere l'equazione

$$\sqrt[3]{6x^2 + 2} = x + 1 \quad (3)$$

Completando il seguente procedimento

1. Si elevano i due membri al cubo ottenendo:

$$\dots\dots\dots = (\dots\dots\dots)^3$$

e quindi:

$$\dots\dots\dots = 0$$

2. Si risolve l'equazione razionale ottenuta, scomponendo in fattori il polinomio al primo membro; si ha:

$$(\dots\dots\dots)^3 = 0$$

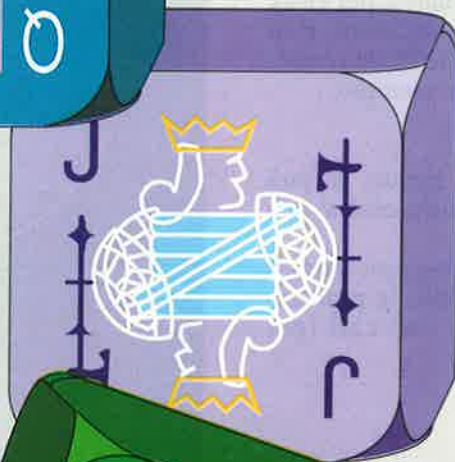
da cui:

$$x = 1 \text{ contata 3 volte}$$

Dato che si sono elevati i due membri della (3) a esponente dispari, non si sono introdotte soluzioni estranee; si conclude che l'equazione (3) irrazionale ha la soluzione:

$$x = 1$$

# PROBABILITÀ



1.

La valutazione oggettiva della probabilità

**Scheda applicativa.**

Probabilità e genetica.

La determinazione del sesso

2.

La probabilità totale

**Scheda applicativa.**

Probabilità totale e genetica.

Morbo di Cooley e microcitemia

3.

La probabilità composta

**Scheda applicativa.**

Probabilità composta e genetica.

Il daltonismo

**Attività.**

Scoprire errori nel calcolo delle probabilità

**Scheda storica.**

Le origini del calcolo delle probabilità

**Scheda informativa.**

Probabilità e proposizioni.

La formula di Bayes

4.

Le prove ripetute

5.

Le permutazioni e il fattoriale di un numero

6.

I coefficienti binomiali

**Scheda informativa.**

Il binomio di Newton e il calcolo combinatorio

7.

Altri modi di valutare la probabilità

**Scheda applicativa.**

Probabilità statistica e genetica.

Il mongolismo

**Sintesi.**

Che cosa bisogna sapere

**Attività finali.**

Che cosa bisogna saper fare

# La valutazione oggettiva della probabilità

## Situazioni di incertezza

«Compro 10 biglietti della lotteria, così è molto probabile vincere».

«Quella donna ha avuto due figlie femmine; è molto probabile che il terzo figlio sia maschio».

«La Juventus probabilmente vincerà lo scudetto». Ecco delle frasi che spesso si sentono dire; riguardano tutte delle *situazioni di incertezza*, cioè delle situazioni in cui non si sa con certezza che cosa succederà.

Di fronte a queste situazioni di incertezza viene spontaneo cercare qualche regolarità del caso, proprio per avere un aiuto nelle decisioni. E in alcune situazioni è particolarmente facile scoprire queste regolarità; ecco qualche esempio.

## Lancio di una moneta

Si lancia in aria una moneta; ricade. Si può presentare una faccia oppure l'altra, cioè si può avere testa o croce (fig. 1).

Se la moneta non è truccata, i due casi (testa o croce) sono ugualmente probabili; la probabilità  $p$  che si presenti uno dei due casi (per esempio croce) è dunque:

$$p = \frac{1}{2}$$

Quando la moneta viene lanciata più volte, viene spontaneo chiedersi: se per tre volte si è avuto sempre testa, al prossimo lancio, sarà più probabile che venga croce?

Chiaramente no: la moneta non ha memoria, non può ricordare che cosa è successo nei lanci precedenti. Perciò, a ogni lancio la probabilità che esca croce sarà sempre:

$$p = \frac{1}{2}$$

Figura 1  
Lancio di una moneta: due casi possibili



### Lancio di un dado

Si lancia un dado (fig. 2); può presentarsi con la stessa probabilità una qualunque delle sei facce. Perciò la probabilità  $p$  che si presenti una data faccia, per esempio quella con il numero 4, è:

$$p = \frac{1}{6}$$

Qual è invece la probabilità che si presenti un numero pari?

Le facce che presentano un numero pari (2 o 4 o 6) sono tre; si hanno allora 3 casi favorevoli fra 6 possibili, quindi la probabilità  $p$  è:

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Il gioco della roulette

Nel gioco della roulette (fig. 3), la pallina può fermarsi in una delle 37 vaschette contrassegnate con i numeri da 0 a 36; quindi la probabilità  $p$  che la pallina si fermi su un dato numero è:

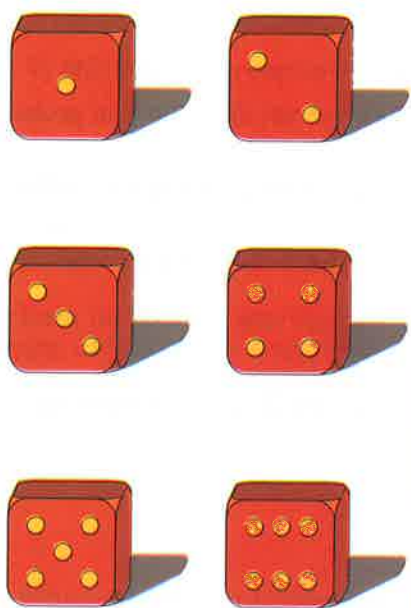
$$p = \frac{1}{37}$$

Qual è la probabilità che la pallina si fermi in una casella contrassegnata da un numero pari?

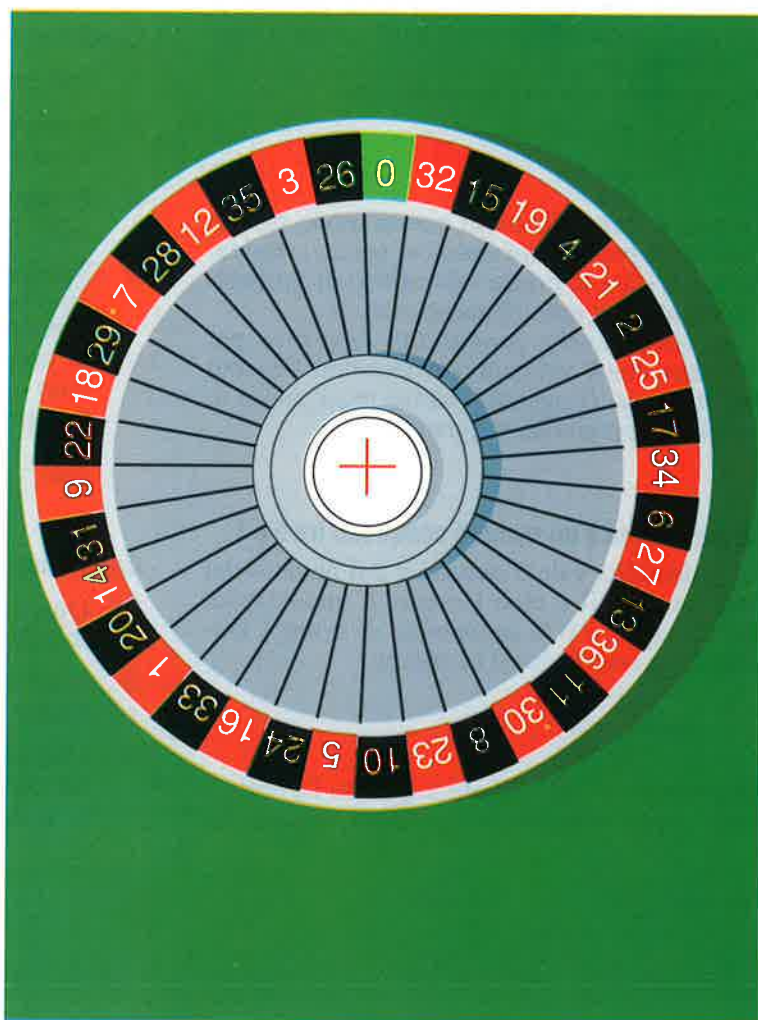
Fra i 37 numeri solo 18 sono pari; si hanno 18 casi favorevoli fra 37 possibili, quindi la probabilità  $p$  è:

$$p = \frac{18}{37}$$

**Figura 2**  
Lancio di un dado: 6 casi possibili



**Figura 3**  
La roulette: 37 casi possibili





### Valutazione oggettiva (o classica) della probabilità

Gli esempi hanno condotto a percorrere più volte lo stesso itinerario:

- si è esaminato un dato *evento* (per esempio «esce pari alla roulette»);
- si sono contati i *casi possibili* (37 nel gioco della roulette);
- si sono contati i *casi favorevoli* (18 caselle pari della roulette);
- si è valutata con un numero la *probabilità*  $p$  dell'evento, data da:

$$p = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}} \quad \text{cioè} \quad p = \frac{18}{37}$$

È chiaro che questo procedimento e le relative conclusioni sono valide solo se la roulette non è truccata: *tutti i casi dell'evento debbono essere ugualmente possibili.*

Si arriva così alla seguente conclusione: *la probabilità  $p$  di un evento è il rapporto fra il numero  $F$  dei casi favorevoli ed il numero  $N$  dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili.*

Riassumendo con una formula, si ha:

$$p = \frac{F}{N}$$

La probabilità valutata in questo modo prende il nome di *probabilità classica*, perché, storicamente, è stata la prima valutazione di probabilità espressa in termini matematici.

Viene detta anche *probabilità oggettiva* per ricordare che è valutata considerando l'evento che interessa (l'oggetto), senza tener conto di opinioni o pregiudizi soggettivi.

#### La probabilità è un numero compreso fra 0 e 1

La probabilità vale 0 quando è 0 il numero dei casi favorevoli e cioè l'evento è impossibile. Per esempio, è 0 la probabilità di avere 7 lanciando un solo dado; si ha infatti:

$$p = \frac{0}{6} = 0$$

La probabilità vale invece 1 quando l'evento è certo e perciò tutti i casi possibili sono anche

favorevoli. Per esempio vale 1 la probabilità  $p$  che, lanciando un dado, venga un numero compreso fra 1 e 6; si ha infatti:

$$p = \frac{6}{6} = 1$$

In conclusione, *la probabilità di un evento è un numero compreso fra 0 e 1; la probabilità vale 0 quando l'evento è impossibile, vale 1 quando l'evento è certo.*

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Come si trova la probabilità di un evento?
- ② Quali eventi hanno probabilità 0?
- ③ Quali eventi hanno probabilità 1?

### Comprensione

- ① Può esistere un evento con probabilità 2?
- ② Portare degli esempi di eventi con probabilità 0.
- ③ Portare degli esempi di eventi con probabilità 1.
- ④ Spiegare perché è sbagliata la seguente affermazione:  
«Quando estraggo una carta da un mazzo di carte napoletane i casi possibili sono due: esce un re oppure non esce un re; perciò la probabilità  $p$  di estrarre un re vale  $\frac{1}{2}$  ».

### Applicazioni

- ① Qual è la probabilità di avere un numero dispari lanciando un dado?
- ② Qual è la probabilità di avere un numero dispari alla roulette?
- ③ Una carta è scelta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità di estrarre un re.

## Probabilità e genetica. La determinazione del sesso

### Il cromosoma Y determina il sesso maschile

La trasmissione dei caratteri ereditari è affidata ai *cromosomi*; ci sono 46 cromosomi nel nucleo di ogni cellula umana. La fig. 1 mostra i cromosomi di una donna e quelli di un uomo:

- nelle cellule di una donna si trovano 46 cromosomi, suddivisi in 23 coppie;
- nelle cellule di un uomo la 23<sup>a</sup> coppia è formata da due cromosomi disuguali, chiamati convenzionalmente X e Y.

Ed è proprio la presenza del cromosoma Y che caratterizza, a livello cellulare, il maschio.

### Un individuo eredita metà cromosomi dalla madre e metà dal padre

Negli individui adulti sono presenti anche delle cellule particolari destinate alla riproduzione e chiamate *gameti*; sono:

- la cellula uovo nella donna;
- lo spermatozoo nell'uomo.

La differenza fondamentale fra un gamete e le altre cellule è questa: un gamete porta soltanto 23 cromosomi, uno solo per ciascuna coppia mostrata in fig. 1.

E così le cellule uovo della donna portano tutte un solo cromosoma X.

Invece, fra i milioni di spermatozoi prodotti dall'uomo, circa metà porta un solo cromosoma X, mentre l'altra metà porta un solo cromosoma Y.

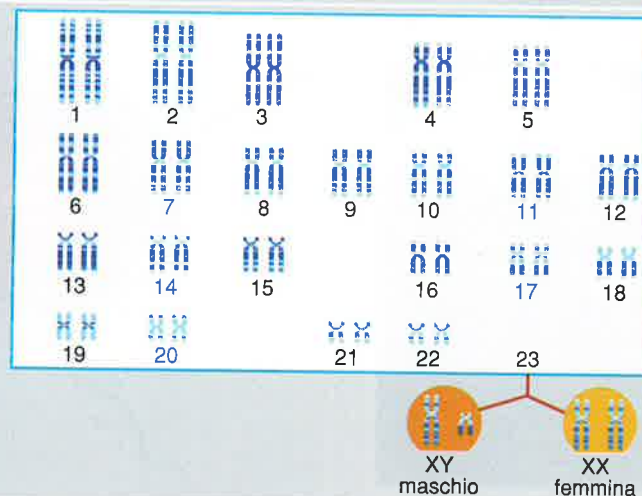


Figura 1  
Cromosomi umani

La fig. 2 mostra una cellula uovo attorniata da spermatozoi: al momento della fecondazione un solo spermatozoo si fonde con l'uovo e si forma una nuova cellula con 46 cromosomi. Inizia così la vita di un nuovo individuo, che porterà, in ogni sua cellula, 23 cromosomi della madre ed altrettanti del padre.

### Il sesso di un individuo è determinato dai cromosomi del padre

Nella fecondazione la cellula uovo può essere raggiunta o da uno spermatozoo portatore del cromosoma X o da uno portatore del cromosoma Y; si hanno perciò due casi (fig. 3):

- fecondazione con uno spermatozoo portatore del cromosoma X e quindi formazione di un individuo XX, cioè di una femmina;
- fecondazione con uno spermatozoo portatore del cromosoma Y e quindi formazione di un individuo XY, cioè di un maschio.

Ora, gli spermatozoi portatori del cromosoma Y non hanno alcun vantaggio o svantaggio rispetto agli altri, presenti in ugual numero; perciò i due precedenti casi sono ugualmente probabili.

A ogni concepimento si ha dunque:

- probabilità  $\frac{1}{2}$  di concepire un maschio;
- probabilità  $\frac{1}{2}$  di concepire una femmina;

Le considerazioni ora svolte si possono riassumere nel modo seguente:

- *il concepimento di un maschio è legato esclusivamente agli spermatozoi portatori del cromosoma Y, cioè al padre;*
- *a ogni concepimento si ha sempre probabilità  $\frac{1}{2}$  di concepire un maschio o una femmina.*

### Spunti di discussione

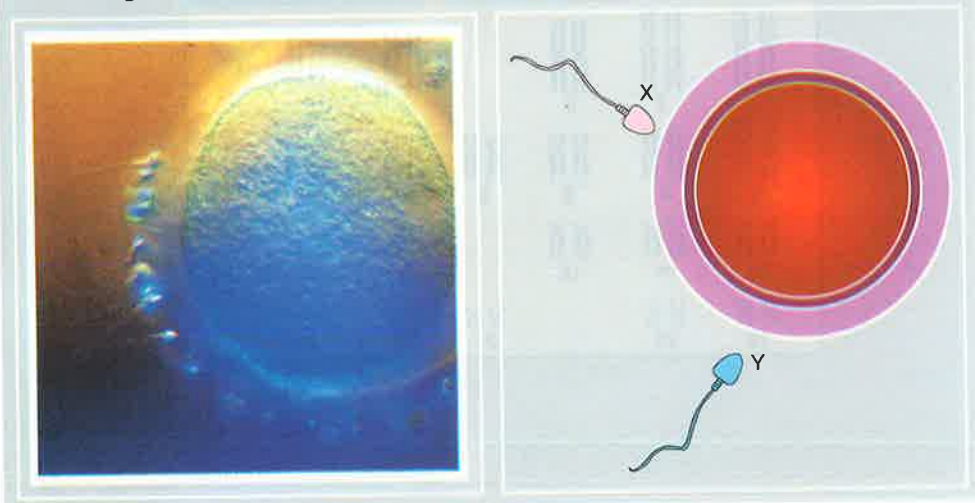
Sulla base delle considerazioni svolte in questo paragrafo commentare le seguenti frasi, ancora molto comuni:

«Quella donna non è capace di fare figli maschi»;

«Quella donna ha avuto due femmine, ora è molto probabile che il terzo figlio sia maschio».

**Figura 2 (a sinistra)**  
La cellula uovo  
e gli spermatozoi

**Figura 3 (destra)**  
È ugualmente  
probabile  
la fecondazione  
con uno spermatozoo  
portatore di X o di Y



# La probabilità totale

## Lancio di due monete

Si lanciano due monete e si valutano i casi possibili (fig. 1); indicando croce con C e testa con T, si può avere:

TT TC CT CC

Si hanno quindi 4 casi ugualmente possibili; la probabilità  $p$  che si verifichi 1 fra questi 4 casi è:

$$p = \frac{1}{4}$$

Se però non interessa quale delle due monete dà testa e quale croce, i casi TC e CT possono essere considerati uguali; così la probabilità  $q$

che si presentino TC o CT è data da:

$$q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

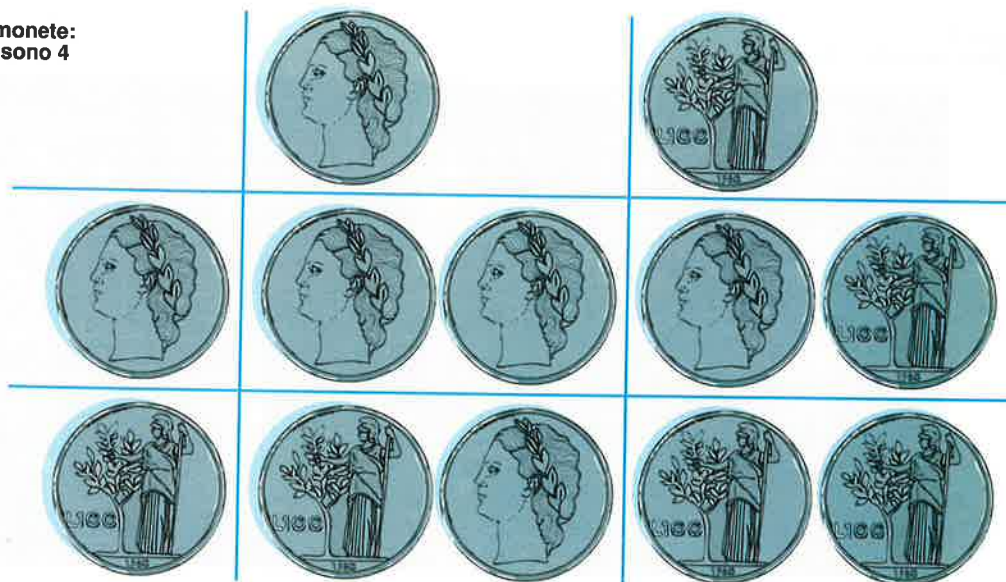
In conclusione, lanciando due monete si può avere:

TT con probabilità  $p = \frac{1}{4}$

TC o CT con probabilità  $q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

CC con probabilità  $r = \frac{1}{4}$

**Figura 1**  
Lancio di due monete:  
i casi possibili sono 4





## Una combinazione al gioco della roulette

Nel gioco della roulette (fig. 2) è previsto di poter puntare contemporaneamente sul fatto che esca un numero pari e sul fatto che esca un numero nero; in tal caso si vince se esce un numero nero o pari.

Come valutare la probabilità che esca un numero nero o pari?

Si può ripetere un ragionamento analogo a quello seguito per il lancio di due monete:

- i numeri neri sono 18 su 37, perciò nero esce con probabilità:

$$q = \frac{18}{37}$$

- i numeri pari sono 18 su 37, perciò pari esce con probabilità:

$$r = \frac{18}{37}$$

- i numeri pari o neri dovrebbero essere 18+18 su 37, perciò si dovrebbe avere un numero pari o nero con probabilità:

$$p = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} = \frac{36}{37} \approx 0,97$$

Si osserva subito che la probabilità ottenuta è molto vicina a 1 e perciò è quasi certo che si otterrà un numero nero o pari.

Questo risultato contrasta fortemente con l'esperienza: non è vero che i numeri neri o pari escano quasi sempre.

Per capire meglio la situazione conviene valersi di una rappresentazione insiemistica: il dia-

gramma di fig. 3, dove è disegnato l'insieme N dei numeri neri e l'insieme P dei numeri pari. Si vede subito che questi due insiemi hanno degli elementi comuni: i dieci numeri che sono neri e pari.

Si capisce allora che si è commesso un errore nel calcolare la probabilità di avere un numero nero o pari: i dieci numeri che sono neri e pari sono stati contati due volte, una volta fra i neri e un'altra volta fra i pari.

Perciò la probabilità  $p$  di avere un numero nero o pari è data da:

$$p = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{10}{37} = \frac{26}{37}$$

dove:

$\frac{18}{37}$  è la probabilità  $q$  di avere un numero nero;

$\frac{18}{37}$  è la probabilità  $r$  di avere un numero pari;

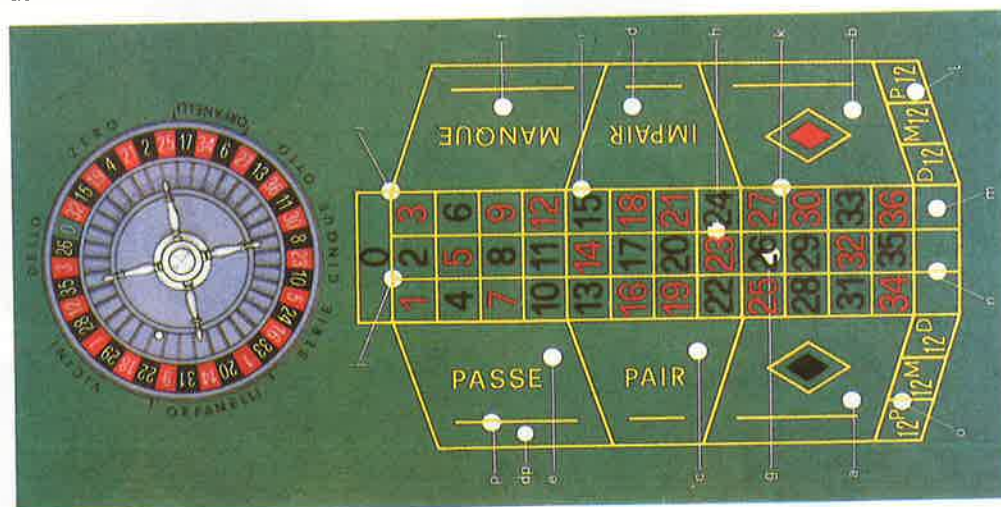
$\frac{10}{37}$  è la probabilità  $s$  di avere un numero nero e pari.

## Probabilità totale

Il ragionamento seguito si può ripetere per valutare la probabilità che si verifichi almeno uno fra due eventi di probabilità note, scegliendo i seguenti simboli:

- $q$  indica la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r$  indica la probabilità che si verifichi il secondo evento;

Figura 2  
Il gioco della roulette



- $s$  indica la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi;
  - $p$  indica la *probabilità totale*, cioè la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi.
- Si trova così la seguente regola generale:

$$p = q + r - s$$

### Eventi compatibili e incompatibili

La regola generale indicata prima è legata all'esempio della combinazione nero o pari al gioco della roulette. In quel caso i due eventi considerati, e cioè:

- esce un numero nero
- esce un numero pari

presentano una caratteristica particolare: il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro, cioè sono *compatibili*.

*Il termine compatibili indica due eventi che possono verificarsi contemporaneamente.*

Ma non tutti gli eventi sono compatibili; per esempio nel lancio di due monete i due eventi TC e CT *non* possono verificarsi contemporaneamente, cioè sono *incompatibili*.

*Il termine incompatibili indica due eventi che non possono verificarsi contemporaneamente.*

### La probabilità totale di eventi incompatibili

La probabilità totale  $p$  nel caso di due eventi incompatibili, di probabilità  $q$  e  $r$ , si può trovare con il seguente ragionamento:

- vale sempre la regola generale:

$$p = q + r - s$$

- è impossibile che i due eventi si verifichino contemporaneamente, perciò si ha:

$$s = 0$$

In definitiva si trova:

$$p = q + r$$

Si conclude dunque che, *nel caso di due eventi incompatibili, la probabilità totale è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi.*

Proprio per questo all'inizio del paragrafo si è trovato che, nel lancio di due monete, la probabilità totale  $p$  che si verifichi TC o CT è data da:

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Infatti in tale caso risulta che :

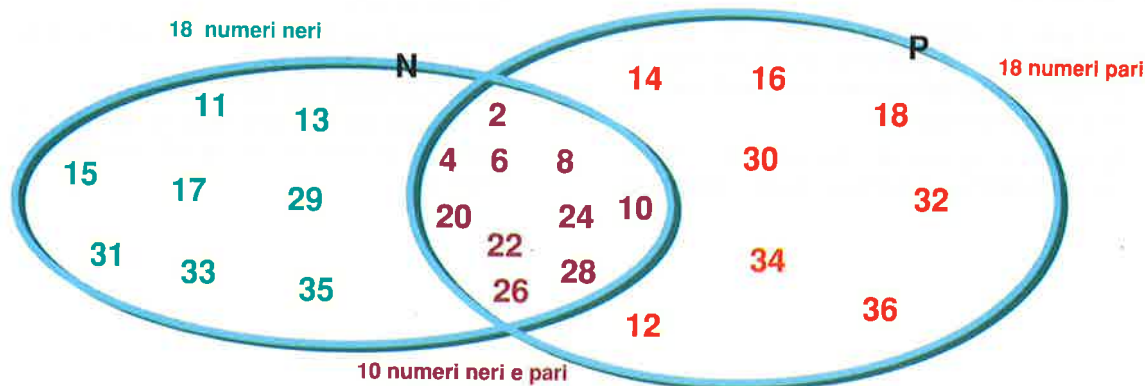
- l'evento TC ha probabilità  $q = \frac{1}{4}$ ;
- l'evento CT ha probabilità  $r = \frac{1}{4}$ ;
- i due eventi sono incompatibili.

### Calcolare la probabilità che un evento non si verifichi

È interessante ora applicare i risultati precedenti ad una particolare coppia di eventi incompatibili, come la seguente:

- lanciando un dado esce 3;
- lanciando un dado *non* esce 3.

Figura 3  
Insieme N dei numeri neri e insieme P dei numeri pari



Questa coppia di eventi presenta una particolarità: è sicuro che almeno uno dei due eventi si verifica. Perciò l'evento «Esce 3 o non esce 3» è un evento certo, cioè ha probabilità  $p = 1$ . Ora, sulla formula:

$$p = q + r$$

si hanno le seguenti informazioni:

- la probabilità che esca 3 vale  $q = \frac{1}{6}$
- la probabilità  $p$  che esca 3 o non esca 3 vale 1.

Si ha quindi:

$$1 = \frac{1}{6} + r \quad \text{da cui} \quad r = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

I ragionamenti ora seguiti hanno carattere generale. Indicate:

- con  $q$  la probabilità che un evento si verifichi;
- con  $r$  la probabilità che lo stesso evento *non* si verifichi;

risulta sempre:

$$q + r = 1$$

da cui si può anche ricavare:

$$r = 1 - q$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Esporre la regola per calcolare la probabilità totale di due eventi.
- ② Esporre la regola per calcolare la probabilità che un dato evento non si verifichi.

### Comprensione

- ① Spiegare il significato del termine «eventi compatibili» e portare degli esempi di eventi compatibili diversi da quelli indicati in questo paragrafo.
- ② Spiegare il significato del termine «eventi incompatibili» e portare degli esempi di

eventi incompatibili diversi da quelli indicati in questo paragrafo.

- ③ Spiegare il significato del termine «probabilità totale».
- ④ Spiegare perché, per determinare la probabilità totale di due eventi, si può dare una sola regola valida sia per eventi compatibili che per eventi incompatibili.
- ⑤ Spiegare perché, solo nel caso di due eventi incompatibili, la probabilità totale è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi.
- ⑥ Spiegare perché, data la probabilità  $q$  che un evento si verifichi, la probabilità  $r$  che lo stesso evento non si verifichi è sempre data da  $r = 1 - q$ .

### Applicazioni

- ① Si lanciano tre monete e si considerano i seguenti due eventi:
  - escono tre teste (TTT);
  - escono tre croci (CCC).
 I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
 Quanto vale la probabilità che escano tre teste o tre croci?
- ② Nel gioco della roulette si considerano i seguenti eventi:
  - esce un numero dispari;
  - esce un numero rosso.
 I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
 Quanto vale la probabilità che esca un numero dispari o rosso?
- ③ Si prende una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate e si considerano i seguenti eventi:
  - si prende un re;
  - si prende una carta di denari.
 Dire se i due eventi sono compatibili o incompatibili.  
 Valutare le probabilità dei seguenti eventi:
  - non si prende un re;
  - non si prende una carta di denari;
  - si prende un re o una carta di denari;
  - non si prende né un re né una carta di denari.



## Probabilità totale e genetica. Morbo di Cooley e microcitemia

### Il morbo di Cooley

Il morbo di Cooley è una grave forma di anemia; prende il nome dal medico americano Thomas Cooley (1871-1945), che ne ha messo in evidenza i caratteri del tutto diversi da altre forme più comuni di anemia.

Solo recentemente, intorno al 1960, è stata fatta piena luce su questa malattia, verificando che un bambino affetto dal morbo di Cooley porta l'indicazione della malattia nel nucleo di tutte le sue cellule, e precisamente su ambedue i cromosomi uguali di una stessa coppia.

Una situazione genetica di questo tipo si indica con  $mm$ , mentre la situazione geneticamente sana si indica con  $MM$ .

### La microcitemia

C'è un'ultima situazione genetica: il caso in cui l'indicazione della malattia è presente su un solo cromosoma, situazione indicata con  $Mm$ .

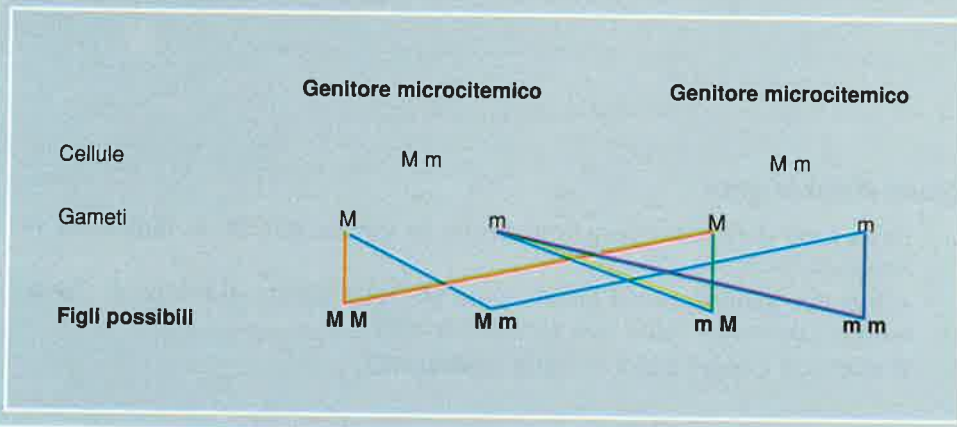
Le persone di questo tipo non avvertono alcun disturbo; solo un'apposita analisi del sangue rivela che i globuli rossi sono più piccoli del normale.

Proprio per questo a tale anomalia ereditaria è stato dato il nome di *microcitemia*, parola di origine greca che significa «cellule del sangue più piccole».

Gli individui affetti da microcitemia sono sani, ma due genitori microcitemici possono generare dei figli affetti da morbo di Cooley.

### I figli di due genitori microcitemici

Lo schema seguente aiuta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di due genitori microcitemici.





I casi possibili per i figli sono dunque 4, e ciascuno si verifica con probabilità  $\frac{1}{4}$ ; ma è chiaro che i due casi Mm e mM sono equivalenti.

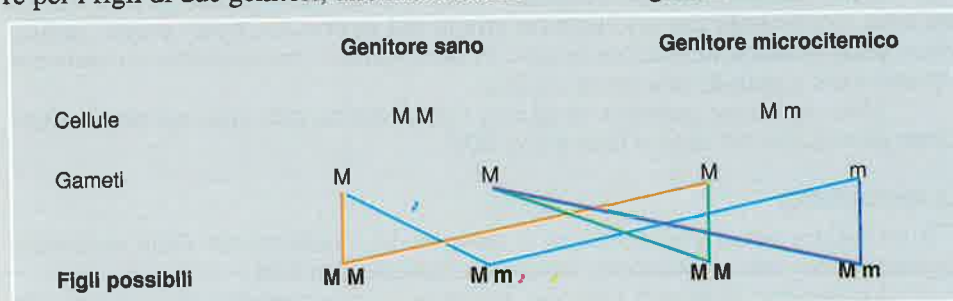
Si trovano dunque le seguenti situazioni possibili:

- MM, cioè figlio geneticamente sano, con probabilità  $\frac{1}{4}$ ;
- Mm = mM, cioè figlio microcitemico, con probabilità  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ;
- mm, cioè figlio malato di morbo di Cooley, con probabilità  $\frac{1}{4}$ .

In conclusione, a ogni concepimento due genitori microcitemici hanno probabilità  $\frac{1}{4}$  di generare un figlio malato di morbo di Cooley.

### I figli di un genitore microcitemico e di uno geneticamente sano

Uno schema aiuta ancora una volta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di due genitori, uno microcitemico ed uno geneticamente sano.



Ora le situazioni possibili sono solo due: ,

- MM, cioè figlio geneticamente sano, con probabilità  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ;
- Mm = mM, cioè figlio microcitemico, con probabilità  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

In questo caso non si avrà mai un figlio malato di morbo di Cooley, ma esiste probabilità  $\frac{1}{2}$  di generare un figlio microcitemico.

### Spunti di discussione

- Sulla base delle considerazioni svolte in questa scheda, commentare la seguente frase:  
«Quei due genitori ormai hanno avuto un figlio malato di morbo di Cooley, quindi il prossimo figlio sarà certamente sano».
- Il morbo di Cooley è una malattia contagiosa?

# La probabilità composta

## Probabilità condizionata

Nel gioco della roulette si può calcolare la probabilità che esca un numero pari in due situazioni diverse:

- prima di iniziare il gioco, cioè prima di lanciare la pallina;
  - dopo aver saputo che è uscito un numero nero.
- a. Prima di lanciare la pallina, si ha un'unica informazione: i numeri della roulette sono 37, di cui 18 pari. Perciò la probabilità  $s$  che esca un numero pari è:

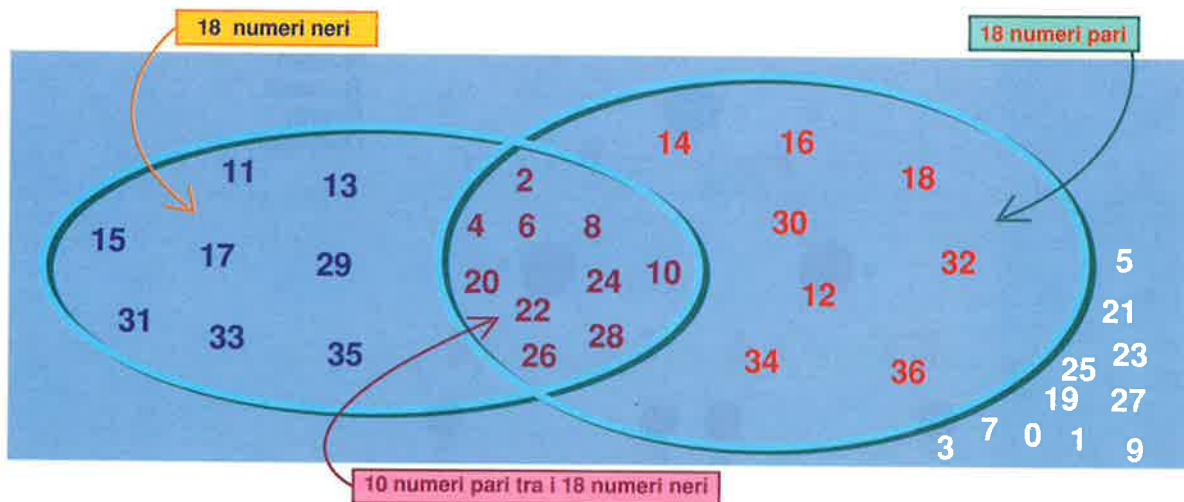
$$s = \frac{18}{37} \approx 0,48$$

- b. Aver saputo che è uscito un numero nero cambia le informazioni a disposizione: fra i 37 numeri della roulette, 18 sono neri e, fra questi, 10 sono pari (fig. 1). Dunque, dopo aver saputo che è uscito un numero nero, rimangono solo 18 casi possibili, fra cui 10 sono favorevoli; perciò la probabilità  $r$  che un numero sia pari, *condizionata* (o subordinata) al fatto che è uscito un numero nero, è data da:

$$r = \frac{10}{18} \approx 0,56$$

Più in generale, la frase *probabilità di un evento A, condizionata dal verificarsi di un evento*

Figura 1  
I numeri della roulette



B, indica la probabilità che si verifichi A, dopo aver saputo che si è verificato B.

### Eventi dipendenti

Le precedenti considerazioni suggeriscono un'osservazione: le probabilità  $s$  e  $r$  sono diverse, cioè sapere che si è verificato l'evento «esce un numero nero» modifica la probabilità dell'evento «esce un numero pari».

I due eventi «esce un numero nero» e «esce un numero pari» si dicono allora *dipendenti*.

Più in generale *due eventi si dicono dipendenti quando il verificarsi dell'uno modifica la probabilità dell'altro*.

### Probabilità composta di eventi dipendenti

Le considerazioni precedenti portano a risolvere il seguente problema: valutare la probabilità che, nel gioco della roulette, esca un numero nero e pari.

Per risolvere questo problema conviene aiutarci con un diagramma ad albero come quello di fig. 2; il diagramma suggerisce il seguente procedimento:

1. si valuta la probabilità  $q$  che esca un numero nero; si ha:

$$q = \frac{18}{37}$$

2. si valuta la probabilità  $r$  che il numero sia pari, subordinata al fatto che è nero; si ha:

$$r = \frac{10}{18}$$

3. si calcola la probabilità  $p$  che il numero sia nero e pari; per questo occorre calcolare i  $\frac{10}{18}$  di  $\frac{18}{37}$ .

Si ha dunque:

$$p = \frac{18}{37} \cdot \frac{10}{18} = \frac{10}{37}$$

In generale, se:

- $q$  indica la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r$  indica la probabilità che si verifichi il secondo evento, subordinata al fatto che si è già verificato il primo;
- $p$  indica la *probabilità composta*, cioè la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi;

si trova la seguente regola:

$$p = q \cdot r$$

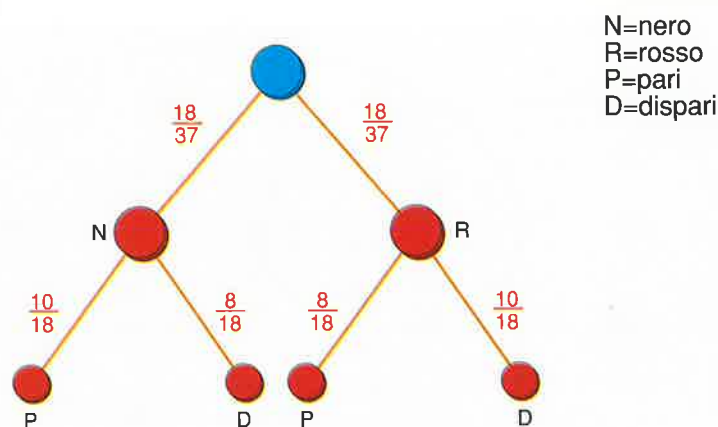
### Eventi indipendenti

Non tutti gli eventi sono dipendenti; per esempio nel lancio di due monete il fatto che una moneta mostri testa T non modifica la probabilità che anche l'altra moneta mostri testa T.

Si ha quindi che:

- $q = \frac{1}{2}$  è la probabilità che la prima moneta presenti testa T;

Figura 2  
Diagramma ad albero per valutare la probabilità composta



- $s = \frac{1}{2}$  è la probabilità che la seconda moneta presenti testa T, senza sapere che la prima moneta presenta testa;
- $r = \frac{1}{2}$  è la probabilità che la seconda moneta presenti testa T, dopo aver saputo che la prima moneta presenta testa.

Si trova dunque che le probabilità  $s$  e  $r$  sono uguali, cioè sapere che si è verificato l'evento «la prima moneta presenta testa» non modifica la probabilità dell'evento «la seconda moneta presenta testa».

In questo caso i due eventi si dicono *indipendenti*.

Più in generale *due eventi si dicono indipendenti quando il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità dell'altro*.

### Probabilità composta di eventi indipendenti

In generale, se due eventi di probabilità  $q$  e  $s$  sono indipendenti, la probabilità  $s$  del secondo evento rimane inalterata quando si sa che il primo evento si è verificato; si ha cioè:

$$r = s$$

Perciò, per trovare la probabilità composta di due eventi indipendenti si può applicare ancora la regola:

$$p = q \cdot r$$

dove:

- $q$  indica la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r = s$  indica la probabilità che si verifichi il secondo evento;
- $p$  indica la probabilità che si verifichi il primo e il secondo evento.

Si ha dunque che: *nel caso di due eventi indipendenti la probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi*.

Proprio per questo si trova che, lanciando due monete, la probabilità  $p$  di avere TT, cioè testa T e testa T, è data da:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Spiegare il significato del termine «probabilità subordinata».
- ② Spiegare il significato del termine «probabilità composta».
- ③ Esporre la regola per calcolare la probabilità composta di due eventi.

### Comprensione

- ① Spiegare il significato del termine «eventi dipendenti» e portare degli esempi di eventi dipendenti, diversi da quelli indicati in questo paragrafo.
- ② Spiegare il significato del termine «eventi indipendenti» e portare degli esempi di eventi indipendenti, diversi da quelli indicati in questo paragrafo.
- ③ Spiegare perché, per determinare la probabilità composta di due eventi, si può dare una sola regola valida sia per eventi dipendenti che per eventi indipendenti.
- ④ Spiegare perché, solo nel caso di due eventi indipendenti, la probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

### Applicazioni

- ① Nel gioco della roulette si considerano i seguenti eventi:
  - esce un numero dispari;
  - esce un numero rosso.
 I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità che esca un numero nero e rosso?
- ② Si lanciano due dadi e si considerano i seguenti eventi:
  - esce 1 sul primo dado;
  - esce 1 sul secondo dado.
 I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità che esca 1 sul primo e sul secondo dado?
- ③ Si prende una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate e si considerano i seguenti eventi:
  - si prende un re;
  - si prende una carta di denari.
 I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità di prendere un re di denari?



## Probabilità composta e genetica. Il daltonismo

### Il daltonismo

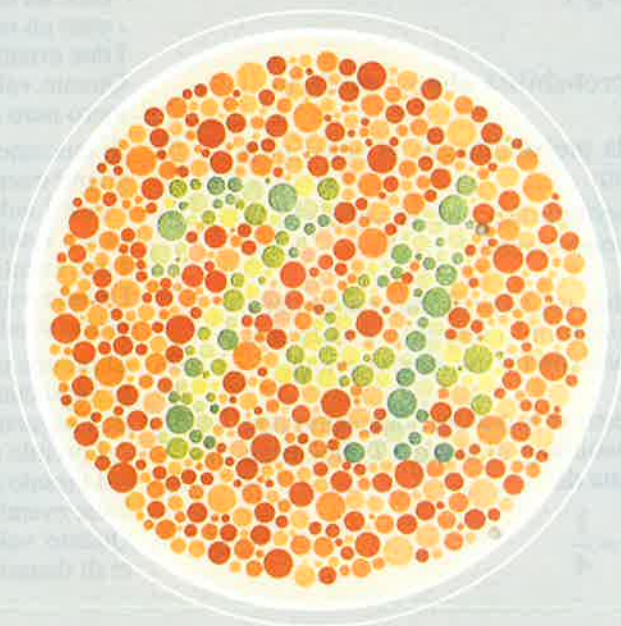
Per capire che cos'è il daltonismo, si può osservare la fig. 1: la maggior parte delle persone riesce a distinguere, dal fondo, un numero di colore diverso, perché nell'occhio sono ugualmente sviluppate le terminazioni nervose sensibili ai vari colori. Invece, un daltonico non riesce a distinguere il numero dal fondo, perché nel suo occhio sono inattive alcune terminazioni nervose.

Studi abbastanza recenti hanno portato a concludere che la caratteristica «attività delle terminazioni nervose sensibili ad un dato colore» è ereditaria e si trova sul cromosoma X (cfr. anche la scheda sulla determinazione genetica del sesso, p. 461). Si hanno perciò situazioni differenti per i maschi e per le femmine.

Infatti un maschio ha la coppia di cromosomi XY ed è daltonico se sull'unico cromosoma X manca la caratteristica relativa alla percezione dei colori; questa situazione cromosomica si può indicare con  $X^Y$ .

Invece, per una femmina che ha la coppia di cromosomi XX, è sufficiente avere la caratteristica su un solo cromosoma X per percepire normalmente i colori.

**Figura 1**  
Un test per riconoscere  
se si è daltonici



Quindi una donna è daltonica solo se ha i cromosomi  $\overset{*}{X}\overset{*}{X}$ . Nella situazione  $\overset{*}{X}X$  non è daltonica, ma portatrice sana del daltonismo.

Si ha dunque che:

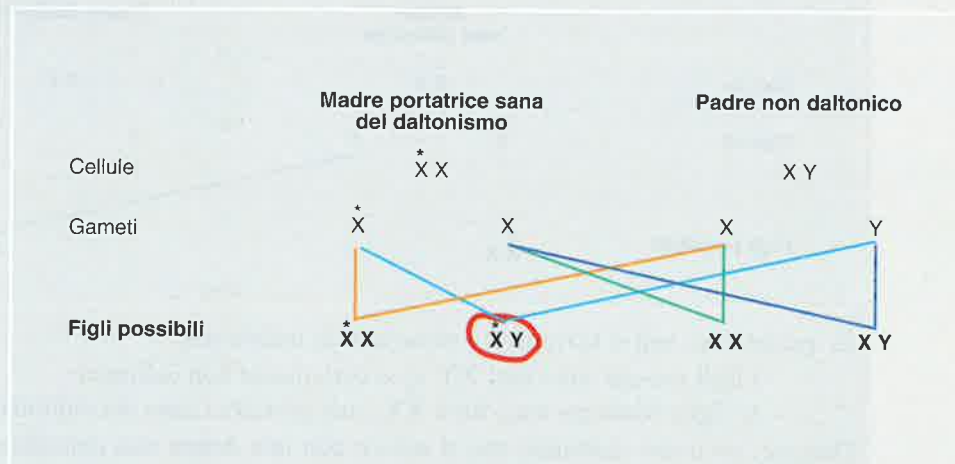
- il daltonismo modifica la percezione dei colori;
- il daltonismo è un'anomalia ereditaria, trasmessa attraverso il cromosoma X.

Le possibili situazioni genetiche sono:

$XY$	maschio sano;
$\overset{*}{X}Y$	maschio daltonico;
$XX$	femmina sana;
$\overset{*}{X}X$	femmina sana, ma portatrice del daltonismo;
$\overset{*}{X}\overset{*}{X}$	femmina daltonica.

### Come si trasmette il daltonismo

Lo schema seguente aiuta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di una portatrice sana del daltonismo e di uomo non daltonico.



Nello schema si è messo in evidenza il caso del figlio daltonico: *solo un figlio maschio può essere daltonico.*

### Eventi dipendenti nella trasmissione del daltonismo

La precedente coppia di genitori potrebbe valutare la probabilità di avere un figlio sano in due situazioni diverse:

- a. prima di sapere il sesso del figlio; in tal caso si hanno 4 casi possibili, fra cui 3 favorevoli, e perciò si trova:

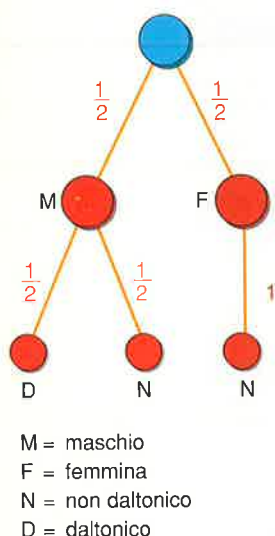
$$s = \frac{3}{4} = 0,75$$

- b. dopo aver saputo che il figlio è maschio; così sono rimasti 2 soli casi possibili, di cui 1 favorevole, e perciò la probabilità  $r$  di avere un figlio sano, *subordinata* al fatto che il figlio sia maschio è:

$$r = \frac{1}{2} = 0,5$$

Si ritrova così che i due eventi «avere un figlio maschio» e «avere un figlio non daltonico» sono *dipendenti*, perché sapere che il figlio è maschio altera la probabilità che il figlio non sia daltonico.

**Figura 2**  
Diagramma ad albero per esaminare la trasmissione ereditaria del daltonismo



### Probabilità composta per esaminare la trasmissione del daltonismo

Per valutare la probabilità  $p$  che un figlio sia maschio e non daltonico ci si può basare sul diagramma ad albero di fig. 2; si trova:

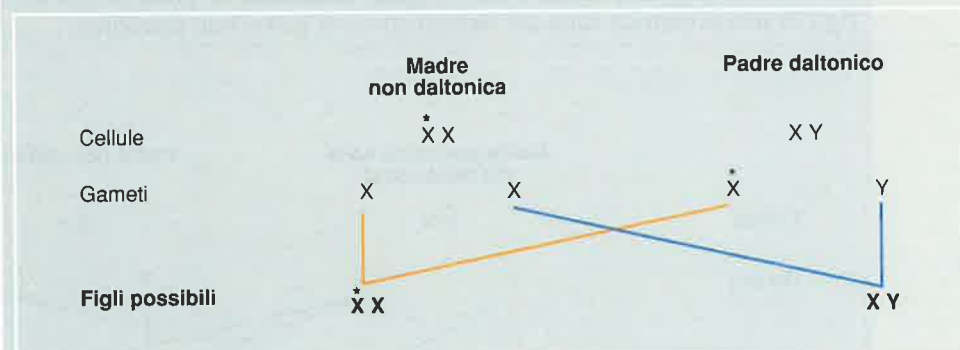
$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

perché  $\frac{1}{2}$  è la probabilità che il figlio sia maschio e  $\frac{1}{2}$  è anche la probabilità che il figlio maschio sia anche non daltonico.

### Il daltonismo si trasmette «per via di donna»

Altre situazioni interessanti da esaminare sono quelle che si presentano per i figli di un daltonico con una donna sana, anche geneticamente.

Ecco lo schema che mostra le varie situazioni possibili.



In questo caso non si trovano più situazioni di incertezza:

- i figli maschi sono tutti  $XY$ , cioè certamente non daltonici;
- le figlie femmine sono tutte  $\bar{X}X$ , cioè portatrici sane del daltonismo.

Dunque, un uomo daltonico che si unisce con una donna non daltonica non trasmette la sua anomalia ai figli; ma il daltonismo può ricomparire nei nipoti maschi dell'uomo daltonico, trasmesso da una sua figlia. Per questo si dice che il daltonismo si trasmette «per via di donna».

### Altre anomalie che si trasmettono «per via di donna»

Gli stessi ragionamenti seguiti per la trasmissione del daltonismo valgono anche nel caso di altre malattie trasmesse attraverso il cromosoma X. Ecco altri due esempi:

- l'*emofilia*, una malattia per cui è notevolmente ritardata la coagulazione del sangue;
- il *favismo*, che determina devastanti distruzioni dei globuli rossi del sangue, come reazione alle piante di fava (da cui il nome).

L'emofilia è stata, fino alla fine del secolo scorso, una malattia molto diffusa presso alcune famiglie reali (fra cui i Borboni di Spagna e i Romanov di Russia), in cui, per motivi dinastici, erano frequenti i matrimoni fra consanguinei.

Il favismo è ancora molto comune in Sardegna. Favismo e microcitemia (di cui si parla nella scheda di p. 467), si trovano su cromosomi differenti; tuttavia sono piuttosto frequenti, soprattutto in Sardegna, i maschi affetti sia dalla microcitemia che dal favismo.

# Scoprire errori nel calcolo delle probabilità

## Sintesi di alcune regole fondamentali nel calcolo delle probabilità

Nel calcolo delle probabilità vengono esaminate le situazioni di incertezza basandosi su poche regole, riassunte qui sotto.

I. La **probabilità**  $p$  di un evento è data da:

$$p = \frac{F}{N}$$

dove  $F$  è il numero dei casi favorevoli e  $N$  il numero dei casi possibili, *purché tutti i casi siano ugualmente probabili.*

II. La **probabilità totale**  $p$  che si verifichi almeno uno di due eventi di probabilità  $q$  e  $r$  è data da:

$$p = q + r - s$$

dove  $s$  è la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi.

III. La **probabilità**  $p$  che *non si verifichi* un evento di probabilità  $q$  è data da:

$$p = 1 - q$$

IV. La **probabilità composta**  $p$  che si verifichino due eventi è data da:

$$p = q \cdot r$$

dove  $q$  è la probabilità del primo evento ed  $r$  è la probabilità che si verifichi il secondo evento, dopo che si è verificato il primo.

## Un modo errato di esaminare il lancio di una moneta ripetuto due volte

Le regole richiamate prima sembrano semplici da ricordare e facili da applicare, eppure le situazioni di incertezza, spesso varie e complicate, portano talvolta a sbagliare.

Ma non è solo lo studente inesperto a sbagliare; ci sono stati gravi errori commessi anche da famosi scienziati. Un esempio di errore clamoroso è dovuto a Jean d'Alembert, scienziato francese vissuto nel Settecento (vedi anche la scheda storica a p. 478); ecco che cosa sosteneva d'Alembert:

«Lanciando una moneta due volte, può venire testa al primo lancio, testa al secondo lancio, o testa in nessuno dei due lanci; perciò la probabilità che venga testa almeno una volta è  $\frac{2}{3}$  perché ci sono 2 casi favorevoli fra 3 possibili».



Il ragionamento deve avere qualcosa di sbagliato; basta esaminare la fig. 1 per rendersene conto: i casi possibili sono 4 e i casi favorevoli sono 3, dato che in 3 casi si presenta testa almeno una volta.

Convienne allora esaminare il problema seguendo le regole del calcolo delle probabilità; così si arriverà anche a scoprire l'errore di d'Alembert.

### Due modi corretti di esaminare il lancio di una moneta ripetuto due volte

Il problema si può analizzare in due modi, che vengono schematizzati qui sotto.

#### Primo metodo

L'evento «su due lanci esce testa almeno una volta» si può descrivere più chiaramente nel modo seguente: «esce testa al primo lancio o al secondo lancio». Si hanno dunque i seguenti due eventi:

- «esce testa al primo lancio»;
- «esce testa al secondo lancio».

Bisogna calcolare la *probabilità totale* che si verifichi almeno uno dei due eventi.

Il procedimento si può allora organizzare nel modo seguente:

- si valuta la probabilità  $q$  di avere testa T al primo lancio:

$$q = \dots\dots\dots$$

- si valuta la probabilità  $r$  di avere testa T al secondo lancio:

$$r = \dots\dots\dots$$

- si valuta la probabilità  $s$  di avere testa T al primo e al secondo lancio:

$$s = \dots\dots\dots$$

- si applica la regola della probabilità totale:

$$p = q + r - s$$

Si ottiene:

$$p = \dots\dots\dots = \frac{3}{4}$$

**Figura 1**  
Casi possibili quando  
si lancia una moneta  
due volte



### Secondo metodo

Il secondo metodo è basato sulla seguente osservazione: dire «si presenta testa almeno una volta» equivale a dire «non si verifica il caso CC, cioè due volte croce».

Si procede allora nel modo seguente:

- si calcola la probabilità  $q$  di avere croce C al primo lancio:

$$q = \dots\dots\dots$$

- si calcola la probabilità  $r$  di avere croce C al secondo lancio:

$$r = \dots\dots\dots$$

- si calcola la probabilità  $s$  di avere croce C al primo e al secondo lancio:

$$s = \dots\dots\dots$$

- si calcola la probabilità che **non** si verifichi CC, data da:

$$p = 1 - s$$

Si ottiene:

$$p = \dots\dots\dots = \frac{3}{4}$$

### Si scopre l'errore commesso all'inizio

Ora è facile scoprire l'errore di d'Alembert:

- l'evento «esce testa al primo lancio» ha probabilità  $q = \dots\dots\dots$
- l'evento «esce testa al secondo lancio» ha probabilità  $r = \dots\dots\dots$
- l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio», cioè «esce due volte croce», ha probabilità  $s = \dots\dots\dots$

Il procedimento di d'Alembert era errato per due motivi:

- a. l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio» è un evento composto di due eventi più semplici, perciò va analizzato applicando la *probabilità composta*;
- b. analizzando correttamente l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio», si trova che i tre casi indicati da d'Alembert **non** sono ugualmente probabili e perciò *non si può applicare la formula*:

$$p = \frac{F}{N}$$

### Come applicare correttamente il calcolo delle probabilità

Dall'esame di questo problema si possono trarre due indicazioni per applicare correttamente il calcolo delle probabilità.

- I. Esaminare attentamente l'evento assegnato, per scoprire se è composto di altri eventi più semplici.
- II. Applicare la formula

$$p = \frac{F}{N}$$

solo quando si sono individuati  $N$  casi tutti ugualmente probabili.

# Le origini del calcolo delle probabilità

## Nel Trecento le società di assicurazione stimolano gli studi sulla probabilità

Il trasporto di merci via mare è antico quanto l'uomo; risale addirittura alla preistoria.

Ma i lunghi viaggi fra Oriente e Occidente cominciano ad organizzarsi solo quando, dopo l'anno 1000, la vecchia Europa si risveglia dal lungo sonno del Medioevo: le Crociate fanno conoscere nuovi popoli, nuove terre, nuove ricchezze. E sono proprio le ricchezze che attirano l'interesse dei commercianti: pietre preziose, tappeti, stoffe, spezie sono le merci da trasportare via mare (fig. 1).

Però un trasporto via mare presenta sempre delle incognite: il pericolo più grande è quello di un naufragio. La compagnia marittima a cui viene ordinata della merce preziosa da portare dall'Oriente deve chiedere al mercante europeo una grossa somma per il trasporto; d'altra parte il rischio di perdita durante tutti questi viaggi è sempre molto forte.

Sorgono allora, nel XIV secolo, le prime *società di assicurazione*; e sorgono proprio in Italia perché le città marinare italiane (Venezia, Genova, Pisa) erano alla testa della navigazione e del traffico europeo. Queste società d'assicu-

**Figura 1**  
Navi e mercanti in un  
porto spagnolo (incisione  
cinquecentesca)





razione chiedevano percentuali variabili dal 12 al 15% del valore della merce se si trattava di viaggi via mare, mentre per i trasporti via terra o via fiume la percentuale variava dal 6 all'8%.

È chiaro che le compagnie d'assicurazione dovevano valutare nel modo più preciso possibile la *probabilità di un incidente di viaggio* per decidere poi, su questa base, un'adeguata tariffa. Si capisce anche che, tenendo le tariffe più basse, si avevano più clienti, e questo era un fatto positivo; ma, d'altra parte, un maggior numero di clienti portava, in caso di disastro, a dover risarcire una maggior quantità di merci perdute.

Furono proprio dei problemi di tipo assicurativo a stimolare gli studi nel campo della probabilità. Ma, quando si cercò di matematizzare questi problemi, ci si rese conto dell'enorme difficoltà di tradurre in formule il rischio di incidenti che sono determinati da tante cause diverse: le condizioni del mare, la pirateria, la più o meno grande abilità del comandante... Ogni viaggio era una sfida al caso.

Come scoprire le regole che governano il caso?

### Nel Cinquecento lo studio dei giochi d'azzardo porta Cardano ad esprimere la probabilità con un numero

I problemi posti dalle compagnie di assicurazione spingono dunque i matematici a cercare le leggi che regolano il caso, ma a partire da fenomeni meno complicati; per questo si studiano i *giochi d'azzardo*, quei giochi che, da tempi lontani, avevano appassionato gli uomini di tutti i paesi (fig. 2).

Qual è la probabilità che, lanciando due dadi, si ottenga il numero 8? È più conveniente puntare sull'8 o sul 10?

È proprio la considerazione del lancio di due dadi, e più in generale dei giochi d'azzardo, che porta Gerolamo Cardano (fig. 3), matematico e medico vissuto nel Cinquecento, ad esprimere con un numero la probabilità di un evento.

Accade così che il gioco dei dadi diventa un formidabile strumento di ricerca in campo matematico.

Da problemi seri – quelli delle assicurazioni – si passa al gioco per studiare le regolarità del caso ed avere una certa sicurezza nell'arte del prevedere.

Figura 2  
Dadi etruschi provenienti da Palestrina

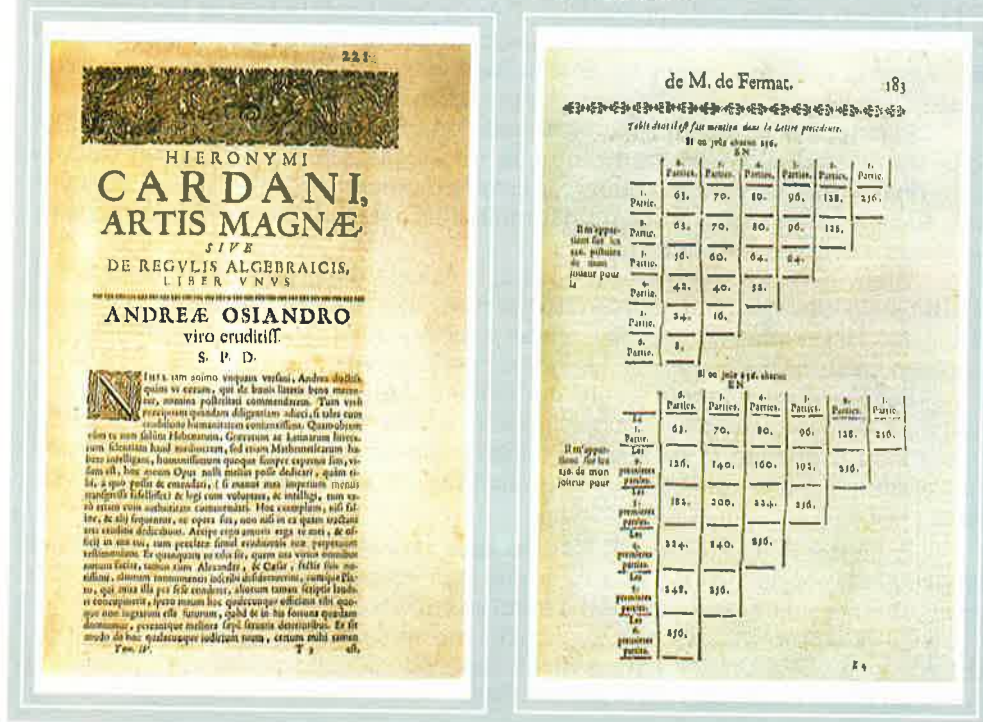


Figura 3 (a sinistra)  
Il frontespizio  
dell'*Ars Magna*  
di Gerolamo Cardano

Figura 4 (a destra)  
Una tavola sulle probabilità  
nel gioco d'azzardo tratta  
da una lettera di Fermat a  
Pascal



### **Galileo studia gli errori dovuti al caso nelle scienze sperimentali**

Un'altra sollecitazione allo studio delle situazioni di incertezza viene, sempre nel Cinquecento, dalle scienze sperimentali. Fra i tanti problemi studiati e discussi a quell'epoca, il più espressivo è un problema astronomico: nel 1572 era esplosa una stella e dodici astronomi erano riusciti a determinare la sua posizione, ma i risultati delle misurazioni erano diversi.

Come interpretare questa diversità? Qual era la vera posizione della stella?

Le osservazioni sperimentali – annotò anni dopo Galileo Galilei – sono sempre soggette a errori; la posizione più probabile della stella sarà quella dove si addensa il maggior numero di misure.

La *teoria degli errori dovuti al caso* ha inizio proprio da queste considerazioni di Galileo.

### **Nel Seicento Pascal e Fermat studiano ancora i giochi d'azzardo**

Nel XVII secolo il calcolo delle probabilità si avvia a diventare un nuovo ramo della matematica.

Ed ecco che, ancora una volta, sono i giochi d'azzardo a determinare un decisivo passo in avanti nello studio della probabilità.

Giochi di dadi o estrazioni da un'urna di palline bianche e nere sono proposti nel 1654 al matematico Blaise Pascal da un suo amico, il Cavaliere di Méré, uomo di lettere e filosofo, affascinato dai problemi posti dai giochi d'azzardo.

Questi problemi ebbero come conseguenza un fitto scambio di lettere fra due matematici francesi: Blaise Pascal e Pierre de Fermat (fig. 4). E sono proprio le considerazioni espresse in questa corrispondenza a segnare l'inizio organico dello studio del calcolo delle probabilità.

### **Nel Settecento il primo trattato di calcolo delle probabilità**

A distanza di mezzo secolo dalla corrispondenza fra Pascal e Fermat, esce nel 1713 il primo trattato sulla probabilità: l'*Ars conjectandi* («Arte di far congetture», cioè previsioni) del matematico svizzero Jakob Bernoulli. In questo libro ragionamenti e dimostrazioni rigorose stringono eventi incerti in una teoria certa: il calcolo delle probabilità è regolato da poche, ma rigide leggi.

Eppure, queste leggi, apparentemente semplici e chiare, riservavano difficoltà sottili e talvolta imprevedibili nella loro applicazione. E così, nel calcolo delle probabilità, si trovano clamorosi errori commessi perfino da Jean d'Alembert, fisico e matematico francese dai molteplici interessi (vedi «Scoprire errori nel calcolo delle probabilità», p. 475).

Tuttavia, malgrado queste difficoltà, il calcolo delle probabilità diventa nel XVIII secolo un forte centro di interesse per molti scienziati. In particolare, un saggio di Thomas Bayes stimola notevoli ricerche sulla probabilità delle cause; ricerche sviluppate soprattutto dallo scienziato francese Pierre Laplace.

Poco a poco le applicazioni del calcolo delle probabilità si estendono a campi lontani dalla matematica, perfino alle scienze sociali e legali: a ogni giudice e a ogni testimone si assegna un numero che esprime la probabilità che egli dica il vero; si vuole così valutare la probabilità che un tribunale arrivi ad un verdetto giusto.

A partire dall'Ottocento il calcolo delle probabilità diventa uno strumento fondamentale nella fisica, nella biologia, nell'economia: le teorie dell'incerto vengono a dominare gran parte del campo scientifico.

E sono proprio i campi d'applicazione sempre nuovi che sollecitano ricerche teoriche per precisare i fondamenti del calcolo delle probabilità, diventato ormai un importante ramo della matematica.

## Probabilità e proposizioni. La formula di Bayes

### Un evento è descritto da una proposizione

Il calcolo delle probabilità si può collegare ad un altro argomento presentato nel primo volume: le proposizioni (cfr. il paragrafo 2, p. 300). Per sviluppare questo collegamento, conviene riprendere alcune considerazioni svolte nei paragrafi 2 e 3 di questo capitolo, p. 464 e 470.

Si considerano, per esempio, i seguenti eventi, relativi al gioco della roulette:

- «esce un numero nero»;
- «esce un numero pari»;
- «non esce un numero pari»;
- «esce un numero nero o pari»;
- «esce un numero nero e pari».

Leggendo l'elenco degli eventi, si nota subito che:

- ogni evento è descritto da una proposizione;
- le proposizioni che descrivono gli ultimi tre eventi sono ottenute componendo le prime due con i connettivi «non», «o», «e».

### I simboli della logica nel calcolo delle probabilità

Nel calcolo delle probabilità si possono riprendere i simboli della logica, indicando gli eventi con lettere maiuscole nel modo seguente:

- A: «esce un numero nero»;
- B: «esce un numero pari»;
- $\sim A$ : «non si verifica A», cioè «non esce un numero nero»;
- $A \vee B$ : «si verifica A o B», cioè «esce un numero nero o pari»;
- $A \wedge B$ : «si verificano A e B», cioè «esce un numero nero e pari».

Si indica poi la probabilità di ciascun evento con un'apposita simbologia e cioè:

- $P(A)$  indica la probabilità che si verifichi l'evento A,
- $P(B)$  indica la probabilità che si verifichi l'evento B,
- $P(\sim A)$  indica la probabilità che non si verifichi A,
- $P(A \vee B)$  indica la probabilità che si verifichi A o B,
- $P(A \wedge B)$  indica la probabilità che si verifichi A e B.

Un simbolo particolare, caratteristico del calcolo delle probabilità, è invece riservato alla probabilità subordinata:

$P(B|A)$  indica la probabilità che si verifichi B, dopo aver saputo che si è verificato A.

Con questi simboli, i risultati esposti nei paragrafi 2 e 3 assumono la forma seguente:

*Probabilità totale:*  $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

*Probabilità che non si verifichi A:*  $P(\sim A) = 1 - P(A)$

*Probabilità composta:*  $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A)$

### La formula di Bayes

La formula relativa alla probabilità composta, e cioè:

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (1)$$

è scritta per risolvere problemi del seguente tipo:

- si considerano due eventi A, B;
- sono note:
  - $P(A)$ , cioè la probabilità dell'evento A;
  - $P(B|A)$ , cioè la probabilità che si verifichi B, sapendo che A si è già verificato;
- si vuole determinare  $P(A \wedge B)$ , cioè la probabilità che si verifichino A e B.

La stessa formula può essere usata per risolvere problemi del seguente tipo:

- si considerano due eventi A, B;
- sono note  $P(A)$  e  $P(A \wedge B)$ ;
- si vuole determinare  $P(B|A)$ .

In tal caso si ricava  $P(B|A)$  dalla (1) dividendo i due membri per  $P(A)$ ; si ottiene così la seguente formula, che prende anche il nome di *formula di Bayes*:

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$$

Questa formula è legata al nome del matematico inglese Thomas Bayes (1702-1761), che per primo l'ha scritta e ne ha trovato interessanti estensioni ed applicazioni.



# Le prove ripetute

## Il lancio ripetuto di una moneta: i casi possibili

Il lancio di un dado o di una moneta sono eventi di cui si conosce la probabilità; ma che cosa può succedere quando si ripete il lancio più volte?

La situazione più semplice da esaminare è il lancio ripetuto di una moneta; ecco qualche esempio su cui riflettere:

Numero dei lanci	Casi possibili	Numero dei casi possibili
1	T C	2
2	TT CT o TC CC	4
3	TTT TTC o TCT o CTT TCC o CTC o CCT CCC	8

Da questo schema si trae una prima indicazione: *il numero dei casi possibili raddoppia ad ogni lancio.*

È facile capire perché (fig. 1, p. 484): il caso T del primo lancio genera due casi possibili nel secondo lancio (TT e TC) e, analogamente, il caso C del primo lancio genera due casi possibili al secondo lancio (CT e CC). E questo andamento continua anche nei lanci successivi; si hanno dunque i risultati riassunti nella seguente tabella:

Numero dei lanci	Numero dei casi possibili
1	2
2	$2 \cdot 2 = 2^2$
3	$2^2 \cdot 2 = 2^3$
4	$2^3 \cdot 2 = 2^4$

La tabella può essere riassunta da una formula: se  $L$  indica il numero dei lanci, il numero  $N$  dei casi possibili è dato da:

$$N = 2^L$$

## Problemi sul lancio ripetuto di una moneta

Il numero dei casi possibili aumenta rapidamente con il numero dei lanci e già con soli 3 lanci si hanno 8 casi possibili, ma è ancora abbastanza facile rispondere a domande come le due seguenti.

1. Qual è la probabilità  $p$  che esca testa solo al primo lancio?

La risposta è facile: c'è un solo caso favorevole (TCC) fra gli otto possibili; si ha quindi:

$$p = \frac{1}{8}$$

2. Qual è la probabilità  $q$  che esca testa solo una volta?



Questa domanda somiglia alla prima, ma ora i casi favorevoli sono tre (TCC o CTC o CCT), perché testa può uscire solo al primo, solo al secondo o solo al terzo lancio; quindi si ha:

$$q = \frac{3}{8}$$

C'è dunque fra le due domande una notevole differenza, che può sfuggire a una lettura superficiale:

- nella domanda 1 si fissa l'ordine in cui deve uscire testa e fissare l'ordine equivale a selezionare il solo caso TCC;
- nella domanda 2 l'ordine non è fissato e questo equivale a considerare come favorevoli i tre casi TCC, CTC, CCT.

### Il lancio ripetuto di una moneta e il triangolo di Tartaglia

Domande analoghe alle due precedenti si possono porre pensando di lanciare una moneta quattro, cinque, dieci, cento volte. In tal caso che cosa si può prevedere? È lo schema di fig. 2 che aiuta a prevedere le

situazioni possibili nel lanciare una moneta quattro volte. Per esempio, si otterrà una sola volta testa in due situazioni:

- ai primi tre lanci si è avuto sempre croce (e ciò si può verificare in un modo solo);
- ai primi tre lanci si è avuto una sola volta testa (e ciò si può verificare in tre modi) e al quarto lancio si ha croce.

Si avranno quindi 1 + 3 casi in cui compare una sola volta testa.

È ora facile riconoscere nello schema di fig. 2 la costruzione del triangolo di Tartaglia (vedi il primo volume, p. 272).

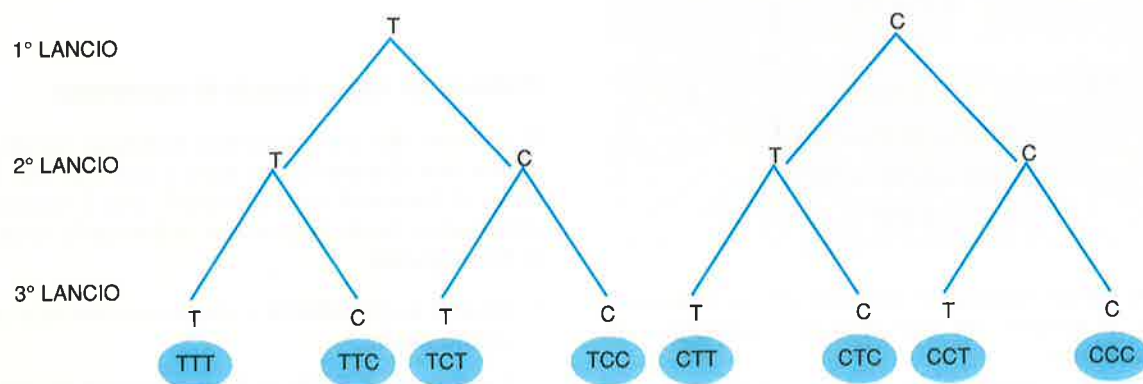
E questa costruzione, unita al precedente calcolo dei casi possibili, permette di risolvere molti problemi. Ecco qualche esempio, sempre relativo al lancio di una moneta ripetuto quattro volte, per cui il numero  $N$  dei casi possibili è:

$$N = 2^4 = 16$$

La probabilità  $p$  che esca testa solo al primo lancio è data da:

$$p = \frac{1}{16}$$

**Figura 1**  
Lanciando una moneta più volte, il numero dei casi possibili raddoppia a ogni lancio



La probabilità  $q$  che esca testa solo una volta è:

$$q = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La probabilità  $r$  che esca testa solo due volte è:

$$r = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

La probabilità  $s$  che esca testa solo ai primi due lanci è:

$$s = \frac{1}{16}$$

A: esca testa tre volte;

B: esca testa agli ultimi tre lanci.

I due eventi hanno la stessa probabilità?

#### Comprensione

- ① Spiegare qual è la differenza fra i due eventi A, B indicati nella domanda precedente.
- ② Spiegare perché, lanciando più volte una moneta, il numero dei casi possibili raddoppia a ogni lancio.

#### Applicazioni

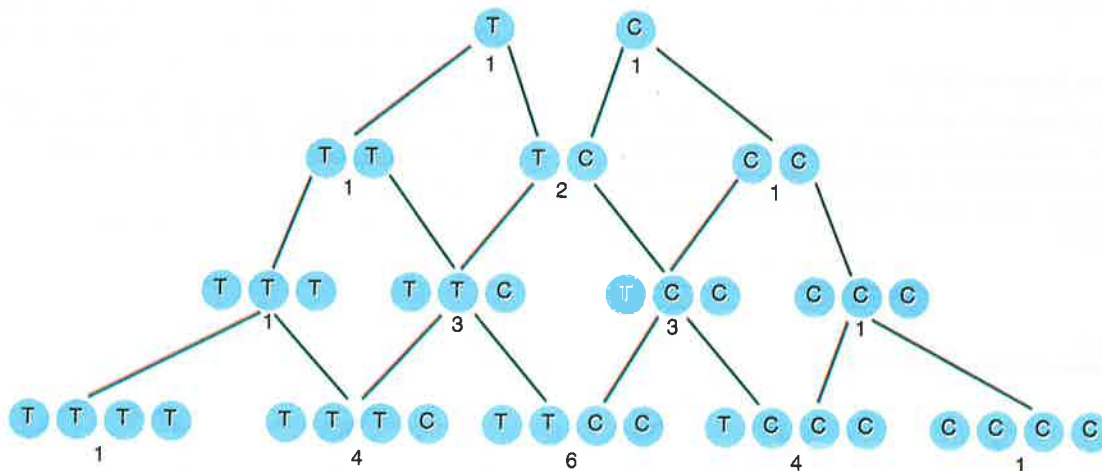
- ① Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:  
A: esca testa tre volte;  
B: esca testa agli ultimi tre lanci.
- ② Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:  
A: esca croce una volta;  
B: esca croce all'ultimo lancio.

### Verifiche

#### Conoscenze

- ① Esaminare il lancio ripetuto di una moneta e descrivere il numero  $N$  dei casi possibili al variare del numero  $L$  dei lanci.
- ② Esaminare i due eventi seguenti, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:

Figura 2  
Lancio di una moneta ripetuto quattro volte



# Le permutazioni e il fattoriale di un numero

Nel paragrafo precedente si è utilizzato il triangolo di Tartaglia per prevedere le situazioni che si ottengono lanciando quattro monete, conoscendo quelle ottenute lanciando tre monete.

Si è così trovato, per esempio, che devono essere 4 le situazioni in cui esce testa una sola volta. Ma questo metodo diventa assai lungo quando si vogliono prevedere le situazioni relative a 50 o 100 lanci: è senz'altro possibile compilare il triangolo di Tartaglia fino alla cinquantesima o centesima riga, ma occorre molto tempo per completare i calcoli.

Questo paragrafo e il seguente sono dedicati a un metodo più rapido del triangolo di Tartaglia, metodo che conviene introdurre a partire da un problema diverso da quello del lancio ripetuto di una moneta.

## Contare le permutazioni

Immaginiamo di avere la serratura di una cassaforte «comandata» da un numero segreto; è facile indovinare il numero procedendo per tentativi o sono molti i numeri che si possono formare?

Per capire la situazione conviene cominciare da un caso particolarmente semplice:

- si formano i numeri con 3 cifre differenti, cioè senza mai ripetere una cifra;
- si usano solo le ultime cifre dispari, cioè 5, 7 e 9.

Per contare i numeri che si possono formare risulta molto utile un diagramma ad albero come quello di fig. 1. Dalla figura risulta chiaro che:

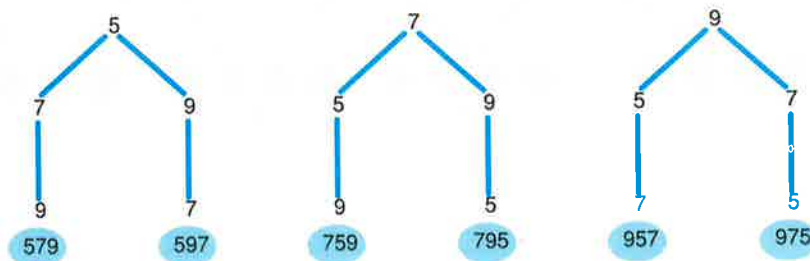
- la prima cifra si può scegliere in 3 modi;
- dopo aver fissato la prima cifra, la seconda si può scegliere in  $3 - 1$  modi;
- dopo aver fissato le prime due cifre, la terza si può scegliere in un solo modo, dato che rimangono  $3 - 2 = 1$  scelta.

Lo schema di fig. 1 rappresenta dunque i modi di ordinare tre cifre diverse o, più precisamente, le *permutazioni* di tre elementi diversi.

A partire dalla figura e dai ragionamenti seguenti prima, si determina rapidamente il numero di queste permutazioni, numero che, in simboli, si indica con  $P_3$ ; si ha:

$$P_3 = 3 \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Figura 1  
Permutazioni delle cifre 5, 7, 9



Con lo stesso procedimento se, per esempio, si scrivono numeri di 5 cifre usando tutte le 5 cifre dispari, si hanno le permutazioni di 5 elementi diversi; contando tutte queste permutazioni si ottiene il numero  $P_5$  dato da:

$$P_5 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Si osserva che il conteggio delle permutazioni viene svolto in modo caratteristico:

- $P_3$  si ottiene moltiplicando i primi 3 numeri naturali;
- $P_5$  si ottiene moltiplicando i primi 5 numeri naturali.

Il risultato ora ottenuto si può facilmente generalizzare: il numero  $P_n$  delle permutazioni di  $n$  elementi diversi si ottiene moltiplicando fra loro i primi  $n$  numeri naturali, cioè si ha:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

### Il fattoriale di un numero naturale

Il prodotto dei primi  $n$  numeri naturali prende il nome di *fattoriale di  $n$*  o, più brevemente,  *$n$  fattoriale* e si indica in simboli con  $n!$ .

Si ha dunque:

$$n \text{ fattoriale} = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Il simbolo  $n!$  è presente sulla tastiera di molti calcolatori tascabili per uso scientifico; valendosi di un calcolatore è facile verificare che il fattoriale cresce molto rapidamente al crescere del numero  $n$ . Ecco qualche esempio:

$$1! = 1$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

$$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39916800$$

### Una proprietà del fattoriale di un numero

Gli ultimi due esempi portano a scoprire una notevole proprietà del fattoriale di un numero; si ha:

$$11! = 11 \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 11 \cdot 10!$$

ossia:

$$(10+1)! = (10+1) \cdot 10!$$

Questo calcolo si può ripetere a partire dal fattoriale di due numeri successivi come 11 e 12 o 100 e 101 ottenendo:

$$12! = (11+1)! = (11+1) \cdot 11!$$

$$101! = (100+1)! = (100+1) \cdot 100!$$

In generale, indicati con  $n$  e  $n+1$  due numeri naturali successivi, si avrà la seguente proprietà:

$$(n+1)! = (n+1) n! \quad (1)$$

### Il significato di $0!$

La proprietà ora stabilita conduce a attribuire un significato anche al simbolo  $0!$ ; infatti sostituendo 0 al posto di  $n$  nei due membri della (1), si ha:

$$1^\circ \text{ membro: } (0+1)! = 1! = 1$$

$$2^\circ \text{ membro: } (0+1) \cdot 0! = 1 \cdot 0! = 0!$$

Se dunque si vuole considerare ancora valida la proprietà (1), bisogna stabilire che vale l'uguaglianza seguente:

$$0! = 1$$

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Spiegare che cosa significa il termine «permutazioni di  $n$  elementi diversi».
- ② Spiegare che cosa indica il simbolo  $P_n$ .
- ③ Come si calcola il numero delle permutazioni di  $n$  elementi diversi?
- ④ Spiegare che cosa indica il simbolo  $n!$
- ⑤ Come si calcola il fattoriale di un numero?

### Comprensione

- ① Spiegare perché il numero delle permutazioni di 5 elementi diversi è dato da:
 
$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
- ② Spiegare perché deve essere valida l'uguaglianza:
 
$$0! = 1$$

### Applicazioni

- ① Calcolare quanti sono i numeri di quattro cifre che si possono scrivere utilizzando le quattro cifre pari 2, 4, 6, 8.
- ② Calcolare quanti sono i numeri di dieci cifre che si possono scrivere utilizzando le nove cifre decimali diverse da 0.



# I coefficienti binomiali

## Permutazioni di $n$ elementi non tutti diversi

Nel paragrafo precedente si è visto che:

- $n$  elementi tutti diversi fra loro si possono permutare in  $P_n$  modi;
- il numero  $P_n$  delle permutazioni è dato da:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Che cosa succede se alcuni degli elementi sono uguali fra loro?

Ecco un esempio su cui riflettere. I numeri di 3 cifre formati con 5, 7 e 9 sono: 579, 597, 759, 795, 957, 975.

Formiamo ora i numeri di tre cifre con 5, 7 e 7, cioè scegliamo le ultime due cifre uguali fra loro; si avranno i numeri che risultano dal diagramma ad albero di fig. 1.

Ora i numeri diversi sono: 577, 757, 775.

E è facile capire perché: una volta scritto 577, il numero non cambia permutando le due cifre

7 e analogamente si ragiona a partire da 757 o 775.

Perciò il numero delle permutazioni distinte non è più

$$P_3 = 6$$

perché bisogna dividere  $P_3$  per il numero  $P_2$  delle permutazioni delle due cifre uguali a 7.

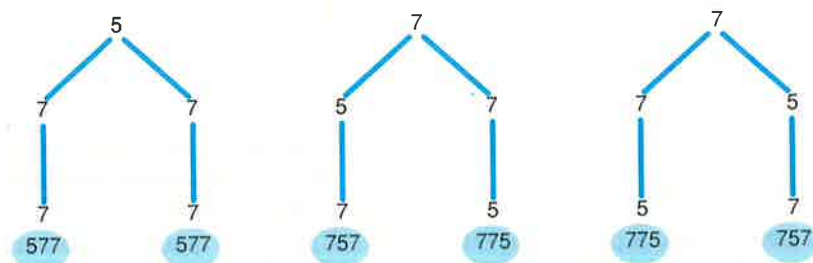
Indicando con  $P'_3$  il numero di *permutazioni distinte* di 3 elementi, di cui 2 uguali fra loro, si ha dunque:

$$P'_3 = \frac{3!}{2!}$$

E così il numero di permutazioni di 5 elementi di cui 3 uguali fra loro sarà dato da:

$$P'_5 = \frac{5!}{3!}$$

Figura 1  
Permutazioni delle cifre 5, 7, 7



Se poi, in quest'ultimo caso, anche i rimanenti due elementi sono uguali fra loro, per avere il numero  $Q_5$  delle permutazioni distinte, bisognerà dividere ancora per  $P_2 = 2!$ ; si avrà quindi:

$$Q_5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

con:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 5 \cdot 2 = 10$$

Il procedimento seguito finora può essere facilmente generalizzato: il numero delle permutazioni di  $n$  elementi, di cui  $k$  uguali fra loro e i rimanenti  $(n-k)$  pure uguali fra loro, è dato da:

$$Q_n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1)$$

Infatti, i numeri di cinque cifre che si possono formare, per esempio, con le cifre 1, 1, 1, 9, 9, sono soltanto dieci (fig. 2).

### I coefficienti binomiali

Il numero ottenuto nella formula (1) si indica con una particolare simbologia; si scrive:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (2)$$

Il simbolo  $\binom{n}{k}$ , in cui *non compare la linea di*

frazione fra  $n$  e  $k$ , si legge « $n$  sopra  $k$ » e prende il nome di *coefficiente binomiale* perché viene utilizzato per sviluppare la potenza di un binomio (vedi anche la scheda informativa, p. 491). Un'osservazione importante: si considera il fattoriale soltanto dei numeri positivi; perciò il calcolo dei coefficienti binomiali si può eseguire solo se risulta:

$$k \geq 0 \quad \text{e} \quad n-k \geq 0 \quad \text{ossia} \quad k \leq n$$

Si conclude dunque che si calcola il coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$  solo se risulta:

$$0 \leq k \leq n$$

In particolare, per  $k = 0$  si trova:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Analogamente, per  $k = n$  si ha:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

### I coefficienti binomiali per studiare le prove ripetute

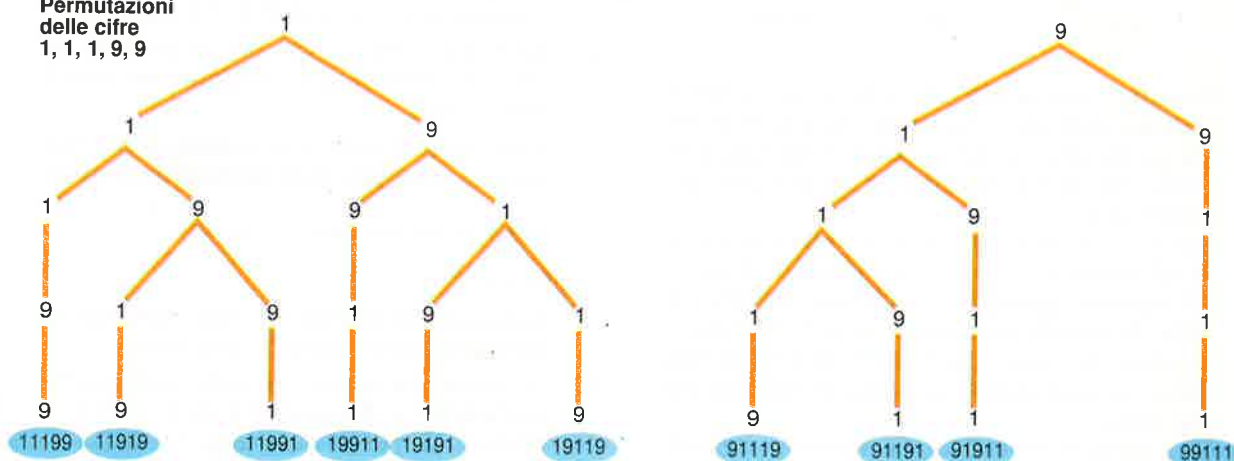
I coefficienti binomiali si applicano in molti campi scientifici, fra i quali si segnala quello delle prove ripetute. Ecco un primo esempio. Si lancia una moneta 20 volte; qual è la probabilità  $p$  che esca esattamente 5 volte testa?

Per rispondere si può ragionare così.

- Il numero  $N$  dei casi possibili è dato da:

$$N = 2^{20} = 1\,048\,576$$

**Figura 2**  
Permutazioni  
delle cifre  
1, 1, 1, 9, 9



- Il numero  $F$  dei casi favorevoli è dato dal numero delle permutazioni di 20 elementi di cui 5 uguali fra loro (cioè T) e gli altri 15 pure uguali fra loro (cioè C); si ha dunque:

$$F = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15504$$

- La probabilità  $p$  è quindi data da:

$$p = \frac{15504}{1048576} \cong 0,015$$

Per arrivare a un risultato più generale si può osservare che il calcolo della probabilità  $p$  di ottenere 5 volte testa lanciando 20 volte una moneta si effettua nel modo seguente:

$$p = \binom{20}{5} \cdot \frac{1}{2^{20}}$$

E così si può dire che, quando si lancia  $n$  volte una moneta, la probabilità  $p$  di ottenere  $k$  volte testa  $T$  è data da:

$$p = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \quad (3)$$

### Problemi posti dalle prove ripetute

Ecco qualche altra applicazione della formula (3) ora ottenuta.

1. Calcolare la probabilità  $p$  che lanciando 10 volte una moneta non si ottenga mai testa; si ha:

$$p = \binom{10}{0} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 1 \cdot \frac{1}{2^{10}} \cong 0,00098$$

2. Calcolare la probabilità  $q$  che lanciando 10 volte una moneta si abbia testa solo una volta:

$$q = \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} \cong 0,0098$$

Dunque, lanciando 10 volte una moneta, l'evento «non esce mai testa» ha una probabilità  $p$ , mentre l'evento «esce testa una sola volta» ha una probabilità  $q$  dieci volte più grande di  $p$ .

Questa conclusione sembra contrastare con un'affermazione che si trova proprio all'inizio del capitolo: quando si lancia una moneta più volte, la moneta non può ricordare che cosa è successo nei lanci precedenti; perciò, a ogni lancio, si avrà sempre la stessa probabilità che esca testa.

Ma è facile risolvere questa apparente contraddizione:

$q$  indica la probabilità che esca testa una volta nei dieci lanci, prevedendo che quest'unica volta possa realizzarsi in uno qualunque dei dieci lanci.

Invece, se è uscita croce nei primi nove lanci, al decimo lancio si possono realizzare due sequenze possibili:

- 9 croci e una testa;
- 9 croci e un'altra croce.

E queste due sequenze hanno la stessa probabilità  $r$ , che si ottiene anche valendosi della probabilità composta:

$$r = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2}$$

dove:

$\frac{1}{2^9}$  è la probabilità che esca sempre croce nei primi 9 lanci;

$\frac{1}{2}$  è la probabilità che esca testa ed è anche la probabilità che esca croce all'ultimo lancio.

## Verifiche

### Conoscenze

- ① Dire come si legge il simbolo  $\binom{n}{k}$ ; nel simbolo c'è la linea di frazione?
- ② Dire come si calcola il valore di  $\binom{n}{k}$ .
- ③ Come si calcola la probabilità che, lanciando  $n$  volte una moneta, esca  $k$  volte testa?

### Comprensione

- ① Spiegare perché si applicano i coefficienti binomiali per studiare le prove ripetute.
- ② Spiegare come si calcola la probabilità che, lanciando  $n$  volte una moneta, esca  $k$  volte croce.
- ③ Lanciando 9 volte una moneta si è avuto sempre testa; perché la probabilità di avere croce al decimo lancio è ancora  $\frac{1}{2}$ ?

### Applicazioni

- ① Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità di ottenere 5 volte testa.
- ② Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità  $p$  di ottenere testa 4 volte e la probabilità  $q$  di ottenere testa 6 volte.

## Il binomio di Newton e il calcolo combinatorio

### I coefficienti binomiali nello sviluppo di $(a + b)^n$

Nel paragrafo 6 si è detto che i coefficienti binomiali prendono il loro nome dal fatto che vengono utilizzati per sviluppare la potenza di un binomio. Vediamo meglio di che cosa si tratta cominciando a esaminare un caso particolare: lo sviluppo di

$$(a + b)^5$$

Per sviluppare questa potenza si può calcolare il prodotto di  $(a + b)$  per se stesso, ripetuto 5 volte, tenendo presente che risulta:

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$$

In tal caso si dovrà contare quante volte si presentano i vari monomi come  $a^5$ ,  $a^4b$ ,  $a^3b^2$  e così via.

Per evitare di eseguire tutti i prodotti si può invece ragionare così:

- il monomio  $a^5$  compare certamente una volta sola perché i 5 termini  $a$  si possono ottenere in un solo modo;
- il monomio

$$a^4b = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$$

compare un numero di volte dato dalle permutazioni di 5 elementi, di cui 4 uguali fra loro, e questo numero è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

- e così il monomio

$$a^3b^2 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$$

compare un numero di volte dato dalle permutazioni di 5 elementi, di cui 3 uguali fra loro e gli altri 2 pure uguali fra loro, e questo numero è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Continuando in modo analogo si ottiene:

$$(a + b)^5 = a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + b^5$$



Questa formula assume un aspetto più simmetrico tenendo presente che risulta:

$$\binom{5}{5}=1 \quad \text{e} \quad \binom{5}{0}=1$$

Perciò si può scrivere:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{5}a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + \binom{5}{0}b^5$$

Il procedimento seguito ha carattere generale e si può sempre seguire per calcolare la potenza di un binomio del tipo  $a + b$ , elevato a un esponente  $n$  intero positivo; si ottiene così il seguente *sviluppo della potenza di un binomio*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n$$

La formula ora ottenuta prende il nome di *formula di Newton*, anche se lo sviluppo della potenza del binomio era stato studiato prima dell'epoca di Newton: nel XVI secolo il matematico italiano Nicolò Tartaglia aveva trovato il suo famoso «triangolo» (vedi primo volume, p. 272), che però sembra fosse già noto nell'XI secolo al matematico persiano Omar Khayyam.

### Insieme delle parti di un insieme

I coefficienti binomiali possono essere utilizzati anche per «contare» i sottoinsiemi che si possono costruire con gli elementi di un dato insieme finito.

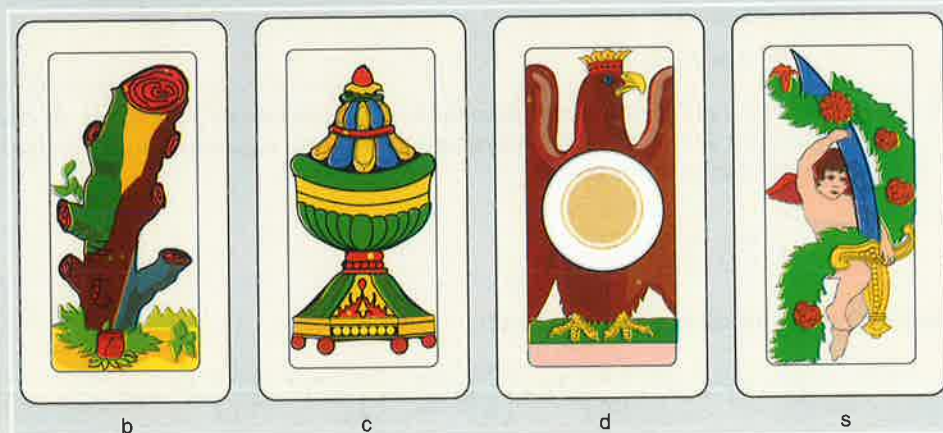
Ecco un primo esempio. Si considera l'insieme  $A$  dei quattro assi di un mazzo di carte napoletane; si ha dunque (fig. 1):

- asso di bastoni  $b$ ;
- asso di di coppe  $c$ ;
- asso di denari  $d$ ;
- asso di spade  $s$ .

Per contare quanti sottoinsiemi si possono formare con questi elementi si può ragionare così:

- si scrivono gli assi sempre in ordine alfabetico ( $b, c, d, s$ );
- si contrassegnano con 1 le carte scelte per formare il sottoinsieme e con 0 quelle non scelte.

Figura 1  
Insieme  $A$   
dei quattro assi di  
un mazzo di carte  
napoletane



Così, per esempio, per formare dei sottoinsiemi con 3 elementi si possono effettuare le seguenti scelte (fig. 2):

- $b c d$  identificata dalla sequenza 1110;
- $b c s$  identificata dalla sequenza 1101;
- $b d s$  identificata dalla sequenza 1011;
- $c d s$  identificata dalla sequenza 0111.

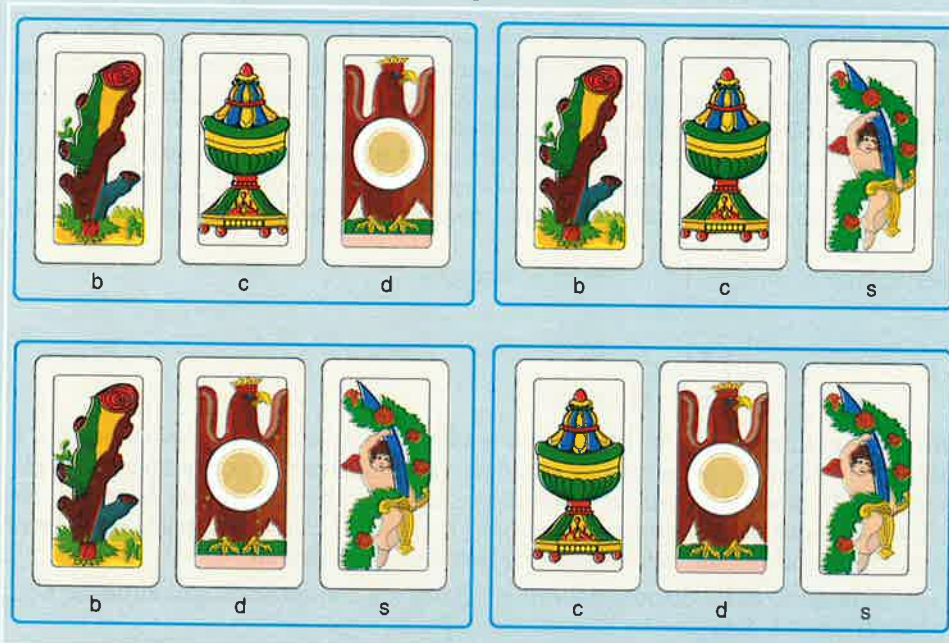


Figura 2  
I sottoinsiemi che si possono formare con tre elementi dell'insieme A

In questo modo si può osservare una sorprendente analogia fra i sottoinsiemi di un insieme e i casi ottenuti lanciando ripetutamente una moneta:

- un caso ottenuto lanciando 4 volte una moneta è descritto da una sequenza del tipo TTTC, cioè da una sequenza di 4 simboli che possono essere T o C;
- un sottoinsieme di un insieme formato da 4 elementi è descritto da una sequenza del tipo 1110, cioè da una sequenza di 4 simboli che possono essere 1 o 0.

Questa analogia permette di arrivare rapidamente alle seguenti conclusioni:

1. Per contare i sottoinsiemi dell'insieme A si usano i coefficienti binomiali, ottenendo che:

- i sottoinsiemi formati da 1 elemento sono  $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ ;

- i sottoinsiemi formati da 2 elementi sono  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ ;

- i sottoinsiemi formati da 3 elementi sono  $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ .

2. Oltre ai precedenti 14 sottoinsiemi, bisogna considerare anche l'insieme vuoto (identificato dalla sequenza 0000) e tutto l'insieme A (identificato dalla sequenza 1111). Così si trova che i sottoinsiemi di A sono  $16 = 2^4$  (quanti i casi possibili nel lancio di una moneta ripetuti 4 volte).

Le conclusioni ottenute possono essere ora generalizzate, considerandole valide per un dato insieme A composto di  $n$  elementi; si ha dunque che:

1. per contare i sottoinsiemi formati da un dato numero  $k$  di elementi si

usa il coefficiente binomiale  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ;

2. i sottoinsiemi che si possono formare a partire dagli elementi di  $A$  sono  $2^n$  (quanti i casi possibili nel lancio di una moneta ripetuto  $n$  volte).

### Calcolo combinatorio

Le nozioni di insieme e di sottoinsieme sono state stabilmente introdotte alla fine del secolo scorso, mentre già almeno dal XVII secolo si studiavano i coefficienti binomiali e le loro applicazioni in vari contesti.

E così, invece di parlare di sottoinsiemi formati da  $k$  elementi, presi da un insieme di  $n$  elementi, si parlava di *combinazioni di  $n$  elementi  $k$  a  $k$*  e si diceva che il numero di queste combinazioni, indicato col simbolo  $C_{n,k}$ , era dato dal

coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$ ; perciò si scriveva:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Oltre alle combinazioni, si studiavano anche le *disposizioni di  $n$  elementi  $k$  a  $k$* , introdotte nel modo seguente: in una data combinazione si permutavano gli elementi nei  $k!$  modi possibili; si ottenevano così dei raggruppamenti di oggetti che differivano solo per l'ordine, ma non per gli elementi che vi comparivano. Questi raggruppamenti prendevano appunto il nome di disposizioni.

Il numero delle disposizioni di  $n$  oggetti  $k$  a  $k$  si indicava col simbolo  $D_{n,k}$  e si determinava dunque con il seguente calcolo:

$$D_{n,k} = k! C_{n,k} = k! \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le combinazioni e le disposizioni erano l'oggetto di studio del calcolo combinatorio. Per chiarire meglio la terminologia introdotta si può riprendere l'esempio dell'insieme  $A$ , formato dai quattro assi presi da un mazzo di carte napoletane.

- Le combinazioni di questi 4 oggetti 3 a 3 sono le seguenti:

- $b c d$
- $b c s$
- $b d s$
- $c d s$

Queste combinazioni sono in numero di  $C_{4,3}$  dato da:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

- Per avere le disposizioni di 4 elementi 3 a 3, si debbono permutare gli elementi di ogni combinazione nei  $3!$  modi possibili; si hanno dunque le seguenti disposizioni:

$b c d$	$b d c$	$c b d$	$c d b$	$d b c$	$d c b$
$b c s$	$b s c$	$c b s$	$c s b$	$s b c$	$s c b$
$b d s$	$b s d$	$d b s$	$d s b$	$s b d$	$s d b$
$c d s$	$c s d$	$d c s$	$d s c$	$s c d$	$s d c$

Queste disposizioni sono in numero di  $D_{4,3}$  dato da:

$$D_{4,3} = 3! C_{4,3} = 3! \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{1!} = 24$$



# Altri modi di valutare la probabilità

## La valutazione statistica della probabilità

Lanciando una moneta si può valutare oggettivamente la probabilità che esca testa; si dice che si hanno 2 casi ugualmente probabili (testa o croce), di cui 1 favorevole e quindi la probabilità  $p$  che esca testa è:

$$p = \frac{1}{2}$$

Ora, le considerazioni relative al lancio di una moneta ripetuto più volte, suggeriscono una domanda: che cosa succede se si lancia effettivamente una moneta più volte?

Ricerche per rispondere a questa domanda sono presenti nei lavori di molti scienziati famosi, fra i quali il naturalista francese Georges Buffon (1701-1785) che in 4040 lanci ottenne 2045 teste o lo statistico inglese Karl Pearson che agli inizi del Novecento ottenne 12012 volte testa in 24 000 lanci.

Queste ricerche hanno mostrato che in un numero  $N$  molto grande di lanci si ha un apprezzabile equilibrio fra il numero delle teste e il numero delle croci, cioè il rapporto fra il numero  $V$  dei casi in cui è uscita testa e il

numero  $N$  dei lanci è molto vicino a  $\frac{1}{2}$ .

Questi e altri risultati analoghi hanno condotto alla seguente valutazione statistica della probabilità: *la probabilità  $p$  di un evento, valutata statisticamente, è data dal rapporto fra il numero  $V$  dei casi in cui l'evento si è verificato e il numero totale  $N$  dei casi osservati, purché il numero  $N$  delle osservazioni sia molto grande.*

Per riassumere con una formula si può scrivere:

$$p = \frac{V}{N}$$

Anche con questa valutazione statistica la probabilità è un numero  $p$  compreso fra 0 e 1.

In particolare, quando l'evento non si è mai verificato, si ha:

$$V = 0 \quad \text{e quindi} \quad p = \frac{0}{N} = 0$$

Quando invece l'evento si è verificato in tutti i casi osservati, si ottiene

$$V = N \quad \text{e quindi} \quad p = \frac{N}{N} = 1$$

## Un'applicazione della valutazione statistica della probabilità

Sono molte le situazioni di incertezza in cui non si riesce a valutare oggettivamente la probabilità e, invece, risulta preziosa la valutazione statistica. Ecco un esempio.

Si sente spesso dire che il fumo favorisce l'insorgere del tumore al polmone; alcuni però mostrano di non essere d'accordo e dicono, per esempio: «Non è vero che il fumo fa male, mio nonno fumava quaranta sigarette al giorno ed è vissuto benissimo fino a ottant'anni».

Vediamo allora quale può essere il punto di vista del calcolo delle probabilità in queste discussioni.

Si esaminano dati recenti che si riferiscono al numero dei casi annui di tumore al polmone su 100 000 persone della stessa età ripartite secondo il numero di sigarette fumate al giorno; i dati sono riuniti nella tabella A.



In base a questi dati si può valutare statisticamente la probabilità  $P$  di contrarre un tumore al polmone; si trova:

- se non si fuma,  $P = \frac{7}{100000}$ ;

- se si fumano non più di 10 sigarette al giorno,  
 $P' = \frac{70}{100000} = 10 \cdot P$ ;

- se si fumano più di 40 sigarette al giorno,  
 $P'' = \frac{350}{100000} = 50 \cdot P$ .

Risulta dunque chiaro un fatto: contrarre un tumore al polmone e fumare non sono eventi indipendenti, perché la probabilità di ammalarsi di tumore al polmone, subordinata al fatto di fumare, è maggiore della probabilità di ammalarsi se non si fuma.

Questo non vuol dire che non fumando si è certi di non ammalarsi, né che fumando si contrae sicuramente un tumore; vuol dire solo che fumare aumenta notevolmente la probabilità di contrarre un tumore al polmone. In questo senso il fumo è indicato come uno dei «fattori di rischio» per il tumore al polmone.

Queste considerazioni sono basate sulla valutazione statistica della probabilità, valutazione che è attendibile solo se il numero delle osservazioni è molto grande.

In questo contesto, è attendibile la valutazione statistica fatta da chi si basa su un solo caso, quello del nonno longevo?

### La valutazione soggettiva della probabilità

Ci sono altre situazioni in cui si affronta l'incertezza: sono le scommesse. In alcuni paesi si scommette su tutto: dalle corse dei cavalli agli incontri di pugilato, a quelli di calcio.

In questi casi non si riesce a dare una valutazione oggettiva della probabilità: se per esempio combattono due pugili A e B, i due casi — vince A, vince B — non si considerano ugualmente probabili.

D'altra parte, la vita sportiva di un pugile non è così lunga e regolare da poter dare delle statistiche significative; perciò non si può neanche ricorrere alla valutazione statistica della probabilità.

Tuttavia le scommesse si fanno e, con una scommessa, si dà una valutazione numerica del grado di fiducia che si ha sulla vittoria di uno dei due pugili.

Bookmakers (allibratori) e scommettitori non parlano in generale di probabilità, anche se ne fanno largo uso, ma usano un gergo particolare: l'allibratore fissa la quota di scommessa dicendo, a esempio, che «dà il pugile 1 a 9». Questo vuol dire che l'allibratore è disposto a dare allo scommettitore 9 volte la somma puntata se il pugile vince.

Perciò, quando si punta una somma  $S$  sulla vittoria di un pugile «dato 1 a 9», si accettano le seguenti situazioni:

- se il pugile vince, si ha un totale  $T$ , dato dalla somma  $S$  puntata con l'aggiunta della quota  $9S$  data dall'allibratore; in caso di vincita si ha dunque:

$$T = S + 9S = 10S$$

- in caso di perdita del pugile, si perde la somma  $S$  puntata.

Accettare la scommessa significa dunque essere disposti a pagare  $S$  per avere  $10S$  nel caso che il pugile vinca.

Si è così condotti a stabilire la seguente valutazione soggettiva della probabilità: *la probabilità soggettiva  $p$  di un evento è data dal rapporto fra la somma  $S$  che si è disposti a perdere se l'evento non si verifica e la somma  $T$  che si ottiene se l'evento si verifica.*

Per riassumere con una formula, si scrive:

$$p = \frac{S}{T}$$

Per esempio, nel caso del pugile «dato 1 a 9», la probabilità  $p$  di vittoria del pugile è data da:

$$p = \frac{S}{10S} = \frac{1}{10}$$

Tabella A

Numero di sigarette al giorno	0	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	>40
Casi rilevati in un anno	7	30	70	107	150	185	223	260	310	350

Anche la probabilità valutata con una scommessa è sempre un numero compreso fra 0 e 1. In particolare, se l'evento è certo, nessun bookmaker è disposto ad accettare la scommessa e, quindi, la somma  $S$  rimane inalterata quando l'evento si verifica; si ha perciò:

$$p = \frac{S}{S} = 1$$

Se invece l'evento è impossibile, non siamo disposti in nessun caso a scommettere, perciò si ha  $S = 0$  e quindi:

$$p = \frac{0}{T} = 0$$

### Confrontare i tre modi di valutare la probabilità di un evento

Nel corso di questo capitolo si sono introdotti tre modi di valutare la probabilità di un evento e cioè:

- la **probabilità oggettiva (o classica)** è data dal rapporto  $\frac{F}{N}$  fra il numero  $F$  dei casi favorevoli e il numero  $N$  dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili;
- la **probabilità statistica (o frequentista)** è data dal rapporto  $\frac{V}{N}$  fra il numero  $V$  dei casi in cui l'evento si è verificato e il numero  $N$  dei casi esaminati, purché  $N$  sia grande;
- la **probabilità soggettiva** è data dal rapporto  $\frac{S}{T}$  fra la somma  $S$  che si è disposti a pagare e la somma  $T$  che si ottiene se l'evento si verifica.

Si è anche visto che in alcuni casi la probabilità si può valutare solo su basi statistiche (per esempio nel caso degli studi sul tumore al polmone), in altri solo soggettivamente (per esempio nel caso delle corse dei cavalli). Ma ci sono anche delle situazioni in cui è possibile valutare la probabilità in più modi. Ecco una situazione da esaminare: il gioco della roulette.

Il Casinò stabilisce che si può puntare sul rosso alla pari, cioè 1 a 1; questo vuol dire che:

- se esce rosso si ha una somma totale  $T = S + S$ ;
- se non esce rosso si perde la somma  $S$ .

Se si gioca, si accetta di valutare *soggettivamente* la probabilità dell'evento «esce un numero rosso» nel modo seguente:

$$p = \frac{S}{S + S} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Però, la probabilità che esca rosso si può anche valutare *oggettivamente*, ricordando che i numeri sulla roulette sono 37, così suddivisi:

18 rossi, 18 neri e lo 0, che non ha colore ed è favorevole al banco, cioè al gestore del Casinò. Perciò, valutando *oggettivamente* la probabilità  $p$  di vincere puntando sull'evento «esce un numero rosso», si ha:

$$p = \frac{18}{37} \approx 0,49$$

Ma si può valutare la probabilità che esca rosso anche *statisticamente*: basta osservare il gioco della roulette per un lungo periodo di tempo; se la roulette non è truccata, si troverà una frequenza di uscita del rosso che si avvicina a  $\frac{18}{37}$  al crescere del numero dei lanci.

Perciò la valutazione statistica porta allo stesso valore dato dalla valutazione oggettiva.

## V e r i f i c h e

### Conoscenze

- ① Che cosa si intende per «valutazione statistica della probabilità di un evento»?
- ② Che cosa si intende per «valutazione soggettiva della probabilità di un evento»?

### Comprensione

- ① Spiegare perché, anche valutando statisticamente la probabilità di un evento, si ottiene sempre un numero compreso fra 0 e 1.
- ② Spiegare perché, anche valutando soggettivamente la probabilità di un evento, si ottiene sempre un numero compreso fra 0 e 1.

### Applicazioni

- ① Basandosi sui dati presentati nella tabella A, valutare la probabilità di contrarre un tumore al polmone se si fumano non più di 20 sigarette al giorno.
- ② Calcolare la probabilità di vittoria di un cavallo dato 1 a 4.
- ③ Confrontare la probabilità oggettiva e soggettiva dell'evento «esce il numero 25» alla roulette, sapendo che in caso di vincita si riceve dal Casinò 35 volte la somma puntata.

## Probabilità statistica e genetica. Il mongolismo

### Il mongolismo o trisomia 21

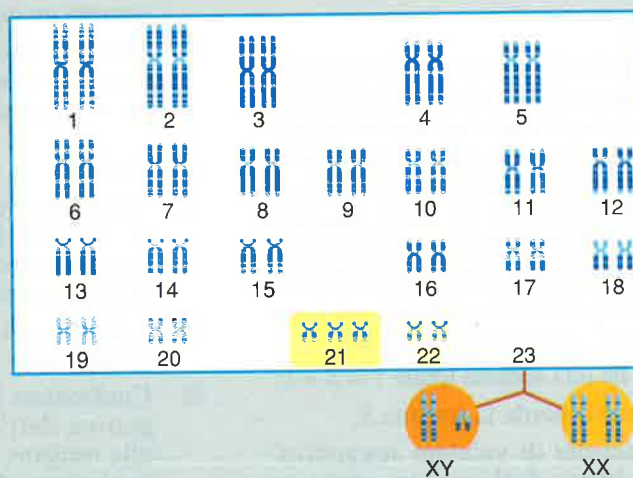
Nelle precedenti schede applicative dedicate alla genetica (pp. 461, 467, 472) è stata esaminata la trasmissione di alcuni caratteri ereditari, cioè di caratteri «scritti» sui cromosomi di un individuo e trasmessi ai figli, che ereditano i cromosomi dai genitori.

Questa scheda è dedicata invece alle anomalie genetiche, di cui l'esempio più noto è il *mongolismo*.

Vediamo meglio di che cosa si tratta: nel 1957 si è scoperto che le cellule umane contengono 46 cromosomi suddivisi in 23 coppie, mentre le cellule di un individuo mongoloide presentano 47 cromosomi. Il cromosoma in più «appartiene» alla coppia contrassegnata dal numero 21 (fig. 1) e per questo il mongolismo è chiamato più propriamente *trisomia 21* (cioè presenza di tre cromosomi 21) o *sindrome di Down* (cioè insieme di disturbi descritti per la prima volta nel secolo scorso dal medico inglese Longdon Down).

Perché un cromosoma in più? Da che cosa dipende? Non si è ancora riusciti a descrivere con precisione il meccanismo che provoca quest'errato numero di cromosomi e perciò non si riesce a valutare la probabilità di nascita di un bambino mongoloide contando i casi favorevoli e i casi possibili.

Figura 1  
Il corredo cromosomico  
di un individuo  
mongoloide





### Indagini statistiche sui neonati che presentano la trisomia 21

Le indagini su quest'anomalia sono state quindi condotte su basi statistiche: si sono raccolti in vari paesi i dati relativi alle nascite di molti bambini, contando i nati mongoloidi per cercare qualche «regolarità del caso». I dati presentati nella fig. 2 sono risultati fra i più significativi: l'indagine statistica è stata condotta dividendo le donne in classi d'età e, per ogni classe d'età, si sono contati i figli nati mongoloidi su 2240 neonati.

Questi dati portano una madre a valutare la probabilità  $P$  di concepire un bambino mongoloide nel modo seguente:

- donna fino all'età di 30 anni,  $P = \frac{1}{2240}$ ;

- donna dai 41 ai 45 anni,  $P' = \frac{34}{2240} = 34P$ ;

- donna dai 46 ai 50 anni,  $P'' = \frac{146}{2240} = 146P$ .

L'età della madre e la nascita di un bambino mongoloide non sono dunque eventi indipendenti, dato che la probabilità di avere un bambino mongoloide aumenta notevolmente con l'età.

Analoghe ricerche sul padre non hanno invece mostrato finora alcuna dipendenza fra l'età del padre e la nascita di un bambino mongoloide.

Non si è ancora spiegato con certezza come l'età della donna possa portare alla formazione di gameti con un cromosoma in più, ma si ipotizza che ciò sia dovuto a un invecchiamento delle cellule destinate a formare i gameti femminili, dato che la donna nasce con un numero fisso di gameti potenziali già presenti nelle ovaie, a differenza dell'uomo che produce continuamente i suoi gameti.

Oggi è possibile scoprire molto presto se il bambino concepito è mongoloide grazie ad un esame speciale (l'amniocentesi), che è dunque molto importante per le donne che hanno superato i 40 anni.

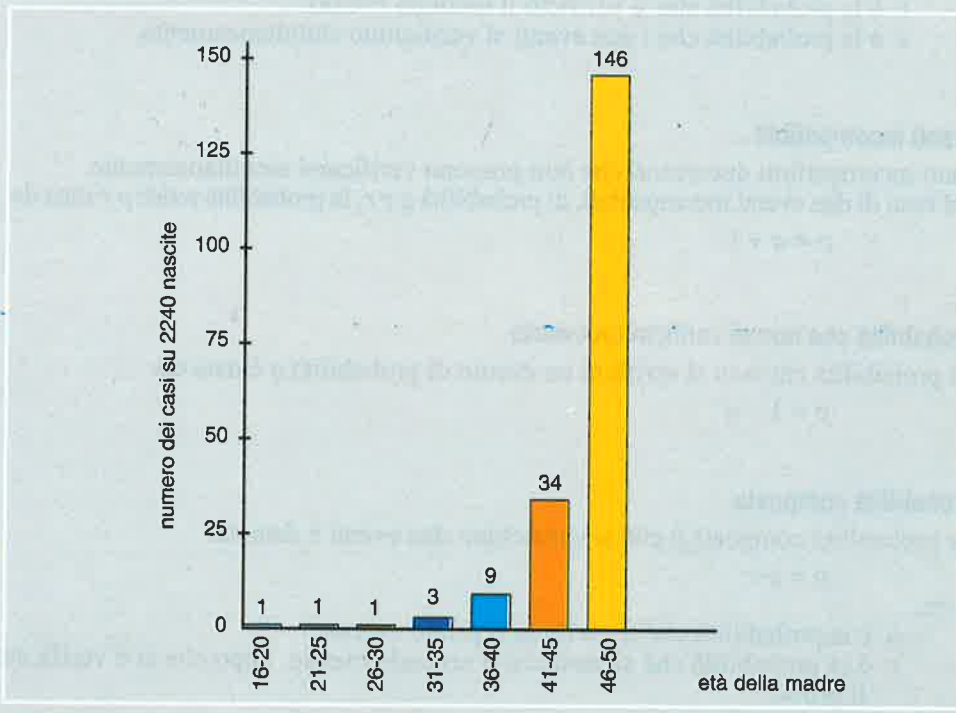


Figura 2  
Indagine statistica  
sul mongolismo



# Che cosa bisogna sapere

## Probabilità di un evento

La probabilità  $p$  di un evento è data da:

$$p = \frac{F}{N}$$

dove  $F$  è il numero dei casi favorevoli e  $N$  il numero dei casi possibili, *purché tutti i casi siano ugualmente possibili*.

## Probabilità totale

La probabilità totale  $p$  che si verifichi almeno uno di due eventi è data da:

$$p = q + r - s$$

dove:

- $q$  è la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r$  è la probabilità che si verifichi il secondo evento;
- $s$  è la probabilità che i due eventi si verifichino simultaneamente.

## Eventi incompatibili

Sono incompatibili due eventi che non possono verificarsi simultaneamente.

Nel caso di due eventi incompatibili, di probabilità  $q$  e  $r$ , la probabilità totale  $p$  è data da:

$$p = q + r$$

## Probabilità che non si verifichi un evento

La probabilità che *non* si verifichi un evento di probabilità  $q$  è data da:

$$p = 1 - q$$

## Probabilità composta

La probabilità composta  $p$  che si verifichino due eventi è data da:

$$p = q \cdot r$$

dove:

- $q$  è la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r$  è la probabilità che si verifichi il secondo evento, dopo che si è verificato il primo.

### Eventi indipendenti

Due eventi sono indipendenti quando il verificarsi di uno non modifica la probabilità dell'altro.

Nel caso di due eventi indipendenti, di probabilità  $q$  e  $r$ , la probabilità composta  $p$  è data da:

$$p = q \cdot r$$

### Permutazioni di $n$ elementi diversi

I modi di ordinare  $n$  elementi diversi si dicono *permutazioni*.

Il numero delle permutazioni di  $n$  elementi diversi si indica con  $P_n$  ed è dato da:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

### Fattoriale di un numero intero positivo $n$

Il fattoriale di un numero  $n$  si indica con il simbolo  $n!$  ed è dato da:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{con} \quad 0! = 1$$

### Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale si indica con il simbolo  $\binom{n}{k}$ , definito solo per  $0 \leq k \leq n$ , ed è dato da:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

### Valutazione statistica della probabilità

La probabilità  $p$  di un evento, valutata a partire da indagini statistiche, è data da:

$$p = \frac{V}{N}$$

dove  $V$  è il numero dei casi in cui l'evento si è verificato e  $N$  il numero dei casi osservati, purché il numero  $N$  dei casi osservati sia molto grande.

### Valutazione soggettiva della probabilità

La probabilità  $p$  di un evento, valutata a partire da una scommessa, è data da:

$$p = \frac{S}{T}$$

dove  $S$  è la somma che si è disposti a perdere se l'evento non si verifica e  $T$  è la somma che si ottiene se l'evento si verifica.

# Che cosa bisogna saper fare

## Indicazioni per risolvere un problema di calcolo delle probabilità

Le nozioni di calcolo delle probabilità finora introdotte permettono di analizzare e risolvere molti problemi nei campi più vari.

Per analizzare i problemi ed impostarne correttamente la risoluzione conviene ricordare le seguenti indicazioni:

I. *esaminare attentamente l'evento assegnato, per scoprire se è composto da altri eventi più semplici;*

II. *applicare la formula*

$$p = \frac{F}{N}$$

*solo quando si sono individuati N casi tutti ugualmente probabili.*

Sulla definizione di probabilità:  $p = \frac{F}{N}$

### Attività 1

Si vuole calcolare la probabilità che un italiano scelto a caso sia di una data regione, per esempio delle Marche; esaminare i seguenti due procedimenti *a*, *b* e scegliere il procedimento corretto, motivando la scelta.

a. Si calcola la probabilità *p* nel modo seguente:

- casi possibili  $N = 20$  (il numero di regioni)

- casi favorevoli  $F = 1$  (la regione scelta)

- probabilità  $p = \frac{1}{20} = 0,05$

b. Si cercano i dati dell'ultimo censimento e si calcola la probabilità *p* nel modo seguente:

- casi possibili  $N = 56\,556\,911$  (numero degli abitanti d'Italia)

- casi favorevoli  $F = 1\,412\,404$  (numero degli abitanti delle Marche)

- probabilità  $p = \frac{1\,412\,404}{56\,556\,911} \cong 0,025$

## Sulla probabilità composta: $p = q \cdot r$

### Attività 2

Si lancia due volte un dado da poker (fig. 1); valutare la probabilità che esca una figura tutte e due le volte.

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. Comprensione del testo. L'evento assegnato è:  
A: «esce una figura al primo e al secondo lancio».
2. Esame dell'evento assegnato. L'evento assegnato è composto dai seguenti eventi:  
B: «esce una figura al primo lancio»;  
C: «esce una figura al secondo lancio».
3. Scelta del procedimento. L'evento A consiste nel verificarsi di B e C, perciò si deve considerare la probabilità composta.
4. Calcoli.
  - I due eventi B e C sono indipendenti.
  - La probabilità q dell'evento B è:  $q = \dots\dots\dots$
  - La probabilità r dell'evento C è:  $r = \dots\dots\dots$
  - La probabilità p dell'evento A è:  
 $p = \dots\dots\dots \cdot \dots\dots\dots = 0,25$

## Sulla probabilità totale: $p = q + r - s$

### Attività 3

Si lancia due volte un dado da poker (fig. 1); valutare la probabilità che esca una figura almeno una volta.

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. Comprensione del testo. L'evento assegnato è:  
A: «..... o .....».
2. Esame dell'evento assegnato. L'evento assegnato è composto dai seguenti eventi:  
B: «.....»;  
C: «.....».
3. Scelta del procedimento. L'evento A consiste nel verificarsi di B o C, perciò si deve considerare la .....
4. Calcoli.
  - La probabilità q dell'evento B è:  $q = \dots\dots\dots$
  - La probabilità r dell'evento C è:  $r = \dots\dots\dots$
  - La probabilità s che si verifichino B e C è:  $s = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
  - La probabilità p dell'evento A è:  
 $p = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = 0,75$

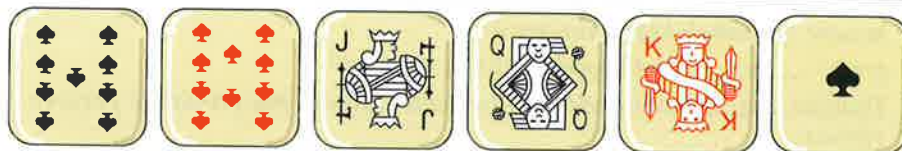


Figura 1  
Le sei facce di un  
dado da poker



## Sulla probabilità che un evento non si verifichi: $p = 1 - q$

### Attività 4

Si lancia un dado da poker (fig. 1); qual è la probabilità  $p$  che non esca un asso?

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. Si valuta la probabilità  $q$  dell'evento «esce un asso»:

- casi possibili  $N = \dots\dots\dots$

- casi favorevoli  $F = \dots\dots\dots$

- probabilità  $q = \frac{\dots}{\dots} \cong 0,17$

2. Si valuta la probabilità  $p$  dell'evento «non esce un asso»:

$$p = 1 - \dots\dots\dots = 0,83$$

## Su tutte le nozioni introdotte

Figura 2  
Le sei facce di  
un dado da gioco



### Attività 5

Il Cavaliere di Méré, famoso personaggio che ha stimolato nel XVII secolo gli studi sulla probabilità (cfr. anche la scheda storica, p. 478), aveva trovato un metodo per cui, giocando a dadi, risultava più spesso vincitore che vinto: lanciava quattro volte un dado (fig. 2), scommettendo sul fatto che uscisse 6 almeno una volta.

«Qual è la probabilità di vincere a questo gioco?», chiese il Cavaliere al grande matematico Pascal, suo amico.

Per rispondere rapidamente al quesito conviene procedere così:

1. si calcola la probabilità  $q$  di perdita;

2. si calcola la probabilità di vincita  $p = 1 - q$ .

1. Per calcolare la probabilità  $q$  di perdita, si può procedere così:

- si osserva che si perde quando si verifica il seguente evento:

A: non esce 6 quattro volte di seguito, cioè al primo e al secondo e al terzo e al quarto lancio;

- si nota che A è composto da quattro eventi indipendenti e cioè:

B: non esce 6 al primo lancio, con probabilità:  $r = \dots\dots\dots$

C: non esce 6 al secondo lancio, ancora con probabilità:  $r = \dots\dots\dots$

D: non esce 6 al terzo lancio, ancora con probabilità:  $r = \dots\dots\dots$

E: non esce 6 al quarto lancio, ancora con probabilità:  $r = \dots\dots\dots$

Si può ora calcolare la probabilità composta  $q$ , data da:

$$q = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \cong 0,48 \quad (\text{probabilità di perdere})$$

2. Si ottiene immediatamente:

$$p = 1 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \cong 0,52 \quad (\text{probabilità di vincere})$$

Si è così verificato che in questo gioco è più probabile vincere che perdere.

### Attività 6

Con lo stesso procedimento si può analizzare il seguente gioco: si lancia tre volte un dado, scommettendo sul fatto che esca 6 almeno una volta.

Qual è ora la probabilità di perdere e quella di vincere?

Ora la probabilità di perdere è data da:

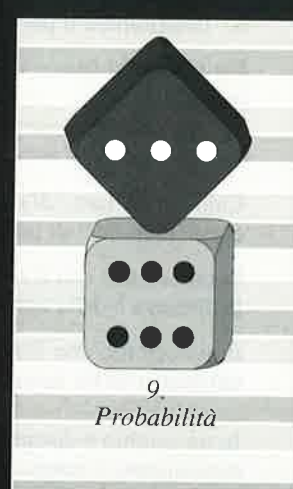
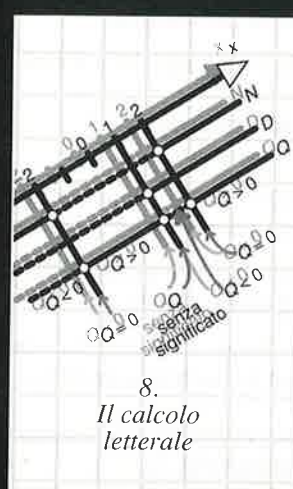
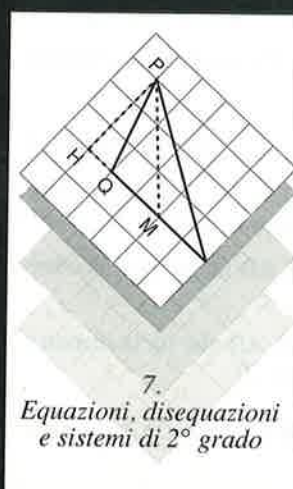
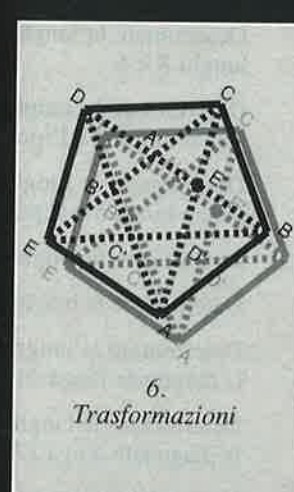
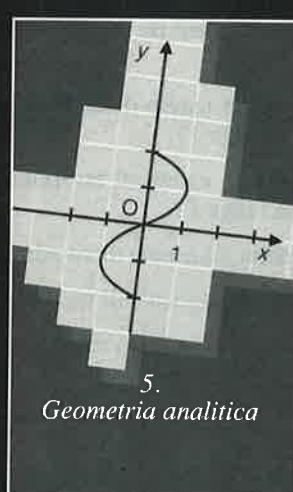
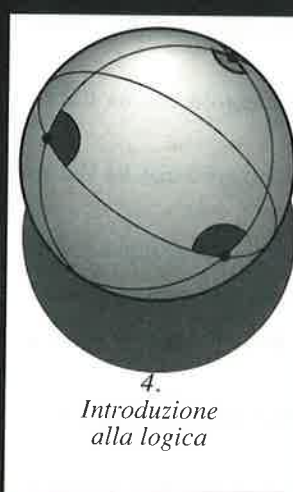
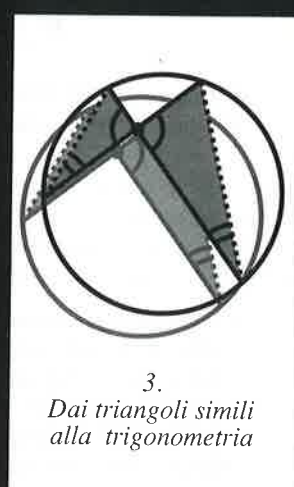
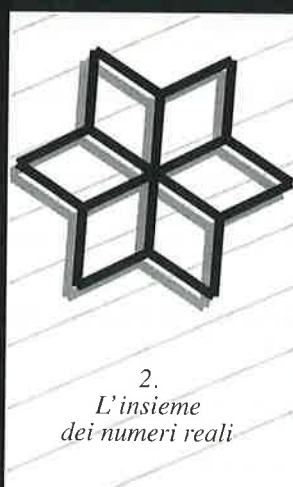
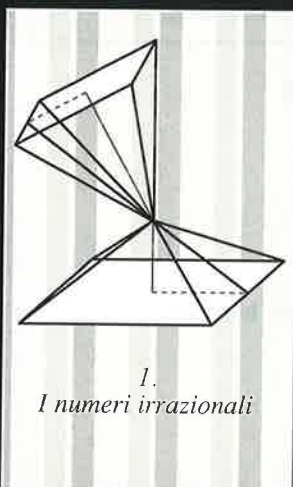
$$q = \dots\dots\dots \cong 0,58 \quad (\text{probabilità di perdere})$$

mentre la probabilità di vincere è:

$$p = 1 - \dots\dots\dots \cong 0,42 \quad (\text{probabilità di vincere})$$

Dunque, lanciando il dado solo tre volte, diventa più probabile perdere che vincere.

# E S E R C I Z I



123

456

789

## Il teorema di Pitagora

### Il teorema di Pitagora per risolvere problemi di geometria piana

I problemi dal n. 1 al n. 16 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il teorema di Pitagora;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

- Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
  - ABC, con i lati lunghi 6, 8 e 10;
  - A'B'C', con i lati lunghi 7, 9 e 11;
  - A''B''C'', con i lati lunghi 5, 7 e 9;
  - DEF, con i lati lunghi 12, 16 e 20;
  - D'E'F', con i lati lunghi 3, 4 e 5.
- Determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi 10 e 24.
- Determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi 8 e 6.
- Determinare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto lungo 8 e l'ipotenusa lunga 17.
- Determinare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto lungo 5 e l'ipotenusa lunga 13.
- Determinare la lunghezza della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 7 e 24.
- Determinare la lunghezza della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 21 e 20.
- Determinare la lunghezza di un lato di un rettangolo che ha l'altro lato lungo 9 e la diagonale lunga 41.
- Determinare la lunghezza di un lato di un rettangolo che ha l'altro lato lungo 15 e la diagonale lunga 17.
- Un triangolo isoscele ha la base lunga 8 e l'altezza relativa alla base lunga 3; risolvere i seguenti quesiti:
  - determinare il lato  $b$  del triangolo;
  - determinare il perimetro  $2p$  del triangolo.
- Un triangolo isoscele ha la base lunga 24 e il lato lungo 13; risolvere i seguenti quesiti:
  - determinare l'altezza  $h$  del triangolo;
  - determinare l'area  $S$  del triangolo.
- Calcolare il lato  $l$  di un rombo che ha le diagonali lunghe 16 e 30. Tenere presente che le diagonali di un rombo sono perpendicolari e si tagliano a metà.
- In un cerchio con il raggio lungo 13 è disegnata una corda AB lunga 24; calcolare la distanza  $h$  della corda dal centro (fig. 1).
- In un cerchio con il raggio lungo 20 è disegnata una corda AB che ha la distanza dal centro  $h=16$ ; determinare la lunghezza  $2a$  della corda (fig. 2).
- In un cerchio è disegnata una corda AB, che è lunga  $2a=40$  e dista  $h=21$  dal centro; determinare il raggio del cerchio (fig. 3).
- In un cerchio di raggio lungo 10 sono disegnate due corde parallele: AB lunga 12 e CD lunga 16 (fig. 4). Determinare la distanza  $h$  fra le due corde.

Figura 1

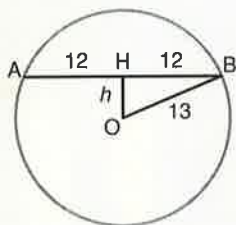
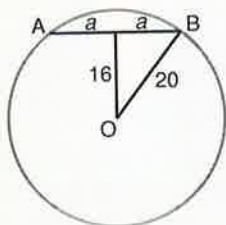


Figura 2





## Il teorema di Pitagora per scoprire proprietà delle figure piane

I problemi dal n. 17 al n. 26 presentano le seguenti caratteristiche:

- richiedono di dimostrare delle proprietà delle figure piane basandosi sul teorema di Pitagora;
- danno dei suggerimenti per impostare la dimostrazione.

17. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare un punto qualunque P del cateto AC e congiungerlo con il vertice opposto B; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$PB^2 + AC^2 = AP^2 + BC^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli ABP e ABC]

18. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare il punto medio M del cateto AC e congiungerlo con il vertice opposto B; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$BM^2 + 3AM^2 = BC^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABM e ABC, ricordando che  $AC = 2AM$ ]

19. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare un punto qualunque D del cateto AB e un punto qualunque E del cateto AC; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$EB^2 + DC^2 = BC^2 + ED^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABE, ADC, ABC, ADE]

20. Disegnare un triangolo equilatero ABC e il cerchio a esso circoscritto che ha centro O e raggio  $r$ ; disegnare il diametro passante per uno dei vertici del triangolo, per esempio CH, e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché i triangoli OAH e OBH sono equilateri e determinarne il lato;

b. dimostrare che risulta:

$$AC^2 = 3r^2$$

c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[(a) Il triangolo AOH è isoscele perché..., ha l'angolo  $\widehat{AOH}$  ampio  $60^\circ$  perché...]

(b) Applicare il teorema di Pitagora al triangolo CAH, che è rettangolo perché...]

21. Disegnare un quadrilatero ABCD con le diagonali AC e DB che si incontrano nel punto H e sono perpendicolari; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$AD^2 + CB^2 = DC^2 + AB^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ADH, CHB, AHB, DHC]

22. Disegnare un quadrato ABCD, fissare a piacere un punto P interno al quadrato e tracciare (fig. 5):

- le distanze di P dai vertici, cioè PA, PB, PC, PD;

- le distanze di P dai lati del quadrato (PH, PK, PL, PM in fig. 5).

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2(PH^2 + PK^2 + PL^2 + PM^2)$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHP, PHB, PLC, PLD]

Figura 3

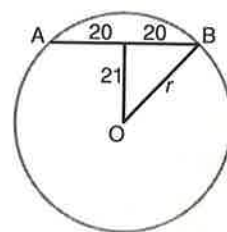


Figura 4

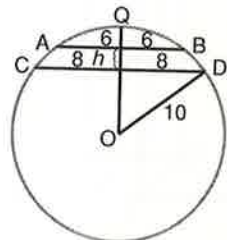


Figura 5

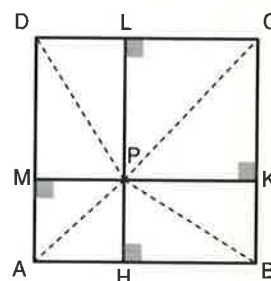




Figura 6

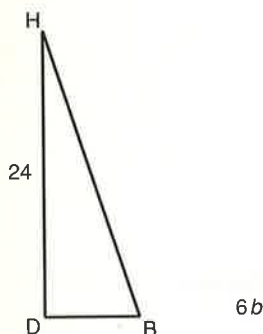
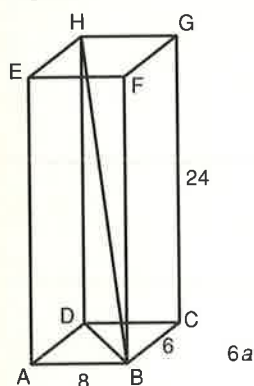
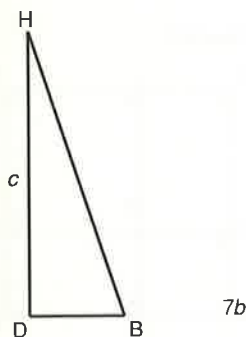
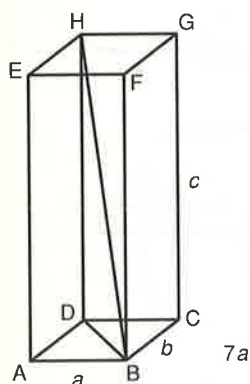


Figura 7



23. Disegnare un rettangolo ABCD e, all'interno, fissare a piacere un punto P; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che risulta:  

$$PA^2 + PC^2 = BP^2 + DP^2$$
  - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.  
*[Tracciare per P la parallela al lato AD, fino a incontrare AB in H e DC in K; applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHP, PHB, PKC, PKD]*
24. Disegnare un rettangolo ABCD e costruire un qualunque triangolo ABE esterno al rettangolo; dimostrare che risulta:  

$$EA^2 + EC^2 = BE^2 + DE^2$$
  
*[Tracciare per E la parallela al lato AD, fino a incontrare AB in H e DC in K; applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHE, KCE, EHB, EKD]*
25. Disegnare un trapezio isoscele ABCD circoscritto a un cerchio di centro O e risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché sono rettangoli i triangoli DOA e COB, dove DA e CB sono i lati obliqui del trapezio (vedi il primo volume, pp. 231-232);
  - dimostrare che risulta:  

$$AD^2 + BC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$
  - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.  
*[(b) Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli DOA e COB]*
26. Disegnare un trapezio rettangolo ABCD con la diagonale minore AC che è perpendicolare al lato obliquo BC; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che risulta:  

$$AB^2 = BC^2 + DC^2 + AD^2$$
  - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata;
  - dire come si può costruire un pentagono in cui il quadrato costruito su un lato sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri quattro lati.  
*[Applicare il teorema di Pitagora prima al triangolo rettangolo ABC e, successivamente, al triangolo rettangolo ADC]*

### Il teorema di Pitagora per studiare figure solide

I problemi dal n. 27 al n. 32 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il teorema di Pitagora;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali;
- richiedono di tenere presenti alcune nozioni elementari sulle figure solide.

27. È dato un parallelepipedo con gli spigoli lunghi 6, 8 e 24 (fig. 6a); risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza della diagonale DB della faccia ABCD;
  - calcolare la lunghezza della diagonale HB del parallelepipedo.
- Tenere presente che HB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti DB e DH (fig. 6b) [HB=26]
28. Risolvere l'esercizio 27 in generale, cioè a partire da un parallelepipedo con gli spigoli lunghi a, b e c (fig. 7); risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza della diagonale DB della faccia ABCD;
  - calcolare la lunghezza della diagonale HB del parallelepipedo.

29. È data una piramide retta a base quadrata con il lato di base lungo 8 e l'altezza VH lunga 3 (fig. 8); determinare l'apotema VK della piramide.
30. Risolvere l'esercizio 29 in generale, cioè a partire da una piramide retta a base quadrata con il lato di base lungo  $2b$  e l'altezza lunga  $h$  (fig. 9).
31. È data una piramide retta a base quadrata (fig. 10) che ha il lato di base lungo 10 e l'apotema lungo 13; calcolare l'altezza  $h$  della piramide.
32. È data una piramide retta a base quadrata (fig. 11) che ha l'altezza lunga 10 e l'apotema lungo 13; calcolare il lato di base  $2b$  della piramide.

Figura 8

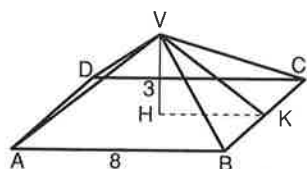


Figura 9

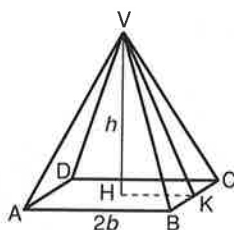


Figura 10

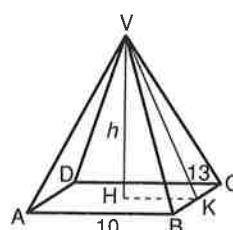
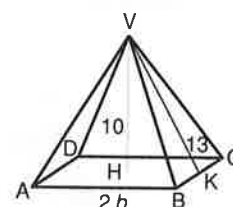


Figura 11



## Il primo teorema di Euclide

I problemi dal n. 33 al n. 41 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il primo teorema di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

33. Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
- LMN con il lato LM lungo 16 e il lato LN lungo 8, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 4;
  - L'M'N' con il lato LM lungo 17 e il lato LN lungo 9, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 5;
  - L''M''N'' con il lato LM lungo 8 e il lato LN lungo 4, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 2.
34. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 9; determinare la lunghezza del cateto.
35. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 27 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 3; determinare la lunghezza del cateto.
36. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 10 e un cateto lungo 6; determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
37. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 25 e un cateto lungo 10; determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
38. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 12 e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 8; determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
39. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 15 e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 10; determinare la lunghezza dell'ipotenusa.

40. Esaminare la fig. 12 in cui è rappresentato il triangolo ABC, rettangolo in C, e rispondere ai seguenti quesiti:
- AHDE è il rettangolo di dimensioni  $p$  e  $c$ : calcolare l'area di ACE, considerando il lato AE e l'altezza relativa al lato AE;
  - spiegare perché nel triangolo ACE l'altezza relativa al lato AC è lunga quanto il cateto AC.
41. Esaminare la fig. 13 in cui è rappresentato il triangolo ABC, rettangolo in C, e rispondere ai seguenti quesiti:
- ACLM è il quadrato costruito sul cateto AC: determinare l'area del triangolo MAB, considerando il lato AB e l'altezza relativa al lato AB.
  - spiegare perché nel triangolo MAB l'altezza relativa al lato AB è lunga quanto la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa.

Figura 12

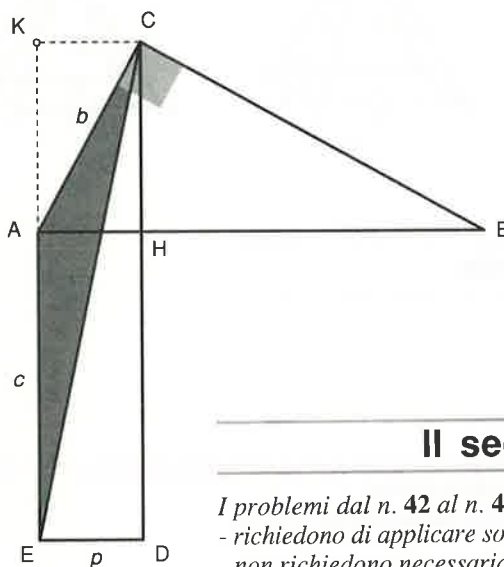
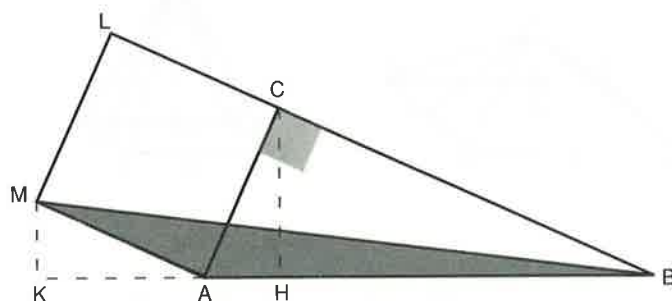


Figura 13



## Il secondo teorema di Euclide

*I problemi dal n. 42 al n. 48 hanno le seguenti caratteristiche:*

- richiedono di applicare solo il secondo teorema di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

42. Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
- LMN ha l'altezza NH lunga 6, che divide il lato LM in due parti lunghe 9 e 4;
  - L'M'N' ha l'altezza NH lunga 5, che divide il lato LM in due parti lunghe 8 e 3;
  - L''M''N'' ha l'altezza NH lunga 12, che divide il lato LM in due parti lunghe 18 e 8.
43. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 6; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa;
  - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
44. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 10 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 4; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa;
  - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
45. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 24 e 6; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
  - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.

46. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 20 e 5; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;  
 b. determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
47. Disegnare un trapezio isoscele ABCD circoscritto a un cerchio di centro O e raggio  $r$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché sono rettangoli i triangoli DOA e COB, dove DA e CB sono i lati obliqui del trapezio (vedi il primo volume, pp. 231-232);  
 b. indicare con H, K e L i punti di contatto della base AB, del lato obliquo CB e dell'altra base DC con la circonferenza (vedi il primo volume, p. 232); spiegare perché risulta:  

$$KB = \frac{HB}{2} \qquad KC = \frac{DC}{2}$$
  
 c. dimostrare che risulta:  

$$\frac{AB}{2} \cdot \frac{CD}{2} = r^2$$
  
 d. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.  
*[Applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo BOC, tenendo presente che l'altezza relativa all'ipotenusa è il raggio]*
48. Disegnare una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo  $2r$ ; tracciare le seguenti tangenti alla circonferenza:  
 - tangente  $a$ , che tocca la semicirconferenza in A;  
 - tangente  $b$ , che tocca la semicirconferenza in B;  
 - tangente  $t$ , che tocca la semicirconferenza in un qualunque punto T e incontra la retta  $a$  in P e la retta  $b$  in Q.  
 Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 47):  
 a. spiegare perché il triangolo POQ è rettangolo;  
 b. dimostrare che risulta:  

$$AP \cdot BQ = r^2$$
  
 c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

---

## Sui teoremi di Pitagora e di Euclide

---

*I problemi dal n. 49 al n. 58 hanno le seguenti caratteristiche:*

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

49. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 9; determinare i lati del triangolo. [15; 20; 25]
50. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 16; determinare i lati del triangolo. [15; 20; 25]
51. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 50 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 32; determinare i lati del triangolo. [30; 40; 50]
52. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 18 e 32; determinare i lati del triangolo. [30; 40; 50]



53. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa lunga 3; determinare i lati del triangolo.  
[5;  $\frac{20}{3}$ ;  $\frac{25}{3}$ ]
54. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa lunga 4; determinare i lati del triangolo.  
[5;  $\frac{15}{4}$ ;  $\frac{25}{4}$ ]
55. Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 3 e 4; determinare l'ipotenusa, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.  
[5; 1,8; 3,2; 2,4]
56. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10; determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.  
[8; 3,6; 6,4; 4,8]
57. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 10 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 6; determinare la proiezione del cateto sull'ipotenusa, l'ipotenusa, l'altro cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa.  
[8; 12,5; 7,5; 4,5]
58. Un rombo ABCD ha le diagonali lunghe 42 e 56 che si incontrano nel punto O e da O si traccia la perpendicolare OH al lato AB; risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare il lato AB del rombo;  
b. determinare la lunghezza dei segmenti AH, HB e OH.  
[(b) AH=12,6; HB=22,4; OH=16,8]

## I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono a equazioni di 1° grado

*I problemi dal n. 59 al n. 70 hanno le seguenti caratteristiche:*

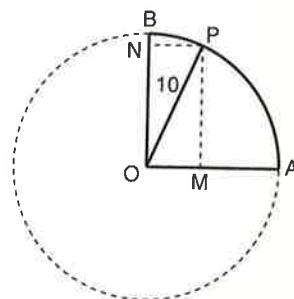
- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- conducono a risolvere equazioni di 1° grado con coefficienti numerici;
- hanno tutti i risultati razionali.

*Il procedimento per impostare e risolvere questo tipo di problemi è quello indicato nel primo volume, p. 449.*

59. In un rombo una diagonale  $d$  è  $\frac{3}{4}$  dell'altra diagonale  $d'$  e la somma delle due diagonali vale 14.  
Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 12):  
a. determinare la lunghezza delle diagonali;  
b. determinare il lato e l'area  $S$  del rombo. [(a)  $d=6$ ;  $d'=8$ ; (b)  $S=24$ ]
60. In un rombo con il perimetro lungo 1600 una diagonale  $d$  è  $\frac{8}{5}$  del lato.  
Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 12):  
a. determinare la lunghezza del lato e della diagonale  $d$ ;  
b. determinare la lunghezza dell'altra diagonale e l'area  $S$  del rombo. [(a)  $d=64$ ; (b)  $d'=48$ ]
61. Un trapezio isoscele ha la base minore lunga 8, la base maggiore che è tripla della base minore e il perimetro che è lungo 52.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare la base maggiore e il lato obliquo del trapezio;  
b. determinare l'altezza  $h$  del trapezio;  
c. determinare l'area  $S$  del trapezio. [(c)  $S=96$ ]

62. Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo lungo 13, l'altezza lunga 5, una base doppia dell'altra e il perimetro lungo 54.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare le basi del trapezio;  
b. determinare l'area  $S$  del trapezio. [(b)  $S=90$ ]
63. Il perimetro di un rettangolo è lungo 92 e un lato è gli  $\frac{8}{15}$  dell'altro.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare i lati  $a$  e  $b$  del rettangolo;  
b. determinare la diagonale  $d$  del rettangolo. [(a)  $a=16$ ;  $b=30$ ; (b)  $d=34$ ]
64. In un triangolo rettangolo un cateto è  $\frac{3}{4}$  dell'altro e la somma dei cateti vale 49.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare i cateti  $a$  e  $b$  del triangolo;  
b. determinare l'ipotenusa  $c$  del triangolo. [(a)  $a=28$ ;  $b=21$ ; (b)  $c=35$ ]
65. In un triangolo ABC, rettangolo in A, l'ipotenusa BC è  $\frac{13}{12}$  del cateto AB e la somma  $AB+BC$  misura 325.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare l'ipotenusa e il cateto AB;  
b. determinare il cateto AC e il perimetro  $2p$  del triangolo. [(b)  $2p=390$ ]
66. Un trapezio rettangolo ABCD ha l'altezza CH lunga 15, il lato obliquo BC lungo 17 e l'area che vale 390.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. indicata con AB la base maggiore, calcolare la lunghezza di HB;  
b. calcolare le basi e il perimetro  $2p$  del trapezio. [(b)  $2p=84$ ]
67. Un trapezio isoscele ABCD, che è circoscritto a una semicirconferenza, ha il perimetro lungo 110 e la base minore che è  $\frac{2}{5}$  del lato obliquo.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. spiegare perché la base maggiore è il doppio del lato obliquo (vedi il primo volume, p. 231);  
b. determinare i lati e l'area  $S$  del trapezio. [(b)  $S=450$ ]
68. Un trapezio ABCD ha l'altezza lunga 20, la base maggiore che è quadrupla della base minore e l'area che vale 1150. Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare le basi del trapezio;  
b. sapendo che le proiezioni dei lati obliqui sulla base sono l'una  $\frac{16}{7}$  dell'altra, determinare i lati obliqui e il perimetro  $2p$  del trapezio. [(b)  $2p=146$ ]
69. È dato un arco AB, quarta parte di una circonferenza con il centro O e il raggio lungo 10. Determinare sull'arco un punto P in modo che, indicate con M e N le sue proiezioni ortogonali su OA e OB (fig. 14), valga la relazione:  
$$ON^2 + AM^2 = OP^2$$
  
[Scegliendo come incognita  $x$  la distanza OM, si ottiene:  $x=5$ ]
70. È dato un quadrato ABCD con il lato lungo 8; determinare sul lato BC un punto P in modo che valga la relazione:  
$$PD^2 - AP^2 = \frac{CB^2}{4}$$
  
[Si può scegliere come incognita  $x$  la distanza CP; applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PDC e PAB, si ottiene:  $x=5$ ]

Figura 14



*I problemi dal n. 71 al n. 74 hanno le seguenti caratteristiche:*

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- conducono a risolvere equazioni di 1° grado letterali.

*Il procedimento per risolvere le equazioni di 1° grado letterali è esposto nel primo volume, p. 388.*

71. Determinare le diagonali e l'area di un rombo che ha il lato lungo  $a$  ed una diagonale che è  $\frac{3}{4}$  dell'altra.

[Indicando con  $2x$  la lunghezza della diagonale maggiore, si ottiene  $x=0,8a$ ]

72. Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale ai  $\frac{2}{5}$  della maggiore, il lato obliquo uguale alla base maggiore e l'altezza lunga  $h$ ; determinare il perimetro e l'area del trapezio.

[Indicando con  $x$  la lunghezza della base maggiore, si ottiene  $x=1,25h$ ]

73. È dato un quadrato ABCD con il lato lungo  $a$ . Tenendo anche presente l'esercizio 56, determinare sul lato BC un punto P in modo che valga la relazione:

$$PD^2 - AP^2 = \frac{CB^2}{4}$$

[ $x=0,625a$ ]

74. È dato un arco AB, quarta parte di una circonferenza con il centro O e il raggio lungo  $r$ .  
Determinare sull'arco un punto P in modo che, indicate con M e N le sue proiezioni ortogonali su OA e OB (fig. 13), valga la relazione:

$$ON^2 + AM^2 = OP^2$$

[Scegliendo come incognita  $x$  la distanza OM, si ottiene:  $x = \frac{r}{2}$ ]

## I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono a sistemi di 1° grado

*I problemi dal n. 75 al n.80 hanno le seguenti caratteristiche:*

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- possono condurre a sistemi di 1° grado con coefficienti numerici;
- hanno tutti i risultati razionali.

*Il procedimento per impostare e risolvere questo tipo di problemi è analogo a quello indicato nel primo volume, p. 449.*

75. In un triangolo rettangolo la somma dei cateti vale 14, e la loro differenza 2.  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare i cateti del triangolo;  
b. determinare l'ipotenusa  $c$  del triangolo.

[ $(b) c=10$ ]

76. In un triangolo rettangolo la somma dei cateti vale 7, mentre la loro differenza è 1. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare i cateti del triangolo;  
 b. determinare l'ipotenusa  $c$  del triangolo.  
 [(b)  $c=5$ ]
77. In un rettangolo la somma della diagonale e di un lato vale 72, mentre la loro differenza è 8. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la diagonale e il lato del rettangolo;  
 b. determinare il perimetro  $2p$  del rettangolo.  
 [(b)  $2p=112$ ]
78. In un rettangolo la somma della diagonale e di un lato vale 18, mentre la loro differenza è 2. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la diagonale e il lato del rettangolo;  
 b. determinare il perimetro  $2p$  del rettangolo.  
 [(b)  $2p=28$ ]
79. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 25 e la differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è lunga 7. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa;  
 b. determinare i cateti del triangolo;  
 c. determinare il perimetro  $2p$  e l'area  $S$  del triangolo  
 [(c)  $S=150$ ]
80. Un trapezio rettangolo ABCD ha l'altezza lunga 7,2, la base minore lunga 9,6 e la diagonale minore AC perpendicolare al lato obliquo BC. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la lunghezza della diagonale AC;  
 b. determinare gli altri lati del trapezio;  
 c. determinare il perimetro  $2p$  e l'area  $S$  del trapezio.  
 [(c)  $S=88,56$ ]

## I numeri irrazionali

*Gli esercizi dal n. 81 al n. 90 hanno le seguenti caratteristiche:*  
 - richiedono di applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide;  
 - richiedono di distinguere i numeri razionali da quelli irrazionali.

81. Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:  
 - ABC, che ha i cateti lunghi 3 e 4;  
 - A'B'C', che ha i cateti lunghi 4 e 5.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la lunghezza dell'ipotenusa di ogni triangolo;  
 b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
82. Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:  
 - ABC, che ha l'ipotenusa lunga 16 e un cateto lungo 8;  
 - A'B'C', che ha l'ipotenusa lunga 17 e un cateto lungo 8.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la lunghezza dell'altro cateto di ciascun triangolo;  
 b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.



- 83.** Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
- ABC, che ha l'ipotenusa lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 9;
  - A'B'C', che ha l'ipotenusa lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 8.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la lunghezza del cateto di ciascun triangolo;
  - b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
- 84.** Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
- ABC, che ha l'ipotenusa lunga 14 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 6;
  - A'B'C', che ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 6.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa di ciascun triangolo;
  - b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
- 85.** Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 10 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 4.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare i lati del triangolo;
  - b. indicare i lati che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 86.** Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 8 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 2.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare i cateti del triangolo;
  - b. indicare i lati che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 87.** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 15 e 8.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare l'ipotenusa, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa;
  - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 88.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e l'ipotenusa lunga 13.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa;
  - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 89.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 13 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 5.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la proiezione del cateto sull'ipotenusa, l'ipotenusa, l'altro cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa;
  - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 90.** Un rombo ha le diagonali lunghe 24 e 10 che si incontrano nel punto O; da O si traccia la perpendicolare OH al lato AB.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare il lato AB del rombo e la lunghezza dei segmenti AH, HB e OH;
  - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.

## I radicali quadratici e la loro scrittura decimale

Gli esercizi dal n. 91 al n. 102 conducono a distinguere un radicale quadratico dalla sua scrittura decimale.

91. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in C, con i cateti lunghi 1 e 2. Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza  $c$  dell'ipotenusa BC;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$c=\sqrt{5}$$

$$c=2,24$$

$$c\cong 2,24$$

$$c^2\cong 5$$

92. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in C, con i cateti lunghi 1 e 2; dal punto A disegnare il segmento AD lungo 2 e perpendicolare all'ipotenusa AB. Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza  $d$  del segmento BD;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$d\cong 3$$

$$d^2=5+4$$

$$d^2=(2,24)^2+4$$

$$d^2\cong (\sqrt{5})^2+4$$

93. Disegnare un triangolo rettangolo LMN con le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 3.

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza  $h$  dell'altezza relativa all'ipotenusa;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta e correggere quelle errate:

$$h\cong \sqrt{3}$$

$$h\cong 1,73$$

$$(1,73)^2=3$$

$$(\sqrt{3})^2\cong 3$$

94. Risolvere i seguenti quesiti relativi al triangolo LMN dell'esercizio 93:

- calcolare la lunghezza  $m$  del cateto che ha la proiezione sull'ipotenusa lunga 1;
- calcolare la lunghezza  $n$  del cateto che ha la proiezione sull'ipotenusa lunga 3;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$m\cong 2$$

$$m^2=1+3$$

$$n^2\cong 12$$

$$n=3,46$$

$$n=\sqrt{12}$$

95. Completare le seguenti uguaglianze:

$$4=(\dots)^2$$

$$2=(\dots)^2$$

$$8=(\dots)^2$$

$$9=(\dots)^2$$

96. Spiegare perché le formule seguenti sono tutte errate e correggere gli errori:

$$\sqrt{9}\cong 3$$

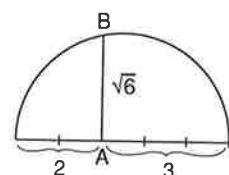
$$3^2\cong 9$$

$$\sqrt{3}=1,73$$

$$(1,73)^2=3$$

$$(\sqrt{3})^2\cong 3$$

Figura 15



15a

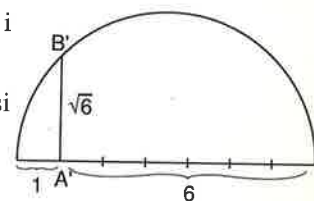
97. Scrivere in forma decimale le radici quadrate dei primi venti numeri naturali, prestando particolare attenzione al corretto uso dei simboli «=» e «≅».

98. Spiegare perché, con i due procedimenti illustrati in fig. 15 si ottengono i segmenti AB e A'B' lunghi esattamente  $\sqrt{6}$  cm.

Costruire poi un segmento CD lungo  $\sqrt{12}$ , illustrando i vari procedimenti che si possono seguire.

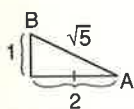
Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché CD non è il doppio di AB;
- scrivere  $\sqrt{6}$  e  $\sqrt{12}$  in forma decimale.

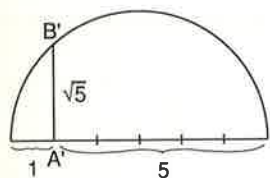


15b

Figura 16



16a



16b

99. Spiegare perché, con i due procedimenti illustrati in fig. 16, si ottengono i segmenti AB e A'B' lunghi esattamente  $\sqrt{5}$  cm. Costruire poi un segmento CD lungo  $\sqrt{15}$ , illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD non è il triplo di AB;
  - scrivere  $\sqrt{5}$  e  $\sqrt{15}$  in forma decimale.
100. Costruire un segmento AB lungo esattamente  $\sqrt{7}$  cm. Costruire poi un segmento CD lungo  $\sqrt{28}$ , illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD è il doppio di AB;
  - scrivere  $\sqrt{7}$  e  $\sqrt{28}$  in forma decimale.
101. Costruire un segmento AB lungo esattamente  $\sqrt{3}$  cm. Costruire poi un segmento CD lungo  $\sqrt{27}$ , illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD è il triplo di AB.
  - scrivere  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{27}$  in forma decimale.
102. Costruire un segmento AC, ottenuto disegnando due segmenti consecutivi: AB lungo  $\sqrt{8}$  cm e BC lungo  $\sqrt{2}$ . Costruire poi un segmento DE lungo  $\sqrt{10}$  e confrontare i segmenti AC e DE.

## Radicali

Gli esercizi dal n. 103 al n. 109 conducono a impadronirsi del simbolo di radicale.

103. Completare le seguenti uguaglianze:

$$8=(\dots)^3$$

$$2=(\dots)^3$$

$$20=(\dots)^3$$

$$27=(\dots)^3$$

104. Completare le seguenti uguaglianze:

$$16=(\dots)^4$$

$$5=(\dots)^4$$

$$45=(\dots)^4$$

$$81=(\dots)^4$$

105. Completare le seguenti uguaglianze:

$$32=(\dots)^5$$

$$10=(\dots)^5$$

$$49=(\dots)^5$$

$$243=(\dots)^5$$

106. Completare la seguente tabella, come è indicato nella prima riga.

Radicale $\sqrt[n]{a^m}$	Indice del radicale $n$	Radicando $a^m$	Esponente del radicando $m$
$\sqrt[4]{7^3}$	4	$7^3$	3
$\sqrt[3]{7^4}$			
	7	$3^4$	
	5	$4^3$	
	7	4	
	4	7	
	3	7	

107. Scrivere 10 radicali a piacere precisando:  
 - l'indice del radicale;  
 - il radicando e l'esponente del radicando.

108. Completare le seguenti uguaglianze:

$$(\sqrt[3]{5})^3 = \dots \quad (\sqrt[5]{3})^5 = 3 \quad (\sqrt[4]{\dots})^4 = 6 \quad (\sqrt[7]{7})^5 = 7$$

109. Completare le seguenti uguaglianze:

$$(\sqrt[3]{4^2})^3 = \dots \quad (\sqrt[5]{4^3})^5 = 4^3 \quad (\sqrt[4]{\dots})^4 = 3^2$$

$$(\sqrt[7]{11^3})^5 = 11^3 \quad (\sqrt[5]{13^2})^5 = 13^2 \quad (\sqrt[7]{4^{\dots}})^7 = 4^{\dots}$$

## Potenze a esponente frazionario

Gli esercizi dal n. 110 al n. 117 richiedono solo di applicare la nozione di potenza a esponente frazionario.

110. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{8} = \dots \quad \sqrt[3]{8} = \dots \quad \sqrt[4]{8} = \dots \quad \sqrt[5]{8} = \dots$$

111. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{7} = \dots \quad \sqrt[3]{7} = \dots \quad \sqrt[4]{7} = \dots \quad \sqrt[5]{7} = \dots$$

112. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[3]{11} = \dots \quad \sqrt[3]{11^2} = \dots \quad \sqrt[3]{11^4} = \dots \quad \sqrt[3]{11^6} = \dots$$

113. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{7} = \dots \quad \sqrt[3]{7} = \dots \quad \sqrt[4]{7} = \dots \quad \sqrt[5]{7} = \dots$$

114. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[4]{5} = \dots \quad \sqrt[5]{4} = \dots \quad \sqrt[5]{5^4} = \dots \quad \sqrt[4]{4^5} = \dots$$

115. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[4]{5^3} = \dots \quad \sqrt[3]{5^4} = \dots \quad \sqrt[5]{4^3} = \dots \quad \sqrt[5]{3^4} = \dots$$



- 116.** Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni potenza a esponente frazionario sotto forma di radicale; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad 16^{\frac{1}{2}} = \dots \quad 16^{\frac{1}{4}} = \dots \quad 16^{\frac{3}{4}} = \dots \quad 16^{\frac{3}{2}} = \dots$$

- 117.** Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni potenza ad esponente frazionario sotto forma di radicale; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad 8^{\frac{1}{3}} = \dots \quad 32^{\frac{1}{5}} = \dots \quad 8^{\frac{2}{3}} = \dots \quad 32^{\frac{4}{5}} = \dots$$

Gli esercizi dal n. 118 al n. 122 richiedono di applicare:

- la nozione di potenza a esponente frazionario;
- la seguente proprietà delle potenze:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- 118.** Completare le seguenti uguaglianze:

$$\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dots \quad \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \dots \quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \dots \quad \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^5 = \dots$$

- 119.** Completare le seguenti uguaglianze:

$$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \dots \quad \left(16^{\frac{3}{4}}\right)^4 = \dots \quad \left(8^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \dots \quad \left(32^{\frac{4}{5}}\right)^5 = \dots$$

- 120.** Completare le seguenti uguaglianze per scrivere il risultato delle potenze, come indicato nel primo esempio:

$$\begin{array}{ll} 16^4 = (2^4)^4 = 2^{4 \cdot 4} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2 & 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = \dots \\ 8^3 = (2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = \dots & 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2^3 = \dots \\ 32^5 = (2^5)^5 = 2^{5 \cdot 5} = 2^{25} = \dots & 81^{\frac{5}{4}} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{5}{4}} = 3^5 = \dots \end{array}$$

- 121.** Determinare il risultato delle seguenti potenze, come indicato nell'esercizio 120:

$$16^{\frac{5}{4}} \quad 8^{\frac{4}{3}} \quad 32^{\frac{6}{5}} \quad 49^{\frac{3}{2}} \quad 49^{\frac{5}{2}}$$

- 122.** Determinare il risultato delle seguenti potenze, come indicato nell'esercizio 120:

$$64^{\frac{1}{2}} \quad 64^{\frac{2}{3}} \quad 64^{\frac{3}{2}} \quad 64^{\frac{5}{6}} \quad 64^{\frac{7}{6}}$$

## Le radici con il calcolatore tascabile

Gli esercizi dal n. 123 al n. 130 richiedono di usare il calcolatore tascabile.

123. Esaminare la seguente tabella:

Calcoli da eseguire	Sequenza di tasti	Risultato
$\sqrt{529}$		
		230
$\sqrt{52,9}$		
		2,3
$\sqrt{0,00529}$		
		0,23

Risolvere i seguenti quesiti:

- completare la tabella valendosi di un calcolatore tascabile;
- indicare i risultati esatti e quelli approssimati;
- spiegare perché tutte le formule seguenti sono errate e correggere gli errori:

$$\sqrt{529} \approx 23$$

$$\sqrt{52,9} \approx 2,3$$

$$\sqrt{52,9} = 7,27$$

124. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quadrate dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

125. Completare la seguente tabella, seguendo le indicazioni date nel testo a p. 30.

Calcolo	Sequenza di tasti	Risultato
$\sqrt[7]{128}$		
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>y^x</math></span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>\div</math></span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">=</span>	
$\sqrt[6]{11^5}$		
$\frac{11^5}{6}$		
$\sqrt[7]{125^3}$		

126. Valutare con un calcolatore tascabile le radici cubiche dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

127. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quarte dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

128. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quinte dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

129. Valutare con un calcolatore tascabile le radici seste dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

130. Valutare con un calcolatore tascabile le radici settime dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e  $\approx$ .

## Calcoli con i radicali

### Potenza di un radicale

Gli esercizi dal n. 131 al n. 140 richiedono solo di elevare a potenza dei radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

131. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{1}{5^3}\right)^2 =$	$(\sqrt[3]{5})^2 =$
		$(\sqrt[4]{23})^3 =$
	$\left(\frac{3}{7^2}\right)^4 =$	
		$(\sqrt{6^3})^5 =$
	$\left(\frac{2}{21^3}\right)^6 =$	
		$(\sqrt[5]{15^2})^3 =$

132. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{\dots}{10^{\dots}}\right)^{\dots} =$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}} =$
		$\sqrt[4]{\sqrt[3]{36}} =$
	$\left(\frac{2}{8^3}\right)^{\frac{1}{2}} =$	
		$\sqrt{\sqrt[4]{4^3}} =$
	$\left(\frac{2}{13^3}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
		$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{51}}} =$

133. Esaminare le seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt{5}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt{8}})^5 \quad (\sqrt[4]{\sqrt{17}})^7$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

134. Ripetere l'esercizio 133 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[5]{13}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt[5]{18}})^2 \quad (\sqrt[4]{\sqrt[5]{31}})^9$$

135. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\left(37^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(53^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \left(61^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di potenza a esponente frazionario con l'esponente ridotto ai minimi termini;
- riscrivere i risultati ottenuti valendosi dei radicali.

136. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(47^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \left(71^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(67^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

137. Esaminare le seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[3]{5}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt{2^4}})^5 \quad (\sqrt[4]{\sqrt{5^3}})^6$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale, con l'indice del radicale e l'esponente del radicando primi fra loro.
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

138. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[6]{19^2}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt[4]{73^2}})^3 \quad (\sqrt[4]{\sqrt[6]{89^3}})^8$$

139. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt[5]{31^3}}}\right)^4 \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{67^3}}}\right)^8 \quad \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{91^6}}}\right)^4$$

140. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt[5]{43^3}}}\right)^{10} \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{83^2}}}\right)^6 \quad \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{19^3}}}\right)^6$$



## Prodotto di radicali

Gli esercizi dal n. 141 al n. 150 richiedono solo di moltiplicare dei radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

141. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} =$
		$\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} =$
	$11^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} =$	
		$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10} =$
	$13^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} =$	
		$\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2^3} =$

142. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \qquad \sqrt{21} \cdot \sqrt{5} \qquad \sqrt{15} \cdot \sqrt{7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

143. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{23} \cdot \sqrt{6} \qquad \sqrt{7} \cdot \sqrt{11} \qquad \sqrt{13} \cdot \sqrt{30}$$

144. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{29} \cdot \sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{21} \qquad \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{5}$$

145. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{92} \cdot \sqrt[4]{3} \qquad \sqrt[4]{20} \cdot \sqrt[4]{9} \qquad \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[4]{10}$$

146. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{11^3} \cdot \sqrt[4]{5^3} \qquad \sqrt[4]{23^5} \cdot \sqrt[4]{11^5} \qquad \sqrt[3]{15^4} \cdot \sqrt[3]{7^4}$$

147. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \qquad \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$$

148. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{10^3} \qquad \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{7^2}$$

149. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10^3}$$

$$\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$$

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{10}$$

$$\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{55}$$

150. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{14}$$

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[7]{70}$$

$$\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{36}$$

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[3]{30}$$

### Portare un fattore fuori della radice

Gli esercizi dal n. 151 al n. 158 richiedono di portare un fattore fuori della radice, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

151. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\frac{1}{(5^2 \cdot 3)^2} =$	$\sqrt{5^2 \cdot 3} =$
		$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot \dots} =$
		$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \dots} =$

152. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{12}$$

$$\sqrt{45}$$

$$\sqrt{50}$$

$$\sqrt{200}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scomporre in fattori ciascun radicando;
- scrivere ogni radicale portando un fattore fuori della radice;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

153. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt{8}$$

$$\sqrt{20}$$

$$\sqrt{27}$$

$$\sqrt{1000}$$

154. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt{32}$$

$$\sqrt{28}$$

$$\sqrt{60}$$

$$\sqrt{2000}$$

155. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{16}$$

$$\sqrt[3]{40}$$

$$\sqrt[3]{54}$$

$$\sqrt[3]{2000}$$

156. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{81}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[3]{189}$$

$$\sqrt[3]{80000}$$

**157.** Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[4]{32}$$

$$\sqrt[4]{48}$$

$$\sqrt[4]{405}$$

$$\sqrt[4]{20000}$$

**158.** Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[4]{11250}$$

$$\sqrt[4]{80}$$

$$\sqrt[4]{324}$$

$$\sqrt[4]{160000}$$

### Divisione di radicali

*Gli esercizi dal n. 159 al n. 168 richiedono solo di dividere due radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.*

**159.** Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} =$	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$
		$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} =$
		$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$
		$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{10}} =$
		$\frac{\sqrt[4]{768}}{\sqrt[4]{3}} =$
		$\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{10}} =$

**160.** Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

161. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{\sqrt{600}}{\sqrt{6}}$$

162. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{23}}{\sqrt[3]{13}}$$

163. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{4^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{6^4}}{\sqrt[3]{3^4}}$$

164. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{810}}{\sqrt[4]{10}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$$

165. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{100}}{\sqrt[4]{8}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{50000}}{\sqrt[4]{5}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{24}}{\sqrt[4]{12}}$$

166. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{10^3}}{\sqrt[4]{2^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{14^3}}{\sqrt[4]{7^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{6^5}}{\sqrt[4]{3^5}}$$

167. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\frac{\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{3^3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{5}$$

168. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt[6]{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{6}$$

$$\frac{\sqrt[8]{12}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt{3}$$



## I radicali con radicando frazionario

Gli esercizi dal n. 169 al n. 173 richiedono solo di calcolare radici di frazioni, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

169. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{\frac{9}{4}} =$
		$\sqrt{\frac{4}{9}} =$
		$\sqrt{\frac{25}{16}} =$
		$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} =$
		$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} =$
		$\sqrt[4]{\frac{10}{16}} =$

170. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{4}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{81}{100}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di una frazione;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

171. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{49}}$$

$$\sqrt{\frac{121}{100}}$$

172. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$$

173. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{10000}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$$

## Espressioni con potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario

Gli esercizi dal n. 174 al n. 178 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario, applicando più proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile.

174. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(16 \cdot 16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 16 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \quad [2^3; 2^5; 2^4]$$

175. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(4 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 4 \cdot \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \quad [2; 2^{\frac{7}{3}}; 2^{\frac{5}{3}}]$$

176. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(8 \cdot 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 8 \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \quad [2^2; 2^{\frac{7}{2}}; 2^{\frac{5}{2}}]$$

177. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(512 \cdot 512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 512 \cdot \left(512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 512^{\frac{1}{3}} \cdot 512^{\frac{1}{3}} \quad [2^4; 2^{10}; 2^6]$$

178. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(256 \cdot 256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 256 \cdot \left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 256^{\frac{1}{2}} \cdot 256^{\frac{1}{4}} \quad [2^5; 2^9; 2^6]$$

## Espressioni con potenze, radici e moltiplicazioni di radicali

Gli esercizi dal n. 179 al n. 192 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze, radici e moltiplicazioni di radicali, applicando opportunamente più proprietà delle potenze.

179. Esaminare le seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 174):

$$\sqrt{16 \cdot \sqrt{16}} \quad 16 \cdot \sqrt{\sqrt{16}} \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{16}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere ciascuna espressione nella forma di un'espressione con potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione, valendosi delle proprietà delle potenze;
- scrivere il risultato dell'espressione in forma di radicale.

$$[2^3; 2^5; 2^4]$$

180. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 175):

$$\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{4}} \quad 4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{4}} \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{4} \quad [2; \sqrt[3]{2^7}; \sqrt[3]{2^5}]$$

181. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 176):

$$\sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{8}} \quad 8 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{8}} \quad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{8} \quad [2^2; \sqrt{2^7}; \sqrt{2^5}]$$

- 182.** Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 177):

$$\sqrt[3]{512 \cdot \sqrt[3]{512}} \quad 512 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} \quad \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{512} \quad [2^4; 2^{10}; 2^6]$$

- 183.** Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 178):

$$\sqrt{256 \cdot \sqrt[4]{256}} \quad 256 \cdot \sqrt{\sqrt[4]{256}} \quad \sqrt{256} \cdot \sqrt[4]{256} \quad [2^5; 2^9; 2^6]$$

- 184.** Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt{p}} \quad p \cdot \sqrt{\sqrt{p}} \quad \sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$$

(dove  $p$  rappresenta un numero razionale positivo) e risolvere i seguenti quesiti:

- riscriverle in forma di espressioni con potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione, valendosi delle proprietà delle potenze;
- dare una regola generale per scrivere il risultato in forma di radicale.

- 185.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}} \quad p \cdot \sqrt[3]{\sqrt{p}} \quad \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p}$$

- 186.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad p \cdot \sqrt{\sqrt[3]{p}} \quad \sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{p}$$

- 187.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad p \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{p}} \quad \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p}$$

- 188.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}} \quad \sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p}}$$

- 189.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt[3]{p}}$$

- 190.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt[4]{p}}$$

- 191.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}}}$$

- 192.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}}$$

## Espressioni con potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario anche negativo

Gli esercizi dal n. 193 al n. 198 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario anche negativo, applicando più proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile.

193. Esaminare la seguente espressione:

$$\left[ 4 \cdot (4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[ 4 \cdot (4^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il risultato dell'espressione, valendosi opportunamente delle proprietà delle potenze;
- scrivere l'espressione e il risultato valendosi di radicali e frazioni.

$$\left[ \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right]$$

194. Ripetere l'esercizio 193 a partire dalla seguente espressione:

$$\left[ 8 \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot \left( 8 \cdot 8^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[ \sqrt[8]{2^7} \right]$$

195. Ripetere l'esercizio 193 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( 10 \cdot 10^{\frac{3}{7}} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left( 10 \cdot 10^{-\frac{2}{7}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( 10^4 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{7}}$$

$$[1]$$

196. Esaminare la seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{6 \cdot \sqrt[5]{6}} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt[5]{\sqrt{72}} \cdot \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt[5]{3}}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'espressione valendosi delle potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione.

$$\frac{7}{[2^{15}]}$$

197. Ripetere l'esercizio 197 a partire dalla seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{4}}}}{\sqrt[6]{8 \cdot \sqrt[3]{2}}}$$

$$\frac{2}{[2^9]}$$

198. Ripetere l'esercizio 197 a partire dalla seguente espressione:

$$\frac{\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{45}}}{\left( \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{4}} \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{5}}} \right)^2}$$

$$\frac{-\frac{8}{3}}{[2^3]}$$





2

## L'insieme dei numeri reali

Gli esercizi dal n. 1 al n. 10 richiedono di esaminare l'insieme dei numeri reali e gli altri insiemi numerici che lo compongono.

1. Esaminare i seguenti numeri e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

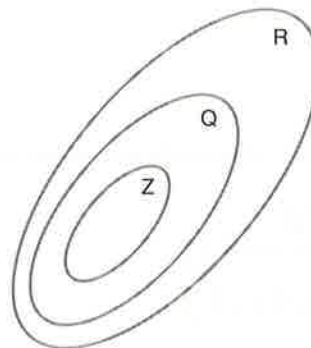
$$\sqrt{0} \quad \sqrt[3]{1} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{27} \quad \sqrt{27}$$

2. Calcolare i quadrati dei numeri assegnati nell'esercizio 1 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.
3. Calcolare i cubi dei numeri assegnati nell'esercizio 1 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.
4. Esaminare i seguenti numeri e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{100}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}}$$

5. Esaminare i quadrati dei numeri assegnati nell'esercizio 4 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.
6. Esaminare i cubi dei numeri assegnati nell'esercizio 4 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.
7. Collocare in uno schema come quello rappresentato in fig. 1 i seguenti numeri:
- tre numeri interi;
  - tre numeri razionali, ma non interi;
  - tre numeri reali, ma non razionali.
8. Spiegare perché non è possibile trovare i seguenti numeri:
- un numero intero, ma non razionale;
  - un numero intero, ma non reale;
  - un numero razionale, ma non reale.
9. Spiegare il significato dei seguenti termini:
- numero razionale;
  - numero irrazionale;
  - numero reale.
10. Spiegare perché un numero irrazionale è certamente reale, mentre non è detto che un numero reale sia irrazionale.

**Figura 1**  
Insiemi numerici



## Rappresentare i numeri reali sulla retta

### Rappresentare numeri razionali

Gli esercizi dal n. 11 al n. 18 chiedono di rappresentare numeri razionali sulla retta, riprendendo anche alcune nozioni del primo volume (vedi pp. 85-87, esercizi pp. 524-530).

11. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

1                  2                  3                  4                  -1                  -2                  -3                  -4

Rispondere ai seguenti quesiti:

- a quale insieme numerico appartengono tutti i numeri assegnati?
  - si può trovare un numero intero fra 3 e 4?
  - l'insieme degli interi è denso o discreto?
12. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\frac{1}{2}$                    $\frac{2}{2}$                    $\frac{3}{2}$                    $\frac{4}{2}$   
 $\frac{5}{2}$                    $\frac{6}{2}$                    $\frac{7}{2}$                    $\frac{8}{2}$                    $\frac{9}{2}$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- a quale insieme numerico appartengono tutti i numeri assegnati?
  - indicare almeno due numeri razionali compresi fra 3 e 4;
  - l'insieme dei razionali è denso o discreto?
13. Disegnare sulla retta gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 12. Indicare almeno un numero razionale compreso fra -4 e -3.
14. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\frac{1}{3}$                    $\frac{2}{3}$                    $\frac{3}{3}$                    $\frac{4}{3}$   
 $\frac{5}{3}$                    $\frac{6}{3}$                    $\frac{7}{3}$                    $\frac{8}{3}$                    $\frac{9}{3}$

Indicare almeno due numeri razionali compresi fra 2 e 3.

15. Disegnare sulla retta gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 14. Indicare almeno due numeri razionali compresi fra -3 e -2.
16. Disegnare sulla retta tutti gli elementi necessari per rappresentare i numeri reali e rappresentarvi i seguenti numeri:

$\frac{1}{2}$                    $\frac{1}{3}$                    $\frac{3}{2}$                    $\frac{2}{3}$                    $-\frac{1}{2}$                    $-\frac{1}{3}$                    $-\frac{3}{2}$                    $-\frac{2}{3}$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché, per ottenere un disegno preciso, conviene scegliere OU lungo 6 quadretti;
  - come sarebbe il disegno scegliendo OU lungo 12 quadretti?
  - come sarebbe il disegno scegliendo OU lungo 2 quadretti?
17. Disegnare sulla retta tutti gli elementi necessari per rappresentare i numeri reali e rappresentarvi i seguenti numeri, scegliendo l'unità di misura più opportuna:

$\frac{1}{2}$                    $\frac{3}{4}$                    $\frac{5}{8}$                   1                   $-\frac{3}{8}$                    $-\frac{5}{4}$                    $-\frac{3}{2}$

37. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

$$\sqrt{\frac{7}{17}} \quad \sqrt[3]{\frac{7}{17}} \quad \sqrt[6]{\frac{7}{17}} \quad -\sqrt{\frac{7}{17}} \quad -\sqrt[3]{\frac{7}{17}} \quad -\sqrt[6]{\frac{7}{17}}$$

38. Scrivere in forma decimale 10 numeri irrazionali a piacere e rappresentarli sulla retta reale.

## Ordinamento dei numeri reali

### Le parole e i simboli dell'ordinamento

Gli esercizi dal n. 39 al n. 45 conducono a rivedere le parole e i simboli dell'ordinamento esposti nel primo volume (vedi pp. 88-90, esercizi pp. 530-535)

39. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{2}$	$>0$	si legge	$\ll \sqrt{2}$	maggiore di 0	»	o $\ll \sqrt{2}$	positiva	»;
b. $-\sqrt{2}$	$<0$	si legge	$\ll -\sqrt{2}$	minore di 0	»	o $\ll -\sqrt{2}$	negativa	»;
c. $\sqrt{3}$	$>0$	si legge	$\ll \sqrt{3}$		»	o $\ll \sqrt{3}$		»;
d. $-\sqrt{3}$	$<0$	si legge	$\ll -\sqrt{3}$		»	o $\ll -\sqrt{3}$		»;
e. $\sqrt{5}$		si legge	$\ll \sqrt{5}$	maggiore di 0	»	o $\ll \sqrt{5}$	positiva	»;
f. $-\sqrt{5}$		si legge	$\ll -\sqrt{5}$	minore di 0	»	o $\ll -\sqrt{5}$	negativa	».

40. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{3} < 2$	è una disuguaglianza vera	perché	$\sqrt{3}$	precede 2;
b. $\sqrt{5} < 2$	è una disuguaglianza falsa	perché	$\sqrt{5}$	non precede 2;
c. $\sqrt{10} < 4$	è una disuguaglianza .....	perché	$\sqrt{10}$	..... 4;
d. $\sqrt{17} < 4$	è una disuguaglianza .....	perché	$\sqrt{17}$	..... 4.

41. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{5} > 2$	è una disuguaglianza vera	perché	$\sqrt{5}$	segue 2;
b. $\sqrt{3} > 2$	è una disuguaglianza falsa	perché	$\sqrt{3}$	non segue 2;
c. $\sqrt{10} > 3$	è una disuguaglianza .....	perché	$\sqrt{10}$	..... 3;
d. $\sqrt{8} < 3$	è una disuguaglianza .....	perché	$\sqrt{8}$	..... 3.

42. Rappresentare sulla retta reale i numeri seguenti:

$$1 \quad 2 \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{5}$$

Completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$\sqrt{3} \quad \square \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad \square \quad 2 \quad \sqrt{5} \quad \square \quad 3 \quad \sqrt{5} \quad \square \quad 2$$

43. Dopo aver risolto l'esercizio 42, rappresentare sulla retta reale anche gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 42.

Completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$-\sqrt{3} \quad \square \quad 1 \quad -\sqrt{3} \quad \square \quad 2 \quad -\sqrt{5} \quad \square \quad 3 \quad -\sqrt{5} \quad \square \quad 2$$

44. Dopo aver svolto l'esercizio 43, completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$\sqrt{3} \boxed{\phantom{0}} -1 \quad \sqrt{3} \boxed{\phantom{0}} -2 \quad \sqrt{5} \boxed{\phantom{0}} -3 \quad \sqrt{5} \boxed{\phantom{0}} -2$$

45. Dopo aver svolto l'esercizio 43, completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$-\sqrt{3} \boxed{\phantom{0}} -1 \quad -\sqrt{3} \boxed{\phantom{0}} -2 \quad -\sqrt{5} \boxed{\phantom{0}} -3 \quad -\sqrt{5} \boxed{\phantom{0}} -2$$

### Ordinare dei numeri reali

Gli esercizi dal n. 46 al n. 53 conducono ad ordinare più numeri reali, basandosi sulla loro scrittura decimale.

46. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$1 \quad 2 \quad \sqrt[3]{5} \quad \sqrt{3} \quad \frac{7}{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale, con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
  - scrivere tutti i numeri in ordine crescente.
47. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 46 e disporli in ordine crescente.

48. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$2 \quad 3 \quad \sqrt[3]{11} \quad \sqrt{5} \quad \frac{20}{9}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale, con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
  - scrivere tutti i numeri in ordine crescente.
49. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 48 e disporli in ordine crescente.

50. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$3 \quad 4 \quad \sqrt[3]{29} \quad \sqrt[4]{90} \quad \frac{37}{12}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
  - scrivere tutti i numeri in ordine crescente.
51. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 50 e disporli in ordine crescente.

52. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \sqrt[5]{8} \quad \sqrt[9]{13} \quad \frac{26}{17}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
  - scrivere tutti i numeri in ordine crescente.
53. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 52 e disporli in ordine crescente.

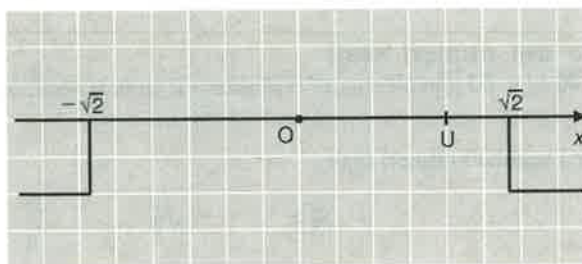


## Le disuguaglianze per descrivere semirette o segmenti

Gli esercizi dal n. 54 al n. 65 conducono a descrivere semirette o segmenti con disuguaglianze, riprendendo le nozioni esposte nel primo volume (vedi pp. 89-90, 533).

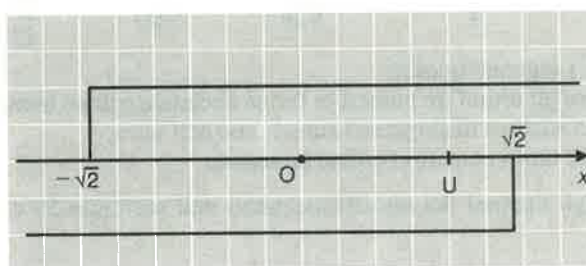
54. Scrivere le disuguaglianze che caratterizzano le semirette indicate in fig. 5.

Figura 5



55. Scrivere quattro numeri reali maggiori di  $\sqrt{2}$  ed altrettanti minori di  $\sqrt{2}$ .
56. Scrivere quattro numeri reali maggiori di  $-\sqrt{2}$  ed altrettanti minori di  $-\sqrt{2}$ .
57. Rappresentare le semirette descritte dalle seguenti disuguaglianze:  
 $x \leq \sqrt{5}$        $x \geq \sqrt{5}$        $x \leq -\sqrt{5}$        $x \geq -\sqrt{5}$
58. Scrivere quattro numeri reali maggiori di  $\sqrt{5}$  ed altrettanti minori di  $\sqrt{5}$ .
59. Scrivere quattro numeri reali maggiori di  $-\sqrt{5}$  ed altrettanti minori di  $-\sqrt{5}$ .
60. Scrivere le disuguaglianze che caratterizzano le semirette indicate in fig. 6.

Figura 6



61. Rappresentare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:  
 $0 \leq x \leq \sqrt{5}$        $\sqrt{5} \leq x \leq 3$        $-3 \leq x \leq -\sqrt{5}$        $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
62. Scrivere quattro numeri positivi e minori di  $\sqrt{5}$  ed altrettanti negativi e maggiori di  $-\sqrt{5}$ .

63. Spiegare perché non si possono trovare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{5} \quad \sqrt{5} \leq x \leq 0 \quad -\sqrt{5} \leq x \leq -3 \quad 0 \leq x \leq -\sqrt{5}$$

64. Rappresentare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{2}{3} \leq x \leq \sqrt{8} \quad \sqrt{8} \leq x \leq \frac{7}{2} \quad -\sqrt{8} \leq x \leq -\sqrt{2} \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq \sqrt{8}$$

65. Spiegare perché non si possono trovare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{8} \leq x \leq \frac{2}{3} \quad \frac{7}{2} \leq x \leq \sqrt{8} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{8} \quad -\sqrt{8} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

## Sulle frazioni continue

66. Sviluppare in frazione continua il numero  $\frac{19}{13}$ .
67. Sviluppare in frazione continua il numero  $\frac{31}{21}$ .
68. Sviluppare in frazione continua il numero  $\frac{13}{9}$ .
69. Sviluppare in frazione continua il numero  $\frac{23}{17}$ .
70. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

71. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

72. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

73. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero  $\sqrt{10}$ .
74. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero  $\sqrt{17}$ .
75. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero  $\sqrt{26}$ .
76. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero  $\sqrt{37}$ .
77. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero  $\sqrt{50}$ .

## Sui valori approssimati di un numero irrazionale

78. Completare le tabelle seguenti:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
1	
$\sqrt{3}$	
2	
	5
3	
	12
	16
	20
5	

Numeri $n$	Cubi $n^3$
1	
$\sqrt[3]{6}$	
2	
	10
	15
	20
	25
3	
	30

79. Basandosi anche sui risultati ottenuti svolgendo l'esercizio 78, completare le frasi seguenti, come è mostrato nel primo esempio:

- $\sqrt{3}$  è compreso fra 1 e 2;
- $\sqrt{5}$  è compreso fra ..... e .....
- $\sqrt{12}$  è compreso fra ..... e .....
- $\sqrt{20}$  è compreso fra ..... e ..... .

80. Basandosi anche sui risultati ottenuti svolgendo l'esercizio 78, completare le frasi seguenti, come è mostrato nel primo esempio:

- $\sqrt[3]{6}$  è compreso fra 1 e 2;
- $\sqrt[3]{15}$  è compreso fra ..... e .....
- $\sqrt[3]{25}$  è compreso fra ..... e .....
- $\sqrt[3]{30}$  è più grande di ..... .

81. Completare le tabelle seguenti:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
2,2	
$\sqrt{5}$	
2,3	

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
2,23	
$\sqrt{5}$	
2,24	

82. Dopo aver svolto l'esercizio 81, scrivere due successioni di numeri razionali:

- la prima costituita da numeri che approssimano  $\sqrt{5}$  per difetto;
- la seconda costituita da numeri che approssimano  $\sqrt{5}$  per eccesso.

83. Completare le tabelle seguenti:

Numeri $n$	Cubi $n^3$
1,7	
$\sqrt[3]{5}$	
1,8	

Numeri $n$	Cubi $n^3$
1,71	
$\sqrt[3]{5}$	
1,72	

84. Dopo aver svolto l'esercizio 83, scrivere due successioni di numeri razionali:
- la prima costituita da numeri che approssimano  $\sqrt[3]{5}$  per difetto;
  - la seconda costituita da numeri che approssimano  $\sqrt[3]{5}$  per eccesso.
85. Dopo aver svolto gli esercizi 81-84, scrivere due successioni di numeri razionali:
- la prima costituita da numeri che approssimano  $\sqrt[4]{5}$  per difetto;
  - la seconda costituita da numeri che approssimano  $\sqrt[4]{5}$  per eccesso.
86. Esaminare la seguente tabella:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
2,3	5,29
2,4	5,76
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima  $\sqrt{6}$  per difetto e quello che approssima  $\sqrt{6}$  per eccesso;
  - scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima  $\sqrt{7}$  per difetto e quello che approssima  $\sqrt{7}$  per eccesso;
  - scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima  $\sqrt{8}$  per difetto e quello che approssima  $\sqrt{8}$  per eccesso.
87. Dopo aver svolto l'esercizio 86, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano  $\sqrt{6}$  per difetto e per eccesso.
88. Esaminare la seguente tabella:

Numeri $n$	Quadrati $n^2$
3,1	9,61
3,2	10,24
3,3	10,89
3,4	11,56
3,5	12,25
3,6	12,96
3,7	13,69

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima  $\sqrt{12}$  per difetto e quello che approssima  $\sqrt{12}$  per eccesso;
- scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima un altro radicale quadratico a piacere per difetto e quello che approssima lo stesso radicale per eccesso.



89. Dopo aver svolto l'esercizio 88, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano  $\sqrt{12}$  per difetto e per eccesso.
90. Esaminare la seguente tabella:

Numeri $n$	Cubi $n^3$
2,1	9,261
2,2	10,648
2,3	12,167
2,4	13,824
2,5	15,625
2,6	17,576
2,7	19,683

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima  $\sqrt[3]{10}$  per difetto e quello che approssima  $\sqrt[3]{10}$  per eccesso;
- b. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima un altro radicale cubico a piacere per difetto e quello che approssima lo stesso radicale per eccesso.
91. Dopo aver svolto l'esercizio 90, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano  $\sqrt[3]{10}$  per difetto e per eccesso.
92. Riprendere dal primo volume (pp. 55-56) la nozione di approssimazione per arrotondamento e per troncamento; rispondere ai seguenti quesiti:
- a. in quali casi l'approssimazione per arrotondamento è per eccesso?
- b. in quali casi l'approssimazione per arrotondamento è per difetto?
- c. l'approssimazione per troncamento può essere per eccesso?

## Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

### Espressioni che non hanno risultato reale

Gli esercizi dal n. 93 al n. 100 conducono a riflettere sulle operazioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali.

93. Esaminare le seguenti espressioni:

$$[2(-2)]^0 \quad [2-2]^0 \quad (\sqrt[3]{-8+2})^0 \quad (\sqrt{3+3})^0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. indicare le espressioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali, motivando la scelta;
- b. determinare il risultato delle altre espressioni.
94. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{3-3} \quad \frac{1}{3}-3 \quad \frac{1}{3(-3)} \quad \frac{1}{-3+3}$$

95. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{6-6}{8(-8)} \quad \frac{6(-6)}{8-8} \quad \frac{6-6}{8-8} \quad \frac{6(-6)}{8(-8)}$$

96. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{-27} \quad \sqrt{0} \quad \sqrt{-25} \quad \sqrt[5]{-1}$$

97. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[5]{4-32} \quad \sqrt{5-30} \quad \sqrt{30-5} \quad \sqrt[4]{4-4}$$

98. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{4}{\sqrt{7-7}} \quad \frac{\sqrt{3-7}}{5(-5)} \quad \frac{\sqrt{7-3}}{5-5} \quad \frac{\sqrt{7-3}}{5(-5)}$$

99. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{8-8}} \quad \frac{\sqrt[3]{3-11}}{6(-6)} \quad \frac{\sqrt[3]{3-11}}{6-6} \quad \frac{\sqrt[3]{3-11}}{6(-6)}$$

100. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(-1) \cdot \sqrt{4} \quad \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} \quad (-1) \cdot \sqrt{-4} \quad (-1) \cdot \sqrt[3]{-8}$$

### Sulle proprietà delle operazioni

Gli esercizi dal n. 101 al n. 109 conducono a riflettere sulle proprietà delle operazioni, riprendendo le nozioni esposte nel primo volume (vedi pp. 13-14, esercizi pp. 488-504).

101. Completare la tabella, seguendo l'esempio della prima riga:

Numero $a$	Opposto $-a = (-1) \cdot a$	Reciproco $\frac{1}{a} = a^{-1}$
3	$-3 = (-1) \cdot 3$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$
-5		
		4
$\sqrt{2}$		
		$\sqrt[3]{7}$
	$\sqrt{5}$	

102. Esaminare le identità che esprimono la proprietà commutativa, e cioè:

$$ab=ba$$

$$a+b=b+a$$

Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt{2}$ , al posto di  $b$  sostituire 3;

II. al posto di  $a$  sostituire -2, al posto di  $b$  sostituire  $\sqrt{11}$ .

- 103.** Ripetere l'esercizio 102 effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt{2}$ , al posto di  $b$  sostituire  $\frac{1}{4}$ ;  
 II. al posto di  $a$  sostituire  $-\frac{2}{3}$ , al posto di  $b$  sostituire  $\sqrt{17}$ .
- 104.** Esaminare le seguenti identità:  

$$a \cdot 1 = a \qquad 1 \cdot a = a$$
 Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt{3}$ ;  
 II. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt[3]{10}$ .
- 105.** Ripetere l'esercizio 104 effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. al posto di  $a$  sostituire  $-\sqrt{3}$ ;  
 II. al posto di  $a$  sostituire  $-\sqrt[3]{10}$ .
- 106.** Esaminare la seguente identità:  

$$a \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot a = 0$$
 Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt{6}$ ;  
 II. al posto di  $a$  sostituire  $\sqrt[3]{10}$ .
- 107.** Ripetere l'esercizio 106 effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. al posto di  $a$  sostituire  $-\sqrt{3}$ ;  
 II. al posto di  $a$  sostituire  $-\sqrt[3]{10}$ .
- 108.** Esaminare l'identità che esprime la proprietà distributiva, e cioè:  

$$(a+b)c = ac + bc$$
 Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. sostituire  $\sqrt{2}$  al posto di  $c$ , 1 al posto di  $a$  e 3 al posto di  $b$ ;  
 II. sostituire  $\sqrt{3}$  al posto di  $c$ , 5 al posto di  $a$  e  $-1$  al posto di  $b$ .
- 109.** Ripetere l'esercizio 108 effettuando le seguenti sostituzioni:  
 I. sostituire  $\frac{1}{2}$  al posto di  $c$ , 1 al posto di  $a$  e  $\sqrt{15}$  al posto di  $b$ ;  
 II. sostituire  $-\frac{1}{3}$  al posto di  $c$ ,  $\sqrt{5}$  al posto di  $a$  e 1 al posto di  $b$ .

## Calcoli con i numeri reali

### Moltiplicare numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. 110 al n. 117 conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti di numeri interi e radicali.

110. Completare la seguente tabella come è mostrato nelle prime righe:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$(-1) \cdot \sqrt{4}$	$(-1)4^{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{4}=-2$
$\sqrt{(-1) \cdot 4}$	$[(-1) \cdot 4]^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{-4}$ non ha risultato reale
$(-2) \cdot \sqrt{8}$		$-2\sqrt{8}$
$\sqrt{(-2) \cdot 8}$		
$(-3) \cdot \sqrt{12}$		
$\sqrt{(-3) \cdot 12}$		
$2 \cdot \sqrt[4]{8}$		
$\sqrt[4]{2 \cdot 8}$		

111. Completare la seguente tabella come è mostrato nelle prime righe:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$(-1) \cdot \sqrt[3]{8}$	$(-1)8^{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt[3]{8}=-2$
$\sqrt[3]{(-1) \cdot 8}$	$[(-1) \cdot 8]^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{-8}=-2$
$(-2) \cdot \sqrt[3]{4}$		$-2\sqrt[3]{4}$
$\sqrt[3]{(-2) \cdot 4}$		
$3 \cdot \sqrt[3]{9}$		
$\sqrt[3]{3 \cdot 9}$		
$(-4) \cdot \sqrt[5]{8}$		
$\sqrt[5]{(-4) \cdot 8}$		

112. Esaminare le seguenti espressioni:

$$(-5) \cdot \sqrt{20}$$

$$\sqrt{(-5) \cdot 20}$$

$$\sqrt{(-5) \cdot (-20)}$$

$$(-5) \cdot \sqrt{-20}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile;
- segnalare le espressioni che non hanno risultato reale;
- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.



113. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{(-2) \cdot 32} \quad \sqrt{(-2) \cdot 32} \quad \sqrt{(-2) \cdot (-32)} \quad \sqrt[3]{(-2) \cdot (-32)}$$

114. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(-3) \cdot \sqrt[3]{9} \quad \sqrt[3]{(-3) \cdot 9} \quad \sqrt[4]{(-3) \cdot 27} \quad \sqrt[5]{(-9) \cdot 27}$$

115. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{8 \cdot 2} \quad \sqrt{8 \cdot 2} \quad \sqrt[3]{8 \cdot 27} \quad \sqrt[3]{8 \cdot 27}$$

116. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$$-\sqrt{12 \cdot 3} \quad -\sqrt{12 \cdot 3} \quad \sqrt{3 \cdot (-12)} \quad \sqrt{3 \cdot (-12)}$$

117. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$$-5 \cdot \sqrt{12} \cdot (-\sqrt{3}) \quad \sqrt{-5 \cdot 12 \cdot (-3)} \quad \sqrt[3]{-3 \cdot \sqrt[3]{-9} \cdot (-5)} \quad \sqrt[3]{-3 \cdot \sqrt[3]{-9} \cdot (-5)}$$

### Moltiplicare ed elevare a potenza numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. 118 al n. 123 conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti e potenze di numeri interi e radicali.

118. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{[(-1) \cdot 3]^2} \quad \sqrt{(-1) \cdot 3^2} \quad \sqrt{(-1)^2 \cdot 3} \quad (-1) \cdot \sqrt{3^2}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
- calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile.

119. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{[(-2) \cdot 4]^2} \quad \sqrt[3]{(-2) \cdot 4^2} \quad \sqrt[3]{(-2)^2 \cdot 4} \quad \sqrt[3]{(-2)^2 \cdot 4}$$

120. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{8^2 \cdot (-2)} \quad \sqrt[4]{[8 \cdot (-2)]^2} \quad \sqrt[4]{8 \cdot (-2)^2} \quad \sqrt[4]{8 \cdot (-2)^2}$$

121. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\sqrt{2} \cdot 8} \quad \sqrt{2 \cdot \sqrt{8}} \quad \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} \quad \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}$$

122. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{-\sqrt{4} \cdot 16} \quad \sqrt[3]{-4 \cdot \sqrt{16}} \quad \sqrt[3]{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{16}} \quad -\sqrt[3]{\sqrt{4} \cdot \sqrt{16}}$$

123. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{-\sqrt[3]{(2 \cdot 4)^2}} \quad \sqrt{\left(-\sqrt[3]{2 \cdot 4}\right)^2} \quad \sqrt{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot 4} \quad \sqrt{-\sqrt[3]{2 \cdot 4^2}}$$

## Addizionare numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. 124 al n. 129 conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo somme di numeri interi e radicali.

124. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{16+9} \quad \sqrt{16+9} \quad \sqrt{16+\sqrt{9}} \quad 16+\sqrt{9}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
- calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile.

125. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{25-9} \quad \sqrt{25-9} \quad \sqrt{25-\sqrt{9}} \quad 25-\sqrt{9}$$

126. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \sqrt{2+3} \quad \sqrt{2+3\sqrt{2}} \quad 2\sqrt{3+\sqrt{3}}$$

127. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{7-\sqrt{3}} \quad \sqrt{7-3} \quad \sqrt{7-3\sqrt{7}} \quad 7\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

128. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{3}} \quad \sqrt[3]{5+3} \quad \sqrt[3]{5+3\sqrt[3]{5}} \quad 5\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$$

129. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{37-\sqrt[3]{10}} \quad \sqrt[3]{37-10} \quad 10\sqrt[3]{37-\sqrt[3]{37}} \quad \sqrt[3]{10-37\sqrt[3]{10}}$$

## Espressioni con numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. 130 al n. 149 conducono ad esaminare espressioni in cui compaiono numeri interi e radicali su cui si operano addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza.

130. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{11 \cdot (-2)} \quad \sqrt{11 \cdot (-2)} \quad \sqrt{11-2} \quad \sqrt{11-2}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
- calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile;
- riscrivere ciascuna espressione ed il corrispondente risultato valendosi delle potenze ad esponente frazionario.

131. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{9 \cdot (-3)} \quad \sqrt[3]{9 \cdot (-3)} \quad \sqrt[3]{9-3} \quad \sqrt[3]{9-3}$$

132. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \quad [5\sqrt{3}-2\sqrt{2}; 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}]$$

133. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) \quad \sqrt{5}-2\sqrt{5}+2 \quad [1; 2-\sqrt{5}]$$

- 134.** Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:  
 $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$      $2\sqrt{3}+\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{5}$      $[7; 2\sqrt{3}+2\sqrt{15}-\sqrt{5}]$
- 135.** Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:  
 $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$      $3\sqrt{2}-2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$      $[6; 3\sqrt{2}-6\sqrt{6}+2\sqrt{3}]$
- 136.** Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):  
 $(2+\sqrt{3})^2$      $(2-\sqrt{3})^2$      $(3+\sqrt{2})^2$      $(3-\sqrt{2})^2$      $[7\pm 2\sqrt{3}; 11\pm 6\sqrt{2}]$
- 137.** Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):  
 $(\sqrt{5}+\sqrt{20})^2$      $(\sqrt{5}-\sqrt{20})^2$      $(5+\sqrt{20})^2$      $(\sqrt{5}-20)^2$   
 $[45; 5; 35+10\sqrt{20}; 405-40\sqrt{5}]$
- 138.** Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:  
 $(\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2+4\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})$      $(\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2+4\sqrt{3} \cdot 3-2\sqrt{3}$   
 $[0; 24-3\sqrt{6}+10\sqrt{3}]$
- 139.** Scrivere nella forma più breve il risultato della seguente espressione, estraendo dei fattori dal segno di radice, quando ciò è possibile:  
 $2\sqrt[4]{243}-3\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{1875}+3\sqrt[4]{48}$      $[4\sqrt[4]{3}]$
- 140.** Ripetere l'esercizio 139 a partire dalla seguente espressione:  
 $5\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{250}$      $[\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{4}]$
- 141.** Ripetere l'esercizio 139 a partire dalla seguente espressione:  
 $5\sqrt[4]{162}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[4]{32}-\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{16}$      $[12\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}]$
- 142.** Calcolare il risultato della seguente espressione scrivendolo nella forma più breve:  
 $(\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2+2\sqrt{10}(2+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$      $[20+10\sqrt{2}]$
- 143.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:  
 $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+3\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+8\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$      $[10\sqrt{2}-20]$
- 144.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:  
 $\sqrt[4]{\sqrt{26}+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{26}-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$      $[\sqrt[4]{18}+\sqrt[3]{2}]$
- 145.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:  
 $\sqrt[3]{4\sqrt{6}-2\sqrt{8}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{6}+2\sqrt{8}} + \sqrt[4]{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$      $[6]$
- 146.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:  
 $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3}+2\sqrt{12}} + \sqrt{5\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{5\sqrt{2}+1}$      $[10]$

147. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$\sqrt[4]{2\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{5}+2} + \sqrt{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{20}} \quad [6]$$

148. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$(\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{2})(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \quad [3]$$

149. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$(\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}) \quad [\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}]$$

### Espressioni con potenze ad esponente frazionario

Gli esercizi dal n. 150 al n. 159 conducono a esaminare espressioni in cui compaiono potenze a esponente frazionario su cui si operano addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza.

150. Esaminare le seguenti espressioni:

$$[4(-8)]^{\frac{1}{3}} \quad [4-8]^{\frac{1}{3}} \quad 4(-8)^{\frac{1}{3}} \quad 4-8^{\frac{1}{3}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
- calcolare il risultato di ogni espressione;
- riscrivere ogni espressione ed il corrispondente risultato valendosi dei radicali.

151. Ripetere l'esercizio 150 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(16+9)^{\frac{1}{2}}(16-9)^{\frac{1}{2}} \quad \left(16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{2}}\right)\left(16^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}\right)$$

152. Ripetere l'esercizio 150 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left[(36+64)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \quad \left(36^{\frac{1}{2}}+64^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

153. Esaminare la seguente espressione:

$$5^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{4}}5^{\frac{1}{12}}+\left[(5^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{8}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il risultato dell'espressione;
- riscrivere l'espressione ed il corrispondente risultato valendosi dei radicali.

$$\frac{13}{[(a)5^{12}]}$$

154. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(7^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right) \quad [4]$$

155. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(5+24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}\left(5-24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \quad [1]$$



156. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{1}{5^3+1} \right) \left( \frac{\frac{2}{5^3-5^3+1}}{\frac{1}{5^3-5^3+1}} \right) \quad [6]$$

157. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{4}{7^5-7^5+7^5-7^5+1}}{\frac{2}{7^5-7^5+1}} \right) \left( \frac{\frac{1}{7^5+1}}{\frac{1}{7^5+1}} \right) \quad [8]$$

158. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{7}{2^2-2^3+2^2-2^2+2^2-2+2^2-1}}{\frac{5}{2^2-1}} \right) \left( \frac{\frac{3}{2^2-1}}{\frac{1}{2^2-1}} \right) \quad [15]$$

159. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left( \frac{\frac{3}{4^2-4^2+1}}{\frac{1}{4^2+4^2-1}} \right) \left( \frac{\frac{3}{4^2+4^2-1}}{\frac{1}{4^2-1}} \right) + 2 \left( \frac{\frac{1}{4^2-1}}{\frac{3}{4^2+1}} \right)^2 - \left( \frac{3}{4^2+1} \right)^2 \quad [-16]$$

### Espressioni con potenze ad esponente frazionario anche negativo

Gli esercizi dal n. 160 al n. 170 richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono potenze ad esponente frazionario anche negativo su cui si operano addizioni, moltiplicazioni ed elevazioni a potenza.

160. Esaminare la seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{1}{10^2+10}}{\frac{-1}{2}} \right) \left( \frac{\frac{1}{10^2-10}}{\frac{-1}{2}} \right) + 10^{-1}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. calcolare il risultato dell'espressione;  
b. riscrivere l'espressione ed il corrispondente risultato valendosi di radicali. [(a) 10]

161. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{-1}{1+5}}{\frac{-1}{3}} \right) \left( \frac{\frac{-1}{1-5}}{\frac{-1}{3+5}} \right) - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \quad [1]$$

162. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{-1}{7^4+7^4}}{\frac{1}{4}} \right) \left( \frac{\frac{-1}{7^4-7^4}}{\frac{1}{4}} \right) \left( \frac{\frac{-1}{7^2+7^2}}{\frac{1}{2}} \right) + 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{-\frac{1}{2}} \quad [7^{-1}]$$

163. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{\frac{1}{18^2-6^2}}{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\frac{1}{10^2+20^2}}{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( \frac{\frac{1}{12^2+4^2}}{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad [2-2^{\frac{1}{2}}]$$

164. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$6^{-1}(2^{-1}+3^{-1})(2+3)^{\frac{-1}{2}}(9-4)^{\frac{1}{2}}(4^{-1}-3^{-2})^{-1} \quad [1]$$

165. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left( \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{2}} - \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( 3 \cdot \frac{-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad [0]$$

166. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269):

$$\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)^2 - (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{5^2} \cdot 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \right) \quad [2 \cdot 15^2]$$

167. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269):

$$\left( \frac{1}{1+7^2} \right)^2 + \left( 1-7 - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left( 7^2 - 7 \cdot \frac{1}{2} \right) \quad [16]$$

168. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left( \frac{1}{2^3} - 2 - \frac{1}{3} \right)^3 + 3 \left( \frac{1}{2^3} - 2 - \frac{1}{3} \right) + 2^{-1} \quad [2]$$

169. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left[ \left( \frac{-1}{11^9} - \frac{1}{11^9} \right) \left( \frac{-2}{11^9} + 1 + \frac{2}{11^9} \right) + \frac{1}{11^3} \right]^3 \quad [11^{-1}]$$

170. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppano il quadrato e il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left[ \left( \frac{1}{8^6} - 8 - \frac{1}{6} \right)^3 - \left( 8^{\frac{1}{4}} - 8^{\frac{1}{4}} \right) \left( 8^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{1}{4}} \right) \right]^2 \quad [9 \cdot 2^{-1}]$$

### Moltiplicare frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. 171 al n. 178 conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti di frazioni e radicali.

171. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$\frac{\sqrt{4}}{3}$	$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\sqrt{\frac{4}{3}}$		
$\frac{4}{\sqrt{3}}$		

172. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5}$	$\frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\sqrt{\frac{1}{3} \cdot 5}$		$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{\frac{1}{5} \cdot 3}$		$\frac{3}{\sqrt{5}}$
$3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$		

173. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{9} \cdot \sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} \cdot 7}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} \cdot 7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato delle espressioni;
- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

174. Ripetere l'esercizio 173 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{16}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{16}{5}}$$

$$\frac{16}{\sqrt{5}}$$

175. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$	3
$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot 4}$		
$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot 4}$		
$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4$		
$\frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{2}$		
$3 \cdot \sqrt{\frac{4}{2}}$		

176. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{7}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 5}}{3 \cdot 7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato delle espressioni;
- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

177. Ripetere l'esercizio 176 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}}$$

$$\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{3 \cdot 7}}$$

178. Ripetere l'esercizio 176 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{5}{7}$$

### Moltiplicare ed elevare a potenza frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. 179 al n. 183 conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti e potenze di frazioni e radicali.

179. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$\frac{3^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato delle espressioni;
- riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

180. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2$$

$$\frac{(3 \cdot \sqrt{7})^2}{2 \cdot 5}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5^2}$$

181. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6} \cdot \frac{7^3}{2}}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2}}\right)^3$$

$$\frac{\sqrt[3]{5 \cdot 7}}{(6 \cdot 2)^3}$$

182. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{8}{7}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{8}{7}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{8}{7}}$$

183. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{7}{8}}$$



## Addizionare frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. 184 al n. 189 richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo somme di frazioni e radicali.

184. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{9}{4}+4} \quad \sqrt{\frac{9}{4}+4} \quad \sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{4}} \quad \frac{9}{4}+\sqrt{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il risultato delle espressioni;
- riscrivere ogni espressione ed il corrispondente risultato valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
- spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

185. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{25}} \quad \sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{4}{25}}} \quad \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{25}} \quad \frac{1}{4}-\sqrt{\frac{4}{25}}$$

186. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} \quad \sqrt{\frac{3}{2}+3} \quad \sqrt{\frac{3}{2}+3} \quad \frac{3}{\sqrt{2}}+3$$

187. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{5}-\frac{\sqrt[3]{5}}{3} \quad \sqrt[3]{5-\frac{5}{3}} \quad 5-\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \quad 5-\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$$

188. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \frac{\sqrt{5+7}}{4} \quad \sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{7}{4}}} \quad \sqrt{\frac{5}{4}+\frac{7}{4}}$$

189. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{16}-\frac{\sqrt[4]{3}}{16} \quad \frac{\sqrt[4]{15-3}}{16} \quad \sqrt[4]{\frac{15}{16}}-\sqrt[4]{\frac{3}{16}} \quad \sqrt[4]{\frac{15}{16}-\frac{3}{16}}$$

## Espressioni con radicali e frazioni

Gli esercizi dal n. 190 al n. 203 richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono frazioni e radicali su cui si operano addizioni, moltiplicazioni ed elevazioni a potenza.

190. Spiegare perché le seguenti espressioni sono diverse e calcolarne il risultato.

$$\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{13}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3} \quad \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{13}{4}\sqrt{3}\right)\frac{3}{2}\sqrt{3} \quad \left[\frac{3}{4}\sqrt{3}; -\frac{27}{8}\right]$$

191. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{\frac{3}{5}}-7\sqrt{\frac{3}{5}}+5\sqrt{\frac{3}{5}} \quad 2\sqrt{\frac{3}{5}}-7\frac{\sqrt{3}}{5}+5\frac{\sqrt{3}}{5} \quad \left[0; 2\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{2}{5}\sqrt{3}\right]$$

192. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad [0; \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}]$$

193. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad \sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \quad [5; 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}]$$

194. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{12}\left(\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \quad \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{25}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad [7; \frac{5}{3}\sqrt{12} - \frac{3}{2}]$$

195. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \quad [\frac{5}{6}; \frac{7}{\sqrt{6}} - 1]$$

196. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1\right) \quad \left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3} - 1\right) \quad [\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$$

197. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269 e 273):

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \quad \left(\sqrt{3 + \frac{2}{3}}\right)^2 \quad [\frac{11}{3} + 2\sqrt{2}; \frac{11}{3}]$$

198. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2 \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{4}}{5}\right)^2 \quad [\frac{33}{10} - 2\sqrt{2}; \frac{141}{100} - \frac{2}{5}\sqrt{5}]$$

199. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}\right)^2 \left(\frac{4}{\sqrt[3]{4+2\sqrt{5}}}\right)^3 \quad \frac{(\sqrt{2+\sqrt{5}})^2}{\sqrt{8}} \cdot \frac{4}{(\sqrt[3]{4+2\sqrt{5}})^3} \quad [4; \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

200. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\left(\sqrt{6} + \frac{6}{2-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6} - \frac{6}{2+\sqrt{6}}\right) \quad [-12]$$

201. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + 5 \quad [2]$$

202. Calcolare il risultato della seguente espressione, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left[\left(\sqrt[4]{5} - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2 - 2\right]^2 - \left(\sqrt{2 + \frac{1}{5}}\right)^2 \quad [5]$$

203. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\sqrt{\left(3-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{7-\sqrt{5}}{3-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{7}{11}} \quad [2]$$

### Rendere razionale il denominatore delle frazioni

Gli esercizi dal n. 204 al n. 217 conducono ad esaminare espressioni frazionarie che presentano dei radicali al denominatore per trasformarle in espressioni equivalenti, ma con il denominatore razionale.

204. Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$	$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{5}}$			
$\frac{3}{\sqrt{7}}$			
$\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$			

205. Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \frac{3}{\sqrt{8}} \qquad \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \qquad \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

**206.** Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{5^2}$	$\frac{1 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}$	$\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\frac{1 \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}$			
$\frac{1}{\sqrt[4]{7^3}}$			

**207.** Dopo aver svolto l'esercizio 206, rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{6^2}} \quad \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \quad \frac{1}{\sqrt[5]{4^3}}$$

**208.** Ripetere l'esercizio 207 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{3}} \quad \frac{6}{\sqrt[4]{3^3}} \quad \frac{8}{\sqrt[5]{6^2}} \quad \frac{9}{\sqrt[5]{3^4}}$$

**209.** Ripetere l'esercizio 207 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{5+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}} \quad \frac{6-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^3}} \quad \frac{8+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^5}} \quad \frac{10-\sqrt[9]{32}}{\sqrt[9]{2}}$$

**210.** Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$	$5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}$	$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$
$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$			



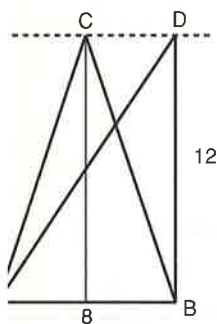
252. Un rettangolo ha i lati lunghi  $b=12$  e  $h=5$ ; risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la diagonale  $d$  del rettangolo;
  - raddoppiare solo il lato  $b$  e calcolare la diagonale  $d'$  del nuovo rettangolo;
  - raddoppiare solo il lato  $h$  e calcolare la diagonale  $d''$  del nuovo rettangolo;
  - raddoppiare entrambi i lati e calcolare la diagonale  $d^*$  del nuovo rettangolo.
- [(a)  $d=13$ ; (b)  $d'=\sqrt{601}$ ; (c)  $d''=2\sqrt{61}$ ; (d)  $d^*=26$ ]

253. Dopo aver svolto l'esercizio 252, considerare un rettangolo con i lati lunghi  $b$  e  $h$  e risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la diagonale  $d$  del rettangolo;
  - raddoppiare il lato  $b$  e determinare la diagonale  $d'$  del nuovo rettangolo;
  - raddoppiare il lato  $h$  e determinare la diagonale  $d''$  del nuovo rettangolo;
  - raddoppiare entrambi i lati e determinare la diagonale  $d^*$  del nuovo rettangolo

254. Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 6 e 8 e quindi l'ipotenusa lunga 10. Risolvere i seguenti quesiti:
- costruire su ogni lato un triangolo equilatero e calcolarne l'area;
  - verificare che il triangolo costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei triangoli costruiti sui cateti.

255. Ripetere l'esercizio 254 in generale, cioè a partire da un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa lunga  $c$ .

Figura 9



256. In fig. 9 sono disegnati il triangolo rettangolo ABD, che ha i cateti lunghi 8 e 12, e il triangolo isoscele ABC, che ha la base AB e l'altezza uguale a DB. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché i due triangoli hanno la stessa area;
  - calcolare il perimetro dei due triangoli e verificare che il triangolo isoscele ha il perimetro minore.

257. Determinare i lati di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 4 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12.

$$[4\sqrt{10}; 12\sqrt{10}; 40]$$

258. Determinare i lati di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga  $p$  e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga  $3p$ .

$$[p\sqrt{10}; 3p\sqrt{10}; 10p]$$

259. Determinare i lati e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 4 e 12.

$$[16; 8; 8\sqrt{3}; h=4\sqrt{3}]$$

260. Determinare i lati e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe  $p$  e  $3p$ .

$$[4p; 2p; 2p\sqrt{3}; h=p\sqrt{3}]$$

261. Determinare i cateti e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 3 e l'ipotenusa lunga 15.

$$[3\sqrt{5}; 6\sqrt{5}; h=6]$$

262. Determinare i cateti e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga  $p$  e l'ipotenusa lunga  $5p$ .

$$[p\sqrt{5}; 2p\sqrt{5}; h=2p]$$

263. Determinare i lati e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 5 e quel cateto lungo 15.

$$[45; 30\sqrt{2}; h=10\sqrt{2}]$$

264. Determinare i lati e l'altezza  $h$  relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga  $p$  e quel cateto lungo  $3p$ .

$$[9p; 6p\sqrt{2}; h=2p\sqrt{2}]$$

## Problemi di geometria dello spazio che conducono a calcoli con i radicali

I problemi dal n. 265 al n. 269 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare il teorema di Pitagora a figure solide;
- richiedono di svolgere i calcoli con i radicali.

**265.** È dato un cubo con il lato lungo 5 (fig. 10); tenendo presente che HB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti DB e DH, risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza della diagonale DB di una faccia;
- calcolare la lunghezza della diagonale HB del cubo.

$$[(b) 5\sqrt{3}]$$

**266.** Ripetere l'esercizio 265 in generale, cioè a partire da un cubo di lato  $b$  determinando:

- la lunghezza della diagonale DB di una faccia;
- la lunghezza della diagonale HB del cubo.

$$[(b) b\sqrt{3}]$$

**267.** Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area  $S$  del rettangolo diagonale EHCB (fig. 11) che ha come dimensioni uno spigolo e la diagonale di una faccia di un cubo.

$$[S=b^2\sqrt{2}]$$

**268.** Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area  $S$  del triangolo equilatero EBG di fig. 12, che ha per lati le diagonali di tre facce del cubo concorrenti in uno stesso vertice.

$$[S=b^2 \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

**269.** Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area  $S$  del triangolo equilatero LMN di fig. 13, ottenuto congiungendo i punti medi di tre spigoli del cubo che escono da uno stesso vertice. Osservare che il lato del triangolo è metà della diagonale di una faccia del cubo.

$$[S=b^2 \frac{\sqrt{3}}{8}]$$

Figura 10

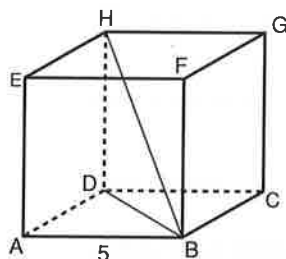


Figura 11

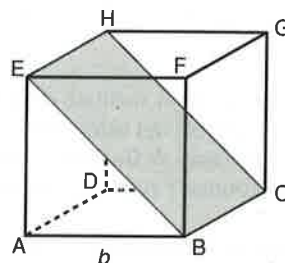


Figura 12

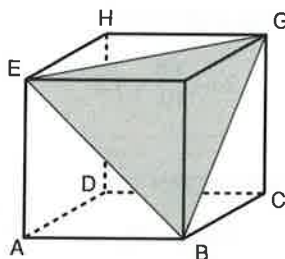
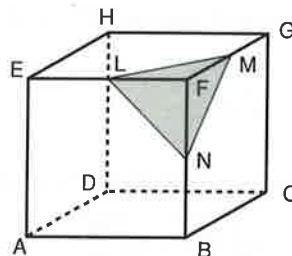


Figura 13



## Il calcolatore tascabile per eseguire calcoli con numeri reali

Gli esercizi dal n. 270 al n. 280 richiedono di:

- usare il calcolatore tascabile per svolgere dei calcoli con numeri reali;
- riflettere sui procedimenti seguiti.

**270.** Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Risultato
$\sqrt{\frac{25-9}{49}}$	$[(25-9):49]^{\frac{1}{2}}$	$\langle \langle 25 - 9 \rangle \div 49 \rangle \sqrt{\phantom{x}}$	0.5714286
$\frac{\sqrt{25-9}}{49}$			
$\frac{\sqrt{25-9}}{49}$			
$\sqrt{25-\frac{9}{49}}$			
$\frac{\sqrt{25}}{49}-9$			
$25-\frac{9}{\sqrt{49}}$			

**271.** Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{12-3}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{3-12}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$$

Determinare il risultato di ogni espressione nei seguenti modi:

- a. valendosi del calcolatore tascabile;
- b. valendosi di frazioni e radicali.

Confrontare i risultati ottenuti.

**272.** Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{44+100}{\sqrt{3}}$$

$$44+\frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$44+\sqrt{\frac{100}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{44+100}{3}}$$

**273.** Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{24-8}}{\sqrt{10+2}}$$

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

$$24-\frac{\sqrt{8}}{10}+\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{24-8}}{10}+\sqrt{2}$$

**274.** Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{121}{9}}-\sqrt{\frac{25}{36}}$$

$$\frac{\sqrt{121-25}}{9 \cdot 36}$$

$$\frac{121}{\sqrt{9}}-\frac{25}{\sqrt{36}}$$

$$\frac{\sqrt{121}}{9}-\frac{\sqrt{25}}{36}$$

275. Scrivere l'espressione che viene calcolata mediante la sequenza di tasti riportata qui sotto:

$$\boxed{9} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{\sqrt{\phantom{x}}} \boxed{=}$$

276. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Frazioni radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Risultato
$\sqrt[5]{\left(\frac{4+28}{7}\right)^3}$	$[(4+28):7]^{\frac{3}{5}}$	$\langle \langle 4 + 2 8 \rangle \div 7 \rangle y^x \langle 3 \div 5 \rangle =$	2.4890359
$4 + \frac{28}{7^3}$			
$\frac{(4+28)^3}{\sqrt[5]{7}}$			
$\frac{\sqrt[5]{(4+28)^3}}{7}$			

277. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{19+8}{\sqrt{4}}}$$

$$19 + \sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{4}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{19+8}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{19 + \sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}}$$

Determinare il risultato di ogni espressione nei seguenti modi:

- valendosi del calcolatore tascabile;
- valendosi di frazioni e radicali.

Confrontare i risultati ottenuti.

278. Ripetere l'esercizio 277, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[5]{\frac{2 \cdot 4^2}{43+2 \cdot 10^2}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{(2 \cdot 4)^2}{(43+2) \cdot 10^2}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{2 \cdot 4^2}}{43+10^2}$$

$$\frac{\sqrt[5]{(2 \cdot 4)^2}}{(43+2 \cdot 10)^2}$$

279. Ripetere l'esercizio 277, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2^3}{4}$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)^3}$$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}+2^3}{\sqrt{5}-2^3}}$$

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt{5} - \sqrt[4]{2^3}}$$

280. Scrivere l'espressione che viene calcolata mediante la sequenza di tasti riportata qui sotto:

$$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{y^x} \boxed{4} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{=}$$



## Approssimazioni e propagazione degli errori

### Valori approssimati e intervallo d'errore

*Gli esercizi dal n. 281 al n. 286 conducono a riflettere sui valori approssimati di un numero reale e sul relativo intervallo d'errore.*

- 281.** Esaminare la disuguaglianza:

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare il numero reale che viene approssimato;
- indicare il valore approssimato per difetto e quello approssimato per eccesso;
- determinare l'intervallo d'errore, spiegando il procedimento seguito.

- 282.** Ripetere l'esercizio 281 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$$2,6 < \sqrt{7} < 2,7$$

$$2,64 < \sqrt{7} < 2,65$$

$$2,645 < \sqrt{7} < 2,646$$

- 283.** Ripetere l'esercizio 281 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$$1,7 < \sqrt[3]{5} < 1,8$$

$$1,70 < \sqrt[3]{5} < 1,71$$

$$1,709 < \sqrt[3]{5} < 1,710$$

- 284.** Dopo aver svolto l'esercizio 283, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché 1,7 e 1,70 sono due diversi valori approssimati di  $\sqrt[3]{5}$ ;
- spiegare perché 1,71 e 1,710 sono due diversi valori approssimati di  $\sqrt[3]{5}$ .

- 285.** Valendosi di un calcolatore tascabile o di tavole numeriche, scrivere i seguenti valori approssimati:

- per eccesso e per difetto di  $\sqrt{10}$  con intervallo d'errore 1;
- per eccesso e per difetto di  $\sqrt{10}$  con intervallo d'errore 0,1;
- per eccesso e per difetto di  $\sqrt{10}$  con intervallo d'errore 0,01.

- 286.** Valendosi di un calcolatore tascabile o di tavole numeriche, scrivere i seguenti valori approssimati:

- per eccesso e per difetto di  $\sqrt[3]{10}$  con intervallo d'errore 1;
- per eccesso e per difetto di  $\sqrt[3]{10}$  con intervallo d'errore 0,1;
- per eccesso e per difetto di  $\sqrt[3]{10}$  con intervallo d'errore 0,01.

### Sulla propagazione degli errori

*Gli esercizi dal n. 287 al n. 295 conducono ad eseguire calcoli con valori approssimati per studiare come si propagano gli errori.*

- 287.** Sono dati i seguenti valori approssimati di  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{12}$ :

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

$$3,4 < \sqrt{12} < 3,5$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare l'intervallo d'errore scelto;
- addizionare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore della somma;
- moltiplicare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore del prodotto.

288. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:  
 $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$        $3,46 < \sqrt{12} < 3,47$
289. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:  
 $1,7 < \sqrt[3]{5} < 1,8$        $2,9 < \sqrt[3]{25} < 3$
290. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:  
 $1,70 < \sqrt[3]{5} < 1,71$        $2,92 < \sqrt[3]{25} < 2,93$
291. Le dimensioni di un rettangolo sono lunghe  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  e vengono approssimate con un intervallo d'errore ampio 0,1. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare l'intervallo d'errore del semiperimetro  $p$  del rettangolo;  
 b. determinare l'intervallo d'errore dell'area  $S$  del rettangolo;  
 c. spiegare perché i due intervalli non sono uguali.
292. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene addizionando tre numeri.
293. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene moltiplicando due numeri uguali.
294. Si vuole determinare il valore approssimato di una somma di due numeri con un intervallo d'errore  $k$ ; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli addendi?
295. Si vuole determinare il valore approssimato di un prodotto con un intervallo d'errore  $k$ ; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli fattori?

## Sul rapporto fra due segmenti

### Segmenti commensurabili

Gli esercizi dal n. 296 al n. 301 conducono a riflettere sul rapporto di segmenti commensurabili.

296. In fig. 14 sono disegnati due segmenti ottenuti a partire da uno stesso segmento OU nei seguenti modi:

- sulla semiretta  $Or$  si è riportato due volte OU, a partire da O, ottenendo OA;
- sulla semiretta  $Os$  si è riportato tre volte OU, a partire da O, ottenendo OB;

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OA}{OU}$$

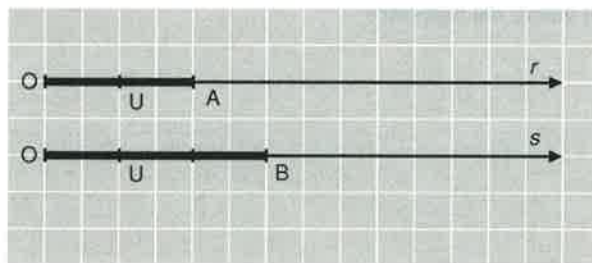
$$\frac{OB}{OU}$$

$$\frac{OB}{OA}$$

$$\frac{OA}{OB}$$

- b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

Figura 14



- 297.** Disegnare un segmento OU ed indicarne il suo punto medio M; effettuare quindi le seguenti costruzioni, analoghe a quelle descritte nell'esercizio 296:
- sulla semiretta Or riportare una volta OM, a partire da O, ottenendo OC;
  - sulla semiretta Os riportare tre volte OM, a partire da O, ottenendo OD;
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OC}{OU}$$

$$\frac{OU}{OC}$$

$$\frac{OD}{OU}$$

$$\frac{OU}{OD}$$

- b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

- 298.** Dopo aver svolto l'esercizio 297, indicare su OM il suo punto medio N ed effettuare le seguenti costruzioni, analoghe a quelle descritte nell'esercizio 296:
- sulla semiretta Or riportare una volta ON, a partire da O, ottenendo OE;
  - sulla semiretta Os riportare tre volte ON, a partire da O, ottenendo OF.
- Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OE}{OU}$$

$$\frac{OU}{OE}$$

$$\frac{OF}{OU}$$

$$\frac{OU}{OF}$$

$$\frac{OF}{OE}$$

$$\frac{OE}{OF}$$

- b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

- 299.** Riportare il segmento ON ottenuto nell'esercizio 298 nei seguenti modi:
- sulla semiretta Or riportare due volte ON, a partire da O, ottenendo OG;
  - sulla semiretta Os riportare cinque volte ON, a partire da O, ottenendo OH.
- Determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OG}{OU}$$

$$\frac{OU}{OG}$$

$$\frac{OH}{OU}$$

$$\frac{OU}{OH}$$

$$\frac{OG}{OH}$$

$$\frac{OH}{OG}$$

- 300.** Costruire due segmenti AB e CD in modo che risulti:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{4}$$

Calcolare il valore del rapporto:

$$\frac{CD}{AB}$$

- 301.** Costruire due segmenti AB e CD in modo che risulti:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{6}$$

Calcolare il valore del rapporto:

$$\frac{CD}{AB}$$

## Segmenti incommensurabili

Gli esercizi dal n. 302 al n. 306 conducono a riflettere sul rapporto di segmenti incommensurabili.

302. In fig. 15 è disegnato il quadrato ABCD, una sua diagonale AC e il punto medio O della diagonale. Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti:

$$\frac{AC}{AB}$$

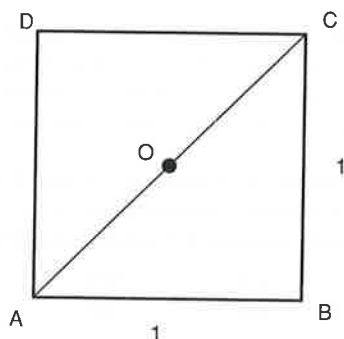
$$\frac{AO}{AB}$$

$$\frac{AC}{AO}$$

$$\frac{AO}{AC}$$

- b. dire se i segmenti AB e AC sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;  
 c. dire se i segmenti AB e AO sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;  
 d. dire se i segmenti AC e AO sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta.

Figura 15



303. In fig. 16 è disegnato il triangolo equilatero ABC e una sua altezza CH. Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti:

$$\frac{CH}{AB}$$

$$\frac{HB}{AB}$$

$$\frac{CH}{HB}$$

$$\frac{HB}{CH}$$

- b. dire se i segmenti CH e AB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;  
 c. dire se i segmenti HB e AB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;  
 d. dire se i segmenti CH e HB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta.

Figura 16

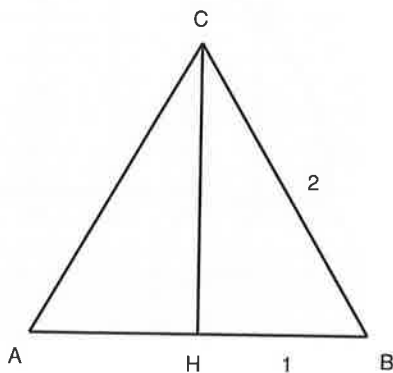
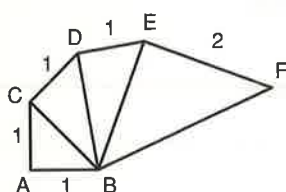




Figura 17



304. I triangoli rettangoli della fig. 17 hanno i cateti AB, AC, CD, DE tutti uguali fra loro, mentre EF è il doppio di DE; risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti

$$\frac{BC}{AC} \quad \frac{DB}{BC} \quad \frac{EB}{AC} \quad \frac{BF}{BC}$$

- b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;  
c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

305. In fig. 18 è rappresentata una semicirconferenza con il diametro AB diviso in 5 parti uguali mediante i punti H, K, L, M; da ciascuno di questi punti è stata quindi tracciata la perpendicolare al diametro, fino ad intersecare la semicirconferenza nei punti P, Q, R, S. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. valendosi anche del secondo teorema di Euclide calcolare i rapporti:

$$\frac{HP}{AH} \quad \frac{KQ}{AH} \quad \frac{LR}{KQ} \quad \frac{KS}{HP}$$

- b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;  
c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

306. In fig. 19 è ripetuta una costruzione analoga a quella di fig. 18, dividendo però il diametro in 7 parti uguali. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. valendosi anche del secondo teorema di Euclide calcolare i rapporti:

$$\frac{HQ}{AH} \quad \frac{KR}{AH} \quad \frac{LS}{AH} \quad \frac{MT}{AH} \quad \frac{MT}{LS} \quad \frac{LS}{HQ}$$

- b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;  
c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

Figura 18

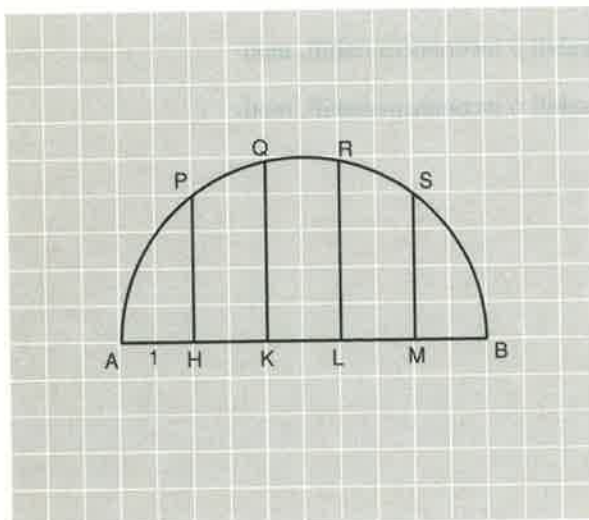
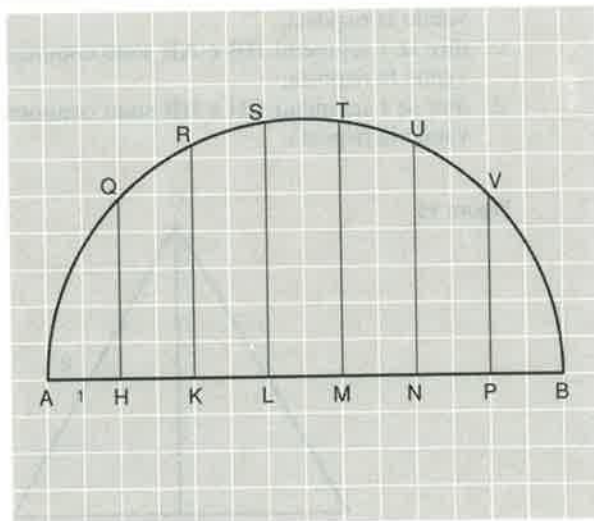


Figura 19



## Sul teorema di Talete

Gli esercizi dal n. 307 al n. 312 conducono a riflettere sul teorema di Talete.

307. In fig. 20 sono rappresentate quattro rette parallele  $a, b, c, d$ , tagliate da due trasversali  $t$  e  $t'$ . Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle che sono vere in base al teorema di Talete, motivando la scelta:

- a. dato che risulta  $BC = CD$ , risulta pure  $B'C' = C'D'$ ;  
b. risulta  $BC = B'C'$  e  $CD = C'D'$ .

308. Sempre a partire dalla fig. 20, fra le seguenti uguaglianze scegliere quelle che sono vere in base al teorema di Talete, motivando la scelta:

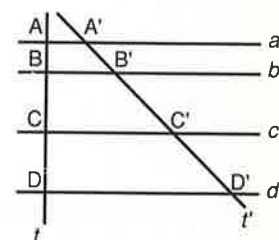
$$\frac{BC}{CD} = \frac{B'C'}{C'D'}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{B'C'}$$

Figura 20



309. In fig. 21 sono rappresentate tre rette parallele  $a, b, c$ , tagliate dalle trasversali  $t$  e  $t'$ ; basandosi sul teorema di Talete e sulle informazioni date dalla figura, determinare la lunghezza  $x$  del segmento  $B'C'$ .

310. Ripetere l'esercizio 309 a partire dalla fig. 22.

311. Ripetere l'esercizio 309 a partire dalla fig. 23.

312. In fig. 24 sono rappresentate tre rette parallele  $a, b, c$ , tagliate dalle trasversali  $t$  e  $t'$ ; basandosi sul teorema di Talete e sulle informazioni date dalla figura, determinare la lunghezza dei segmenti  $BC$ ,  $A'B'$  e  $B'C'$ .

Figura 21

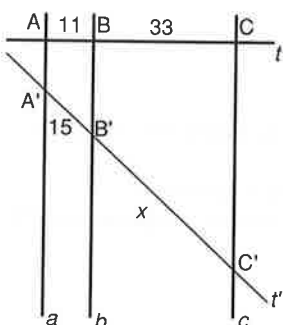


Figura 22

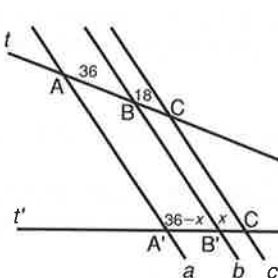


Figura 23

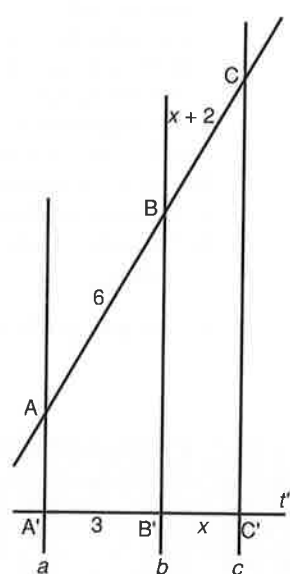


Figura 24

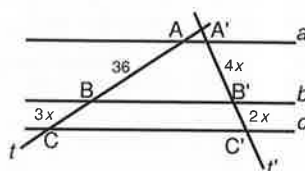
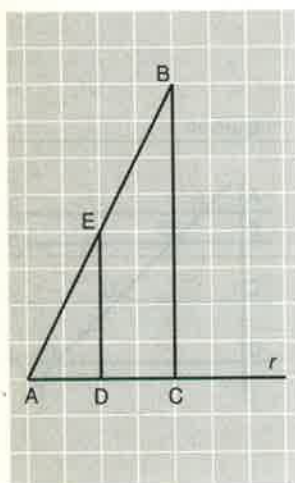


Figura 25



### Suddividere un segmento in parti uguali

Gli esercizi dal n. 313 al n. 319 conducono ad applicare il teorema di Talete per dividere un segmento in parti uguali.

313. A partire dal segmento AB rappresentato in fig. 25 si è effettuata la seguente costruzione:

- sulla semiretta Ar si fissano due segmenti uguali consecutivi AD e DC;
- si unisce C con B;
- da D si traccia la parallela a BC, fino ad incontrare AB in E.

Spiegare perché con questa costruzione si ottiene:

$$AE = EB$$

314. Dopo aver svolto l'esercizio 313, riprodurre su un foglio a quadretti il segmento AB e dividerlo prima in tre parti uguali  $AH=HK=KB$  e poi in sei parti uguali.

315. A partire dal segmento AB rappresentato in fig. 26, si è effettuata la seguente costruzione:

- si è costruito il triangolo rettangolo e isoscele ABC;
- si è prolungato AB di un segmento uguale BD;
- si è congiunto D con C;
- da B si è tracciata la parallela a DC, fino ad incontrare AC in E.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il segmento AC è stato diviso in due parti uguali;
- b. determinare il rapporto fra AE e AB.

316. Dopo aver svolto l'esercizio 315, risolvere i seguenti quesiti:

- a. riprodurre su un foglio a quadretti il triangolo ABC;
- b. dividere AC in tre parti uguali;
- c. calcolare il rapporto fra una di queste parti e il segmento AB.

317. In fig. 27 si è effettuata la seguente costruzione a partire da un segmento AH:

- a partire da H si è riportato tre volte il segmento AH, fino ad ottenere il segmento AB;
- si è costruita la semicirconferenza di diametro AB;
- da H si è costruita la perpendicolare ad AB, fino ad incontrare la semicirconferenza in C;
- si è congiunto B con C;
- da K e da L si sono tracciate le parallele a CB, fino ad incontrare HC in M e N.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il segmento HC è stato diviso in tre parti uguali;
- b. basandosi anche sul secondo teorema di Euclide, determinare il rapporto fra CH e AH;

- c. spiegare perché risulta  $\frac{HM}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Figura 26

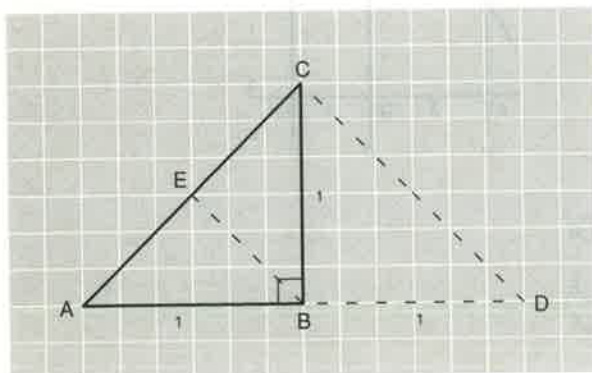
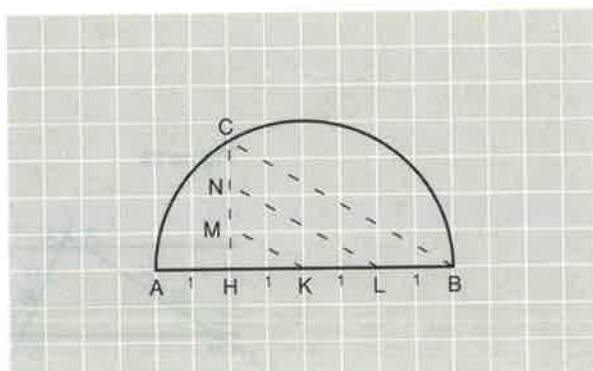


Figura 27



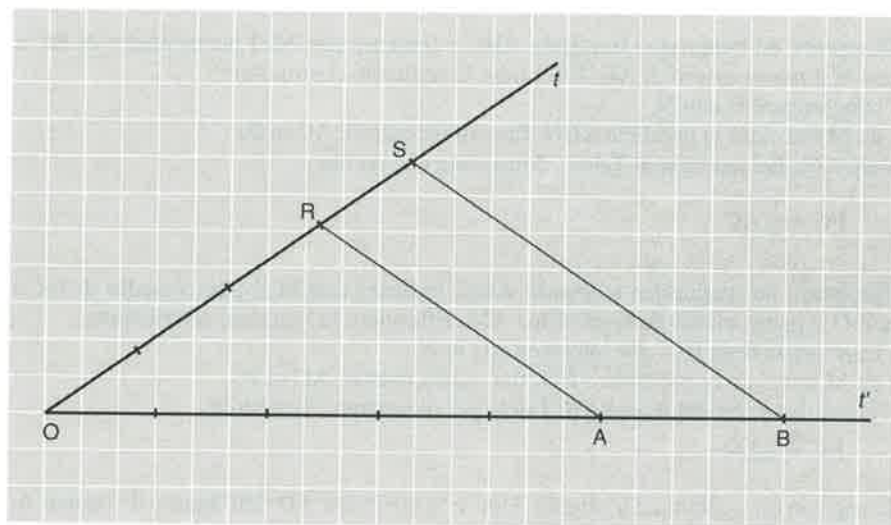
318. Eseguire una costruzione analoga a quella descritta nell'esercizio 317, riportando però AH cinque volte a partire da H.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché il segmento HC è stato diviso in cinque parti uguali;  
 b. basandosi anche sul secondo teorema di Euclide, determinare il rapporto fra CH e AH;  
 c. spiegare perché risulta  $\frac{HM}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .
319. Dopo aver svolto gli esercizi 317 e 318, descrivere una costruzione per ottenere due segmenti che abbiano il rapporto dato da  $\frac{\sqrt{a}}{a}$ .

### Altre applicazioni del teorema di Talete

Gli esercizi dal n. 320 al n. 332 conducono ancora ad applicare il teorema di Talete.

320. In fig. 28 si è effettuata la seguente costruzione a partire da un segmento RS:  
 - si sono costruite due semirette  $Ot$  e  $Ot'$ ;  
 - a partire da O si è riportato RS su  $Ot$  tre volte, ottenendo il segmento OR e quindi si è riportato RS un'ultima volta a partire da R;  
 - a partire da O si è riportato RS su  $Ot'$  cinque volte, ottenendo il segmento OA;  
 - si è congiunto A con R;  
 - da S si è tracciata la parallela a AR, fino ad incontrare  $Ot'$  in B.  
 Spiegare perché risulta  $\frac{AB}{RS} = \frac{5}{3}$ .

Figura 28



321. Eseguire una costruzione analoga a quella descritta in fig. 28, a partire dallo stesso segmento RS, allo scopo di ottenere i seguenti segmenti:  
 - CD, in modo che risulti  $\frac{CD}{RS} = \frac{6}{5}$ .  
 - EF, in modo che risulti  $\frac{EF}{RS} = \frac{5}{6}$ .
322. Spiegare come organizzare una costruzione analoga a quella descritta in fig. 28, a partire dallo stesso segmento RS, per ottenere un segmento PQ tale che  $\frac{PQ}{RS} = \frac{m}{n}$ .



323. Esaminare la fig. 29, in cui le rette AA' e BB' sono parallele fra loro e sono pure parallele fra loro le rette A'A'' e B'B''. Dimostrare che risulta:

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{OA''}{OA}$$

324. Esaminare la fig. 30, in cui le rette AA' e BB' sono parallele fra loro e sono pure parallele fra loro le rette A'B e B'C. Dimostrare che risulta:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$$

Figura 29

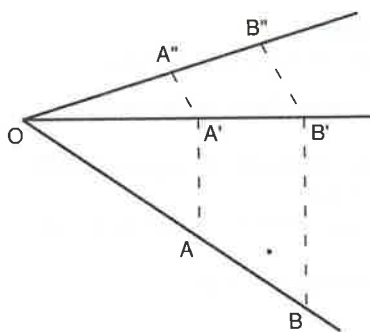


Figura 30

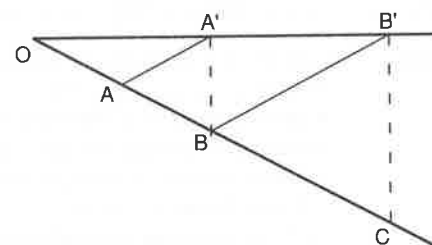
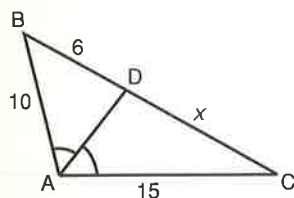
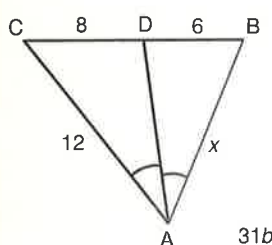


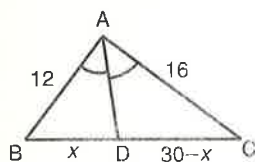
Figura 31



31a



31b



31c

325. Disegnare un qualunque triangolo ABC e indicare con M il punto medio di BC e con N il punto medio di AC. Effettuare la seguente costruzione:

- congiungere B con N;
  - da M tracciare la parallela a BN, fino ad incontrare AC in P.
- Valendosi del teorema di Talete, dimostrare che risulta:

$$PC = \frac{1}{4} AC$$

326. Disegnare un qualunque triangolo ABC, indicare con M il punto medio di BC e con O il punto medio della mediana AM. Effettuare la seguente costruzione:

- tracciare la retta BO, che interseca AC in N;
  - da M tracciare la parallela a BO, fino ad incontrare AC in P.
- Valersi due volte del teorema di Talete per dimostrare che risulta:

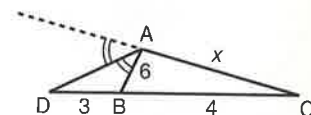
$$NC = 2AN$$

327. Disegnare un qualunque triangolo ABC e la bisettrice AD dell'angolo di vertice A; condurre da C la parallela ad AD, fino ad incontrare in E il prolungamento di BA. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. dimostrare che risulta  $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$ ;
- b. dimostrare che il triangolo ACE è isoscele sulla base EC;
- c. dimostrare che risulta  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ;
- d. esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.

328. In tutti i triangoli di fig. 31 è disegnata la bisettrice di un angolo interno; basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 327 e sulle informazioni date dalla figura per calcolare le lunghezze incognite.

329. Disegnare un qualunque triangolo ABC e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A; la bisettrice incontra il prolungamento di BC in D. Condurre da C la parallela ad AD, fino ad incontrare in E il lato AB e risolvere i seguenti quesiti:

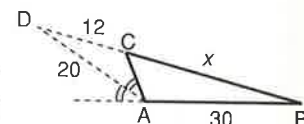


32 a

- dimostrare che risulta  $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$ ;
- dimostrare che il triangolo ACE è isoscele sulla base EC;
- dimostrare che risulta  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ;
- esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.

330. In tutti i triangoli di fig. 32 è disegnata la bisettrice di un angolo esterno; basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 329 e sulle informazioni date dalla figura per calcolare le lunghezze incognite.

331. La fig. 33 rappresenta schematicamente uno specchio concavo (del tipo usato per avere un ingrandimento del viso); C è il centro della sfera da cui è stato «tagliato» lo specchio e A indica il punto in cui è stata disposta una sorgente luminosa (per esempio una candela).



32 b

Un raggio di luce esce da A, colpisce lo specchio e «rimbalza», incontrando la retta AC in OA', dove si forma l'immagine di A, immagine che può essere colta disponendo in A' uno schermo.

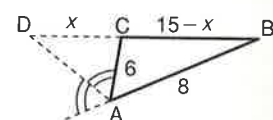
In base alla legge della riflessione (vedi primo volume, p. 190) si trova che sono uguali gli angoli A'BC e CBA; risolvere i seguenti quesiti:

- riprendere i risultati dell'esercizio 328, per dimostrare che risulta:

$$AB:A'B=AC:A'C \quad (1)$$

- indicare con  $r$  il raggio  $VC=BC$  dello specchio, con  $p$  la distanza AV di A dallo specchio e con  $q$  la distanza A'V; approssimare AB con AV e A'B con A'V per ricavare dalla (1) la seguente relazione detta *formula dei punti coniugati per lo specchio concavo*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$



32 c

332. La fig. 34 rappresenta schematicamente uno specchio convesso (del tipo usato come retrovisore nelle auto); C, A e A' hanno lo stesso significato dato nell'esercizio 331. Riprendere considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 331 e basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 329 per trovare anche in questo caso la formula dei punti coniugati.

$$\left[ \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \right]$$

Figura 33

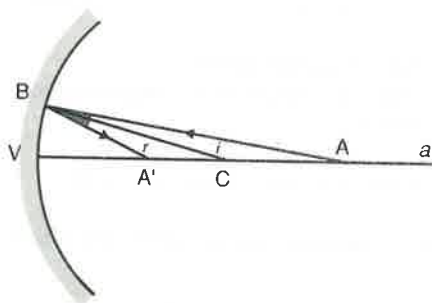
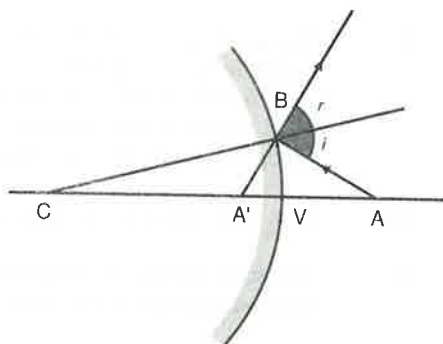
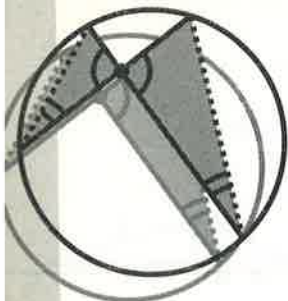


Figura 34

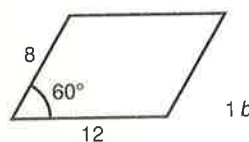
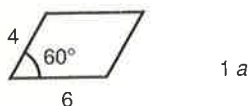




## Sui poligoni simili

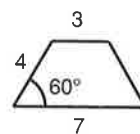
1. A partire da un quadrato  $Q$  con il lato lungo 8 si effettuano le seguenti costruzioni:
  - a. si toglie a tutti i lati un segmento lungo 2, ottenendo un quadrato  $Q'$  di lato 6;
  - b. si dimezzano i lati ottenendo un quadrato  $Q''$  di lato 4.
 Spiegare perché sia  $Q'$  che  $Q''$  sono simili a  $Q$ .
2. A partire da un quadrato  $Q$  con il lato lungo 9 si effettuano le seguenti costruzioni:
  - a. si aggiunge ai lati un segmento lungo 3, ottenendo un quadrato  $Q'$  di lato 12;
  - b. si triplicano i lati ottenendo un quadrato  $Q''$  di lato 27.
 Spiegare perché sia  $Q'$  che  $Q''$  sono simili a  $Q$ .
3. Spiegare perché due quadrati sono sempre simili. Portare qualche esempio.
4. A partire da un rettangolo  $R$  che ha le dimensioni lunghe 18 e 12 si effettuano le seguenti costruzioni:
  - a. si toglie ad entrambe le dimensioni un segmento lungo 2, ottenendo un rettangolo  $R'$  che ha le dimensioni lunghe 16 e 10;
  - b. si dimezzano entrambe le dimensioni ottenendo un rettangolo  $R''$  che ha le dimensioni lunghe 9 e 6.
 Spiegare perché  $R''$  è simile a  $R$ , mentre  $R'$  non lo è.
5. A partire da un rettangolo  $R$  che ha le dimensioni lunghe 5 e 6 si effettuano le seguenti costruzioni:
  - a. si aggiunge ad entrambe le dimensioni un segmento lungo 3, ottenendo un rettangolo  $R'$  che ha le dimensioni lunghe 8 e 9;
  - b. si triplicano entrambe le dimensioni ottenendo un rettangolo  $R''$  che ha le dimensioni lunghe 15 e 18.
 Spiegare perché  $R''$  è simile a  $R$ , mentre  $R'$  non lo è.
6. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se due rettangoli sono simili. Portare qualche esempio.
7. A partire dal rettangolo  $R$  con le dimensioni lunghe 18 e 12, si toglie un segmento lungo 2 dal lato minore; quanto bisogna togliere all'altro lato per ottenere un rettangolo simile a  $R$ ?  
*[Indicare con  $x$  la lunghezza del segmento da togliere; si ottiene  $x=3$ ]*
8. A partire dal rettangolo  $R$  con le dimensioni lunghe 5 e 6, si aggiunge un segmento lungo 3 al lato maggiore; quanto bisogna aggiungere all'altro lato per ottenere un rettangolo simile a  $R$ ?  
*[Indicare con  $x$  la lunghezza del segmento da aggiungere; si ottiene  $x=2,5$ ]*
9. Disegnare un rombo  $R$  con i lati lunghi 4 e l'angolo acuto ampio  $30^\circ$ ; disegnare quindi le figure seguenti:
  - il rombo  $R'$  che si ottiene raddoppiando i lati e l'angolo acuto;
  - il rombo  $R''$  che si ottiene raddoppiando i lati e lasciando fisso l'angolo acuto.
 Spiegare perché  $R''$  è simile a  $R$ , mentre  $R'$  non lo è.
10. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due rombi.
11. Spiegare perché le informazioni della fig. 1 bastano per decidere che i due parallelogrammi  $P$  e  $P'$  sono simili.
12. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due parallelogrammi.

Figura 1

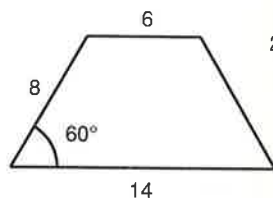


13. Spiegare perché le informazioni della fig. 2 bastano per decidere che i due trapezi isosceli T e T' sono simili.
14. Quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi isosceli?
15. Spiegare perché le informazioni della fig. 3 bastano per decidere che i due trapezi rettangoli T e T' sono simili.
16. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi rettangoli.
17. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi.
18. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due quadrilateri inscritti in due cerchi con lo stesso raggio.  
*[Tenere presente che in un quadrilatero inscritto in un cerchio la somma degli angoli opposti è sempre un angolo piatto come è mostrato nel primo volume, pp. 147-148]*
19. Esaminare la coppia di quadrilateri rappresentata in fig. 4 e spiegare perché certamente non sono simili.
20. Esaminare la coppia di quadrilateri simili rappresentata in fig. 5 e calcolare le lunghezze dei lati AD, DC, CB e C'B'.
21. Esaminare la coppia di quadrilateri simili rappresentata in fig. 6 e calcolare le lunghezze dei lati A'B', B'C' e A'D'.
22. Disegnare le seguenti coppie di poligoni:  
 a. due esagoni equilateri, che non siano simili;  
 b. due esagoni equiangoli, che non siano simili.  
 Spiegare perché non è possibile costruire due esagoni regolari che non siano simili.
23. Spiegare perché due esagoni regolari sono sempre simili. Portare qualche esempio.
24. Spiegare perché due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono sempre simili. Portare qualche esempio.

Figura 2

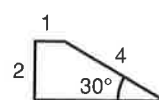


2 a

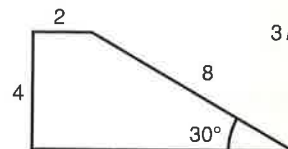


2 b

Figura 3



3 a



3 b

Figura 4

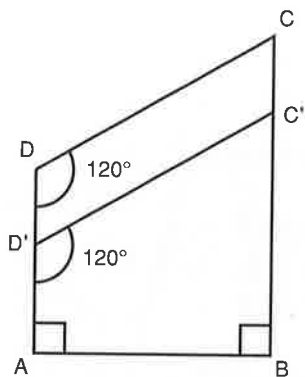
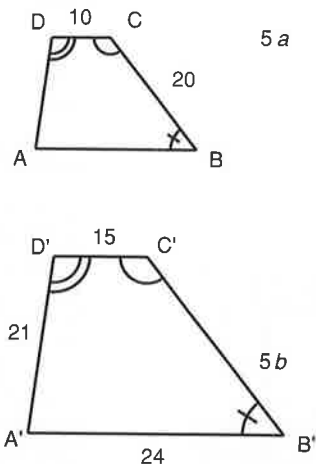
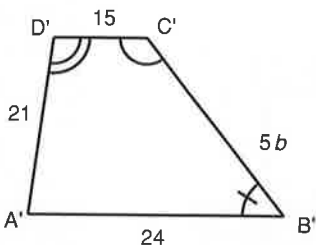


Figura 5

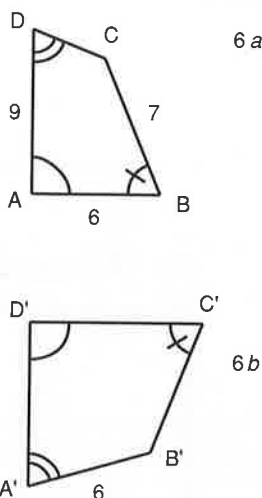


5 a

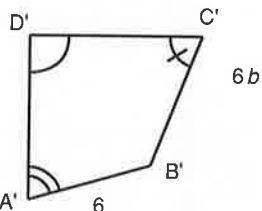


5 b

Figura 6



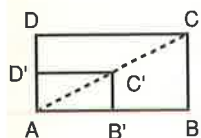
6 a



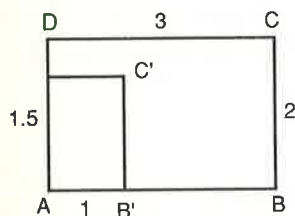
6 b



Figura 7

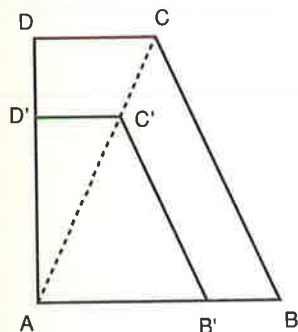


7a

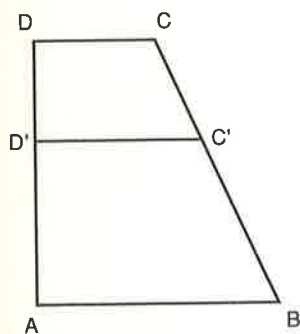


7b

Figura 8



8a



8b

## Sui poligoni omotetici

25. Esaminare i rettangoli di fig. 7 e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare la coppia di rettangoli omotetici;
  - indicare la coppia di rettangoli che sono simili, ma non omotetici;
  - spiegare perché si può trovare una coppia di rettangoli simili, ma non omotetici.
26. Esaminare i trapezi rettangoli di fig. 8 e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare la coppia di trapezi omotetici;
  - indicare la coppia di trapezi che non sono simili.
  - spiegare perché non si trova una coppia di trapezi omotetici, ma non simili.
27. Esaminare i due rettangoli di fig. 9 e risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché i due rettangoli sono omotetici;
  - determinare la posizione del punto O, centro di omotetia;
  - determinare il valore del rapporto  $r$  di omotetia.

Figura 9

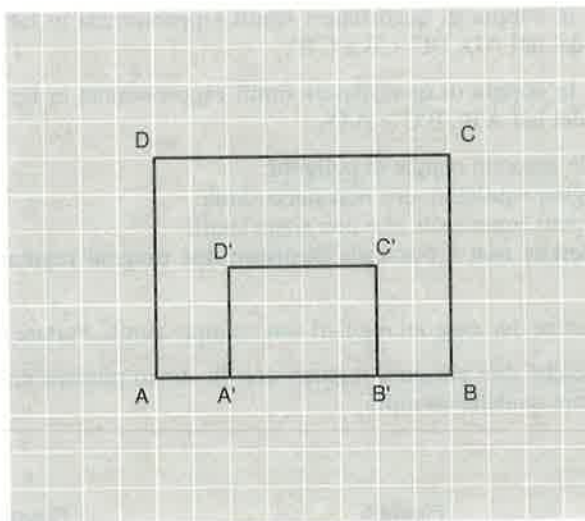


Figura 10

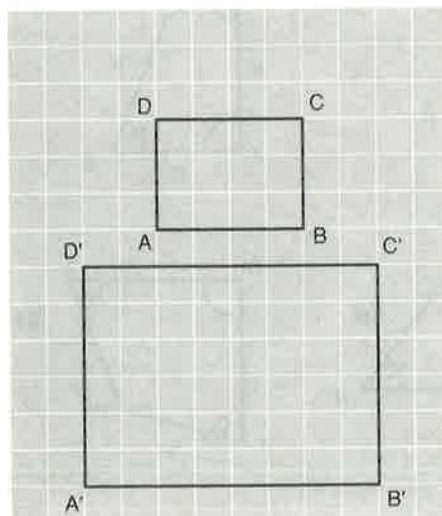
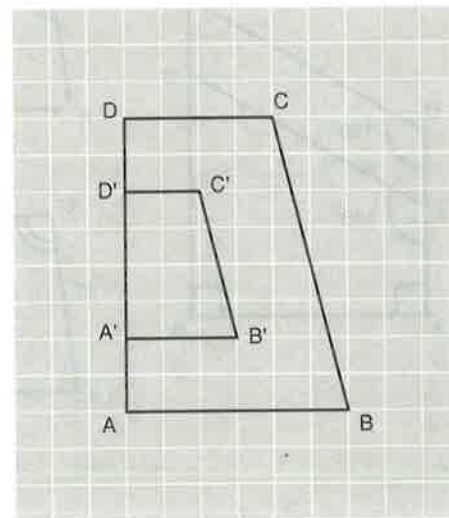
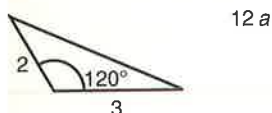


Figura 11

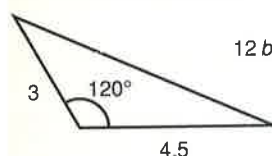


28. Ripetere l'esercizio 27 a partire dai due rettangoli di fig. 10.
29. Ripetere l'esercizio 27 a partire dai due trapezi di fig. 11.
30. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere; costruire quindi i seguenti rettangoli omotetici a quello dato:
  - a. scegliendo il centro di omotetia O in un vertice del rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - b. scegliendo il centro di omotetia O nel punto d'incontro delle diagonali ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere.
31. Ripetere l'esercizio 30, a partire da un rombo ABCD disegnato a piacere.
32. Ripetere l'esercizio 30, a partire da un parallelogramma ABCD disegnato a piacere.
33. Disegnare un trapezio rettangolo ABCD a piacere; costruire quindi i seguenti trapezi omotetici a quello dato:
  - a. scegliendo il centro di omotetia O nel vertice dell'angolo retto ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - b. scegliendo il centro di omotetia O in un altro vertice del trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere.
34. Disegnare un quadrilatero a piacere; costruire quindi i seguenti quadrilateri omotetici a quello dato:
  - a. scegliendo il centro di omotetia O in un vertice del quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - b. scegliendo il centro di omotetia O su un lato del quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
  - d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere.
35. Ripetere l'esercizio 34, a partire da un pentagono disegnato a piacere.
36. Dopo aver svolto gli esercizi 30-35, elencare i numeri che esprimono i rapporti di omotetia scelti; se nell'elenco si trovano solo numeri interi, ripetere gli esercizi scegliendo come rapporti di omotetia anche numeri razionali non interi e numeri irrazionali.
37. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:
  - disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo un centro di omotetia O a piacere ed un rapporto di omotetia a piacere, per esempio  $\frac{2}{3}$ ;
  - disegnare un rettangolo A''B''C''D'', omotetico a A'B'C'D', scegliendo lo stesso centro di omotetia e un altro rapporto di omotetia, per esempio 2.
 Confrontare i rettangoli ABCD e A''B''C''D'' e risolvere i seguenti quesiti:
  - a. spiegare perché i due rettangoli sono omotetici;
  - b. indicare centro e rapporto dell'omotetia che trasforma ABCD in A''B''C''D''.

Figura 12

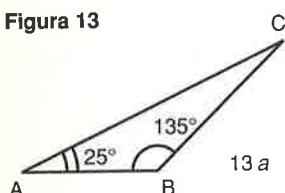


12 a

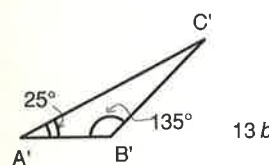


12 b

Figura 13

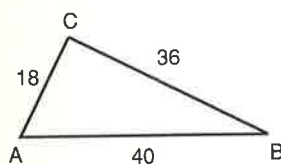


13 a

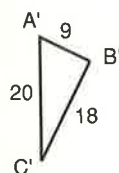


13 b

Figura 14



14 a



14 b

38.

Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:  
- disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo a piacere il centro di omotetia O e il rapporto di omotetia;  
- disegnare un rettangolo A''B''C''D'', omotetico a A'B'C'D', scegliendo lo stesso centro di omotetia e il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.  
Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:

- indicare le coppie di rettangoli omotetici;
- dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A''B''C''D''.

39.

Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:  
- disegnare un rettangolo AB'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo il centro di omotetia O coincidente col vertice A ed un rapporto di omotetia a piacere;  
- disegnare un rettangolo A''B''C''D'', omotetico a AB'C'D', scegliendo il centro O di omotetia coincidente col vertice B' ed il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.

Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:

- indicare le coppie di rettangoli omotetici;
- dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A''B''C''D''.

40.

Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:  
- disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo il centro di omotetia O coincidente col punto di incontro delle diagonali ed un rapporto di omotetia a piacere;  
- disegnare un rettangolo A''B''C''D'', omotetico a A'B'C'D', scegliendo il centro O di omotetia su un lato del rettangolo ed il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.

Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:

- indicare le coppie di rettangoli omotetici;
- dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A''B''C''D''.

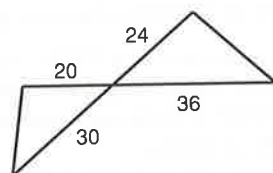
## Sui criteri di similitudine dei triangoli

### Sui triangoli simili

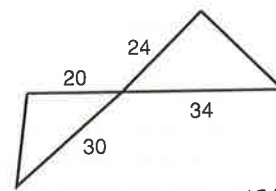
Gli esercizi dal n. 41 al n. 56 conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire e studiare dei triangoli simili.

- Dire in base a quale criterio di similitudine sono simili i due triangoli di fig. 12.
- Ripetere l'esercizio 41 a partire dai triangoli di fig. 13.
- Ripetere l'esercizio 41 a partire dai triangoli di fig. 14.
- Fra i triangoli di fig. 15 scegliere quelli simili, motivando la scelta.

Figura 15



15 a



15 b

45. Rispondere ai seguenti quesiti:  
 a. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno l'angolo al vertice di  $40^\circ$ ?  
 b. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice uguali?
46. Rispondere ai seguenti quesiti:  
 a. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno un angolo alla base di  $50^\circ$ ?  
 b. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno gli angoli alla base uguali?
47. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se due triangoli isosceli sono simili.
48. Spiegare perché sono sempre simili:  
 a. due triangoli equilateri;  
 b. due triangoli rettangoli e isosceli.
49. Rispondere ai seguenti quesiti:  
 a. perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto di  $50^\circ$ ?  
 b. perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto uguale?
50. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. un triangolo rettangolo  $T'$  ha i cateti doppi di quelli di un triangolo  $T$ ; spiegare perché  $T$  e  $T'$  sono simili;  
 b. spiegare perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno i cateti in proporzione.
51. Dire quali elementi bisogna confrontare per stabilire se due triangoli rettangoli sono simili.
52. Spiegare perché sono simili due triangoli isosceli che hanno in proporzione le basi e le altezze relative alle basi.
53. Esaminare i due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C$  di fig. 16 e risolvere i seguenti quesiti:  
 a. dire in base a quale criterio di similitudine i due triangoli sono simili;  
 b. determinare tutti gli angoli di ciascun triangolo.
54. Esaminare i due triangoli  $ABC$  e  $AB'C'$  di fig. 17 e risolvere i seguenti quesiti:  
 a. dire in base a quale criterio di similitudine i due triangoli sono simili;  
 b. determinare tutti i lati e tutti gli angoli di ciascun triangolo.
55. In triangoli simili  $ABC$  e  $A'B'C'$  disegnare due mediane corrispondenti  $CM$  e  $CM'$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. dimostrare che sono simili i triangoli  $ACM$  e  $A'C'M'$ ;  
 b. dimostrare che risulta  

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'};$$
  
 c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.
56. Disegnare due triangoli  $ABC$  e  $DEF$  con le seguenti caratteristiche:  
 - i lati  $BC$  ed  $EF$  sono sulla stessa retta  $r$ ;  
 - le altezze  $AH$  e  $DK$  sono uguali.  
 Tagliare quindi questi due triangoli e le altezze con una retta  $r'$  parallela a  $r$ , ottenendo i punti  $B'$ ,  $H'$ ,  $C'$ , e  $E'$ ,  $K'$ ,  $F'$ . Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. dimostrare che risulta  $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$  e  $\frac{EF}{E'F'} = \frac{DK}{D'K'}$ ;  
 b. dimostrare che risulta  $\frac{B'C'}{E'F'} = \frac{BC}{EF}$ ;  
 c. esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.  
*[Per risolvere il quesito (b) tenere presente che sono uguali le altezze  $AH$ ,  $DK$  e anche  $AH'$ ,  $DK'$ ]*

Figura 16

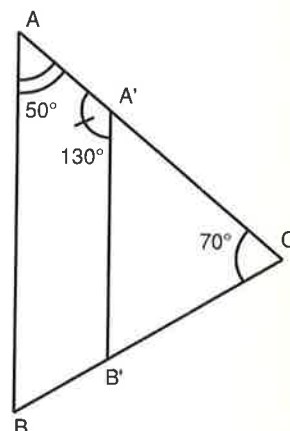
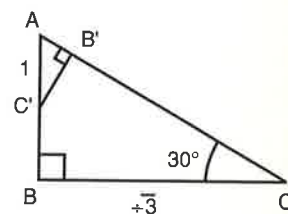


Figura 17





## Proprietà dei poligoni

Gli esercizi dal n. 57 al n. 69 conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire proprietà dei poligoni.

57. In un triangolo rettangolo ABC inscrivere un quadrato DEFG con il lato ED sull'ipotenusa AC, il vertice F sul cateto AB e il vertice G sul cateto BC; il triangolo rettangolo viene così scomposto nel quadrato DEFG e nei tre triangoli rettangoli AFE, BFG, CDG. Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che i tre triangoli rettangoli sono simili al triangolo ABC;
  - dimostrare che risulta  $AE:ED=ED:DC$ ;
  - enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.
- [Per il quesito (b) esaminare in particolare i triangoli simili AFE, GDC e ricordare che i lati di un quadrato sono tutti uguali]

58. Disegnare un triangolo ABC isoscele sulla base BC e costruire le seguenti altezze:
- l'altezza AH relativa alla base BC;
  - l'altezza BK relativa al lato AC.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché sono simili i due triangoli AHC e BKC;
  - dimostrare che risulta  $\widehat{KBC}=\widehat{HAC}$ ;
  - enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

59. Disegnare un qualunque triangolo ABC e costruire le seguenti altezze:
- l'altezza AH, relativa al lato BC;
  - l'altezza BK, relativa al lato AC.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che sono simili i triangoli CKB e CAH;
  - dimostrare che risulta  $KB:AH=BC:AC$ ;
  - enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

60. Disegnare un triangolo rettangolo ABC e, da un punto P scelto a piacere sull'ipotenusa BC, tracciare la perpendicolare all'ipotenusa stessa, fino ad incontrare la retta AB in M e la retta AC in N; risolvere i seguenti quesiti:
- descrivere tutti i triangoli simili che si formano con la costruzione indicata;
  - scegliere opportunamente le coppie di triangoli simili per dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$PM:PB=PC:PN$$

$$MA:MP=MN:MB$$

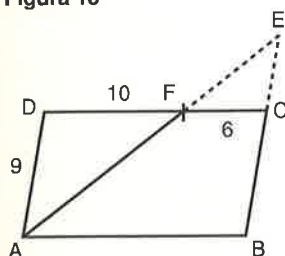
$$NA:NP=NM:NC$$

61. Disegnare un angolo acuto di vertice A a piacere; effettuare quindi le seguenti costruzioni:
- scegliere un punto B a piacere su uno dei lati dell'angolo e condurre la perpendicolare al lato stesso, fino ad incontrare l'altro lato in D;
  - scegliere un punto C a piacere sul lato AD e condurre la perpendicolare al lato stesso, fino ad incontrare AB in E;
  - indicare con M il punto di incontro delle rette CE e DB.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- descrivere tutti i triangoli simili che si formano con la costruzione indicata;
  - scegliere opportunamente le coppie di triangoli simili per dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$AB:AC=AD:AE$$

$$MB:MC=ME:MD$$

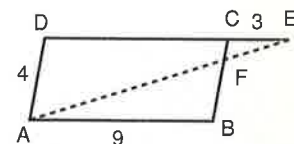
Figura 18



62. In fig. 18 si è disegnato un parallelogramma ABCD, si è fissato un punto F sul lato DC, si è congiunto A con F e si è indicato con E il punto di incontro fra la retta AF e la retta BC. Risolvere i seguenti quesiti:
- descrivere tutti i triangoli simili che si sono formati con la costruzione indicata;
  - basandosi sulle informazioni date dalla figura, calcolare la lunghezza dei segmenti AF, FE, EC, AB.

63. In fig. 19 si è disegnato un parallelogramma ABCD, si è prolungato il lato DC di un segmento CE, si è congiunto A con E. Risolvere i seguenti quesiti:
- descrivere tutti i triangoli simili che si sono formati con la costruzione indicata;
  - basandosi sulle informazioni date dalla figura, calcolare la lunghezza dei segmenti BF, CF, AF, FE.

Figura 19

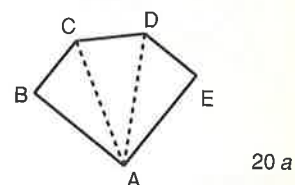


64. Disegnare un trapezio ABCD a piacere, indicare con M il punto medio del lato AD e con N il punto medio del lato BC e effettuare la seguente costruzione:
- congiungere M con N;
  - disegnare la diagonale AC che incontra MN in P.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che i due triangoli ADC e APM sono simili;
  - dimostrare che P è il punto medio della diagonale AC.
65. Dopo aver svolto l'esercizio 64, dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque trapezio la retta che passa per i punti medi dei lati obliqui taglia le diagonali nel loro punto medio.
66. Disegnare un trapezio ABCD e le sue due diagonali che si incontrano nel punto P; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che i triangoli ABP e CDP sono simili;
  - dimostrare che risulta  $AP:PC=PB:DP=AB:DC$ ;
  - enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.
67. A partire dal trapezio ABCD disegnato nell'esercizio 66, condurre per P la parallela alle basi del trapezio, fino ad incontrare AD in E e BC in F; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che sono simili i triangoli ADB e AEP;
  - dimostrare che sono simili i triangoli ABC e PCF;
  - dimostrare che risulta  $EP=FP$ .

[Per risolvere il quesito (c) ricordare che in due triangoli simili il rapporto di due lati è uguale al rapporto delle corrispondenti altezze, come mostrato nel testo, p. 103; applicare questa proprietà alle due coppie di triangoli simili individuate nei quesiti (a) e (b)]

68. In fig. 20 sono disegnati due poligoni simili ABCDE e A'B'C'D'E', in cui sono state tracciate tutte le diagonali che escono da due vertici omologhi; dimostrare che sono simili i seguenti triangoli:
- ADE e A'D'E'      ADC e A'D'C'      ABC e A'B'C'

Figura 20



69. Dopo aver svolto l'esercizio 68 dimostrare la seguente proprietà: due poligoni simili vengono decomposti dalle diagonali condotte da due vertici omologhi in triangoli simili ed ugualmente disposti.

### Proprietà del cerchio

Gli esercizi dal n. 70 al n. 78 conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire proprietà relative alla circonferenza

70. Disegnare una circonferenza e due sue corde AB e BC; tracciare quindi le seguenti rette:
- la retta  $t$ , tangente alla circonferenza in B;
  - una retta  $r$ , parallela a  $t$ , che incontra la corda AB in M e la corda BC in N.
- Dimostrare che i triangoli ACB e MNB sono simili.

[Tenere presente che l'angolo fra la tangente  $t$  e la corda BC è uguale all'angolo  $\widehat{BAC}$  perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, p. 146]

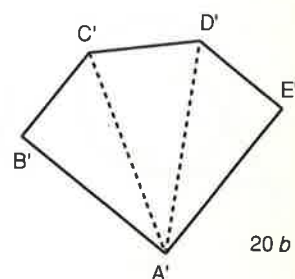


Figura 21

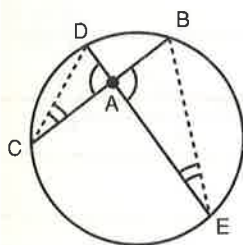
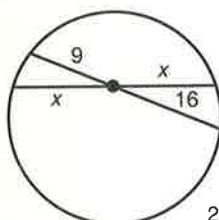
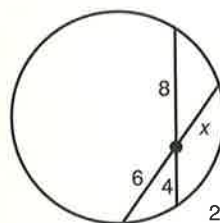


Figura 22



22 a



22 b

Figura 23

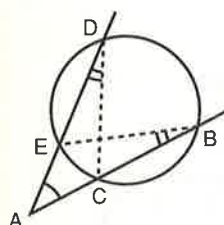
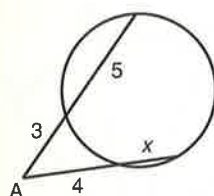
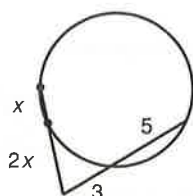


Figura 24



24 a



24 b

Figura 25

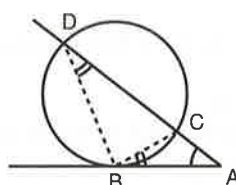
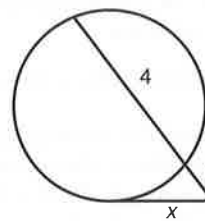
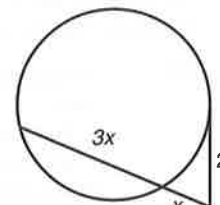


Figura 26



26 a



26 b

71. Disegnare un qualunque quadrilatero ABCD inscritto in una circonferenza e disegnarne le diagonali DB e AC, che si incontrano in un punto P; risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che sono simili i triangoli ADP e CBP;
- dimostrare che sono simili i triangoli DCP e ABP;

[Tenere presente che sono uguali angoli opposti al vertice e angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, pp. 126 e 146]

72. Dopo aver svolto l'esercizio 71, dimostrare che un qualunque quadrilatero inscritto in un cerchio è diviso dalle sue diagonali in due coppie di triangoli simili.

73. In fig. 21 è disegnato un cerchio e due sue corde BC e DE che si incontrano in un punto A; si è quindi unito D con C e B con E, formando i due triangoli ACD e ABE; risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che i due triangoli sono simili;
- dimostrare che vale la proporzione  $AB:AE=AD:AC$ ;
- enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Per il quesito (a) vedere il suggerimento dato nell'esercizio 70]

74. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 73 per determinare le lunghezze indicate con  $x$  nella fig. 22.

75. In fig. 23 è disegnato un cerchio e, da un punto esterno A, si sono condotte due secanti AB e AD; si è quindi unito D con C e B con E, formando i due triangoli ACD e ABE; risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che i due triangoli sono simili;
- dimostrare che vale la proporzione  $AB:AD=AE:AC$ ;
- enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Per il quesito (a) vedere il suggerimento dato nell'esercizio 70]

76. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 75 per determinare le lunghezze indicate con  $x$  nella fig. 24.

77. In fig. 25 è disegnato un cerchio e, da un punto esterno A, si è condotta una secante AD e una tangente AB; si è quindi unito B con D e con C, formando i due triangoli ACB e ABD; risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che i due triangoli sono simili;
- dimostrare che vale la proporzione  $AD:AB=AB:AC$ ;
- enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Per il quesito (a) tenere presente che sono uguali due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, p. 146]

78. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 77 per determinare le lunghezze indicate con  $x$  nella fig. 26.

## Sul rapporto di similitudine

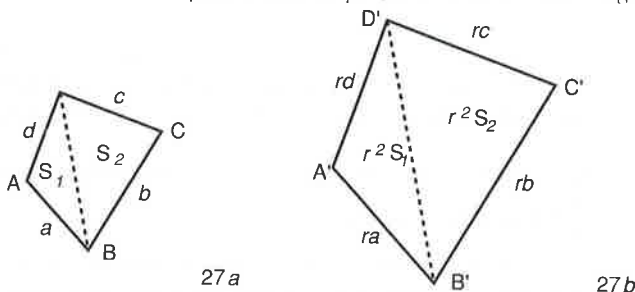
Gli esercizi dal n. 79 al n. 90 richiedono di applicare i seguenti risultati (p. 104):

1. in due triangoli simili tutte le coppie di segmenti corrispondenti hanno lo stesso rapporto  $r$ , detto rapporto di similitudine;
2. il rapporto delle aree di due triangoli simili è  $r^2$ , cioè il quadrato del rapporto di similitudine.

79. Disegnare due triangoli simili ABC e A'B'C'; dimostrare che:
- a. il rapporto dei perimetri è uguale al rapporto di due lati corrispondenti;
  - b. il rapporto delle aree è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti.
- [Indicare con  $a, b, c, h$  le lunghezze dei lati e di un'altezza in ABC e con  $ra, rb, rc, rh$  le lunghezze degli elementi corrispondenti di A'B'C']
80. In fig. 27 sono disegnati due poligoni simili ABCD e A'B'C'D'; risolvere i seguenti quesiti:
- a. dimostrare che il rapporto dei perimetri è uguale al rapporto di due lati corrispondenti;
  - b. dimostrare che il rapporto delle aree dei due poligoni è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti.

[Tenere anche presenti le conclusioni degli esercizi 69 e 79]

Figura 27



81. Sono dati due triangoli equilateri, uno con il lato lungo 15 e l'altro con il lato lungo 20; determinare il rapporto delle loro aree.  
[Attenzione: non sono richieste le aree, ma il loro rapporto]
82. Sono dati due triangoli equilateri, uno con l'area ampia 45 e l'altro con l'area ampia 20; determinare il rapporto dei loro lati.  
[Attenzione: non sono richiesti i lati, ma il loro rapporto]
83. Un pentagono regolare ha il lato lungo 10; risolvere i seguenti quesiti:
- a. calcolare il perimetro del pentagono di area doppia;
  - b. calcolare il perimetro del pentagono di area tripla.
84. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 45 e il cateto AC lungo 22. Da un punto P del cateto AB si traccia la parallela all'altro cateto, fino ad incontrare l'ipotenusa BC in Q. Stabilire a quale distanza dal vertice B si deve fissare P per avere un triangolo BPQ di area 220.  
[Indicata con  $x$  la distanza PB, si ottiene una rapida soluzione calcolando il rapporto fra le aree dei due triangoli simili APB e ABC e tenendo presente che il rapporto di due lati omologhi...]
85. È dato un triangolo isoscele ABC con la base AB lunga 10 e l'altezza CH lunga 8. Si traccia una retta  $r$  parallela alla base, che incontra il lato AC in D e il lato CB in E, determinando il triangolo CDE e il trapezio ABDE. Stabilire a quale distanza dal vertice C deve essere tracciata la retta  $r$  perché l'area del trapezio sia  $\frac{7}{9}$  dell'area del triangolo CDE.

[Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e CDE; si ottiene  $\frac{16}{9}$ . Indicare con  $x$  la distanza della corda dal vertice e tenere presente che il rapporto delle altezze deve essere... Si trova  $x=6$ ]



86. È dato un triangolo ABC con l'altezza CH lunga 12. Si traccia una retta  $r$  parallela ad AB, che incontra il lato AC in D e il lato CB in E, determinando il triangolo CDE e il trapezio ABDE.  
Stabilire a quale distanza dal vertice C deve essere tracciata la retta  $r$  perché l'area del trapezio sia  $\frac{7}{9}$  dell'area del triangolo CDE.

[Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e CDE.  
Indicare con  $x$  la distanza della corda dal vertice A e tenere presente che il rapporto delle altezze deve essere... Si trova  $x=16$ ]

87. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 24 e il cateto AC lungo 18. Da un punto P del cateto AB si conduce la perpendicolare PQ all'ipotenusa BC, determinando il triangolo PQB e quadrilatero APQC.  
Stabilire a quale distanza dal vertice B deve essere scelto P perché l'area del quadrilatero sia  $\frac{5}{4}$  dell'area del triangolo PQB.

[Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e PQB.  
Indicare con  $x$  la distanza PB e tenere presente che il rapporto di due lati omologhi deve essere... Si trova  $x=20$ ]

88. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 9 e il cateto AC lungo 12. Da un punto P del cateto AB si conduce la parallela all'ipotenusa BC fino a incontrare in Q il cateto AC; si determinano così il triangolo APQ e il trapezio PQBC.  
Stabilire a quale distanza dal vertice A deve essere scelto P perché l'area del trapezio sia  $\frac{5}{4}$  dell'area del triangolo PQA.

[Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e APQ.  
Indicare con  $x$  la distanza AP e tenere presente che il rapporto di due lati omologhi deve essere... Si trova  $x=6$ ]

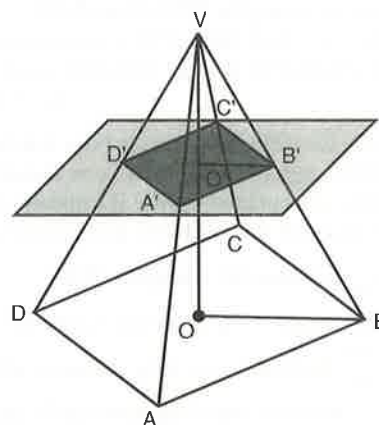
89. In fig. 28 è disegnata una piramide retta, che ha il vertice nel punto V, l'altezza VO lunga  $h$  e il quadrilatero ABCD come base; la piramide è stata quindi segata con un piano parallelo alla base e distante  $h'$  dal vertice V, determinando un quadrilatero A'B'C'D'; risolvere i seguenti quesiti:
- riprendere i ragionamenti esposti nel testo a p. 93 per dimostrare che i due quadrilateri ABCD e A'B'C'D' sono simili;
  - esaminare i triangoli VO'B' e VOB per dimostrare che vale la relazione:

$$O'B':OB=h':h$$

- indicare con  $S$  e  $S'$  le aree dei due quadrilateri e dimostrare che risulta:

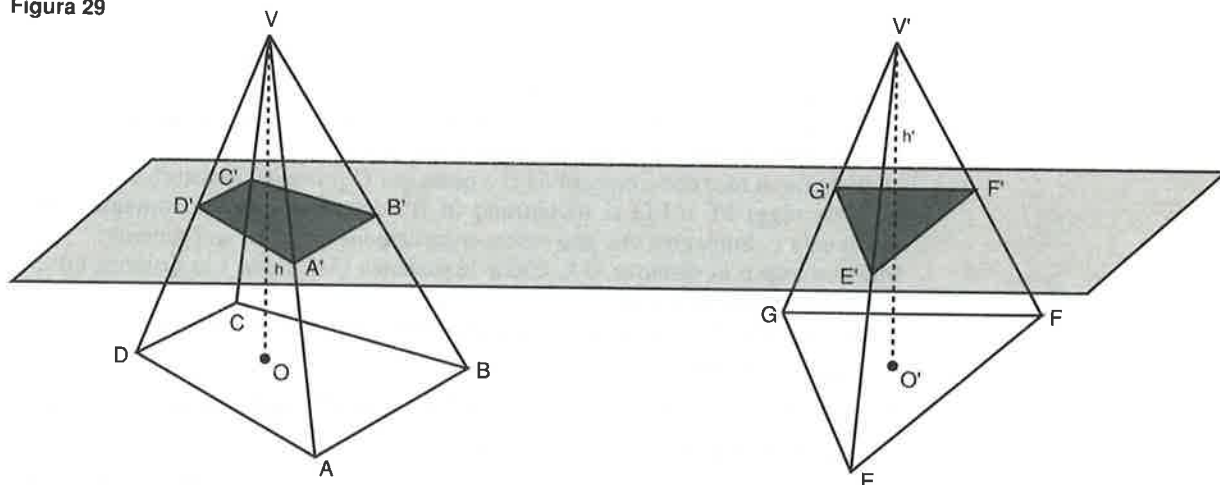
$$S':S=h'^2:h^2$$

Figura 28



90. Esaminare le due piramidi di fig. 29, che presentano le seguenti caratteristiche:
- le basi  $ABCD$  e  $EFG$  si trovano su uno stesso piano;
  - le basi sono equivalenti, cioè che hanno la stessa area  $S$ ;
  - le altezze  $VO$  e  $V'O'$  hanno la stessa lunghezza  $h$ .
- Le due piramidi sono state tagliate con un piano parallelo a quello delle basi, determinando i due poligoni  $A'B'C'D'$  e  $E'F'G'$ .
- Risolvere i seguenti quesiti:
- basarsi sul risultato indicato nel quesito (c) dell'esercizio 89 per dimostrare che i due poligoni  $A'B'C'D'$  e  $E'F'G'$  sono ancora equivalenti;
  - valersi del precedente risultato per concludere che le due piramidi hanno uguale volume.

Figura 29



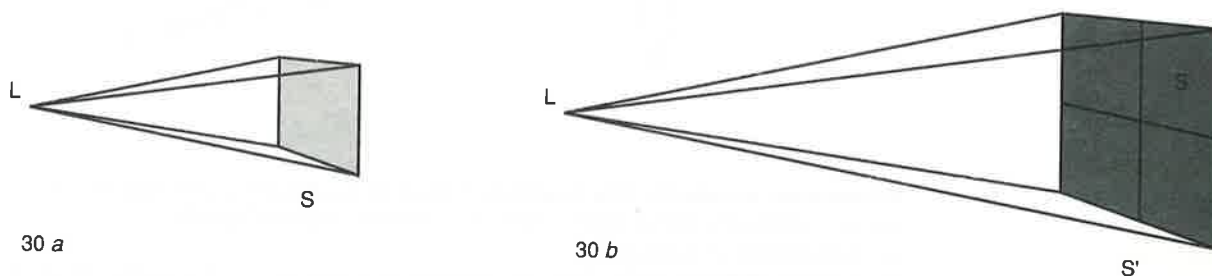
## La similitudine nella realtà

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 91 al n. 94 conducono ad applicare la similitudine in problemi di fisica.

91. In fig. 30a è rappresentata una sorgente luminosa  $L$  che illumina un foglio quadrato di area  $S=10 \text{ cm}^2$  posto a distanza  $1 \text{ m}$ ; in fig. 30b un altro foglio quadrato di area  $S'$  è stato disposto a distanza doppia da  $L$ . Risolvere i seguenti quesiti:
- valersi del risultato indicato nel quesito (c) dell'esercizio 89 per determinare l'area  $S'$  del secondo quadrato;
  - formulare la legge che lega l'area  $S'$  di un foglio alla distanza  $h$  dalla candela  $L$ .

Figura 30



92. L'esercizio 91 suggerisce un risultato: disponendo un foglio a distanza doppia, la luce della stessa candela L «si disperde» su una superficie  $S'=4S$ , perciò la superficie  $S'$  riceve un'intensità luminosa che è  $\frac{1}{4}$  di quella ricevuta da  $S$ .

Queste osservazioni conducono alla legge: *l'intensità d'illuminazione di una superficie è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente.*

Dire in quali dei seguenti casi un foglio viene illuminato quanto il foglio di fig. 30a:

- si mette un foglio a distanza di 2 m, ma vicino a L si accende un'altra candela uguale, raddoppiando la luce emessa;
- si mette un foglio a distanza di 2 m, ma vicino a L si accendono altre tre candele uguali, quadruplicando la luce emessa.

93. La fig. 31 rappresenta schematicamente una lente convergente (cioè una comune lente d'ingrandimento), davanti alla quale è disposta una candela AB; sperimentalmente si possono trovare le proprietà:

- il raggio di luce emesso da B e parallelo all'asse  $AA'$  viene deviato quando attraversa la lente, in modo da tagliare  $AA'$  in F;
- il raggio di luce che è emesso da B e passa per O prosegue indisturbato;
- i due raggi PF e LO si incontrano in  $B'$ , determinando un'immagine della candela L, immagine che può essere colta disponendo in  $B'$  uno schermo.

Indicare con  $p$  la distanza OA, con  $q$  la distanza  $OA'$  e con  $f$  la distanza OF e risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che sono simili i triangoli ABO e  $A'B'O$  e spiegare perché risulta:

$$q:p = A'B':AB \quad (1)$$

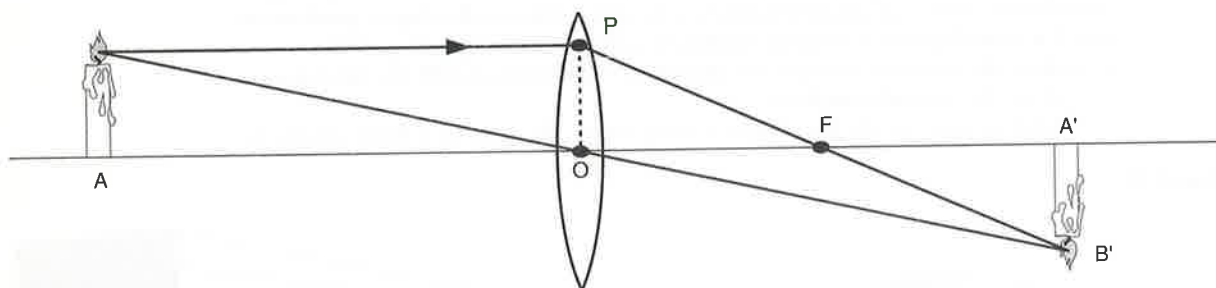
- dimostrare che sono simili i triangoli POF e  $B'A'F$  e spiegare perché risulta:

$$(q-f):f = A'B':AB \quad (2)$$

- confrontare opportunamente la (1) con la (2) per ricavare la seguente relazione, detta *formula dei punti coniugati*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Figura 31



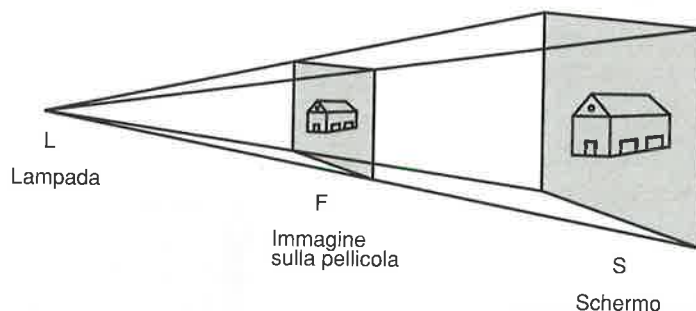
94. Disponendo un oggetto alla distanza  $p=0,125$  m da una lente convergente, se ne forma l'immagine alla distanza  $q=0,5$  m; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la distanza  $f$ ;
  - a quale distanza dalla lente si formerà l'immagine di un oggetto posto a distanza di 0,2 m dalla lente?
- [Tenere presente la formula dei punti coniugati ottenuta nell'esercizio 93]

### Problemi vari

Gli esercizi dal n. 95 al n. 101 richiedono di valersi delle proprietà delle figure simili per risolvere problemi vari tratti dalla realtà.

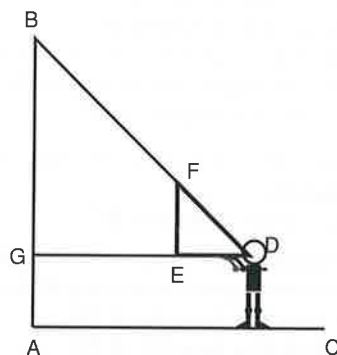
95. In fig. 32 è rappresentato schematicamente un proiettore cinematografico; la pellicola posta in F viene proiettata dalla lampada L sullo schermo S; risolvere i seguenti quesiti:
- sapendo che la distanza LF vale 6 cm, la distanza LS vale 24 m e l'immagine sullo schermo è alta 2,2 m, dire quanto è alta l'immagine sulla pellicola;
  - se la distanza LS si dimezza, come si modifica l'immagine sullo schermo?
- [(a) 0.55 cm]

Figura 32



96. Disegnare su un foglio a quadretti un poligono a piacere, con i vertici sui nodi del quadrettato. Disegnare poi un reticolato a maglie doppie e riprodurvi il poligono iniziale. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché i due poligoni sono simili;
  - calcolare il rapporto di similitudine.
97. Ripetere l'esercizio precedente, modificando:
- la figura disegnata nel quadrettato iniziale;
  - le maglie del reticolato finale, per esempio triplicandole o dimezzandole.
98. Per misurare l'altezza AB di una collina o di un palazzo si può usare una squadra a cateti uguali, come FED di fig. 33, spostandosi fino ad arrivare ad una posizione D in cui il raggio visuale DF passa per B. Risolvere i seguenti quesiti:
- quali misure occorre eseguire per determinare l'altezza AB?
  - quale procedimento si deve seguire per determinare la distanza AB, se la squadra ha il cateto ED doppio del cateto FE?

Figura 33





99. In fig. 34 un giocatore di pallacanestro MN alto 2 m è disposto davanti ad un palo AB in modo che la sua ombra e quella del palo finiscano nello stesso punto P. L'ombra del palo è lunga 4,4 m, mentre quella del giocatore è lunga 1,6 m; quanto è alto il palo? [5,5 m]
100. In fig. 35 viene misurata l'altezza di un palo AB disponendo in terra uno specchio S: l'osservatore OO', alto circa 1,6 m, è disposto in modo da vedere, riflessa nello specchio, la cima del palo; così la legge della riflessione (vedere primo volume, p. 190) garantisce che gli angoli  $i$  e  $r$  sono uguali fra loro. Sapendo che lo specchio dista 4,5 m dal palo e 1,2 m dall'osservatore, quanto è alto il palo? [circa 6 m]

Figura 34

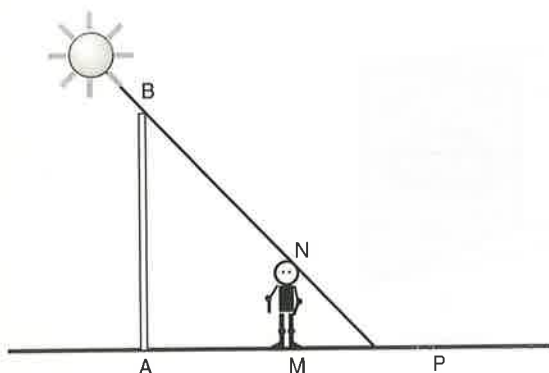


Figura 35

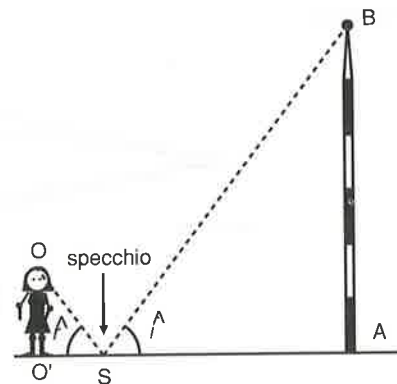
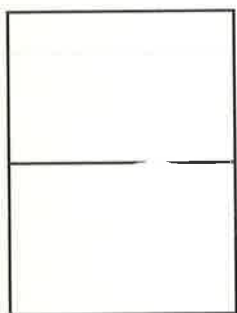
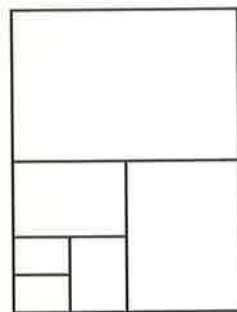


Figura 36



36 a



36 b

101. Fra i fogli di carta per scrivere a macchina c'è in commercio un formato che viene detto «UNI». Questi fogli hanno una singolare proprietà (fig. 36a): tagliando un foglio a metà parallelamente alla dimensione minore, si ottengono due fogli simili a quello di partenza.

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il rapporto fra le dimensioni di un foglio UNI;
- misurare le dimensioni di un foglio UNI e calcolarne il rapporto;
- spiegare perché la divisione può continuare su rettangoli sempre più piccoli, ottenendo sempre rettangoli simili a quello di partenza (fig. 36b).

## Sulle relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Gli esercizi dal n. 102 al n. 106 conducono a riflettere sulle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.

102. Disegnare un triangolo ABC rettangolo ed isoscele con i due cateti AB e AC lunghi 3 cm; risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
  - spiegare perché gli angoli acuti sono ampi entrambi  $45^\circ$ ;
  - scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
  - determinare seno, coseno e tangente di  $45^\circ$ .
103. Disegnare un triangolo ABC con il cateto AB lungo 6 cm e il cateto AC lungo 3 cm; risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
  - spiegare perché l'angolo  $\hat{B}$  è ampio  $30^\circ$  e l'angolo  $\hat{C}$  è ampio  $60^\circ$ ;
  - scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
  - determinare seno, coseno e tangente di  $30^\circ$ ;
  - determinare seno, coseno e tangente di  $60^\circ$ .

104. Disegnare un triangolo ABC con il cateto AB lungo 3 cm e il cateto AC lungo 4 cm; risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
  - misurare con il goniometro l'ampiezza  $\beta$  dell'angolo  $\hat{B}$  e l'ampiezza  $\gamma$  dell'angolo  $\hat{C}$ ;
  - scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
  - determinare seno, coseno e tangente di  $\beta$ ;
  - determinare seno, coseno e tangente di  $\gamma$ .
105. Ripetere l'esercizio 104 a partire da un triangolo rettangolo ABC disegnato a piacere.
106. Disegnare un triangolo rettangolo e disporre le lettere nel modo seguente:
- indicare con A il vertice dell'angolo retto e con  $a$  la misura dell'ipotenusa;
  - indicare con  $\beta$  l'ampiezza dell'angolo  $\hat{B}$  e con  $b$  la misura di AC (opposto a B);
  - indicare con  $\gamma$  l'ampiezza dell'angolo  $\hat{C}$  e con  $c$  la misura di AB (opposto a C).
- Risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le relazioni che legano lati e angoli del triangolo valendosi di seno, coseno e tangente di  $\beta$ ;
  - scrivere le relazioni che legano lati e angoli del triangolo valendosi di seno, coseno e tangente di  $\gamma$ .

## Sulle funzioni trigonometriche

Gli esercizi dal n. 107 al n. 114 conducono a determinare seno, coseno e tangente di un angolo valendosi di un calcolatore tascabile.

107. Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

$\alpha$	Tasti	$\text{sen } \alpha$
$10^\circ$	1 0 sen	$\text{sen } 10^\circ \approx 0,174$
$20^\circ$		
$30^\circ$		
$40^\circ$		
$50^\circ$		
$60^\circ$		
$80^\circ$		
$90^\circ$		

$\text{sen } \alpha$	Tasti	$\alpha$
0	0 INV sen	$\alpha = 0^\circ$
0,15		$\alpha \approx 9^\circ$
0,30		
0,45		
0,60		
0,75		
0,90		
1,00		

108. Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

$\alpha$	Tasti	$\text{cos } \alpha$
$10^\circ$	1 0 cos	$\text{cos } 10^\circ \approx 0,98$
$20^\circ$		
$30^\circ$		
$40^\circ$		
$50^\circ$		
$60^\circ$		
$80^\circ$		
$90^\circ$		

$\text{cos } \alpha$	Tasti	$\alpha$
0	0 INV cos	$\alpha = 90^\circ$
0,15		$\alpha \approx 81^\circ$
0,30		
0,45		
0,60		
0,75		
0,90		
1,00		

**109.** Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

$\alpha$	Tasti	$\operatorname{tg} \alpha$
$5^\circ$	$\boxed{5} \boxed{\operatorname{tg}}$	$\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,09$
$15^\circ$		
$25^\circ$		
$35^\circ$		
$45^\circ$		
$55^\circ$		
$65^\circ$		
$75^\circ$		
$85^\circ$		

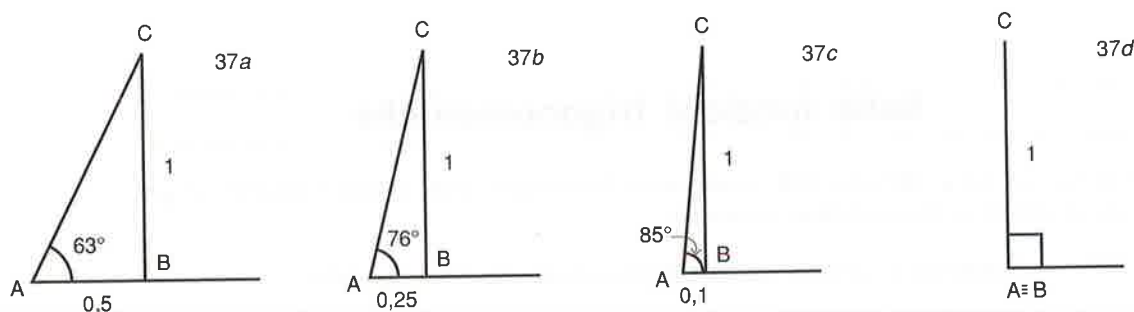
$\operatorname{tg} \alpha$	Tasti	$\alpha$
0	$\boxed{0} \boxed{\operatorname{INV}} \boxed{\operatorname{tg}}$	$\alpha = 0^\circ$
0,5		$\alpha \approx 26^\circ$
1		
1,5		
2		
2,5		
5		
50		
500		

**110.** Valendosi sempre di un calcolatore tascabile, ripetere il procedimento seguito nell'esercizio 109 per calcolare la tangente degli angoli che hanno le seguenti ampiezze (misurate in gradi sessagesimali):

89                      89,9                      89,99                      89,99999                      90

Osservare la fig. 37 per spiegare perché il calcolatore dà un messaggio d'errore quando si chiede la tangente di  $90^\circ$ .

Figura 37



**111.** Valersi di un calcolatore tascabile per determinare seno e coseno delle seguenti coppie di angoli complementari:

$5^\circ$  e  $85^\circ$                        $15^\circ$  e  $75^\circ$                        $20^\circ$  e  $70^\circ$

Valersi della definizione di seno e coseno di un angolo per spiegare perché risulta sempre:

$$\operatorname{sen} \beta = \cos \gamma \quad \text{con} \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

**112.** Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare la tangente delle stesse coppie di angoli complementari date nell'esercizio 111 e moltiplicare fra loro i valori ottenuti.

Valersi della definizione di tangente di un angolo per spiegare perché risulta sempre:

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = 1 \quad \text{con} \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

**113.** Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare il valore delle seguenti espressioni:

$$(\operatorname{sen} 10^\circ)^2 + (\cos 10^\circ)^2 \quad (\operatorname{sen} 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 \quad (\operatorname{sen} 70^\circ)^2 + (\cos 70^\circ)^2$$

Valersi della definizione di seno e coseno di un angolo per spiegare perché risulta per qualunque angolo  $\alpha$ :

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

114. Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare il valore delle seguenti espressioni:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 15^\circ \qquad \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 45^\circ \qquad \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 75^\circ$$

Valersi della definizione di seno, coseno e tangente di un angolo per spiegare perché risulta per qualunque angolo  $\alpha$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

## Problemi sui triangoli rettangoli

### Problemi di geometria

Gli esercizi dal n. 115 al n. 127 conducono a valersi delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi di geometria; in alcuni casi è proposto un confronto fra i procedimenti della geometria elementare e quelli trigonometrici.

115. Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto AC lungo 2 e l'altezza AH lunga 1,4. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
  - determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
  - confrontare i risultati ottenuti, indicando in particolare i risultati che si possono ottenere solo con la trigonometria.

$$[\hat{B} \cong 46^\circ; \hat{C} \cong 44^\circ; AB \cong 1,96; BC \cong 2,8]$$

116. Un triangolo rettangolo ABC ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa che sono:

$$CH=10 \qquad HB=40$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare l'altezza AH valendosi del secondo teorema di Euclide;
- determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
- determinare i lati del triangolo valendosi del teorema di Pitagora;
- confrontare i risultati ottenuti.

$$[AH=20; AB=10\sqrt{5}; AC=20\sqrt{5}]$$

117. Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa lunga 9. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
  - determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
  - confrontare i risultati ottenuti.

$$[\hat{B} \cong 53^\circ; \hat{C} \cong 37^\circ; AB=15; BC=25; AC=20]$$

118. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A, con l'ipotenusa lunga 15 e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa lunga 3. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare il cateto AB valendosi del primo teorema di Euclide;
  - determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
  - determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
  - confrontare i risultati ottenuti.

$$[\hat{B} \cong 72^\circ; \hat{C} \cong 18^\circ; AB=3\sqrt{5}; AC=6\sqrt{5}]$$

119. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A, con il cateto AC lungo 15 e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa lunga 5. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare l'ipotenusa valendosi del primo teorema di Euclide;
  - determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
  - determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
  - confrontare i risultati ottenuti, indicando quali si possono ottenere solo con la trigonometria.

$$[\hat{B} \cong 72^\circ; \hat{C} \cong 18^\circ; BC=45; AB=30\sqrt{2}]$$



Figura 38

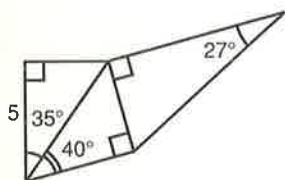
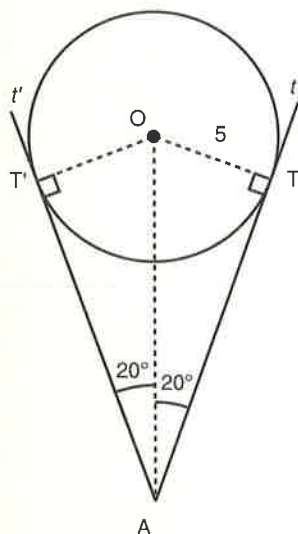


Figura 39



120. Un rettangolo ABCD ha i lati lunghi 10 e 5; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. tracciare la diagonale AC e valersi della trigonometria per calcolare l'angolo che essa forma con AB;  
 b. calcolare la lunghezza della diagonale AC valendosi della trigonometria;  
 c. calcolare la lunghezza della diagonale AC valendosi del teorema di Pitagora;  
 d. confrontare i risultati ottenuti nei quesiti (b) e (c).  $[AC = 5\sqrt{5}]$
121. Un rombo ABCD ha le diagonali lunghe 2 e 5; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. valersi della trigonometria per calcolare gli angoli del rombo;  
 b. valersi della trigonometria per calcolare la lunghezza del lato del rombo;  
 c. calcolare il lato del rombo valendosi del teorema di Pitagora;  
 d. confrontare i risultati ottenuti nei quesiti (b) e (c).  $[\hat{A} \cong 136^\circ; \hat{B} \cong 44^\circ]$
122. Calcolare l'area  $S$  e il perimetro  $2p$  della piastra poligonale rappresentata in fig. 38, valendosi dei dati indicati in figura.  $[2p \cong 29,4; S \cong 32,73]$
123. Un cerchio ha centro  $O$  e il raggio lungo 5; dal punto esterno  $A$  sono condotte due tangenti che formano un angolo di  $40^\circ$  (fig. 39); rispondere ai seguenti quesiti:  
 a. calcolare la distanza  $AO$ ;  
 b. calcolare l'area  $S$  del quadrilatero  $ATOT'$ .  
*[Tenere presenti le proprietà delle tangenti ad una circonferenza esposte nel primo volume, p. 199; si ottiene  $AO \cong 14,6$ ;  $S \cong 73$ ]*
124. Disegnare un cerchio di centro  $O$ , scegliendo un raggio  $r$  a piacere, fissare un punto  $A$  che disti dal centro  $O$  il triplo del raggio e condurre da  $A$  le due tangenti alla circonferenza; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. calcolare l'angolo  $\alpha$  formato dalle tangenti;  
 b. spiegare perché l'angolo non dipende dal raggio del cerchio.
125. Disegnare una semicirconferenza di centro  $O$  e diametro  $AB$  lungo 8, disegnare una corda  $AT$  che formi con  $AB$  un angolo di  $15^\circ$  e risolvere i seguenti quesiti:  
 a. perché il triangolo  $ABT$  è rettangolo in  $T$ ;  
 b. calcolare la lunghezza della corda.  
*[Per il quesito (a) ricordare che un angolo alla circonferenza è sempre la metà del corrispondente angolo al centro, come mostrato nel primo volume, pp. 144-146; si ottiene  $AT \cong 7,73$ ]*
126. Disegnare la semicirconferenza di centro  $O$  e diametro  $AB$  lungo 8; costruire quindi:  
 - la corda  $AT$ , che forma con  $AB$  un angolo di  $25^\circ$ ;  
 - la tangente in  $T$  alla semicirconferenza, fino ad incontrare la retta  $AB$  in  $C$ .  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare l'ampiezza dell'angolo  $\hat{COT}$ ;  
 b. determinare la lunghezza dei segmenti  $OC$  e  $TC$ .  
*[Tenere presente l'esercizio 25; si ottiene:  $OC \cong 2,57$ ;  $TC \cong 4,77$ ]*
127. A partire dalla stessa semicirconferenza disegnata nell'esercizio 126, costruire:  
 - la corda  $AT$ , che forma con  $AB$  un angolo di  $15^\circ$ ;  
 - la tangente in  $T$  alla semicirconferenza, fino ad incontrare la retta  $AB$  in  $C$ .  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare l'ampiezza dell'angolo  $\hat{COT}$ ;  
 b. determinare la lunghezza dei segmenti  $OC$  e  $TC$ , valendosi della trigonometria;  
 c. spiegare perché in questo caso si può risolvere il problema anche valendosi del teorema di Pitagora;  
 d. calcolare la lunghezza dei segmenti  $OC$  e  $OT$  valendosi del teorema di Pitagora e confrontare i risultati ottenuti con quelli ottenuti risolvendo il quesito (b).  
*[ $OC \cong 4,6$ ;  $TC \cong 2,3$ ]*

## Determinare lati e angoli di triangoli rettangoli valendosi del calcolatore tascabile

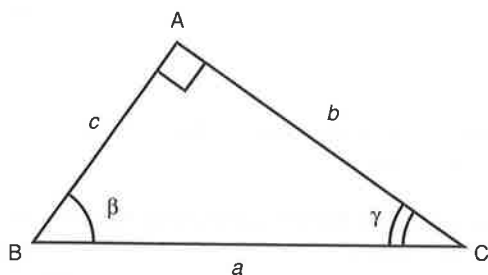
Gli esercizi dal n. 128 al n. 135 conducono a determinare tutti gli elementi di un triangolo rettangolo (lati e angoli), a partire da alcuni elementi assegnati. Per risolvere gli esercizi conviene tenere presenti le seguenti considerazioni:

- a. per calcolare gli elementi incogniti di un triangolo, occorre che gli elementi noti determinino un solo triangolo. Gli elementi indispensabili per determinare un triangolo rettangolo sono fissati dai criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli (vedere primo volume, p. 187); si hanno perciò due casi possibili:
  - I. sono dati due lati;
  - II. sono dati un lato ed un angolo;
- b. le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo sono riunite in fig. 40;
- c. per svolgere i calcoli conviene valersi il più possibile dei dati originali per ridurre gli errori di approssimazione.

128. I due cateti di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze:  $b=10$ ,  $c=7$   
Calcolare l'ipotenusa e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultato
(2) $a = \sqrt{10^2 + 7^2}$	( ( 1 0 $x^2$ + 7 $x^2$ ) $\sqrt$ )	
(5) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{7}{10}$	( ( 7 $\div$ 1 0 ) INV $\operatorname{tg}$ )	
(1) $\beta = 90^\circ - \gamma$		

Figura 40



$$\beta + \gamma = 90^\circ \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

$$\frac{b}{a} = \sin \beta = \cos \gamma \quad (3)$$

$$\frac{c}{a} = \sin \gamma = \cos \beta \quad (4)$$

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \quad (5)$$

129. I due cateti di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze:  $b=3$ ,  $c=4$ .  
Calcolare l'ipotenusa e gli angoli del triangolo.  $[a = 5; \beta \approx 37^\circ; \gamma \approx 53^\circ]$

130. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze:  $a=35$ ,  $b=13$ .  
Calcolare l'altro cateto e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(2)		$c \approx 32$
(3) $\sin \beta = \frac{13}{35}$		$\beta \approx 22^\circ$
(1)		$\gamma \approx 68^\circ$

131. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze:  $a=10$ ,  $b=6$ . Calcolare l'altro cateto e gli angoli del triangolo. [ $c=8$ ;  $\beta=53^\circ$ ;  $\gamma=37^\circ$ ]

132. Un cateto e un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure:  $b=40$ ,  $\beta=15^\circ$ . Calcolare l'altro angolo, l'ipotenusa e l'altro cateto, completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(1)		$\gamma=75^\circ$
(4) $a=\frac{40}{\sin 15^\circ}$	<div><div>4</div><div>0</div><div>÷</div><div>1</div><div>5</div><div>sen</div><div>=</div></div>	
(4) $c=\frac{40}{\operatorname{tg} 15^\circ}$		$c\cong 149$

133. Un cateto e un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure:  $b=50$ ,  $\beta=55^\circ$ . Calcolare l'altro angolo, l'ipotenusa e l'altro cateto. [ $\beta=35^\circ$ ;  $c \approx 71,4$ ;  $a \approx 87,2$ ]

134. L'ipotenusa ed un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure:  $a=120$ ,  $\gamma=10^\circ$ . Calcolare l'altro angolo e i cateti, completando la seguente tabella:

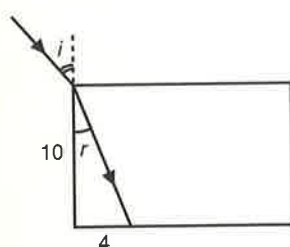
Relazione	Tasti	Risultati
(1)	-	$\beta=80^\circ$
(3) $b=120 \cdot \cos 10^\circ$	<div><div>1</div><div>2</div><div>0</div><div>×</div><div>1</div><div>0</div><div>cos</div><div>=</div></div>	
(3) $c=120 \cdot \sin 10^\circ$		$c \approx 21$

135. L'ipotenusa ed un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure:  $a=70$ ,  $\gamma=65^\circ$ . Calcolare l'altro angolo e i cateti. [ $\beta=25^\circ$ ;  $b \approx 29,6$ ;  $c \approx 63,4$ ]

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 136 al n. 139 conducono ad applicare le relazioni fra lati e angoli di un triangolo per risolvere problemi sulla legge della rifrazione.

Figura 41



136. Gli angoli di incidenza e di rifrazione di un raggio luminoso che passa dall'aria ad un altro mezzo trasparente misurano rispettivamente  $50^\circ$  e  $25^\circ$ ; calcolare l'indice  $n$  di rifrazione del mezzo. [ $n \approx 1,2$ ]

137. Un raggio luminoso incide con un angolo  $\hat{i}=70^\circ$  sulla superficie di separazione fra l'aria ed un altro mezzo trasparente; calcolare l'angolo di rifrazione nei seguenti casi, quando il secondo mezzo è:

- l'acqua, con indice  $n=1,33$ ;
- il vetro, con indice  $n=1,50$ ;
- il diamante, con indice  $n=2,42$ .

[ $(a) \approx 45^\circ$ ;  $(b) \approx 39^\circ$ ;  $(c) \approx 23^\circ$ ]

138. Un recipiente rettangolare profondo 10 cm è pieno d'acqua fino all'orlo. Un raggio di luce attraversa la superficie superiore dell'acqua esattamente in un punto in corrispondenza di un lato del recipiente (fig. 41). Dopo aver subito la rifrazione, il raggio incide in un punto del fondo del recipiente a 4 cm di distanza dallo stesso lato. Tenendo presente che l'indice di rifrazione  $n$  dell'acqua vale 1,3, calcolare l'angolo di rifrazione e l'angolo di incidenza.

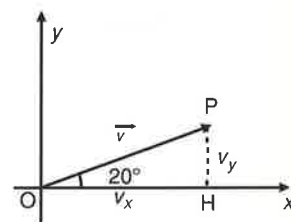
[ $\hat{r} \approx 22^\circ$ ;  $\hat{i} \approx 30^\circ$ ]

139. Lo stesso recipiente di fig. 41 viene riempito con un liquido diverso dall'acqua. Il raggio rifratto incide sullo stesso punto a 4 cm dal lato, quando l'angolo d'incidenza del raggio che entra nel liquido è ampio  $41^\circ$ ; calcolare l'indice  $n$  del liquido.  $[n \approx 1,75]$

Gli esercizi dal n. 140 al n. 142 richiedono di applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per studiare le componenti di un vettore.

140. In fig. 42 è rappresentato un vettore  $\vec{v}$ , che ha modulo  $v=10$  e forma con l'asse delle  $x$  un angolo  $\alpha=20^\circ$ ; il vettore è stato proiettato sugli assi cartesiani, ottenendo le componenti  $v_x$  e  $v_y$ ; valersi delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo, applicate al triangolo OHP, per calcolare la lunghezza delle componenti.  $[v_x \approx 9,4; v_y \approx 3,4]$

Figura 42



141. Dopo aver svolto l'esercizio 140, disegnare dei vettori che hanno il modulo  $v$  e l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  assegnati qui sotto e calcolarne le componenti.

$$\begin{cases} v=4 \\ \alpha=15^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} v=5 \\ \alpha=30^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} v=6 \\ \alpha=45^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} v=8 \\ \alpha=60^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} v=20 \\ \alpha=85^\circ \end{cases}$$

142. Sono assegnate le seguenti componenti di quattro vettori:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\begin{cases} v_x=3 \\ v_y=4 \end{cases} & \vec{w} &\begin{cases} w_x=4 \\ w_y=3 \end{cases} & \vec{r} &\begin{cases} r_x=4 \\ r_y=4 \end{cases} & \vec{s} &\begin{cases} s_x=4 \\ s_y=12 \end{cases} \end{aligned}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- disegnare i quattro vettori;
- calcolare il modulo e l'angolo che ogni vettore forma con l'asse delle  $x$ .

### Problemi vari

Gli esercizi dal n. 143 al n. 145 conducono ad applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi di astronomia.

143. Un osservatore posto in A (fig. 43) vuole calcolare la distanza OC fra il centro O della Terra e il centro C della Luna; perciò aspetta che l'angolo  $\hat{CAO}$  sia retto e quindi misura l'angolo  $\hat{ACO}$ , trovando che misura  $0^\circ 57'$ . Sapendo che il raggio OA della Terra misura 6376,755 km, calcolare la distanza OC.  $[OC \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}]$

144. Aristarco di Samo nel III secolo d.C. affronta il seguente problema (vedi scheda storica, p. 119): «Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?»

Il problema si può schematizzare con un triangolo LAS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo  $\hat{T}=87^\circ$  e si vuol ricavare il rapporto  $\frac{LT}{LS}$ .

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il rapporto  $\frac{TS}{TL}$  con l'angolo  $\hat{T}=87^\circ$ ;
- calcolare il rapporto  $\frac{TS}{TL}$ , con le attuali misure che forniscono  $\hat{T} \approx 89^\circ 51'$ ;
- confrontare i risultati ottenuti.  $[(a) 19; (b) 382]$

Figura 43

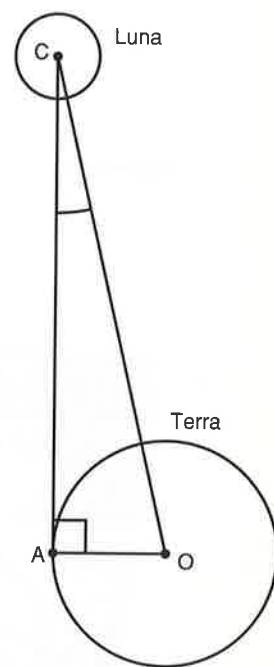
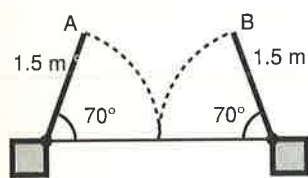




Figura 51



154. Le due porte di un'autorimessa, ciascuna larga 1,5 m, sono aperte di un angolo di  $70^\circ$  (fig. 51); calcolare la larghezza dell'apertura AB fra le due porte.  $[AB \approx 1,97 \text{ m}]$

## Sul teorema dei seni

Gli esercizi dal n. 155 al n. 158 conducono a riflettere sul teorema dei seni.

155. Disegnare un triangolo equilatero con il lato lungo 2; applicare il teorema dei seni per scrivere una relazione che lega lati ed angoli del triangolo.
156. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio  $30^\circ$  e la base AB lunga 8; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. calcolare l'ampiezza degli angoli alla base;  
 b. valersi del teorema dei seni per calcolare la lunghezza dei lati.  $[AC \approx 5,4]$
157. Ripetere l'esercizio 156 a partire da un triangolo isoscele A'B'C' con l'angolo al vertice ampio  $150^\circ$  e la base A'B' lunga 10.  $[AC \approx 5,2]$
158. Riprendere il teorema della corda (p. 140), per calcolare il raggio del cerchio circoscritto ai due triangoli ABC, A'B'C' descritti negli esercizi 156 e 157.  $[r \approx 16; r' \approx 20]$
159. Disegnare i seguenti tre triangoli con il lato AB lungo 10 e l'angolo  $\hat{B} = 30^\circ$ :  
 - ABC, che ha l'angolo  $\hat{A} = 30^\circ$ ;  
 - ABC', che ha l'angolo  $\hat{A} = 120^\circ$ ;  
 - ABC'', che ha l'angolo  $\hat{A} = 90^\circ$ .  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. calcolare il terzo angolo del triangolo ABC ed applicare il teorema dei seni per calcolarne i lati;  
 b. calcolare il terzo angolo del triangolo ABC' ed applicare il teorema dei seni per calcolarne i lati;  
 c. calcolare gli angoli e i lati del triangolo ABC'', e spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema dei seni anche a quest'ultimo triangolo;  
 d. spiegare perché i triangoli ABC e ABC' sono simili.
160. Ripetere l'esercizio 159 a partire dai seguenti triangoli con il lato AB lungo 20 e l'angolo  $\hat{B} = 15^\circ$ :  
 - ABC, che ha l'angolo  $\hat{A} = 15^\circ$ ;  
 - ABC', che ha l'angolo  $\hat{A} = 150^\circ$ ;  
 - ABC'', che ha l'angolo  $\hat{A} = 90^\circ$ .

## Sul teorema del coseno

Gli esercizi dal n. 161 al n. 165 conducono a riflettere sul teorema del coseno.

161. Disegnare un triangolo equilatero con il lato lungo 4; applicare il teorema del coseno per scrivere una relazione che lega lati ed angoli del triangolo.
162. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio  $30^\circ$  e i lati CA e CB lunghi 2; valersi del teorema del coseno per ricavare la lunghezza della base AB.  $[AB \approx 1,03]$

163. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio  $120^\circ$  e i lati CA e CB lunghi 4; valersi del teorema del coseno per ricavare la lunghezza della base AB. [AB=48]
164. Disegnare i seguenti tre triangoli con il lato AB lungo 6:
- ABC, che ha il lato AC lungo 8 e l'angolo  $\hat{A}=60^\circ$ ;
  - ABC', che ha il lato AC' lungo 8 e l'angolo  $\hat{A}=120^\circ$ ;
  - ABC'', che ha il lato AC'' lungo 8 e l'angolo  $\hat{A}=90^\circ$ .
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. calcolare il terzo lato del triangolo ABC valendosi del teorema del coseno;
  - b. calcolare il terzo lato del triangolo ABC' valendosi del teorema del coseno;
  - c. calcolare il terzo lato del triangolo ABC'';
  - d. spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema del coseno anche all'ultimo triangolo.
165. Ripetere l'esercizio 164 a partire dai seguenti triangoli con il lato AB lungo 12:
- ABC, che ha il lato AC lungo 5 e l'angolo  $\hat{A}=30^\circ$ ;
  - ABC', che ha il lato AC' lungo 5 e l'angolo  $\hat{A}=150^\circ$ ;
  - ABC'', che ha il lato AC'' lungo 5 e l'angolo  $\hat{A}=90^\circ$ .

## Problemi sui triangoli non rettangoli

### Problemi di geometria

*Gli esercizi dal n. 166 al n. 177 conducono a valersi dei teoremi dei seni e del coseno per risolvere problemi di geometria; in qualche caso è proposto un confronto fra i procedimenti della geometria elementare e quelli trigonometrici.*

166. Un parallelogramma ha due lati consecutivi lunghi 6 e 16 e l'angolo fra i due lati ampio  $60^\circ$ ; calcolare la lunghezza delle diagonali. [14; circa 19,7]
167. Un parallelogramma ABCD ha il lato AB lungo 24, il lato AD lungo 9 e la diagonale DB lunga 7; calcolare l'ampiezza degli angoli del parallelogramma. [60°; 120°]
168. Un parallelogramma ha le diagonali lunghe 6 e 16 che formano un angolo di  $120^\circ$ ; calcolare i lati e gli angoli del parallelogramma. [7; circa 9,8;  $53^\circ$ ;  $127^\circ$ ]
169. Disegnare un triangolo ABC con il lato AC lungo 3, il lato AB lungo 8 e l'angolo  $\hat{A}=60^\circ$ . Risolvere quindi i seguenti quesiti:
- a. calcolare la lunghezza del lato BC, valendosi del teorema del coseno;
  - b. calcolare gli altri due angoli del triangolo valendosi del teorema dei seni.
- [(a)7; (b)circa  $82^\circ$ ;  $38^\circ$ ]
170. Dopo aver risolto l'esercizio 169 risolvere i seguenti quesiti, sempre a partire dallo stesso triangolo ABC:
- a. tracciare l'altezza CH e calcolare la lunghezza dei segmenti AH e HB;
  - b. tracciare la bisettrice CK dell'angolo di vertice C e calcolare la lunghezza dei segmenti AK e KB;
  - c. tracciare la mediana AM, relativa al lato AB, e calcolare l'ampiezza degli angoli  $\hat{ACM}$  e  $\hat{MCB}$ .

171. Disegnare un triangolo ABC con il lato AC lungo 3, il lato AB lungo 8 e l'angolo  $\hat{A}=120^\circ$ . Risolvere quindi i seguenti quesiti:  
 a. calcolare la lunghezza del lato BC, valendosi del teorema del coseno;  
 b. calcolare gli altri due angoli del triangolo valendosi del teorema dei seni.  
 [(a) circa 9,8; (b)  $15^\circ$ ;  $45^\circ$ ]
172. Dopo aver risolto l'esercizio 171 risolvere i seguenti quesiti, sempre relativi allo stesso triangolo ABC:  
 a. tracciare l'altezza CH e calcolare la lunghezza dei segmenti AH e HB;  
 b. tracciare la bisettrice CK dell'angolo di vertice C e calcolare la lunghezza dei segmenti AK e KB;  
 c. tracciare la mediana AM, relativa al lato AB, e calcolare l'ampiezza degli angoli  $\hat{ACM}$  e  $\hat{MCB}$ .
173. Valersi del teorema della corda (p. 140) per calcolare la lunghezza del lato dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza con il raggio lungo  $r$ , completando la tabella seguente:

Poligono	Numero di lati	Angolo al centro	Lato
Triangolo	3	$360^\circ:3=120^\circ$	$2r \cdot \sin 60^\circ =$
Quadrato	4	$360^\circ:4=$	$2r \cdot \sin 45^\circ =$
Pentagono	5		
Esagono	6		
Decagono	10		
Dodecagono	12		

174. Dopo aver svolto l'esercizio 173, considerare un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio  $r$ ; indicare con  $n$  il numero dei lati e scrivere delle formule generali per ottenere:  
 a. l'angolo al centro  $\hat{AOB}$ ;  
 b. il lato AB.
175. Disegnare il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.
176. Disegnare il quadrato inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.
177. Disegnare l'esagono inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.

### Determinare lati e angoli con il calcolatore tascabile

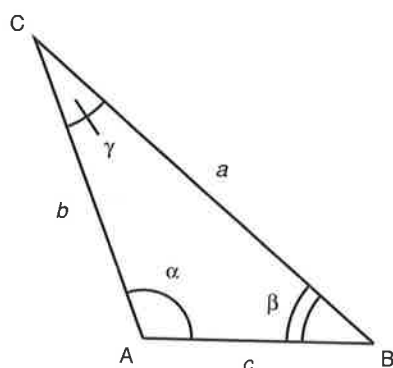
Gli esercizi dal n. 178 al n. 187 conducono a determinare tutti gli elementi di un triangolo (lati e angoli), a partire da alcuni elementi assegnati. Per risolvere gli esercizi conviene tenere presenti le seguenti considerazioni:

- a. per calcolare gli elementi incogniti di un triangolo, occorre che gli elementi noti determinino un solo triangolo. Gli elementi indispensabili per determinare un triangolo sono fissati dai criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli (vedere primo volume, p. 184); si hanno perciò tre casi possibili:  
 I. sono dati due lati e l'angolo compreso;  
 II. sono dati due angoli ed il lato comune;  
 III. sono dati tre lati;  
 b. le relazioni fra gli elementi di un triangolo sono riunite in fig. 52;  
 c. per svolgere i calcoli conviene valersi il più possibile dei dati originali per ridurre gli errori di approssimazione.

178. Due lati e l'angolo di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, hanno le seguenti lunghezze:  $a=10$ ,  $b=7$ ,  $\gamma=28^\circ$ .  
Calcolare il terzo lato e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultato
(5) $c = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 28^\circ}$	$( \quad 1 \quad 0 \quad x^2 \quad + \quad 7 \quad x^2 \quad - \quad 2 \quad \times \quad 1 \quad 0 \quad \times \quad 7 \quad \times \quad 2 \quad 8 \quad \cos \quad ) \quad \sqrt{\quad}$	5,04
(2) $\sin \alpha = \frac{c}{10} \sin 28^\circ$	senza cancellare $\times \quad 2 \quad 8 \quad \sin \quad \div \quad 1 \quad 0 \quad = \quad \text{INV} \quad \sin$	
(1) $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$		

Figura 52



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (3)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad (4)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (5)$$

179. Spiegare come si potrebbero organizzare i calcoli svolti nell'esercizio 178 usando la posizione di memoria del calcolatore tascabile (vedi primo volume pp. 42-43).
180. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi:  $b=10$ ,  $c=8$ ,  $\alpha=130^\circ$ .  
Determinare tutti gli elementi del triangolo.  $[a \approx 16; \beta \approx 28^\circ; \gamma \approx 22^\circ]$
181. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi:  $c=40$ ,  $\alpha=70^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$ .  
Calcolare tutti gli elementi del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(1)		$\gamma=80^\circ$
(2) $a = \frac{40}{\sin 80^\circ} \sin 70^\circ$		$a \approx 38$
(2) $b = \frac{40}{\sin 80^\circ} \sin 30^\circ$		$c \approx 20$

182. Spiegare come si potrebbero organizzare i calcoli svolti nell'esercizio 181 usando la posizione di memoria del calcolatore tascabile (vedi primo volume pp. 42-43).
183. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi:  $c=40$ ,  $\beta=70^\circ$ ,  $\alpha=30^\circ$ . Risolvere i seguenti quesiti:  
a. calcolare tutti gli elementi del triangolo;  
b. confrontare questo triangolo con quello dell'esercizio 181 e dire se i due triangoli sono uguali o simili.  $[(a) a \approx 20; b \approx 38; \gamma \approx 80^\circ]$



184. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi:  $c=40$ ,  $\beta=80^\circ$ ,  $\alpha=70^\circ$ . Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. calcolare tutti gli elementi del triangolo;  
 b. confrontare questo triangolo con quello dell'esercizio 183 e dire se i due triangoli sono simili.  
 [(a)  $a \approx 75$ ;  $b \approx 79$ ;  $\gamma \approx 30^\circ$ ]

185. Spiegare perché non può esistere un triangolo con i seguenti elementi:  $a=12$ ,  $b=2$ ,  $c=9$ .  
 [Vedi il primo volume, p. 129]

186. Di un triangolo ABC si hanno i seguenti elementi:  $a=8$ ,  $b=2$ ,  $c=9$ . Calcolare gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

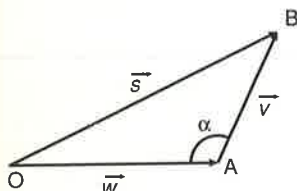
Relazione	Tasti	Risultati
(3) $\cos \alpha = \frac{9^2 + 2^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 2}$	( ( 9 x <sup>2</sup> + 2 x <sup>2</sup> - 8 x <sup>2</sup> ) ÷ ( 2 × 9 × 2 ) = INV cos	$\gamma \approx 54^\circ$
(3) $\cos \beta = \frac{8^2 + 9^2 - 2^2}{2 \cdot 9 \cdot 8}$		$\beta \approx 12^\circ$
(1)		

187. Di un triangolo ABC si hanno i seguenti elementi:  $a=10$ ,  $b=10$ ,  $c=14$ . Calcolare gli angoli del triangolo.  
 [ $\alpha = \beta \approx 50^\circ$ ;  $\gamma \approx 80^\circ$ ]

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 188 al n. 190 conducono a valersi dei teoremi dei seni e del coseno per risolvere problemi legati alla somma di due vettori.

Figura 53

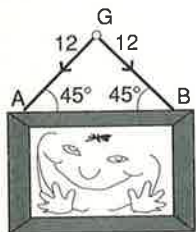


188. Dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , la loro somma  $\vec{s}$  si può ottenere con il procedimento illustrato in fig. 53. Nel caso in cui i vettori rappresentano due forze, il vettore somma è anche detto *forza risultante*.

Esaminare il triangolo OAB e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare come si può calcolare la lunghezza del vettore somma quando l'angolo  $\alpha$  è retto;
- valersi del teorema del coseno per calcolare la lunghezza del vettore somma nel caso in cui l'angolo  $\alpha$  è acuto;
- valersi del teorema del coseno per calcolare la lunghezza del vettore somma nel caso in cui l'angolo  $\alpha$  è ottuso.

Figura 54



189. Un quadro è appeso ad un gancio G per mezzo di un cordoncino, come è illustrato in fig. 54; risolvere i seguenti quesiti:

- valendosi dei dati forniti dalla figura, determinare la forza risultante agente sul gancio;
- calcolare la forza risultante se i due angoli alla base del triangolo ABG diventano ampi  $60^\circ$ ;
- calcolare la forza risultante se i due angoli alla base del triangolo ABG diventano ampi  $30^\circ$ .

[(a)  $12\sqrt{2}$ ; (b)  $12\sqrt{3}$ ; (c) 12]

190. Una nave è trainata da due rimorchiatori che esercitano entrambi una forza che ha intensità  $f=10^7$  newton; risolvere i seguenti quesiti:

- sapendo che i cavi formano angoli di  $20^\circ$  e  $40^\circ$  con l'asse di simmetria della nave, determinare la forza risultante con cui è tirata la nave;
- stabilire come si modifica la forza risultante raddoppiando gli angoli che i cavi formano con l'asse di simmetria della nave.

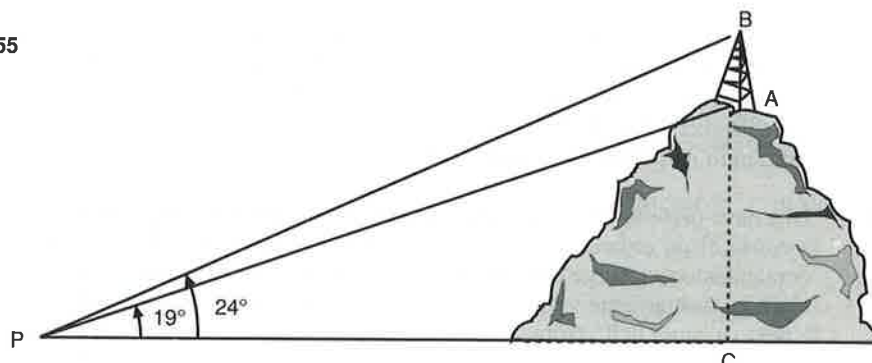
[(a)  $10^7\sqrt{3}$ ; (b)  $10^7$ ]

### Problemi vari

I problemi dal n. 191 al n. 195 conducono a valersi del teorema dei seni e del coseno per risolvere problemi di topografia.

191. Si costruisce sulla cima di una collina un ripetitore per trasmissioni televisive alto 20 m (fig. 55). Da un punto P alla base della collina vengono osservate la base A e la punta B del ripetitore ottenendo gli angoli riportati in figura; calcolare la distanza PC e l'altezza CA della collina. [PC $\approx$ 198,2; CA $\approx$ 68,2]

Figura 55



192. Si vuole misurare l'altezza  $h$  di una torre AB (fig. 56) e la base A della torre è accessibile, cioè si può misurare la distanza  $AC=b$ , dove C è un punto allo stesso livello della base della torre; da C si misura inoltre l'angolo  $\hat{ACB}=\gamma$ . Calcolare l'altezza  $h$  della torre sapendo che risulta  $b=5,2$  m,  $\gamma=70^\circ$ . [ $h\approx 14,3$  m]
193. Dopo aver svolto l'esercizio 191, calcolare l'altezza  $h$  della torre AB di fig. 57, tenendo presente che risulta  $b=12,3$ ,  $\gamma_1=20^\circ$ ,  $\gamma_2=50^\circ$ . [ $h\approx 13,8$ ]
194. Dopo aver svolto l'esercizio 191, calcolare l'altezza  $h$  della torre AB di fig. 58, tenendo presente che risulta  $b=18,4$ ,  $\gamma_1=21^\circ$ ,  $\gamma_2=78^\circ$ . [ $h\approx 41,4$ ]

Figura 56

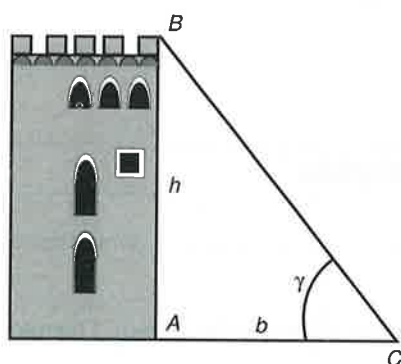


Figura 57

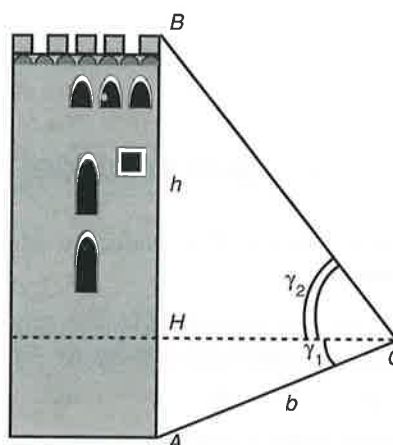
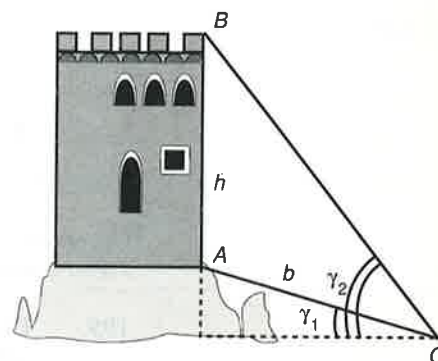


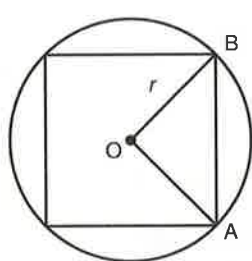
Figura 58



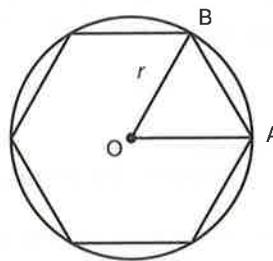
207. Un poligono regolare di  $n$  vertici inscritto in una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  (fig. 62) è stato scomposto in  $n$  triangoli isosceli tutti uguali a  $AOB$ , congiungendo tutti i vertici con  $O$ . Completare la tabella seguente:

Poligono	$n$	Angolo al centro	Area del triangolo $AOB$	Area del poligono
Triangolo	3	$360^\circ:3=120^\circ$	$\frac{1}{2} r^2 \sin 120^\circ$	$\frac{3}{2} r^2 \cdot \sin 120^\circ = \dots$
Quadrato	4	$360^\circ:4 = \dots$		$\frac{4}{2} r^2 \cdot \sin 45^\circ = \dots$
Pentagono	5			
Esagono	6			
Decagono	10			
Dodecagono	12			

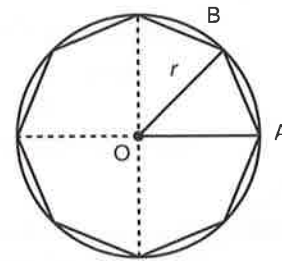
Figura 62



62 a

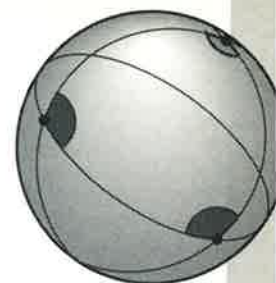


62 b



62 c

208. Dopo aver svolto l'esercizio 207, considerare un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  (fig. 62); indicare con  $n$  il numero dei lati e scrivere delle formule generali per ottenere:
- l'angolo al centro  $\hat{AOB}$ ;
  - l'area del triangolo  $AOB$ ;
  - l'area del poligono.
209. Disegnare il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.
210. Disegnare il quadrato inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.
211. Disegnare l'esagono inscritto in una circonferenza di raggio  $r$  e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.

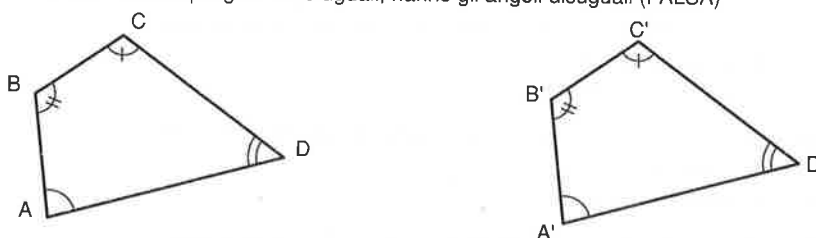


## Sull'implicazione

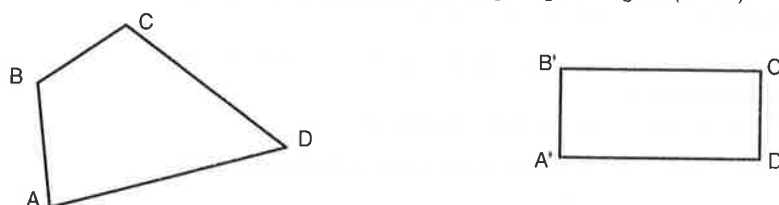
1. È data la seguente proposizione condizionale:  
 «Se due poligoni sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere la premessa  $p$  e la conseguenza  $q$ ;  
 b. scrivere la proposizione usando il connettivo di implicazione;  
 c. esaminare i casi illustrati nelle figure 1-3 e completare la seguente tabella;

Premessa $p$	Conseguenza $q$	$p \Rightarrow q$
VERA	VERA	VERA Si può dire: «Siccome i due poligoni sono uguali, hanno gli angoli uguali»
FALSA	FALSA	VERA Si può dire: «.....»
VERA	FALSA	FALSA Si può dire (ma è <i>falso</i> ): «.....»
FALSA	VERA	VERA Si può dire: «Anche se i due poligoni sono disuguali, hanno gli angoli uguali»

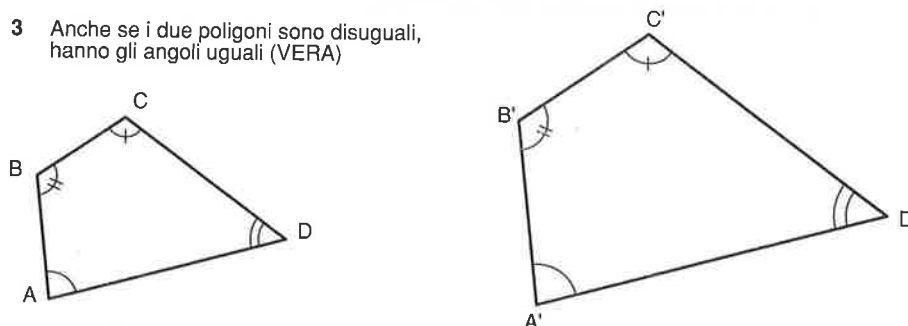
**Figura 1** Siccome i due poligoni sono uguali, hanno gli angoli uguali (VERA)  
 Siccome i due poligoni sono uguali, hanno gli angoli disuguali (FALSA)



**Figura 2** Siccome i due poligoni sono disuguali, hanno gli angoli disuguali (VERA)



**Figura 3** Anche se i due poligoni sono disuguali, hanno gli angoli uguali (VERA)





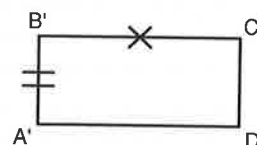
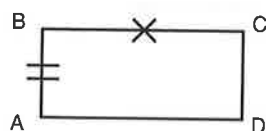
2. È data la seguente proposizione condizionale:  
«Se due poligoni sono uguali, allora hanno i lati uguali».  
Risolvere i seguenti quesiti:
  - a. scrivere la premessa  $p$  e la conseguenza  $q$ ;
  - b. scrivere la proposizione usando il connettivo di implicazione;
  - c. descrivere i casi che si possono presentare ed esaminarli, valendosi di una tabella analoga a quella dell'esercizio 1.
3. Ripetere l'esercizio 2 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se due poligoni sono simili, allora hanno gli angoli uguali».
4. Ripetere l'esercizio 2 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se due poligoni sono simili, allora hanno i lati in proporzione».
5. Sono date le seguenti proposizioni:  
 $p$ : «Due angoli sono adiacenti a angoli uguali»;  
 $q$ : «Due angoli sono uguali».  
Risolvere i seguenti quesiti:
  - a. scrivere la frase condizionale corrispondente all'implicazione:  
$$p \Rightarrow q$$
  - b. descrivere i casi che si possono presentare ed esaminarli, valendosi di una tabella analoga a quella dell'esercizio 1.
6. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «Due angoli sono opposti al vertice»;  
 $q$ : «Due angoli sono uguali».
7. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «Un numero è razionale»;  
 $q$ : «Un numero è reale».
8. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «Un numero è intero»;  
 $q$ : «Un numero è razionale».
9. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «Un numero è intero»;  
 $q$ : «Un numero è reale».
10. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «L'operazione è  $0^0$ »;  
 $q$ : «Non si trova il risultato dell'operazione».
11. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «L'operazione è  $0^{-1}$ »;  
 $q$ : «Non si trova il risultato dell'operazione».
12. Ripetere l'esercizio 5 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «L'operazione è  $\sqrt{-4}$ »;  
 $q$ : «Non si trova il risultato dell'operazione».

## Sulla doppia implicazione

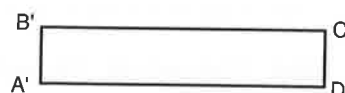
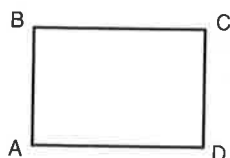
13. È data la seguente proposizione condizionale:  
«Due rettangoli sono uguali, se e solo se hanno i lati uguali».  
Risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  che formano la frase condizionale;
  - scrivere la proposizione usando il connettivo di doppia implicazione;
  - esaminare i casi illustrati nelle figure 4 e 5 e completare la seguente tabella:

Premessa $p$	Conseguenza $q$	$p \Leftrightarrow q$
VERA	VERA	VERA Si può dire: «Siccome i due rettangoli sono uguali, hanno i lati uguali»
FALSA	FALSA	VERA Si può dire: «.....»
VERA	FALSA	FALSA Si può dire (ma è falso): «.....»
FALSA	VERA	FALSA Si può dire (ma è falso): «.....»

**Figura 4** Siccome i due rettangoli sono uguali, hanno i lati uguali (VERA)  
Siccome i due rettangoli sono uguali, hanno i lati disuguali (FALSA)



**Figura 5** Siccome i due rettangoli sono disuguali, hanno i lati disuguali (VERA)  
Anche se i due rettangoli sono disuguali, hanno i lati uguali (FALSA)



14. È data la seguente proposizione condizionale:  
«Due rettangoli sono simili se e solo se hanno i lati in proporzione».  
Risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  che formano la frase condizionale;
  - scrivere la proposizione usando il connettivo di doppia implicazione;
  - escrivere i casi che si possono presentare ed esaminarli, valendosi di una tabella analoga a quella dell'esercizio 13.
15. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalla seguente proposizione:  
«In un'espressione si altera la priorità delle operazioni se e solo se vi compaiono le parentesi».

16. Sono date le seguenti proposizioni:  
 $p$ : «Il rapporto fra due segmenti è un numero razionale»;  
 $q$ : «I due segmenti sono commensurabili».  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. scrivere la frase condizionale corrispondente all'implicazione:

$$p \Leftrightarrow q$$

- b. descrivere i casi che si possono presentare ed esaminarli, valendosi di una tabella analoga a quella dell'esercizio 13.
17. Ripetere l'esercizio 16 a partire dalle seguenti due proposizioni:  
 $p$ : «Il rapporto fra due segmenti è un numero irrazionale»;  
 $q$ : «I due segmenti sono incommensurabili».

---

## Implicazione e doppia implicazione

---

### In matematica

18. Esaminare la seguente proposizione:  
«Due equazioni sono equivalenti se hanno la stessa soluzione».  
Rispondere ai seguenti quesiti:  
a. scrivere le due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  che formano la frase condizionale;  
b. descrivere i casi che si possono presentare ed esaminarli, valendosi di una tabella analoga a quella dell'esercizio 13;  
c. stabilire se la proposizione è un'implicazione o una doppia implicazione e scriverla usando il corrispondente connettivo.
19. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se si aggiunge uno stesso monomio ai due membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente».
20. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se si moltiplicano i due membri di un'equazione per 0, non si ottiene un'equazione equivalente».
21. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se un numero è positivo, il suo cubo è positivo».
22. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se un numero è positivo, il suo quadrato è positivo».
23. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se un numero è negativo, il suo opposto è positivo».
24. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se un numero è negativo, il suo reciproco è negativo».

### Nel linguaggio comune

25. Esaminare la frase seguente:  
«Mia madre è felice se vado bene a scuola».  
Rispondere ai seguenti quesiti:  
a. quale domanda si deve porre per decidere se la frase è un'implicazione o una doppia implicazione?  
b. qual è la differenza di significato fra la frase che è una doppia implicazione e quella che non lo è?
26. Ripetere l'esercizio 25 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se fumi, rischi un tumore al polmone».
27. Ripetere l'esercizio 25 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se ti droghi, ti spegni».

28. Ripetere l'esercizio 25 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se hai degli appoggi influenti, trovi un buon posto di lavoro».
29. Ripetere l'esercizio 25 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se stasera piove, vado al cinema».
30. Ripetere l'esercizio 25 a partire dalla seguente proposizione:  
«Se sei promosso alla fine dell'anno, ti compro il motorino».

## Implicazione e insiemi

31. Disegnare l'insieme  $Q$  dei numeri razionali e l'insieme  $R$  dei numeri reali; rispondere ai seguenti quesiti:
- fra le seguenti formule scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $Q \subset R$                        $R \subset Q$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $\text{numero} \in Q \Rightarrow \text{numero} \in R$      $\text{numero} \in R \Rightarrow \text{numero} \in Q$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:
    - «Se un numero è razionale, allora è reale»;
    - «Se un numero è reale, allora è razionale».
32. Disegnare l'insieme  $Q$  dei numeri razionali e l'insieme  $Z$  dei numeri interi; rispondere ai seguenti quesiti:
- fra le seguenti formule scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $Q \subset Z$                        $Z \subset Q$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $\text{numero} \in Q \Rightarrow \text{numero} \in Z$      $\text{numero} \in Z \Rightarrow \text{numero} \in Q$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:
    - «Se un numero è razionale, allora è intero»;
    - «Se un numero è intero, allora è razionale».
33. Disegnare l'insieme  $Z$  degli interi e l'insieme  $R$  dei reali; risolvere i seguenti quesiti:
- fra le seguenti formule scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $R \subset Z$                        $Z \subset R$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $\text{numero} \in R \Rightarrow \text{numero} \in Z$      $\text{numero} \in Z \Rightarrow \text{numero} \in R$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:
    - «Se un numero è reale, allora è intero»;
    - «Se un numero è intero, allora è reale».



34. Disegnare l'insieme  $P$  dei numeri pari e l'insieme  $A$  dei multipli di 4; risolvere i seguenti quesiti:
- fra le seguenti formule scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $A \subset P$                        $P \subset A$                        $P \equiv A$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 numero  $\in A \Rightarrow$  numero  $\in P$   
 numero  $\in P \Rightarrow$  numero  $\in A$   
 numero  $\in P \Leftrightarrow$  numero  $\in A$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 - «Se un numero è pari, allora è multiplo di 4»;  
 - «Se un numero è multiplo di 4, allora è pari»;  
 - «Un numero è pari se e solo se è multiplo di 4».
35. Disegnare l'insieme  $P$  dei numeri pari e l'insieme  $B$  dei multipli di 2; risolvere i seguenti quesiti:
- fra le seguenti formule scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 $B \subset P$                        $P \subset B$                        $P \equiv B$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 numero  $\in B \Rightarrow$  numero  $\in P$   
 numero  $\in P \Rightarrow$  numero  $\in B$   
 numero  $\in P \Leftrightarrow$  numero  $\in B$
  - fra le seguenti proposizioni scegliere quella corrispondente al disegno eseguito prima, motivando la scelta:  
 - «Se un numero è pari, allora è multiplo di 2»;  
 - «Se un numero è multiplo di 2, allora è pari»;  
 - «Un numero è pari se e solo se è multiplo di 2».

## L'implicazione nell'enunciato dei teoremi

36. Esaminare il seguente teorema:  
 «Due triangoli sono uguali se hanno i lati ordinatamente uguali». Rispondere ai seguenti quesiti:  
 a. individuare l'ipotesi  $H$  e la tesi  $T$ ;  
 b. scrivere l'enunciato del teorema nella forma di un'implicazione;  
 c. enunciare il teorema inverso.
37. Ripetere l'esercizio 36 a partire dal seguente teorema:  
 «Due triangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due angoli e il lato comune».
38. Ripetere l'esercizio 36 a partire dal seguente teorema:  
 «Due triangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso».
39. Ripetere l'esercizio 36 a partire dal seguente teorema:  
 «Due rette sono parallele se hanno la stessa pendenza».

40. Ripetere l'esercizio 36 a partire dal seguente teorema:  
«Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali».
41. Ripetere l'esercizio 36 a partire dal seguente teorema:  
«Se due rette parallele sono tagliate da due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti».
42. Di un teorema sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : si raddoppia un lato di un rettangolo;  
- la tesi  $T$ : l'area del rettangolo raddoppia;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. enunciare il teorema nel linguaggio comune;  
b. enunciare il teorema inverso.
43. Ripetere l'esercizio 42 a partire dal teorema di cui sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : si raddoppia il lato di un quadrato;  
- la tesi  $T$ : l'area del quadrato quadruplica;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .
44. Ripetere l'esercizio 42 a partire dal teorema di cui sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : si raddoppia il lato di un quadrato;  
- la tesi  $T$ : il perimetro del quadrato raddoppia;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .
45. Ripetere l'esercizio 42 a partire dal teorema di cui sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : un numero è negativo;  
- la tesi  $T$ : non si trova la radice quadrata del numero;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .
46. Ripetere l'esercizio 42 a partire dal teorema di cui sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : un numero è negativo;  
- la tesi  $T$ : la radice cubica del numero è negativa;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .

## Vari modi di enunciare un teorema

47. Di un teorema sono dati:  
- l'ipotesi  $H$ : due angoli sono opposti al vertice;  
- la tesi  $T$ : due angoli sono uguali;  
- l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .  
Completare le frasi seguenti, seguendo l'esempio della prima frase:  
a. «È sufficiente sapere che due angoli sono opposti al vertice per essere certi che i due angoli sono uguali»;  
b. «Per due angoli, essere opposti al vertice è condizione ..... per essere uguali»;  
c. «È necessario sapere che ..... per stabilire se .....»;  
d. «Per due angoli, essere uguali è condizione ..... per essere opposti al vertice».

48. Di un teorema sono dati:  
 - l'ipotesi  $H$ : due angoli sono adiacenti ad angoli uguali;  
 - la tesi  $T$ : due angoli sono uguali;  
 - l'enunciato: è vera  $H \Rightarrow T$ .  
 Completare le frasi seguenti:  
 a. «È sufficiente sapere che ..... per essere certi che i due angoli sono uguali»;  
 b. «Per due angoli, essere adiacenti ad angoli uguali è condizione ..... per essere uguali»;  
 c. «È necessario sapere che ..... per stabilire se .....»;  
 d. «Per due angoli, essere uguali è condizione ..... per essere opposti al vertice».
49. Esaminare il seguente enunciato:  
 «Se un numero è multiplo di 4, allora è pari».  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. individuare l'ipotesi  $H$  e la tesi  $T$ ;  
 b. scrivere l'enunciato sotto forma di implicazione;  
 c. scrivere l'enunciato mediante la condizione sufficiente;  
 d. scrivere l'enunciato mediante la condizione necessaria.
50. Esaminare il seguente enunciato:  
 «Se un numero è positivo, ha il quadrato positivo».  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. individuare l'ipotesi  $H$  e la tesi  $T$ ;  
 b. scrivere l'enunciato sotto forma di implicazione;  
 c. scrivere l'enunciato mediante la condizione sufficiente;  
 d. scrivere l'enunciato mediante la condizione necessaria.
51. Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:  
 a. «È sufficiente sapere che due triangoli hanno gli angoli uguali per essere certi che i triangoli sono simili»;  
 b. «È necessario sapere che due triangoli sono simili per stabilire che i due triangoli hanno gli angoli uguali»;  
 c. «Per due triangoli avere gli angoli uguali è condizione necessaria e sufficiente per essere simili».
52. Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:  
 a. «È sufficiente sapere che due triangoli hanno i lati in proporzione per essere certi che i triangoli sono simili»;  
 b. «È necessario sapere che due triangoli sono simili per stabilire che i due triangoli hanno i lati in proporzione»;  
 c. «Per due triangoli avere i lati in proporzione è condizione necessaria e sufficiente per essere simili».
53. Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:  
 a. «È sufficiente sapere che due rettangoli hanno i lati uguali per essere certi che i rettangoli sono uguali»;  
 b. «È necessario sapere che due rettangoli sono uguali per stabilire che i rettangoli hanno i lati uguali»;  
 c. «Per due rettangoli avere i lati uguali è condizione necessaria e sufficiente per essere uguali».
54. Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:

- a. «È sufficiente sapere che due rettangoli hanno i lati in proporzione per essere certi che i rettangoli sono simili»;
  - b. «È necessario sapere che due rettangoli sono simili per stabilire che i rettangoli hanno i lati in proporzione»;
  - c. «Per due rettangoli avere i lati in proporzione è condizione necessaria e sufficiente per essere simili».
- 55.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali per essere certi che le rette sono parallele»;
  - b. «È necessario sapere che due rette sono parallele per stabilire che le rette, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali»;
  - c. «Per due rette, tagliate da una trasversale, formare angoli alterni interni uguali è condizione necessaria e sufficiente per essere parallele».
- 56.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che due rette hanno la stessa pendenza per essere certi che le rette sono parallele»;
  - b. «È necessario sapere che due rette sono parallele per stabilire che le rette hanno la stessa pendenza»;
  - c. «Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che abbiano la stessa pendenza».
- 57.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che un numero è diverso da 0 per essere certi che il numero ha il suo reciproco»;
  - b. «È necessario sapere che un numero ha il suo reciproco per stabilire che il numero è diverso da 0»;
  - c. «Condizione necessaria e sufficiente perché un numero abbia il reciproco è che il numero sia diverso da 0».
- 58.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che il divisore è diverso da 0 per essere certi che la divisione ha risultato»;
  - b. «È necessario sapere che una divisione ha risultato per stabilire che il divisore è diverso da 0»;
  - c. «Condizione necessaria e sufficiente perché una divisione abbia risultato è che il divisore sia diverso da 0».
- 59.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che uno dei fattori vale 0 per essere certi che un prodotto vale 0»;
  - b. «È necessario sapere che un prodotto vale 0 per stabilire che uno dei fattori vale 0»;
  - c. «Condizione necessaria e sufficiente perché un prodotto valga 0 è che uno dei fattori valga 0».
- 60.** Scrivere i seguenti tre enunciati nella forma di un'implicazione o di una doppia implicazione:
- a. «È sufficiente sapere che un numero reale è negativo per essere certi che non si trova la radice quadrata del numero»;
  - b. «È necessario sapere che non si trova la radice quadrata di un numero reale per stabilire che il numero è negativo»;
  - c. «Condizione necessaria e sufficiente perché un numero reale non abbia radice quadrata reale è che il numero sia negativo».



76. Dopo aver svolto l'esercizio 75, organizzare in modo analogo la dimostrazione del seguente teorema:  
«Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha gli angoli opposti uguali».
77. Dopo aver svolto l'esercizio 75, organizzare in modo analogo la dimostrazione del seguente teorema:  
«Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha le diagonali che si tagliano a metà».
78. Esaminare i seguenti enunciati:  
a. «Un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se e solo se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza»;  
b. «Un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se e solo se ha la somma degli angoli opposti che vale  $180^\circ$ ».  
Spiegare come si può stabilire quale dei due enunciati è un teorema e quale è una definizione.
79. Esaminare i seguenti enunciati:  
a. «Un quadrilatero è circoscritto a una circonferenza se e solo se ha tutti i lati tangenti alla circonferenza»;  
b. «Un quadrilatero è circoscritto a una circonferenza se e solo se sono uguali le somme dei lati opposti».  
Spiegare come si può stabilire quale dei due enunciati è un teorema e quale è una definizione.

### Collegamenti col paragrafo precedente

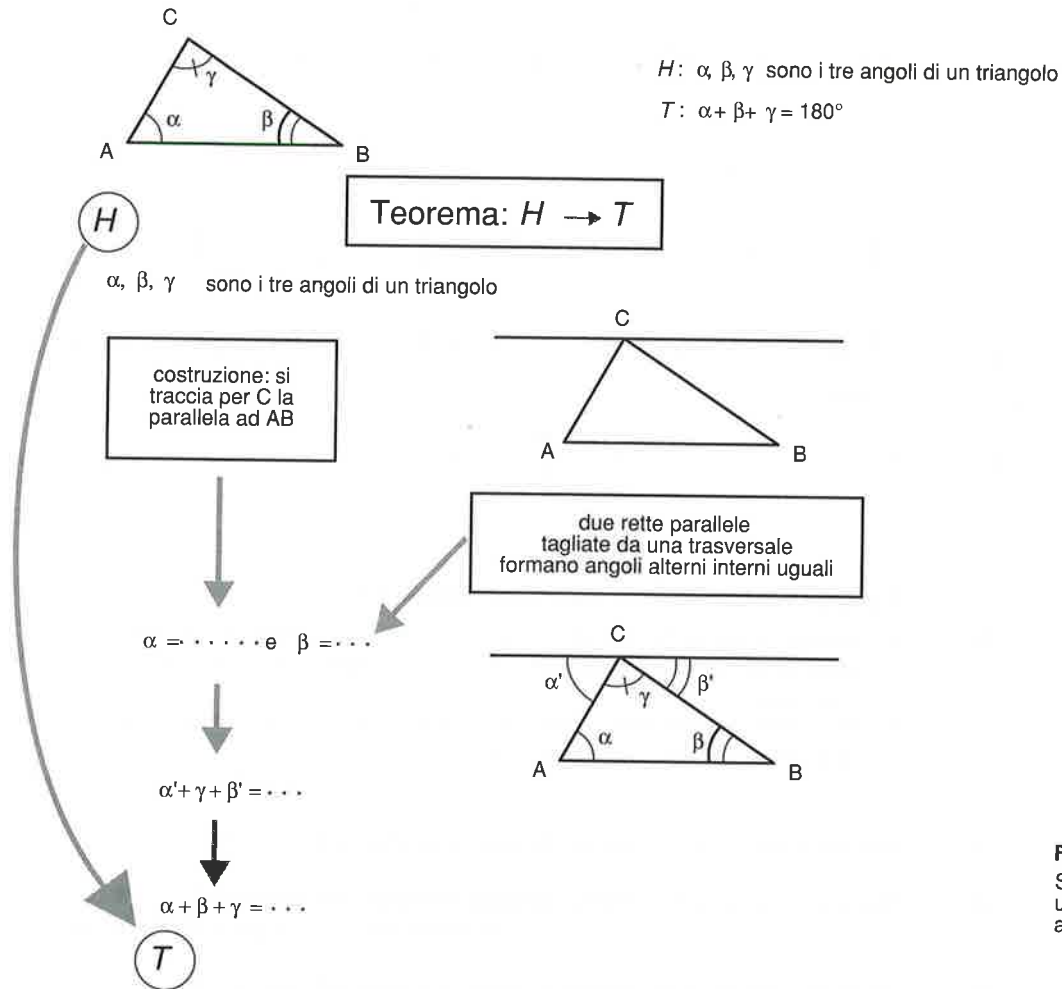
80. Esaminare il seguente teorema:  
«Un rettangolo ha le diagonali uguali».  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. individuare l'ipotesi H e la tesi T;  
b. scrivere l'enunciato sotto forma di implicazione;  
c. dimostrare il teorema.
81. Riprendere il teorema assegnato nell'esercizio 80 e risolvere i seguenti quesiti:  
a. scrivere l'enunciato mediante la condizione necessaria;  
b. scrivere l'enunciato mediante la condizione sufficiente;  
c. esaminare il teorema inverso.
82. Ripetere gli esercizi 80 e 81 a partire dal seguente teorema:  
«Un trapezio isoscele ha le diagonali uguali».
83. Ripetere gli esercizi 80 e 81 a partire dal seguente teorema:  
«Un rombo ha le diagonali perpendicolari».
84. Ripetere gli esercizi 80 e 81 a partire dal seguente teorema:  
«Un deltoide ha le diagonali perpendicolari».
85. Ripetere gli esercizi 80 e 81 a partire dal seguente teorema:  
«Un rombo è un parallelogramma».
86. Ripetere gli esercizi 80 e 81 a partire dal seguente teorema:  
«Un rettangolo è un parallelogramma».

## Sulle geometrie non euclidee

87. Dopo aver svolto l'esercizio 64, spiegare perché sulla sfera non si può disegnare un parallelogramma.
88. Dopo aver svolto l'esercizio 65, spiegare perché sulla sfera non si può disegnare un trapezio.
89. Esaminare la fig. 8 e risolvere i seguenti quesiti:  
 a. completare la figura per dimostrare che, sul piano, la somma degli angoli interni di un triangolo vale sempre  $180^\circ$ ;  
 b. spiegare perché la dimostrazione è basata sul quinto postulato di Euclide.

**Figura 8**

Dimostrare che, sul piano, la somma degli angoli esterni vale sempre  $180^\circ$



**Figura 9**

Sulla sfera è disegnato un triangolo con tre angoli retti



90. Dopo aver svolto l'esercizio 89, esaminare la fig. 9, in cui è disegnato sulla sfera un triangolo ABC con tre angoli retti; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. calcolare la somma degli angoli interni del triangolo;  
 b. spiegare perché sulla sfera la somma degli angoli interni di un triangolo non vale sempre  $180^\circ$ .

## Sulle coordinate reali

### Rappresentare punti sul piano cartesiano

Rappresentare sul piano cartesiano i punti assegnati negli esercizi dal n. 1 al n. 9.

1.  $A(\sqrt{2}; 0)$      $B(-\sqrt{2}; 0)$      $C(0; \sqrt{2})$      $D(0; -\sqrt{2})$
2.  $A(\sqrt{3}; 1)$      $B(-\sqrt{3}; -1)$      $C(1; \sqrt{3})$      $D(-1; -\sqrt{3})$
3.  $A(\sqrt{5}; 2)$      $B(-\sqrt{5}; -2)$      $C(2; \sqrt{5})$      $D(-2; -\sqrt{5})$
4.  $A(\sqrt{3}; \sqrt{5})$      $B(\sqrt{5}; \sqrt{3})$      $C(-\sqrt{3}; -\sqrt{5})$      $D(-\sqrt{5}; -\sqrt{3})$
5.  $A(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$      $B(3\sqrt{5}; \sqrt{15})$      $C(-2\sqrt{5}; -\sqrt{10})$      $D(-4\sqrt{2}; -\sqrt{8})$
6.  $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\sqrt{2}\right)$      $B\left(-\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$      $C\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \sqrt{3}\right)$      $D\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$
7.  $A\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$      $B\left(-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{2}\right)$      $C\left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$      $D\left(-\sqrt[3]{2}; -\sqrt[3]{4}\right)$
8.  $A\left(\sqrt[3]{6}; 3\sqrt[3]{2}\right)$      $B\left(-\sqrt[3]{6}; -2\sqrt[3]{3}\right)$      $C\left(\sqrt[3]{10}; 2\sqrt[3]{5}\right)$      $D\left(-\sqrt[3]{10}; -5\sqrt[3]{2}\right)$
9.  $A\left(-\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; -\sqrt[3]{2}\right)$      $B\left(-\sqrt[3]{5}; -\frac{\sqrt[3]{10}}{2}\right)$      $C\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}; \sqrt[3]{3}\right)$      $D\left(\sqrt[3]{3}; \frac{\sqrt[3]{15}}{5}\right)$

### Collegamento con il capitolo secondo

10. Esaminare i punti assegnati nell'esercizio 1 e risolvere i seguenti quesiti:
  - a. spiegare perché la scrittura decimale non rappresenta esattamente i numeri irrazionali;
  - b. descrivere la costruzione geometrica che permette di rappresentare esattamente i punti assegnati sul piano cartesiano.

[Vedere par. 1 e 2, pp. 172-180]
11. Ripetere l'esercizio 10 a partire dai punti assegnati nell'esercizio 2.
12. Ripetere l'esercizio 10 a partire dai punti assegnati nell'esercizio 5.
 

[Vedere par. 1, 2 e 6, pp. 172-180 e 204-205]
13. Ripetere l'esercizio 10 a partire dai punti assegnati nell'esercizio 6.
 

[Vedere par. 1, 2 e 6, pp. 172-180 e 204-205]

## Sulle rette parallele agli assi cartesiani

### Scrivere l'equazione di rette parallele agli assi cartesiani

14. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ascissa che vale  $\sqrt{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
15. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ascissa che vale  $-\sqrt{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
16. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ordinata che vale  $\sqrt{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
17. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ordinata che vale  $-\sqrt{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
18. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ascissa che vale  $\sqrt[4]{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
19. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ascissa che vale  $-\sqrt[4]{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
20. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ordinata che vale  $\sqrt[4]{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.
21. Indicare sul piano cartesiano quattro punti con l'ordinata che vale  $-\sqrt[4]{8}$  e scrivere l'equazione della retta sulla quale sono allineati i quattro punti.

### Disegnare rette parallele agli assi cartesiani

Tracciare i grafici delle rette che hanno l'equazione assegnata negli esercizi dal n. 22 al n. 27.

22.  $x=\sqrt{3}$      $x=0$      $x=-\sqrt{3}$     23.  $y=\sqrt{5}$      $y=-\sqrt{5}$      $y=0$
24.  $x=\sqrt{2}$      $x=-\sqrt{2}$      $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$     25.  $y=\sqrt{8}$      $y=-\sqrt{8}$      $y=\frac{1}{\sqrt{8}}$
26.  $x=1+\sqrt{2}$      $x=1-\sqrt{2}$      $x=2\sqrt{2}$     27.  $y=2+\sqrt{8}$      $y=2-\sqrt{8}$      $y=\frac{\sqrt{8}}{2}$

### Riflettere sull'equazione delle rette parallele agli assi cartesiani

28. Spiegare perché nel piano cartesiano non c'è un solo punto con l'ascissa che vale  $\sqrt{2}$ .
29. Spiegare perché nel piano cartesiano non c'è un solo punto con l'ordinata che vale  $\sqrt{2}$ .
30. Spiegare perché nel piano cartesiano c'è un solo punto con l'ascissa e l'ordinata che valgono entrambe  $\sqrt{2}$ .



31. Esaminare i punti:

$$A(0; -\sqrt{2}) \quad B(-\sqrt{2}; 1) \quad C(1-\sqrt{2}; 0) \quad B(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere i punti che appartengono alla retta  $r$  d'equazione  $x=-\sqrt{2}$ , motivando la scelta;
- modificare le coordinate dei punti che non appartengono alla retta, in modo da ottenere punti che vi appartengono.

32. Esaminare i punti:

$$A(0; -\sqrt{2}) \quad B(-\sqrt{2}; 1) \quad C(1-\sqrt{2}; 0) \quad B(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere i punti che appartengono alla retta  $r$  d'equazione  $y=-\sqrt{2}$ , motivando la scelta;
- modificare le coordinate dei punti che non appartengono alla retta, in modo da ottenere punti che vi appartengono.

## Sulle circonferenze con centro nell'origine

Disegnare sul piano cartesiano le circonferenze che hanno centro nell'origine  $O$  e raggio assegnato negli esercizi dal n. 33 al n. 40; scrivere l'equazione di ogni circonferenza.

33.	$r=1$	$r=2$	$r=\sqrt{2}$	34.	$r=\sqrt{3}$	$r=3$	$r=\frac{3}{2}$
35.	$r=\frac{1}{2}$	$r=\frac{3}{4}$	$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$	36.	$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$r=\frac{1}{3}$	$r=\frac{2}{3}$
37.	$r=\frac{5}{\sqrt{3}}$	$r=\sqrt{\frac{5}{3}}$	$r=\frac{\sqrt{5}}{3}$	38.	$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$r=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$r=\sqrt{\frac{2}{3}}$
39.	$r=1+\sqrt{5}$	$r=1-\sqrt{5}$	$r=2\sqrt{5}$	40.	$r=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$r=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tracciare i grafici delle circonferenze che hanno l'equazione assegnata negli esercizi dal n. 41 al n. 48.

41.	$x^2+y^2=1$	$x^2+y^2=4$	42.	$x^2+y^2=9$	$x^2+y^2=16$
43.	$x^2+y^2=25$	$x^2+y^2=5$	44.	$x^2+y^2=6$	$x^2+y^2=36$
45.	$x^2+y^2=\frac{9}{4}$	$x^2+y^2=\frac{3}{2}$	46.	$x^2+y^2=\frac{9}{2}$	$x^2+y^2=\frac{3}{4}$
47.	$x^2+y^2=\sqrt{5}$	$x^2+y^2=\sqrt[3]{5}$	48.	$x^2+y^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$	$x^2+y^2=\frac{\sqrt{2}}{9}$

- Sull'equazione delle circonferenze col centro nell'origine**
49. Esaminare le equazioni:  
 $2x^2+2y^2=8$        $3x^2+3y^2=6$        $4x^2+4y^2=1$        $9x^2+9y^2=5$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché le equazioni rappresentano circonferenze col centro nell'origine;  
 b. tracciare i corrispondenti grafici.  
 [(a) dividendo i due membri della prima equazione per 2, si ottiene...]
50. Esaminare le equazioni:  
 $x^2+y^2-1=0$        $x^2+y^2-4=0$        $4x^2+4y^2-1=0$        $9x^2+9y^2-5=0$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché le equazioni rappresentano circonferenze col centro nell'origine;  
 b. tracciare i corrispondenti grafici.  
 [(a) addizionando 1 ai due membri della prima equazione, si ottiene...]
51. Spiegare perché nessuna delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine:  
 $x^2-y^2=1$        $3x^2+y^2=9$        $x^2+4y^2=1$        $x^2+y^2+5=0$
52. Fra i punti seguenti  
 $A(3; 2)$        $B(4; -1)$        $C(\sqrt{3}; \sqrt{2})$   
 indicare quello che appartiene alla circonferenza d'equazione:  
 $x^2+y^2=5$   
 [Il punto A non si trova sulla circonferenza perché le sue coordinate, sostituite a x e y nell'equazione della circonferenza, trasformano l'equazione in un'uguaglianza falsa...]
53. Esaminare di nuovo i punti e la circonferenza assegnati nell'esercizio 52 e modificare la sola ascissa dei punti che non appartengono alla circonferenza in modo da ottenere punti che vi appartengono.  
 [L'ascissa x del punto A deve rendere vera l'uguaglianza  $x^2+2^2=5$ , da cui...]
54. Determinare il raggio della circonferenza che ha centro nell'origine e passa per  $A(1; 3)$ .  
 [La circonferenza passa per A e perciò risulta  $1^2+3^2=r^2$ , da cui...]

## Rappresentare leggi matematiche sul piano cartesiano

Esaminare le leggi matematiche assegnate negli esercizi dal n. 55 al n. 77 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge indicata;
  - riconoscere di che legge si tratta (proporzionalità diretta o inversa, legge lineare, parabolica o legge dell'inverso del quadrato);
  - rappresentare la legge sul piano cartesiano.
55. Legge che lega il perimetro  $p$  di un triangolo equilatero alla lunghezza  $b$  del suo lato.
56. Legge che lega l'area  $S$  di un triangolo equilatero alla lunghezza  $b$  del suo lato.
57. Legge che lega il perimetro  $p$  di un esagono regolare alla lunghezza  $b$  del suo lato.

58. Legge che lega l'area  $S$  di un esagono regolare alla lunghezza  $b$  del suo lato.
59. Legge che lega il perimetro  $p$  di un rombo alla lunghezza  $b$  del suo lato.
60. Legge che lega l'area  $S$  di un rombo che ha una diagonale lunga 4 alla lunghezza  $d$  dell'altra diagonale.
61. Legge che lega le lunghezze  $d$  e  $h$  delle diagonali di un rombo di area 12.
62. Legge che lega le lunghezze  $b$  e  $h$  dei due lati di un rettangolo di area 6.
63. Legge che lega le lunghezze  $b$  e  $h$  dei due lati di un rettangolo di perimetro 6.
64. Legge che lega l'area  $S$  e la lunghezza  $h$  dell'altezza di un triangolo con la base lunga 6.
65. Legge che lega l'area  $S$  e la lunghezza  $h$  dell'altezza di un trapezio con le basi lunghe 6 e 2.
66. Legge che lega l'area  $S$  e la lunghezza  $b$  della base minore di un trapezio con la base maggiore lunga 6 e l'altezza lunga 2.
67. Legge che lega le lunghezze  $b$  e  $B$  delle basi di un trapezio con l'altezza lunga 2 e l'area che vale 8.
68. Legge che lega la superficie  $S$  del tetraedro regolare alla lunghezza  $b$  del lato.  
[La superficie del tetraedro regolare è costituita da 4 triangoli equilateri;  
vedi il primo volume, p. 153]
69. Legge che lega la superficie  $S$  dell'ottaedro regolare alla lunghezza  $b$  del lato.  
[La superficie dell'ottaedro regolare è costituita da 8 triangoli equilateri;  
vedi il primo volume, p. 153]
70. Legge che lega la superficie  $S$  dell'icosaedro regolare alla lunghezza  $b$  del lato.  
[La superficie dell'icosaedro regolare è costituita da 20 triangoli equilateri;  
vedi il primo volume, p. 153]
71. Legge che lega il lato di base  $b$  all'altezza  $h$  di un parallelepipedo con la base quadrata e la superficie laterale che vale 8.
72. Legge che lega l'altezza  $h$  alla superficie laterale  $S$  di un parallelepipedo con la base che è un quadrato con il lato lungo 1.
73. Legge che lega la superficie laterale  $S$  di un parallelepipedo con l'altezza lunga 1 alla lunghezza  $b$  del lato della base quadrata.
74. Legge che lega la superficie totale  $S$  all'altezza  $h$  di un parallelepipedo con la base che è un quadrato con il lato lungo 1.
75. Legge che lega l'altezza  $h$  al volume  $V$  di un parallelepipedo con la base che è un quadrato con il lato lungo 1.
76. Legge che lega la lunghezza  $b$  del lato di base al volume  $V$  di un parallelepipedo a base quadrata e con l'altezza lunga 1.
77. Legge che lega l'altezza  $h$  e la lunghezza  $b$  del lato di base di un parallelepipedo a base quadrata e il cui volume vale 1.

## Leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali

*Gli esercizi dal n. 78 al n. 90 propongono leggi matematiche suggerite prevalentemente dalla fisica; le grandezze menzionate in queste leggi sono tutte misurate nel sistema di unità di misura internazionale (S.I.).*

78. Esaminando il movimento di un corpo, che percorre una traiettoria rettilinea con velocità costante  $v$ , si trova che la distanza  $s$  dal punto di partenza varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s=vt$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- in una gara di atletica, un velocista percorre un tratto di pista rettilinea alla velocità  $v=8$ ; scrivere la legge che lega  $s$  e  $t$  considerando costante la velocità, rappresentarla sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- più velocisti percorrono una pista rettilinea lunga  $s=100$ , scrivere la legge che lega  $v$  e  $t$ , rappresentarla sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

79. Il movimento di un corpo lasciato cadere nelle vicinanze della Terra, trascurando la resistenza dell'aria, è regolato le seguenti leggi:

- la velocità istantanea  $v$  è legata al tempo  $t$  dalla legge  $v=9,8t$ ;
- la distanza  $s$  dal punto di partenza è legata al tempo  $t$  dalla legge  $s=4,9t^2$ .

Rappresentare le due leggi sul piano cartesiano e riconoscere di che leggi si tratta.

80. Esaminando il movimento di un sasso lanciato in direzione verticale con una velocità iniziale di 20 m/s, si trovano, trascurando la resistenza dell'aria, le seguenti leggi:

- se la velocità iniziale è verso il basso, la velocità istantanea  $v$  è legata al tempo  $t$  dalla legge:

$$v=9,8t+20$$

- se la velocità iniziale è verso l'alto, la velocità istantanea  $v$  è legata al tempo  $t$  dalla legge:

$$v=9,8t-20$$

Rappresentare le due leggi sul piano cartesiano e riconoscere di che leggi si tratta.

81. In base al secondo principio della dinamica, una forza costante imprime ad un corpo di massa  $m$  un'accelerazione  $a$ , legata alla forza  $f$  dalla legge:

$$f=ma$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega la forza all'accelerazione impressa ad un corpo con la massa  $m=2$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega l'accelerazione alla massa di vari corpi soggetti tutti ad una stessa forza  $f=4$ .

82. Studiando le oscillazioni di un pendolo, si trova che la lunghezza  $L$  del filo e il periodo  $T$  (cioè la durata di un'oscillazione completa) sono legate dalla seguente legge:

$$L=0,25T^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- rappresentare la legge sul piano cartesiano e stabilire di che legge si tratta;
- determinare la lunghezza del filo per avere un pendolo che «batte i secondi».



83. La lunghezza di un filo di acciaio varia al variare della temperatura secondo la legge:

$$L' = 10^{-5}LT + L$$

dove:

- $L$  è la lunghezza del filo alla temperatura di  $0^\circ$ ;
- $L'$  è la lunghezza alla temperatura di  $T^\circ \text{C}$  (vedere il primo volume, p. 283).

Scrivere la legge che lega la lunghezza  $L'$  alla temperatura  $T$  di una sbarra lunga 10 m, rappresentarla sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

84. La lunghezza di una molla fissata ad un estremo varia al variare del peso applicato all'estremo libero secondo la legge:

$$L' = 10^{-2}Lp + L$$

dove  $L$  è la lunghezza iniziale della molla e  $L'$  è la lunghezza che la molla assume quando vi è appesa una massa che ha un peso  $p$ .

Scrivere la legge che lega la lunghezza  $L'$  al peso  $p$  di una molla lunga  $10^{-1}$ , rappresentarla sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

85. La pressione  $P$ , il volume  $V$  e la temperatura  $T$  di un gas perfetto variano, a partire da opportune condizioni iniziali, seguendo la legge:

$$PV = T$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega la pressione al volume di un gas che rimane alla temperatura  $T = 10^\circ \text{C}$ ;
- scrivere la legge che lega la pressione alla temperatura di un gas che mantiene fisso il volume  $V = 0,5$ ;
- scrivere la legge che lega il volume alla temperatura di un gas che mantiene fissa la pressione  $P = 2$ .

86. L'energia cinetica  $E$  di un corpo è legata alla massa  $m$  e alla velocità  $v$  del corpo dalla seguente legge:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega l'energia cinetica alla velocità di un corpo che ha la massa  $m = 2$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega l'energia cinetica alla massa di un corpo che si muove con velocità  $v = 2$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega la massa alla velocità di un corpo che ha un'energia cinetica  $E = 2$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

87. La forza  $F$  esercitata dal vento su una pala di un generatore eolico è legata alla velocità  $v$  del vento e all'area  $A$  della pala dalla seguente legge:

$$F = Av^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

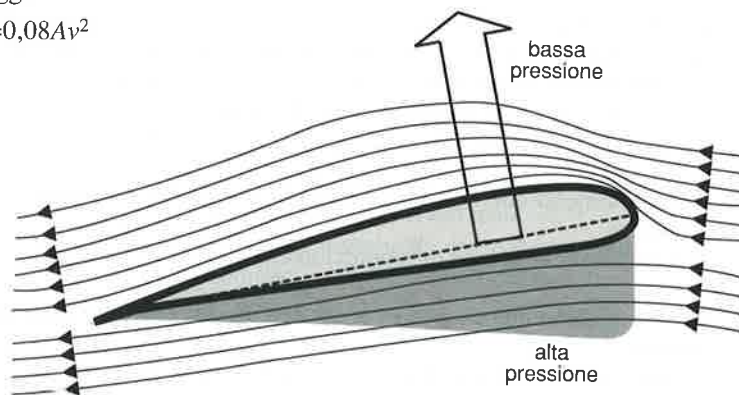
- scrivere la legge che lega  $F$  a  $v$  nel caso di una pala che ha l'area  $A = 1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega  $F$  a  $A$  nel caso in cui la velocità del vento è  $v = 10$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega  $A$  a  $v$ , nel caso in cui su pale diverse agisce la stessa forza  $F = 10$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

88. La fig. 1 spiega sinteticamente perché un aereo riesce a volare: quando un'ala si muove con una certa velocità, si genera sopra l'ala una zona di bassa pressione e sotto l'ala una zona di alta pressione; a queste diverse pressioni è dovuta la *portanza*, una forza che si oppone al peso dell'aereo. È chiaro che un aereo si mantiene in volo solo se la portanza bilancia proprio il suo peso; perciò, per progettare un aereo è indispensabile sapere da quali grandezze dipende la portanza di un'ala.

Si è trovato che la portanza  $F$  di un'ala è legata all'area  $A$  e alla velocità  $v$  dell'ala dalla legge:

$$F=0,08Av^2$$

Figura 1



Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega  $F$  a  $A$  nel caso in cui la velocità dell'ala è  $v=100$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega  $F$  a  $v$  nel caso di un'ala che ha l'area  $A=13$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega  $A$  a  $v$ , per avere su ali diverse la stessa portanza  $F=8$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

89. Un corpo di massa  $m$  si muove lungo una circonferenza di raggio  $r$  ad una velocità costante  $v$ , sotto l'azione di una forza  $f$ , detta *forza centripeta*, che è data da:

$$f=m \frac{v^2}{r}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega  $f$  alla massa di un corpo che percorre una circonferenza col raggio  $r=1$  alla velocità  $v=2$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega la forza alla velocità di un corpo di massa  $m=1$  che percorre una circonferenza col raggio  $r=1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega la forza al raggio della circonferenza percorsa da un corpo di massa  $m=1$  che si muove alla velocità  $v=1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

90. Ancora a partire dalla forza centripeta descritta nell'esercizio 89, risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega la massa alla velocità di un corpo che percorre una circonferenza col raggio  $r=1$ , sotto l'azione di una forza  $f=1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega il raggio della circonferenza alla velocità di un corpo di massa  $m=1$  che si muove sotto l'azione di una forza  $f=1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta;
- scrivere la legge che lega il raggio della circonferenza alla massa di un corpo che si muove alla velocità  $v=2$  sotto l'azione di una forza  $f=1$ , rappresentare la legge sul piano cartesiano e riconoscere di che legge si tratta.

107. Disegnare sul piano cartesiano la curva d'equazione:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la curva non è il grafico di una funzione;
  - determinare le due funzioni che descrivono la circonferenza e tracciarne il grafico.
108. Esaminare le due curve rappresentate in fig. 2 e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare quale delle due rappresenta il grafico di una funzione, motivando la scelta;
  - determinare dominio e codominio della funzione.
109. Ripetere l'esercizio 108 a partire dalla fig. 3.

Figura 2

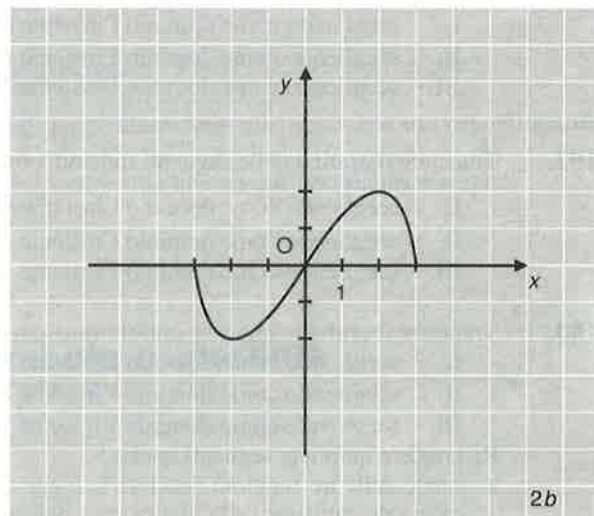
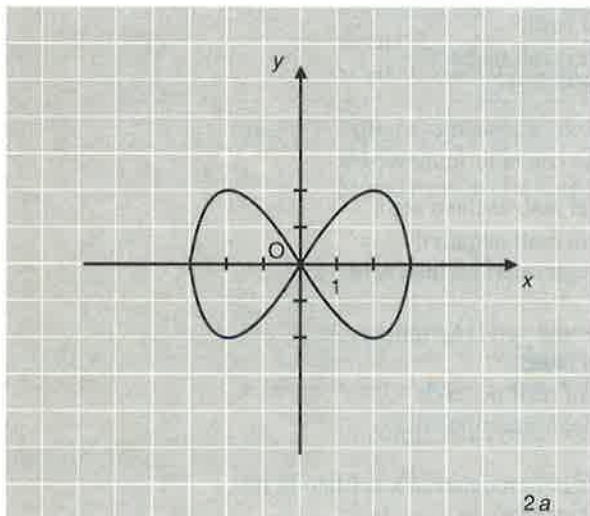
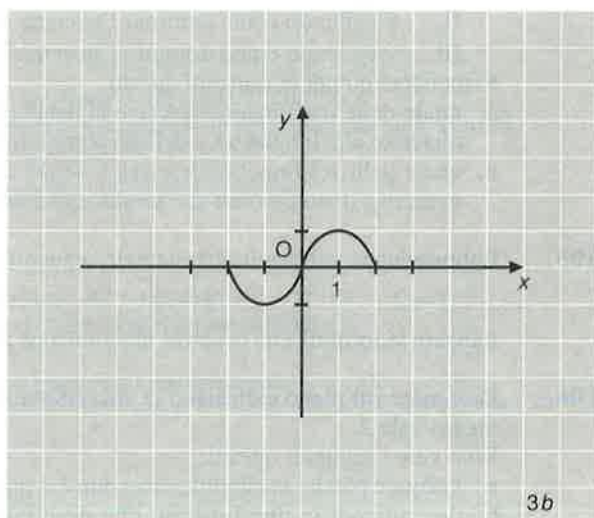
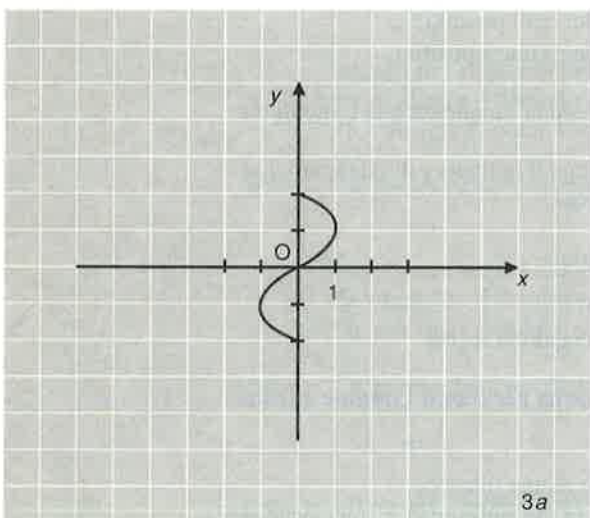
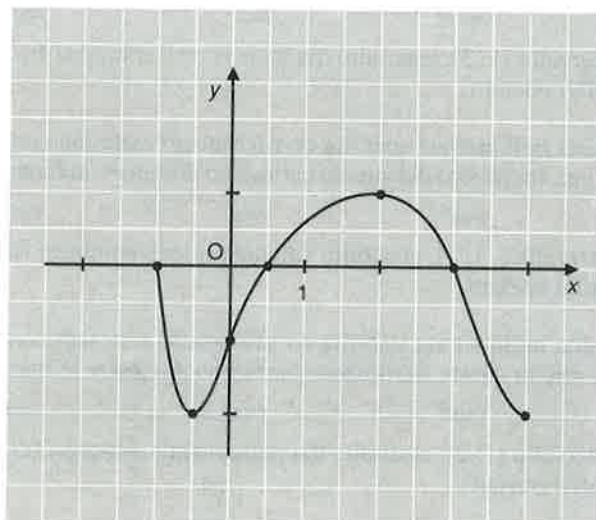


Figura 3



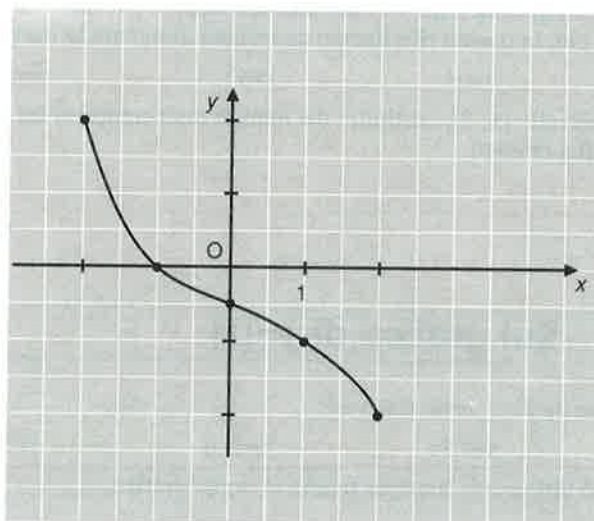
110. Esaminare la fig. 4, che rappresenta il grafico di una funzione, e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare dominio e codominio della funzione;
  - completare la tabella indicata nella figura.
111. Ripetere l'esercizio 110 a partire dalla fig. 5.

Figura 4



$x$	$y$
-1	
0	
$\frac{1}{2}$	
2	
3	
4	

Figura 5



$x$	$y$
-2	
0	
2	



## Sul grafico delle funzioni $y=x^n$

- 112.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 10 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x$$

$$y=x^2$$

$$y=x^3$$

$$y=x^4$$

con dominio l'intervallo  $[0; 1]$ , costituito dai numeri reali compresi fra 0 e 1. Confrontare i grafici ottenuti.

- 113.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 0,1 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x$$

$$y=x^2$$

$$y=x^3$$

$$y=x^4$$

con dominio l'intervallo  $[1; 3]$ , costituito dai numeri reali compresi fra 1 e 3. Confrontare i grafici ottenuti.

- 114.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 10 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x^2$$

$$y=x^4$$

$$y=x^6$$

$$y=x^8$$

con dominio l'intervallo  $[-1; 1]$ , costituito dai numeri reali compresi fra -1 e 1. Confrontare i grafici ottenuti.

- 115.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 0,1 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x^2$$

$$y=x^4$$

$$y=x^6$$

$$y=x^8$$

con dominio l'intervallo  $[1; 2]$ , costituito dai numeri reali compresi fra 1 e 2. Confrontare i grafici ottenuti.

- 116.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 10 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x$$

$$y=x^3$$

$$y=x^5$$

$$y=x^7$$

con dominio l'intervallo  $[-1; 1]$ , costituito dai numeri reali compresi fra -1 e 1. Confrontare i grafici ottenuti.

- 117.** Su un foglio di carta millimetrata stabilire un riferimento cartesiano con l'unità di misura lunga 0,1 cm. In questo riferimento cartesiano disegnare le funzioni:

$$y=x$$

$$y=x^3$$

$$y=x^5$$

$$y=x^7$$

con dominio l'intervallo  $[1; 2]$ , costituito dai numeri reali compresi fra 1 e 2. Confrontare i grafici ottenuti.

## Sul grafico di $y=|x|$

- 118.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2x$$

$$y=-2x$$

$$y=|2x|$$

$$y=2|x|$$

Spiegare perché le ultime due funzioni hanno lo stesso grafico.

- 119.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=x+1$$

$$y=-(x+1)$$

$$y=|x+1|$$

- 120.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x+1$                        $y=-x+1$                        $y=|x|+1$
- 121.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x-1$                        $y=-(x-1)$                        $y=|x-1|$
- 122.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x-1$                        $y=-x-1$                        $y=|x|-1$
- 123.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=2x+3$                        $y=-(2x+3)$                        $y=|2x+3|$
- 124.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=2x+3$                        $y=-2x+3$                        $y=2|x|+3$
- 125.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=3x-4$                        $y=-(3x-4)$                        $y=|3x-4|$
- 126.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=3x-4$                        $y=-3x-4$                        $y=3|x|-4$
- 127.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x^2$                        $y=|x^2|$                        $y=|x|^2$   
 Spiegare perché le tre funzioni hanno lo stesso grafico.
- 128.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x^3$                        $y=|x^3|$                        $y=|x|^3$   
 Spiegare perché le ultime due funzioni hanno stesso grafico, che però è diverso da quello della prima funzione.
- 129.** Tracciare il grafico della seguente funzione:  
 $y=|x|+x$   
 [La funzione è definita nel modo seguente: per  $x \geq 0$   $y=x+x=...$  per  $x < 0$   $y=-x+x=...$ ]
- 130.** Dopo aver svolto l'esercizio 129, tracciare il grafico della funzione:  
 $y=|x|-x$
- 131.** Tracciare il grafico della seguente funzione, dopo averne determinato il dominio:  
 $y=\frac{|x|}{x}$   
 [La funzione è definita nel modo seguente: per  $x > 0$   $y=\frac{x}{x}=...$  per  $x < 0$   $y=\frac{-x}{x}=...$ ]

## Sul riferimento polare

- 132.** Disegnare sul piano un riferimento polare e indicarvi i seguenti punti:  
 $A(1, 45^\circ)$   $B(2, 45^\circ)$   $C(3, 45^\circ)$   $D(5, 45^\circ)$   
Spiegare perché tutti i punti si trovano su una stessa semiretta di origine  $O$  e scrivere l'equazione della semiretta.
- 133.** Ripetere l'esercizio 132 a partire dai seguenti punti:  
 $A(2, 60^\circ)$   $B(4, 60^\circ)$   $C(6, 60^\circ)$   $D(8, 60^\circ)$
- 134.** Ripetere l'esercizio 132 a partire dai seguenti punti:  
 $A(1, 120^\circ)$   $B(2, 120^\circ)$   $C(3, 120^\circ)$   $D(4, 120^\circ)$
- 135.** Ripetere l'esercizio 132 a partire dai seguenti punti:  
 $A(2, 240^\circ)$   $B(4, 240^\circ)$   $C(6, 240^\circ)$   $D(8, 240^\circ)$
- 136.** Ripetere l'esercizio 132 a partire dai seguenti punti:  
 $A(1, 300^\circ)$   $B(3, 300^\circ)$   $C(5, 300^\circ)$   $D(7, 300^\circ)$

Scrivere le equazioni delle semirette di origine  $O$  assegnate negli esercizi dal n. **137** al n. **140**.

- 137.** Semiretta  $a$ , che passa per  $A(1, 30^\circ)$ .
- 138.** Semiretta  $b$ , che passa per  $B(2, 150^\circ)$ .
- 139.** Semiretta  $c$ , che passa per  $C(3, 210^\circ)$ .
- 140.** Semiretta  $d$ , che passa per  $D(4, 330^\circ)$ .
- 141.** In un riferimento polare disegnare quattro semirette di origine  $O$  e scriverne l'equazione.
- 142.** Disegnare sul piano un riferimento polare ed indicarvi i seguenti punti:  
 $A(3, 30^\circ)$   $B(3, 150^\circ)$   $C(3, 210^\circ)$   $D(3, 330^\circ)$   
Spiegare perché tutti i punti si trovano su una stessa circonferenza di centro  $O$  e scrivere l'equazione della circonferenza.
- 143.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti punti:  
 $A(2, 60^\circ)$   $B(2, 120^\circ)$   $C(2, 240^\circ)$   $D(2, 300^\circ)$
- 144.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti punti:  
 $A(4, 90^\circ)$   $B(2, 180^\circ)$   $C(3, 270^\circ)$   $D(4, 360^\circ)$
- 145.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti punti:  
 $A(2, 45^\circ)$   $B(4, 135^\circ)$   $C(6, 225^\circ)$   $D(8, 315^\circ)$
- 146.** Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti punti:  
 $A(1, 20^\circ)$   $B(3, 160^\circ)$   $C(5, 200^\circ)$   $D(7, 340^\circ)$

Scrivere le equazioni delle circonferenze di centro O assegnate negli esercizi dal n. 147 al n. 150.

147. Circonferenza  $a$ , che passa per  $A(1, 30^\circ)$ .
148. Circonferenza  $b$ , che passa per  $B(2, 150^\circ)$ .
149. Circonferenza  $c$ , che passa per  $C(3, 210^\circ)$ .
150. Circonferenza  $d$ , che passa per  $D(4, 330^\circ)$ .
151. In un riferimento polare disegnare quattro circonferenze con il centro nell'origine O e scriverne l'equazione.
152. Disegnare su un foglio un riferimento cartesiano e le seguenti linee:  
 - le linee di equazione  $x=a$ , con  $a=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ;  
 - le linee di equazione  $y=b$ , con  $b=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .  
 Disegnare su un altro foglio un riferimento polare e le seguenti linee:  
 - le linee di equazione  $r=h$ , con  $h=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  
 - le linee di equazione  $\alpha=k$ , con  $k=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ .  
 Confrontare i due disegni, rispondendo ai seguenti quesiti:  
 a. in un riferimento cartesiano una linea di equazione  $x=a$  ed una linea di equazione  $y=b$  sono fra loro perpendicolari; che cosa si può dire nel riferimento polare di due linee d'equazione  $r=h$  e  $\alpha=k$ ?  
 b. in un riferimento cartesiano due linee d'equazione  $x=a$  sono fra loro parallele; che cosa si può dire nel riferimento polare di due linee d'equazione  $r=h$ ?  
 c. in un riferimento cartesiano due linee d'equazione  $y=b$  sono fra loro parallele; che cosa si può dire nel riferimento polare di due linee d'equazione  $\alpha=k$ ?

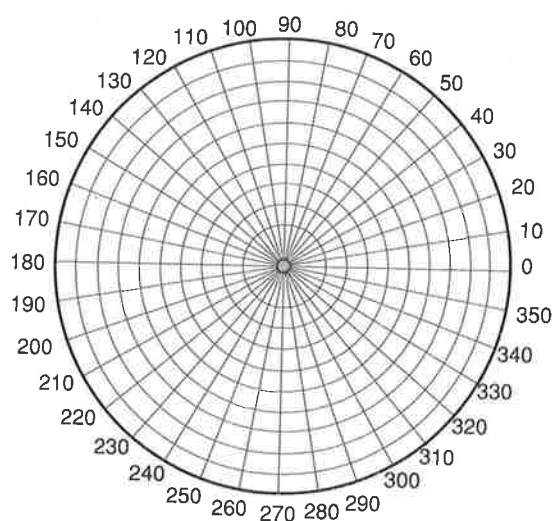
153. Nel riferimento polare di fig. 6 disegnare la spirale d'equazione:

$$r = \frac{1}{40} \alpha$$

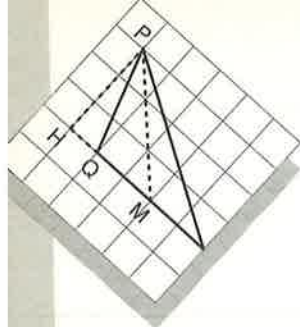
154. In riferimenti polari analoghi a quello di fig. 6 disegnare le spirali d'equazione:

$$r = \alpha \qquad r = \frac{1}{5} \alpha$$

Figura 6



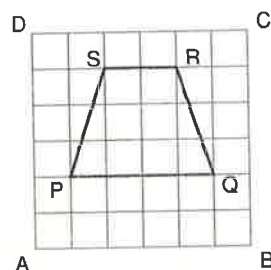




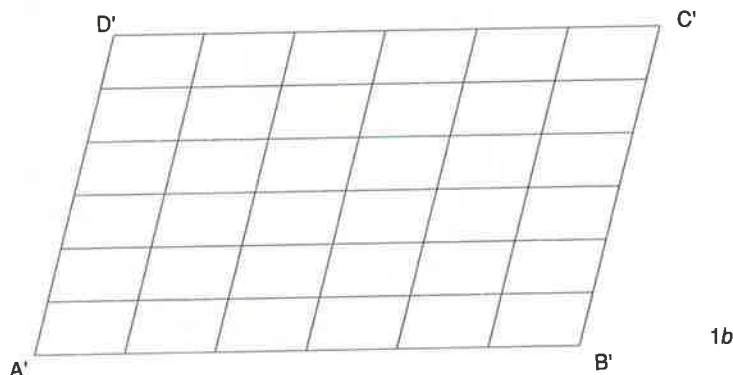
## Sulle trasformazioni affini

1. Un telaio quadrato appoggiato su un tavolo, perpendicolarmente al piano, è illuminato dai raggi del Sole. Rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. descrivere la forma dell'ombra del quadrato data dai raggi del Sole;
  - b. si può avere un'ombra che è un quadrato uguale a quello dato?
  - c. se il caso (b) si verifica, come sono inclinati i raggi del Sole?
2. I raggi del Sole, penetrando attraverso una finestra rettangolare aperta, determinano sul pavimento una zona luminosa. Rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. descrivere la forma della zona luminosa;
  - b. si può avere una zona rettangolare?
  - c. se il caso (b) si verifica, come sono inclinati i raggi del Sole?
3. Il Sole illumina un cartellone pubblicitario rettangolare; fra le seguenti figure scegliere quelle che possono essere l'ombra del cartellone, motivando la scelta:
  - un qualunque quadrilatero;
  - un trapezio;
  - un parallelogramma;
  - un rettangolo simile a quello dato;
  - un rettangolo uguale a quello dato;
  - un quadrato;
  - un segmento.
4. Un lampione illumina un cartellone rettangolare; fra le seguenti figure scegliere quelle che possono essere l'ombra del cartellone, motivando la scelta:
  - un qualunque quadrilatero;
  - un trapezio;
  - un parallelogramma;
  - un rettangolo simile a quello dato;
  - un rettangolo uguale a quello dato;
  - un quadrato;
  - un segmento.
5. Un cartello segnaletico che ha la forma di un triangolo equilatero viene illuminato dai raggi del Sole. Rispondere ai seguenti quesiti:
  - a. descrivere la forma dell'ombra del triangolo data dai raggi del Sole;
  - b. si può avere un'ombra che è un triangolo uguale a quello dato?
  - c. se il caso (b) si verifica, come sono inclinati i raggi del Sole?
6. In fig. 1a è rappresentato un trapezio PQRS disegnato in un telaio quadrettato ABCD; a fianco (fig. 1b) è disegnato il quadrettato A'B'C'D' trasformato con un'affinità; risolvere i seguenti quesiti:
  - a. disegnare il poligono P'Q'R'S', trasformato del trapezio PQRS;
  - b. spiegare perché P'Q'R'S' è certamente un trapezio;
  - c. l'ombra di PQRS data dai raggi del Sole può essere un parallelogramma?

Figura 1



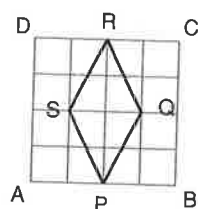
1a



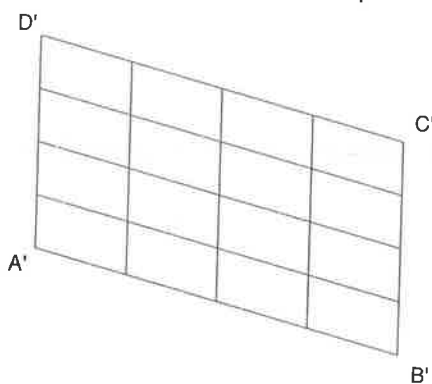
1b

7. Dopo aver risolto l'esercizio 6, risolvere i seguenti quesiti, sempre a partire dal trapezio PQRS disegnato nel quadrettato ABCD e dai loro trasformati per affinità:
- confrontare i rapporti  $\frac{PQ}{RS}$  e  $\frac{P'Q'}{R'S'}$ ;
  - confrontare i rapporti  $\frac{SP}{RQ}$  e  $\frac{S'P'}{R'Q'}$ ;
  - calcolare il rapporto fra l'area di PQRS e l'area di ABCD e confrontarlo con il rapporto delle aree delle due figure trasformate.
8. In fig. 2a è rappresentato un rombo PQRS disegnato in un telaio quadrettato ABCD; a fianco (fig. 2b) è disegnato il quadrettato A'B'C'D', trasformato con un'affinità; risolvere i seguenti quesiti:
- disegnare il poligono P'Q'R'S' trasformato del rombo PQRS;
  - il rombo PQRS presenta le seguenti proprietà:
    - i quattro lati sono uguali fra loro;
    - i lati opposti sono paralleli;
    - le diagonali si tagliano nel loro punto medio O;
    - le diagonali sono perpendicolari.
 Fra le precedenti proprietà indicare quelle che si trovano certamente anche nel quadrilatero P'Q'R'S', motivando la scelta;
  - l'ombra di PQRS data dai raggi del Sole può essere un trapezio?

Figura 2



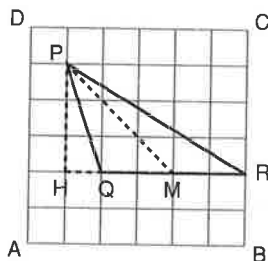
2a



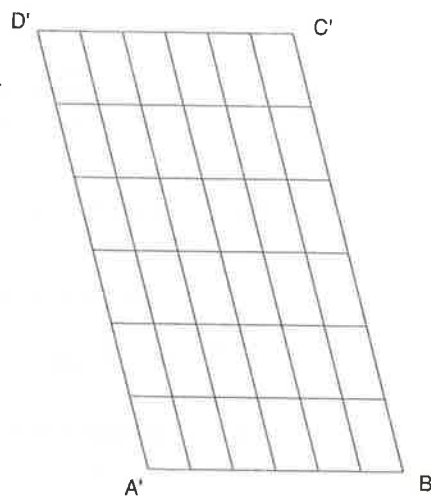
2b

9. In fig. 3a è disegnato, in un quadrettato ABCD, un triangolo PQR con l'altezza PH e la mediana PM relative al lato QR; a fianco (fig. 3b) è disegnato il quadrettato A'B'C'D' trasformato con un'affinità; risolvere i seguenti quesiti:
- disegnare il triangolo P'Q'R' trasformato di PQR e i punti H', M', trasformati di H e M;
  - P'H' è ancora un'altezza del triangolo P'Q'R'?
  - P'M' è ancora una mediana del triangolo P'Q'R'?
  - motivare adeguatamente le risposte ai quesiti (b) e (c).

Figura 3



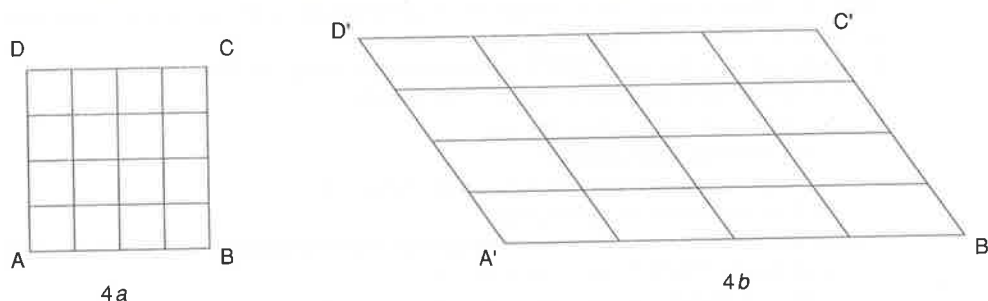
3a



3b

10. In fig. 4a è disegnato un quadrettato ABCD e in fig. 4b il quadrettato A'B'C'D', trasformato con un'affinità; risolvere i seguenti quesiti:
- disegnare un poligono a piacere all'interno di ABCD;
  - disegnare il poligono trasformato all'interno di A'B'C'D';
  - descrivere qualche invariante della trasformazione affine.

Figura 4



## Sulle equazioni di una trasformazione affine

11. Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i vertici seguenti:
- A(2; 2)                  B(3; 4)                  C(5; 3)                  D(4; 1)
- Operare la trasformazione affine descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare i vertici del poligono trasformato;
  - disegnare il poligono trasformato;
  - il quadrato assegnato aveva le seguenti caratteristiche:
    - lati uguali fra loro;
    - lati due a due paralleli;
    - angoli tutti retti;
    - diagonali uguali;
    - diagonali perpendicolari;
    - diagonali che si tagliano nel punto medio.
 Quali fra le precedenti caratteristiche si ritrovano nel poligono trasformato?
12. Ripetere l'esercizio 11 a partire dal quadrato che ha i seguenti vertici:
- A(1; 1)                  B(2; 3)                  C(4; 2)                  D(3; 0)
- e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}$$
13. Ripetere l'esercizio 12 a partire dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

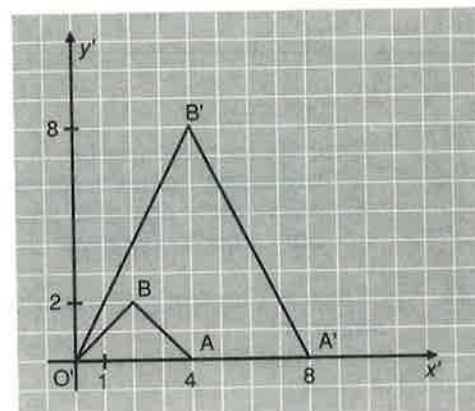
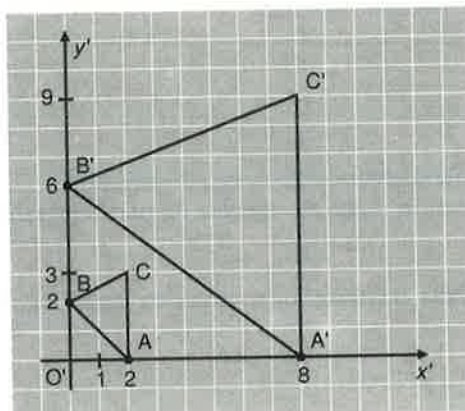
14. Ripetere l'esercizio 12 a partire dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \end{cases}$$
15. Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha i vertici seguenti:  
 $A(6; 4)$        $B(6; 10)$        $C(9; 12)$        $D(9; 6)$   
 Operare la trasformazione affine descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = y \end{cases}$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare i vertici del poligono trasformato e disegnare il poligono;
  - modificare le equazioni precedenti in modo da ottenere un parallelogramma simile a quello assegnato.
16. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalla trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:
- $$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$
17. Disegnare sul piano cartesiano il trapezio che ha i vertici seguenti:  
 $A(2; 1)$        $B(8; 1)$        $C(6; 3)$        $D(2; 3)$   
 Operare la trasformazione affine descritta dalle seguenti equazioni:
- $$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 3y \end{cases}$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare i vertici del poligono trasformato e disegnare il poligono;
  - calcolare il valore dei seguenti rapporti:
- $$\frac{AB}{DC} \qquad \frac{AB}{AD}$$
- determinare il valore dei seguenti rapporti, stabilendo in particolare se c'è un rapporto di cui si può dire il valore senza bisogno di alcun calcolo:
- $$\frac{A'B'}{D'C'} \qquad \frac{A'B'}{A'D'}$$
18. Ripetere l'esercizio 17 a partire dal trapezio che ha i seguenti vertici:  
 $A(1; 3)$        $B(1; 9)$        $C(3; 6)$        $D(3; 3)$   
 e dalla trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$
19. Ripetere l'esercizio 18 a partire dalla trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$



20. In fig. 5 sono disegnati due triangoli: ABC e A'B'C'; risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le equazioni della trasformazione che trasforma ABC in A'B'C';
  - scrivere le equazioni della trasformazione che trasforma A'B'C' in ABC;
  - spiegare perché le trasformazioni non sono similitudini e modificarne le equazioni in modo da ottenere che i triangoli ABC e A'B'C' siano simili.
21. Ripetere l'esercizio 20 a partire dai due triangoli di fig. 6.

**Figura 5**  
(a sinistra)

**Figura 6**  
(a destra)



## Sulle aree di figure affini

22. Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha per vertici i punti:  
 $O(0; 0)$        $A(1; 0)$        $B(2; 1)$        $C(1; 1)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare l'area  $S$  del parallelogramma dato;
  - disegnare il poligono ottenuto operando la trasformazione di equazioni:
 
$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$$
  - calcolare l'area  $S'$  del parallelogramma trasformato e il rapporto fra  $S'$  e  $S$ ;
  - modificare la trasformazione in modo da lasciare inalterata l'area del poligono.
23. Ripetere l'esercizio 22 a partire dal parallelogramma che ha i vertici:  
 $A(0; 1)$        $B(0; 3)$        $C(1; 2)$        $D(1; 0)$
- e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$$
24. Disegnare sul piano cartesiano i seguenti poligoni:
- il triangolo di vertici  $A(0; 4)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(-2; 0)$
  - il quadrilatero di vertici  $A(0; 4)$ ,  $D(-4; 0)$ ,  $E(0; -4)$ ,  $F(4; 0)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare il rapporto fra l'area  $Q$  del quadrilatero e l'area  $T$  del triangolo;
  - operare la trasformazione descritta dalle equazioni:
 
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 3y \end{cases}$$
- disegnare le figure trasformate e calcolarne l'area  $Q'$  e  $T'$ ;
- verificare che la trasformazione ha lasciato inalterato il rapporto delle aree;
  - modificare la trasformazione in modo che restino inalterate le aree.

25. Ripetere l'esercizio 24 a partire dai seguenti poligoni:  
 - il triangolo di vertici A(6; 0), B(0; 3), C(0; -3)  
 - il quadrilatero di vertici A(6; 0), D(0; -6), E(-6; 0), F(0; 6)  
 e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$
26. Disegnare il rettangolo che ha il centro nell'origine O(0; 0) e un vertice nel punto A(4; 3). Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. disegnare il rettangolo ottenuto operando l'affinità descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x \\ y' = \frac{2}{3}y \end{cases}$$
- b. calcolare il rapporto fra le diagonali dei due rettangoli;  
 c. calcolare il rapporto fra le aree dei due rettangoli;  
 d. modificare la trasformazione in modo da ottenere due rettangoli simili.
27. Ripetere l'esercizio 26 a partire dal rettangolo che ha centro nell'origine O e un vertice nel punto A(3; 4) e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:
- $$\begin{cases} x' = \frac{4}{3}x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}$$
28. Disegnare sul piano cartesiano il quadrato di vertici:  
 A(-4; -2)      B(0; 4)      C(6; 0)      D(2; -6)
- Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni dell'affinità che trasforma il quadrato in un quadrato di area doppia e disegnare il quadrato trasformato;  
 b. scrivere le equazioni di un'affinità che trasforma il quadrato in un parallelogramma di area doppia e disegnare il poligono trasformato.
29. A partire dal quadrato assegnato nell'esercizio 28, risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni dell'affinità che trasforma il quadrato in un quadrato di area metà e disegnare il quadrato trasformato;  
 b. scrivere le equazioni di un'affinità che trasforma il quadrato in un parallelogramma di area metà e disegnare il poligono trasformato.
30. Disegnare sul piano cartesiano il quadrato di vertici:  
 A(3; 6)      B(-6; 0)      C(0; -9)      D(9; -3)
- Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni dell'affinità che trasforma il quadrato in un quadrato di area tripla e disegnare il quadrato trasformato;  
 b. scrivere le equazioni di un'affinità che trasforma il quadrato in un parallelogramma di area tripla e disegnare il poligono trasformato.
31. A partire dal quadrato assegnato nell'esercizio 30, risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni dell'affinità che trasforma il quadrato in un quadrato di area un terzo di quella iniziale e disegnare il quadrato trasformato;  
 b. scrivere le equazioni di un'affinità che trasforma il quadrato in un parallelogramma di area un terzo e disegnare il poligono trasformato.

## Sulle simmetrie

32. Disegnare sul piano cartesiano il triangolo che ha i vertici:

$A(1; 3)$

$B(4; 3)$

$C(4; 6)$

Disegnare i triangoli che si ottengono operando le seguenti simmetrie:

- la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ ;
- la simmetria rispetto all'asse delle  $y$ ;
- la simmetria rispetto all'origine  $O$ ;
- la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

33. Ripetere l'esercizio 32 a partire dal triangolo che ha i vertici:

$A(-5; -1)$

$B(-2; -1)$

$C(-2; -6)$

34. In fig. 7 sono disegnati due rettangoli  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ ; scrivere le equazioni della trasformazione che trasforma il primo rettangolo nel secondo.

35. Ripetere l'esercizio 34 a partire dai due rettangoli di fig. 8.

Figura 7

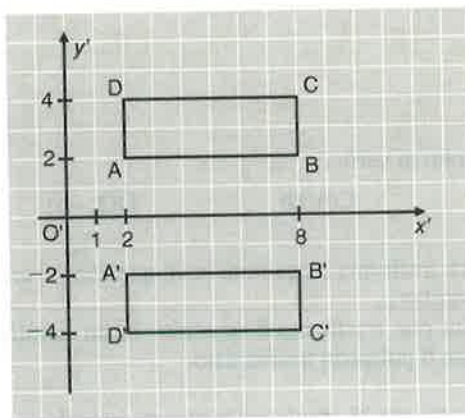
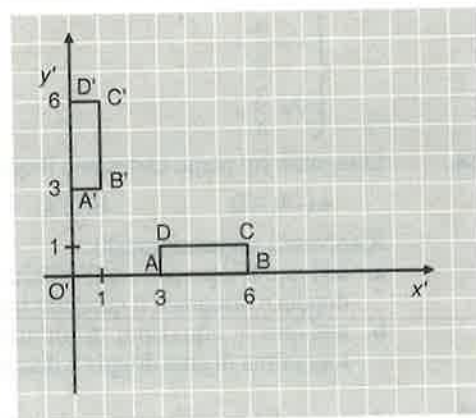


Figura 8



*Gli esercizi dal n. 36 al n. 45 richiedono di riprendere le nozioni sugli assi di simmetria dei poligoni (vedi il primo volume, pp. 136-139).*

36. Disegnare sul piano cartesiano il triangolo isoscele che ha i vertici:

$A(-3; -1)$

$B(3; -1)$

$C(0; 4)$

Risolvere i seguenti quesiti:

- operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il triangolo ottenuto;
- operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e disegnare il triangolo ottenuto;
- operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il triangolo è rimasto inalterato.

37. Disegnare sul piano cartesiano il triangolo isoscele che ha i vertici:  
 $A(-5; -2)$        $B(-5; 2)$        $C(3; 0)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e disegnare il triangolo ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il triangolo ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il triangolo è rimasto inalterato.
38. Disegnare sul piano cartesiano il deltoide che ha i vertici:  
 $A(-4; 0)$        $B(0; 2)$        $C(2; 0)$        $D(0; -2)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e disegnare il deltoide ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il deltoide ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
39. Disegnare sul piano cartesiano il deltoide che ha i vertici:  
 $A(-3; 0)$        $B(0; 1)$        $C(3; 0)$        $D(0; -4)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e disegnare il deltoide ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il deltoide ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
40. Disegnare sul piano cartesiano il trapezio che ha i vertici:  
 $A(-3; 2)$        $B(4; 1)$        $C(4; -1)$        $D(-3; -2)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e disegnare il trapezio ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il trapezio ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
41. Disegnare sul piano cartesiano il trapezio che ha i vertici:  
 $A(-1; -2)$        $B(1; -2)$        $C(4; 1)$        $D(-4; 1)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e disegnare il trapezio ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il trapezio ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
42. Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha i vertici:  
 $A(-2; 3)$        $B(4; 3)$        $C(2; -3)$        $D(-4; -3)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e disegnare il poligono ottenuto;  
 b. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e disegnare il poligono ottenuto;  
 c. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il poligono ottenuto;  
 d. operare la simmetria rispetto all'origine  $O$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato, riprendendo le nozioni relative al centro di simmetria dei parallelogrammi (vedi il primo volume, p. 198).



- 43.** Disegnare sul piano cartesiano il rettangolo che ha i vertici:  
 $A(4; 1)$        $B(4; -1)$        $C(-4; -1)$        $D(-4; 1)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il rettangolo trasformato;  
 b. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
- 44.** Disegnare sul piano cartesiano il rombo che ha i vertici:  
 $A(3; 0)$        $B(0; 4)$        $C(-3; 0)$        $D(0; -4)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e disegnare il rombo trasformato;  
 b. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.
- 45.** Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i vertici:  
 $A(3; 0)$        $B(0; 3)$        $C(-3; 0)$        $D(0; -3)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato;  
 b. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato;  
 c. operare la simmetria rispetto all'asse delle  $y$  e spiegare perché il poligono è rimasto inalterato.

## Sulla composizione di trasformazioni

- 46.** Disegnare sul piano cartesiano il quadrilatero che ha i vertici:  
 $A(-2; 3)$        $B(-8; 3)$        $C(-4; 9)$        $D(-2; 9)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. disegnare il quadrilatero che si ottiene operando la trasformazione descritta dalle equazioni:  

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$$
  
 b. indicare le trasformazioni che compongono la trasformazione assegnata.

47. Ripetere l'esercizio 46 a partire dal quadrilatero di vertici:  
 $A(-1; -2)$        $B(-4; -2)$        $C(-2; -4)$        $D(-1; -4)$   
 e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:  

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$
48. Disegnare sul piano cartesiano il quadrato di vertici:  
 $A(-4; -2)$        $B(-2; -2)$        $C(-2; -4)$        $D(-4; -4)$   
 Operare la trasformazione composta dalle seguenti trasformazioni:  
 - l'affinità che raddoppia i lati del quadrato;  
 - la simmetria rispetto all'origine O.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni che descrivono la trasformazione composta;  
 b. disegnare il quadrilatero trasformato e spiegare perché è ancora un quadrato.
49. A partire dal quadrato assegnato nell'esercizio 48, operare la trasformazione composta delle seguenti trasformazioni:  
 - l'affinità che trasforma il quadrato in un quadrato di area doppia;  
 - la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni che descrivono la trasformazione composta;  
 b. disegnare il quadrato trasformato e confrontarlo con quello ottenuto nell'esercizio 48.

---

## Sulle traslazioni

---

50. Disegnare sul piano cartesiano il triangolo che ha i vertici:  
 $A(1; 3)$        $B(4; 3)$        $C(4; 6)$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. disegnare il triangolo  $A'B'C'$ , che si ottiene operando la traslazione:  

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y \end{cases}$$
  
 b. disegnare il triangolo  $A''B''C''$ , che si ottiene operando la traslazione:  

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y \end{cases}$$
51. A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 50, risolvere i seguenti quesiti:  
 a. disegnare il triangolo  $A'B'C'$ , che si ottiene operando la traslazione:  

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y+2 \end{cases}$$
  
 b. disegnare il triangolo  $A''B''C''$ , che si ottiene operando la traslazione:  

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y-2 \end{cases}$$

- 52.** A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 50, risolvere i seguenti quesiti:

a. disegnare il triangolo A'B'C', che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases}$$

b. disegnare il triangolo A''B''C'', che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y-2 \end{cases}$$

- 53.** A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 50, risolvere i seguenti quesiti:

a. disegnare il triangolo A'B'C', che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases}$$

b. disegnare il triangolo A''B''C'', che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-2 \end{cases}$$

*Gli esercizi dal n. 54 al n. 68 richiedono anche di riprendere le nozioni sugli assi di simmetria dei poligoni (quesito (a): vedi il primo volume, pp. 136-139) e le nozioni sulle equazioni delle rette parallele agli assi cartesiani (quesito (c): vedi questo volume, p. 173).*

- 54.** Disegnare sul piano cartesiano il triangolo isoscele che ha i vertici:

A(4; -2)

B(4; 2)

O(0; 0)

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il triangolo ha l'asse delle  $x$  come asse di simmetria;  
b. disegnare il triangolo che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases}$$

c. scrivere l'equazione dell'asse di simmetria del triangolo traslato.

- 55.** Disegnare sul piano cartesiano il deltoide che ha i vertici:

A(-4; 0)

B(0; 2)

C(2; 0)

D(0; -2)

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il deltoide ha l'asse delle  $x$  come asse di simmetria;  
b. disegnare il deltoide che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+4 \end{cases}$$

c. scrivere l'equazione dell'asse di simmetria del deltoide traslato.

- 56.** Disegnare sul piano cartesiano il deltoide che ha i vertici:

A(-3; 0)

B(0; 1)

C(3; 0)

D(0; -4)

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché il deltoide ha l'asse delle  $y$  come asse di simmetria;  
b. disegnare il deltoide che si ottiene operando la traslazione:

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+4 \end{cases}$$

c. scrivere l'equazione dell'asse di simmetria del deltoide traslato.

- 57.** Disegnare sul piano cartesiano il trapezio che ha i vertici:  
 $A(-3; 2)$        $B(4; 1)$        $C(4; -1)$        $D(-3; -2)$
- spiegare perché il trapezio ha l'asse delle  $x$  come asse di simmetria;
  - disegnare il trapezio che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$
  - scrivere l'equazione dell'asse di simmetria del trapezio traslato.
- 58.** Disegnare sul piano cartesiano il trapezio che ha i vertici:  
 $A(-1; -2)$        $B(1; -2)$        $C(4; 1)$        $D(-4; 1)$
- spiegare perché il trapezio ha l'asse delle  $y$  come asse di simmetria;
  - disegnare il trapezio che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$
  - scrivere l'equazione dell'asse di simmetria del trapezio traslato.
- 59.** Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha i vertici:  
 $A(-2; 3)$        $B(4; 3)$        $C(2; -3)$        $D(-4; -3)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il parallelogramma ha l'origine  $O$  come centro di simmetria, riprendendo le nozioni relative al centro di simmetria dei parallelogrammi (vedi il primo volume, p. 198)
  - disegnare il parallelogramma che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$
  - scrivere le coordinate del centro di simmetria del parallelogramma traslato.
- 60.** Disegnare sul piano cartesiano il rettangolo che ha i vertici:  
 $A(4; 1)$        $B(4; -1)$        $C(-4; -1)$        $D(-4; 1)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il rettangolo ha gli assi cartesiani come assi di simmetria;
  - disegnare il rettangolo che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$
  - scrivere l'equazione degli assi di simmetria del rettangolo traslato.
- 61.** Disegnare sul piano cartesiano il rombo che ha i vertici:  
 $A(3; 0)$        $B(0; 4)$        $C(-3; 0)$        $D(0; -4)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il rombo ha gli assi cartesiani come assi di simmetria;
  - disegnare il rombo che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$
  - scrivere l'equazione degli assi di simmetria del rombo traslato, riprendendo le equazioni delle rette parallele agli assi cartesiani (vedi p. 174).



62. Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i vertici:  
 $A(3; 0)$        $B(0; 3)$        $C(-3; 0)$        $D(0; -3)$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il quadrato ha come assi di simmetria gli assi cartesiani e le bisettrici degli assi cartesiani;
  - disegnare il quadrato che si ottiene operando la traslazione:
 
$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$
  - scrivere l'equazione degli assi di simmetria del rettangolo traslato, riprendendo anche le equazioni delle rette (vedi il primo volume, p. 346).
63. A partire dal quadrato ABCD dell'esercizio 62, risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le equazioni della traslazione che porta il vertice A in  $O(0; 0)$ ;
  - scrivere le equazioni degli assi di simmetria del quadrato traslato.
64. A partire dal quadrato ABCD dell'esercizio 62, risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le equazioni della traslazione che porta il vertice B in  $O(0; 0)$ ;
  - scrivere le equazioni degli assi di simmetria del quadrato traslato.
65. A partire dal quadrato ABCD dell'esercizio 62, risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le equazioni della traslazione che porta il vertice C in  $O(0; 0)$ ;
  - scrivere le equazioni degli assi di simmetria del quadrato traslato.
66. A partire dal quadrato ABCD dell'esercizio 62, risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le equazioni della traslazione che porta il vertice D in  $O(0; 0)$ ;
  - scrivere le equazioni degli assi di simmetria del quadrato traslato.
67. In fig. 9 sono disegnati due triangoli ABC e A'B'C'; scrivere le equazioni della traslazione che porta il primo triangolo sul secondo.
68. Ripetere l'esercizio 67 a partire dai due triangoli di fig. 10.

Figura 9

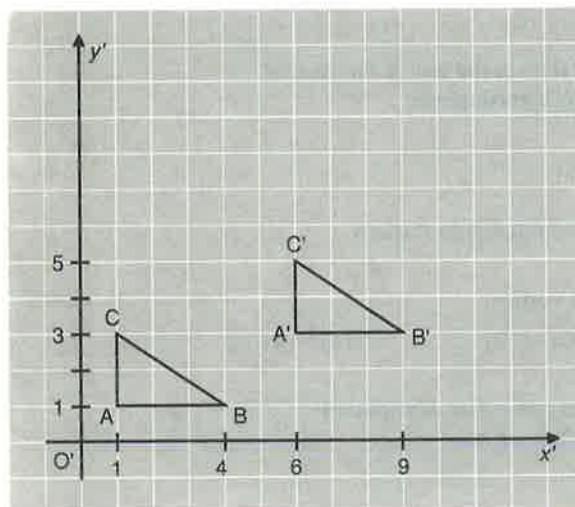
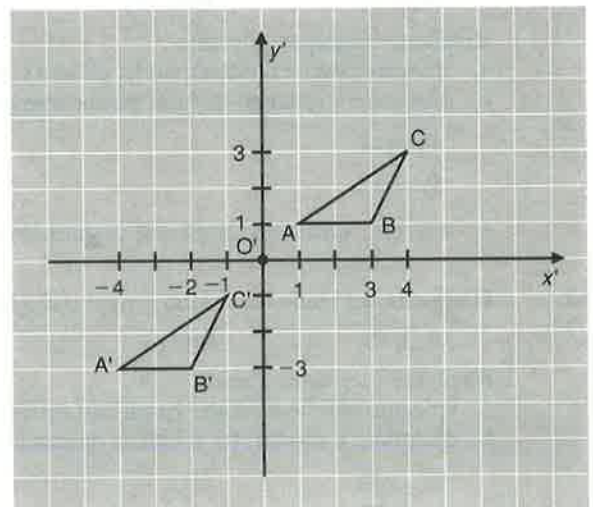


Figura 10



## Comporre più trasformazioni

69. Disegnare il triangolo che ha i vertici:

A(-1; 0)

B(4; 0)

C(0; 4)

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. disegnare il triangolo A'B'C' che si ottiene operando la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

- b. indicare le trasformazioni che compongono la trasformazione assegnata;  
c. spiegare perché i due triangoli hanno certamente la stessa area.

70. Disegnare il triangolo che ha i vertici:

A(0; -1)

B(0; 4)

C(4; 0)

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. disegnare il triangolo A'B'C' che si ottiene operando la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - 2 \\ y' = -2y + 1 \end{cases}$$

- b. indicare le trasformazioni che compongono la trasformazione assegnata;  
c. spiegare perché i due triangoli hanno certamente la stessa area.

71. A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 70, risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere l'equazione della trasformazione che trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' con le seguenti caratteristiche:  
- è simile ad ABC, ma ha l'area doppia di quella di ABC;  
- il vertice A si porta nell'origine O;  
b. disegnare il triangolo trasformato.

72. A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 70, risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere l'equazione di una trasformazione che trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' con le seguenti caratteristiche:  
- ha l'area doppia di quella di ABC;  
- il vertice A si porta nell'origine O;  
b. disegnare il triangolo trasformato.

73. A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 70, risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere l'equazione della trasformazione che trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' con le seguenti caratteristiche:  
- è simile ad ABC, ma ha l'area metà di quella di ABC;  
- il vertice B si porta nell'origine O;  
b. disegnare il triangolo trasformato.

74. A partire dal triangolo ABC assegnato nell'esercizio 70, risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere l'equazione di una trasformazione che trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' con le seguenti caratteristiche:  
- ha l'area metà di quella di ABC;  
- il vertice B si porta nell'origine O;  
b. disegnare il triangolo trasformato.

75. In fig. 11 sono disegnati due rettangoli ABCD e A'B'C'D'; scrivere le equazioni della trasformazione che trasforma il primo rettangolo sul secondo.
76. Ripetere l'esercizio 75 a partire dai due rettangoli di fig. 12.

Figura 11

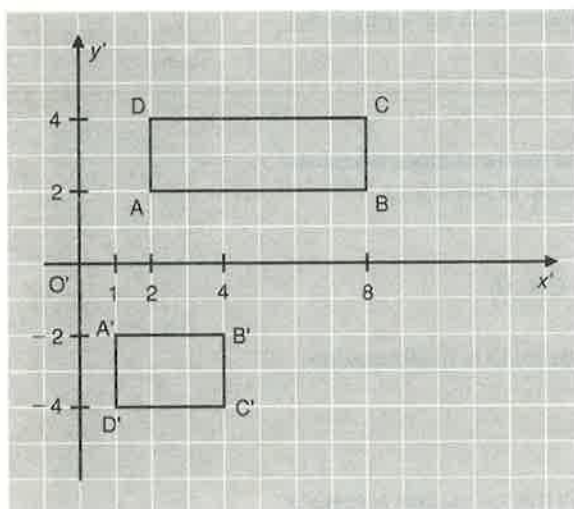
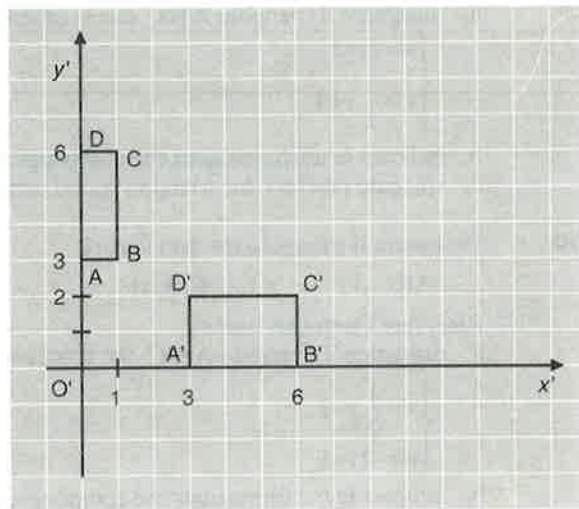


Figura 12



## Sui vettori

### Dalle equazioni al vettore che descrive una traslazione

Esaminare le traslazioni descritte dalle equazioni assegnate negli esercizi dal n. 77 al n. 81 e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare lunghezza, direzione e verso del vettore  $\vec{v}$  che descrive la traslazione;
- disegnare il vettore ottenuto.

77.  $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$

78.  $\begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y + 6 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y - 6 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y + 6 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y - 6 \end{cases}$

79.  $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

80.  $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 3 \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 3 \end{cases}$

81.  $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - \sqrt{3} \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$   $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - \sqrt{3} \end{cases}$

## Le componenti di un vettore

Riprendere le traslazioni descritte dalle equazioni assegnate negli esercizi dal n. 77 al n. 81 e scrivere le componenti del vettore  $\vec{v}$  che descrive la traslazione.

## Dal vettore alle equazioni che descrivono una traslazione

Esaminare i vettori dati negli esercizi dal n. 82 al n. 86 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere le equazioni che descrivono la corrispondente traslazione;
- scrivere le coordinate del punto O in cui viene portata l'origine.

82.  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$        $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
83.  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$        $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$        $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$        $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
84.  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$        $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
85.  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$        $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
86.  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$        $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$        $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

## Somma di vettori

87. Esaminare le coppie di vettori  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  assegnate nella fig. 13 e disegnare il corrispondente vettore somma.
88. Esaminare le coppie di vettori  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  assegnate nella fig. 14 e disegnare il corrispondente vettore somma.
89. Basarsi sullo svolgimento dell'esercizio 88 per verificare la validità della seguente regola: la somma di due vettori con la stessa direzione e verso è un vettore che ha la stessa direzione e verso e come lunghezza la somma delle lunghezze.
90. Esaminare le coppie di vettori  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  assegnate nella fig. 15 e verificare che il vettore somma ha sempre la lunghezza che vale 0.
91. Riprendere la definizione di opposto di un numero reale (vedere p. 57) e basarsi sullo svolgimento dell'esercizio 90 per spiegare il significato della seguente definizione: il *vettore opposto* di un vettore dato è un vettore che ha la stessa direzione e lunghezza del vettore dato, ma verso opposto. Disegnare tre vettori a piacere e, a fianco di ogni vettore, disegnare il suo opposto.
92. Riprendere la nozione di differenza di due numeri reali, definita come somma del primo numero con l'opposto del secondo (vedere p. 57) e spiegare il significato della seguente definizione di *differenza di due vettori*: è la somma del primo vettore con l'opposto del secondo.  
Esaminare le coppie di vettori  $\vec{w}$  e  $\vec{t}$  assegnate nella fig. 14 e disegnare i corrispondenti vettori differenza  $\vec{w} - \vec{t}$  e  $\vec{t} - \vec{w}$ .

Figura 13

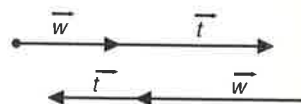


Figura 14

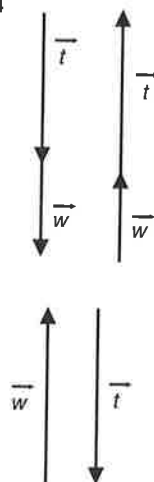
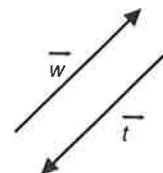
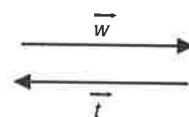


Figura 15





## Trasformare con simmetrie le funzioni $y=x^n$

- 93.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma il primo grafico nel secondo:  
 $y=x$                        $y=-x$
- 94.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma la prima curva nella seconda:  
 $y=x^2$                        $y=-x^2$
- 95.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma la prima curva nella seconda:  
 $y=x^3$                        $y=-x^3$
- 96.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma la prima curva nella seconda:  
 $y=x^4$                        $y=-x^4$
- 97.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma la prima curva nella seconda:  
 $y=x^5$                        $y=-x^5$
- 98.** Tracciare il grafico della seguente coppia di funzioni, indicando la simmetria che trasforma la prima curva nella seconda:  
 $y=x^6$                        $y=-x^6$
- 99.** Spiegare perché sono simmetriche rispetto all'asse delle  $y$  le curve che sono il grafico delle seguenti funzioni:  
 $y=x^2$                        $y=x^4$                        $y=x^6$
- 100.** Spiegare perché sono simmetrici rispetto all'origine  $O$  i grafici delle seguenti funzioni:  
 $y=x$                        $y=x^3$                        $y=x^5$
- 101.** Spiegare perché sono certamente simmetriche rispetto all'asse delle  $y$  le curve che sono il grafico delle seguenti funzioni e tracciarne un grafico approssimativo:  
 $y=x^{20}$                        $y=x^{30}$
- 102.** Spiegare perché sono certamente simmetriche rispetto all'origine  $O$  le curve che sono il grafico delle seguenti funzioni e tracciarne un grafico approssimativo:  
 $y=x^{21}$                        $y=x^{33}$

Esaminare le uguaglianze assegnate negli esercizi dal n. **103** al n. **106** e risolvere i seguenti quesiti:

- a. indicare le identità, cioè le uguaglianze che sono vere per qualunque valore reale di  $x$ , motivando la scelta;
- b. indicare le uguaglianze che non sono identità, motivando la scelta.

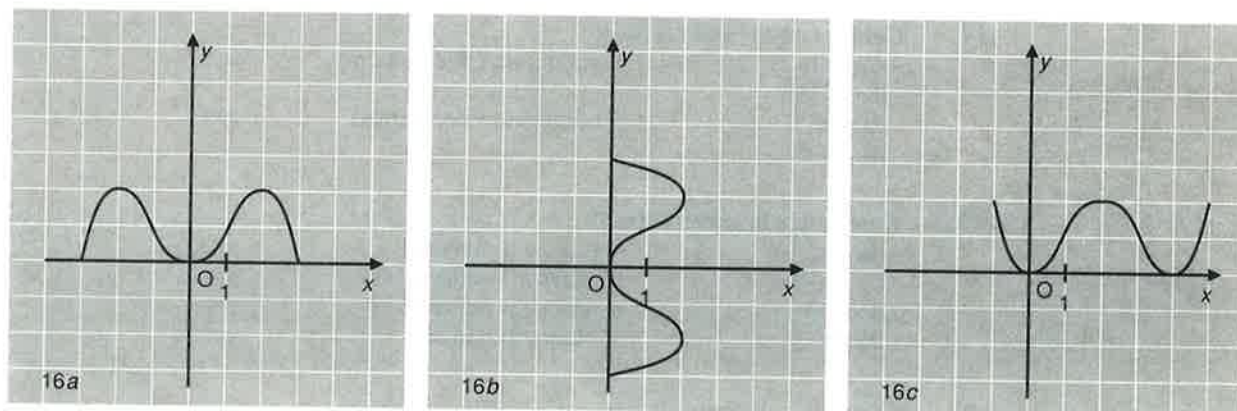
- 103.**     $-(-x)^2=x^2$                        $-(-x)^3=x^3$                        $(-x)^2=x^2$                        $(-x)^3=x^3$
- 104.**     $(-x)^2=-x^2$                        $(-x)^3=-x^3$                        $(-x)^4=x^4$                        $(-x)^5=x^5$

105.  $-(-x)^4 = x^4$        $-(-x)^5 = x^5$        $(-x)^6 = x^6$        $(-x)^7 = x^7$
106.  $(-x)^6 = -x^6$        $(-x)^7 = -x^7$        $(-x)^8 = x^8$        $(-x)^9 = x^9$
107. Spiegare perché tutte le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 103 al n. 106 sono vere per  $x=0$ .

### Collegamento con il capitolo quinto

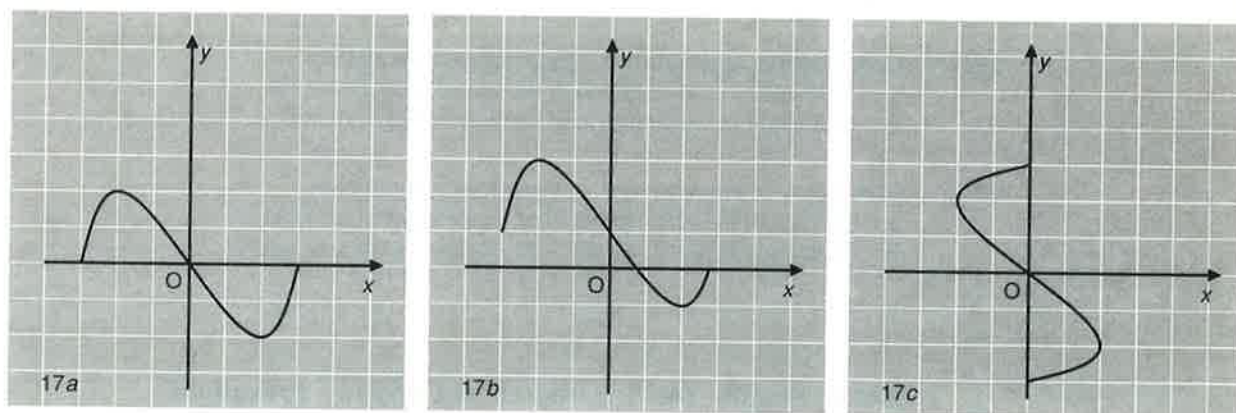
108. Esaminare le curve rappresentate in fig. 16 e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare la curva simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ ;
  - indicare la curva simmetrica rispetto all'asse delle  $x$ ;
  - spiegare perché la curva simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  non può essere il grafico di una funzione (vedere p. 195).

Figura 16



109. Esaminare le curve rappresentate in fig. 17 e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare le curve simmetriche rispetto all'origine  $O$ ;
  - indicare la curva che è simmetrica rispetto all'origine  $O$  ed è anche il grafico di una funzione;
  - indicare la curva che è simmetrica rispetto all'origine  $O$ , ma non è il grafico di una funzione (vedere p. 195).

Figura 17



110. Su tutte le curve rappresentate in fig. 17 operare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$  e disegnare le curve ottenute.

## Sulle funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

Tracciare il grafico delle coppie di funzioni assegnate negli esercizi dal n. 111 al n. 116, spiegando brevemente il procedimento seguito.

111.  $y = x^3$                        $y = \sqrt[3]{x}$                       112.  $y = x^5$                        $y = \sqrt[5]{x}$

113.  $y = x^2$                        $y = \sqrt{x}$                       114.  $y = x^4$                        $y = \sqrt[4]{x}$

115.  $y = x^6$                        $y = \sqrt[6]{x}$                       116.  $y = x^7$                        $y = \sqrt[7]{x}$

117. Completare le seguenti frasi:
- |                |                           |                 |
|----------------|---------------------------|-----------------|
| - da $y^2=16$  | si ottengono i due numeri | $y = \pm \dots$ |
| - da $y^2=-16$ | .....                     |                 |
| - da $y^2=5$   | si ottengono i due numeri | $y = \pm \dots$ |
| - da $y^2=-5$  | .....                     |                 |

118. Completare le seguenti frasi:
- |               |                      |             |
|---------------|----------------------|-------------|
| - da $y^3=8$  | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^3=-8$ | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^3=3$  | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^3=-3$ | si ottiene il numero | $y = \dots$ |

119. Completare le seguenti frasi:
- |                |                           |                 |
|----------------|---------------------------|-----------------|
| - da $y^4=81$  | si ottengono i due numeri | $y = \pm \dots$ |
| - da $y^4=-81$ | .....                     |                 |
| - da $y^4=7$   | si ottengono i due numeri | $y = \pm \dots$ |
| - da $y^4=-7$  | .....                     |                 |

120. Completare le seguenti frasi:
- |                 |                      |             |
|-----------------|----------------------|-------------|
| - da $y^5=243$  | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^5=-243$ | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^5=15$   | si ottiene il numero | $y = \dots$ |
| - da $y^5=-15$  | si ottiene il numero | $y = \dots$ |

121. Completare le seguenti frasi, spiegandone il significato:
- «Estraendo la radice quinta di un numero negativo si ha .....»;
  - «Estraendo la radice quarta di un numero negativo non .....».

122. Completare le seguenti frasi, spiegandone il significato:
- «Estraendo la radice quinta di un numero positivo si ha .....»;
  - «Estraendo la radice quarta di un numero positivo si hanno .....».

### Collegamento con i paragrafi o i capitoli precedenti

123. Spiegare perché la funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  ha come dominio l'insieme  $R$  dei numeri reali, mentre la funzione  $y = \sqrt{x}$  ha come dominio l'insieme  $R^+$  dei numeri reali positivi.  
*[Per il dominio di una funzione vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]*

124. Spiegare perché le funzioni  $y=\sqrt[n]{x}$  hanno come dominio l'insieme  $R$  dei numeri reali se l'indice  $n$  del radicale è dispari, mentre hanno come dominio l'insieme  $R^+$  dei numeri reali positivi se l'indice  $n$  del radicale è pari.  
[Per il dominio di una funzione vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

125. Spiegare perché la curva d'equazione  $y^n=x$  è simmetrica rispetto a  $O$  se l'esponente  $n$  è dispari, mentre è simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  se l'esponente  $n$  è pari.  
[Per le simmetrie vedere il paragrafo 6 di questo capitolo]

126. Spiegare perché la curva d'equazione  $y^n=x$  è descritta da una sola funzione se l'esponente  $n$  è dispari, mentre è descritta da due funzioni se l'esponente  $n$  è pari.  
[Per il concetto di funzione vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

### Operare simmetrie a partire dalle funzioni $y=\sqrt[n]{x}$

127. A partire dalle funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x} \qquad y=-\sqrt[3]{x} \qquad y=\sqrt[3]{-x} \qquad y=-\sqrt[3]{-x}$$

risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico delle funzioni;
- spiegare perché la prima e l'ultima funzione hanno lo stesso grafico;
- spiegare perché la seconda e terza funzione hanno lo stesso grafico.

128. Ripetere l'esercizio 127 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[5]{x} \qquad y=-\sqrt[5]{x} \qquad y=\sqrt[5]{-x} \qquad y=-\sqrt[5]{-x}$$

129. A partire dalle funzioni:

$$y=\sqrt{x} \qquad y=-\sqrt{x} \qquad y=\sqrt{-x} \qquad y=-\sqrt{-x}$$

risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico delle funzioni;
- indicare il dominio di ogni funzione.

130. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[4]{x} \qquad y=-\sqrt[4]{x} \qquad y=\sqrt[4]{-x} \qquad y=-\sqrt[4]{-x}$$

A partire dalle uguaglianze assegnate negli esercizi dal n. 131 al n. 133 risolvere i seguenti quesiti:

- indicare le identità, cioè le uguaglianze che sono vere per qualunque valore reale di  $x$ , motivando la scelta;
- indicare le uguaglianze che non sono identità, motivando la scelta.

131.  $\sqrt{-x}=-\sqrt{x} \qquad \sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x} \qquad -\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{x} \qquad -\sqrt{-x}=\sqrt{x}$

132.  $\sqrt[5]{-x}=-\sqrt[5]{x} \qquad \sqrt[4]{-x}=-\sqrt[4]{x} \qquad -\sqrt[4]{-x}=\sqrt[4]{x} \qquad -\sqrt[5]{-x}=\sqrt[5]{x}$

133.  $\sqrt[6]{-x}=-\sqrt[6]{x} \qquad \sqrt[7]{-x}=-\sqrt[7]{x} \qquad -\sqrt[7]{-x}=\sqrt[7]{x} \qquad -\sqrt[6]{-x}=\sqrt[6]{x}$

134. Spiegare perché tutte le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 131 al n. 133 sono vere per  $x=0$ .

135. Indicare i valori dell'indice  $n$  per cui le seguenti uguaglianze sono identità:

$$\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x} \qquad -\sqrt[n]{-x}=\sqrt[n]{x}$$



### Sulle funzioni composte

136. Completare la tabella A e spiegare perché è un'identità l'uguaglianza  $\sqrt{x^2}=|x|$ .
137. Completare la tabella B e spiegare perché se  $x$  è negativo non ha significato l'uguaglianza  $(\sqrt{x})^2=x$ .

Tabella A

$x$	$x^2$	$\sqrt{x^2}$
-1		
1		
-4		
4		
0		

Tabella B

$x$	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})^2$
-1		
1		
-4		
4		
0		

138. Esaminare le funzioni:

$$y=\sqrt{x^2} \qquad y=(\sqrt{x})^2$$

per risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le due formule descrivono due diverse funzioni;
  - spiegare perché la prima funzione coincide con la funzione  $y=|x|$ ;
  - spiegare perché la seconda funzione coincide con la funzione  $y=x$  con dominio l'insieme  $R^+$  dei reali positivi;
  - tracciare il grafico delle due funzioni.
139. Risolvere i seguenti quesiti:
- completare la tabella C;
  - spiegare perché è un'identità l'uguaglianza  $\sqrt[3]{x^3}=x$ .

140. Risolvere i seguenti quesiti:

- completare la tabella D;
- spiegare perché è un'identità l'uguaglianza  $(\sqrt[3]{x})^3=x$ .

Tabella C

$x$	$x^3$	$\sqrt[3]{x^3}$
-1		
1		
-8		
8		
0		

Tabella D

$x$	$\sqrt[3]{x}$	$(\sqrt[3]{x})^3$
-1		
1		
-8		
8		
0		

141. Esaminare le funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x^3} \qquad y=(\sqrt[3]{x})^3$$

per risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché entrambe le funzioni coincidono con la funzione  $y=x$ ;
- tracciare il grafico della funzione.

142. Esaminare le funzioni:

$$y=\sqrt[5]{x^5} \qquad y=(\sqrt[5]{x})^5$$

per risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché entrambe le funzioni coincidono con la funzione  $y=x$ ;
- tracciare il grafico della funzione.

143. A partire dalle funzioni:

$$y = \sqrt[4]{x^4} \qquad y = (\sqrt[4]{x})^4$$

risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le due formule descrivono due diverse funzioni;
- spiegare perché la prima funzione coincide con la funzione  $y=|x|$ ;
- spiegare perché la seconda funzione coincide con la funzione  $y=x$  con dominio l'insieme  $R^+$  dei reali positivi;
- tracciare il grafico delle due funzioni.

144. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono identità solo se  $n$  è dispari:

$$\sqrt[n]{x^n} = x \qquad (\sqrt[n]{x})^n = x \qquad \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n$$

145. A partire dalle uguaglianze:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad (\sqrt{x})^2 = x \qquad \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$$

risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le uguaglianze **non** sono identità;
- indicare almeno tre valori di  $x$  per cui le uguaglianze sono false;
- indicare almeno tre valori di  $x$  per cui le uguaglianze sono vere.

146. Ripetere l'esercizio 145 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[4]{x^4} = x \qquad (\sqrt[4]{x})^4 = x \qquad \sqrt[4]{x^4} = (\sqrt[4]{x})^4$$

## Sulle funzioni $y=ax^2$

### Trasformare con affinità la parabola $y=x^2$

147. Disegnare sul piano cartesiano la parabola d'equazione  $y=x^2$ , indicando le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria. Operare l'affinità descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Disegnare la curva trasformata, indicandone le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria.

148. Ripetere l'esercizio 147 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

149. Ripetere l'esercizio 147 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

- 150.** Trasformare la parabola  $y=x^2$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

Si ottengono parabole sempre più «strette» o sempre più «larghe»?

- 151.** Ripetere l'esercizio 150 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

- 152.** Trasformare la parabola  $y=x^2$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-2y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-3y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-4y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

Si ottengono parabole sempre più «strette» o sempre più «larghe»?

Si ottengono parabole con la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso?

- 153.** Ripetere l'esercizio 152 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{4}y \end{cases}$$

### Disegnare parabole d'equazione $y=ax^2$

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **154** al n. **158** e risolvere i seguenti quesiti:

- riconoscere quali equazioni rappresentano parabole con il vertice nell'origine O;
- tracciare il grafico delle corrispondenti parabole.

**154.**  $y=3x^2$

$y^2=3x^2$

$y=\frac{3}{2x^2}$

$y=\frac{3}{2}x^2$

**155.**  $y=\frac{1}{4}x$

$y=\frac{1}{4}x^2$

$y=\frac{1}{4x^2}$

$y=-\frac{1}{4}x^2$

**156.**  $y=-2x^2$

$y^2=-2x^2$

$y=-\frac{2}{3}x^2$

$y=-\frac{2}{3x^2}$

**157.**  $y=\frac{5}{4}x^2$

$y=-\frac{5}{4}x^2$

$y=\frac{5}{4}x$

$y=-\frac{5}{4}x^3$

**158.**  $y=\sqrt{3x^2}$

$y=\sqrt{3}x^2$

$y=\sqrt{\frac{3}{4}x^2}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

### Trasformare con affinità l'iperbole $y = \frac{1}{x}$

159. Disegnare l'iperbole d'equazione  $y = \frac{1}{x}$ , indicandone gli asintoti.

Operare l'affinità descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Disegnare la curva trasformata, indicandone gli asintoti.

160. Ripetere l'esercizio 159 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

161. Ripetere l'esercizio 159 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

162. Trasformare l'iperbole  $y = \frac{1}{x}$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

I)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$

II)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases}$

III)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 4y \end{cases}$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

163. Ripetere l'esercizio 162 a partire dalle seguenti affinità:

I)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$

II)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$

III)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases}$

164. Trasformare l'iperbole  $y = \frac{1}{x}$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

I)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$

II)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -3y \end{cases}$

III)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4y \end{cases}$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

165. Ripetere l'esercizio 164 a partire dalle seguenti affinità:

I)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$

II)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{3}y \end{cases}$

III)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}$

### Disegnare iperboli d'equazione $y = \frac{k}{x}$

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 166 al n. 170 e risolvere i seguenti quesiti:

- riconoscere quali equazioni rappresentano iperboli con gli assi cartesiani come asintoti;
- tracciare il grafico delle corrispondenti iperboli.

166.  $y = \frac{2}{x}$

$y = \frac{2}{x^2}$

$y = \frac{1}{2x}$

$y = \frac{x}{2}$

167.	$y = -\frac{3}{x}$	$y = -\frac{3x}{4}$	$y = -\frac{3}{4x}$	$y = -\frac{3}{4}x$
168.	$y = -\frac{1}{2x}$	$y = \frac{1}{2x}$	$y^2 = \frac{1}{2x}$	$y = -\frac{1}{2x^2}$
169.	$y = -\frac{4}{3x}$	$y = \frac{4}{3x}$	$y = \frac{4}{x}$	$y = -\frac{1}{3x}$
170.	$y = \frac{\sqrt{3}}{x}$	$y = \sqrt{\frac{3}{x}}$	$y = \frac{1}{\sqrt{3x}}$	$y = \frac{1}{\sqrt{3x}}$

**Collegamento col paragrafo precedente:**

**trasformare con affinità le funzioni  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt[3]{x}$**

171. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y = \sqrt{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

- operare le trasformazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;
- tracciare il grafico delle funzioni trasformate;
- confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$
---	--	---	--

172. Dopo aver svolto l'esercizio 171, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt{x}$  in  $y' = n\sqrt{x'}$ ;

- spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è sempre l'insieme  $R^+$  dei numeri reali positivi;
- descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$n > 1$$

$$0 < n < 1$$

$$n < 0$$

173. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y = \sqrt{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

- operare le trasformazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;
- tracciare il grafico delle funzioni trasformate;
- confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$
---	--	---	--

174. Dopo aver svolto l'esercizio 173, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt{x}$  in  $y' = \sqrt{\frac{x'}{m}}$ ;

- spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è:
  - l'insieme  $R^+$  dei numeri reali positivi se è dato  $m > 0$ ;
  - l'insieme  $R^-$  dei numeri reali negativi se è dato  $m < 0$ ;
- descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$m > 1$$

$$0 < m < 1$$

$$m < 0$$



175. Trasformare la funzione  $y=\sqrt{x}$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=4y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

176. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

177. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

178. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=4y \end{cases}$$

179. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{4}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=-\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=-\frac{1}{4}x \\ y'=-\frac{1}{4}y \end{cases}$$

180. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{4}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=-4x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=-4x \\ y'=-\frac{1}{4}y \end{cases}$$

181. Ripetere l'esercizio 175 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=-4y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=-\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=-\frac{1}{4}x \\ y'=-4y \end{cases}$$

182. Dopo aver svolto gli esercizi 175-181, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=ny \end{cases}$$

trasforma  $y=\sqrt{x}$  in  $y'=n\sqrt{\frac{x'}{m}}$ ;

b. spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è:

- l'insieme  $R^+$  dei numeri reali positivi se è dato  $m>0$ ;
- l'insieme  $R^-$  dei numeri reali negativi se è dato  $m<0$ ;

183. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y=\sqrt[3]{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. operare le trasformazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;
- b. tracciare il grafico delle funzioni trasformate;
- c. confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-\frac{1}{2}y \end{cases}$$

**184.** Dopo aver svolto l'esercizio 183, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt[n]{x}$  in  $y' = n \sqrt[n]{x'}$ ;

b. spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è sempre l'insieme  $R$  dei numeri reali;

c. descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$n > 1$$

$$0 < n < 1$$

$$n < 0$$

**185.** Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  indicandone il dominio.

a. operare le trasformazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;

b. tracciare il grafico delle funzioni trasformate;

c. confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$$

**186.** Dopo aver svolto l'esercizio 185, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $y' = \sqrt[3]{\frac{x'}{m}}$ ;

b. spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è sempre l'insieme  $R$  dei numeri reali;

c. descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$m > 1$$

$$0 < m < 1$$

$$m < 0$$

**187.** Trasformare la funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = 8y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = 8x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = 8x \\ y' = 8y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

**188.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{8}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = \frac{1}{8}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = \frac{1}{8}x \\ y' = \frac{1}{8}y \end{cases}$$

**189.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{8}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = 8x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = 8x \\ y' = \frac{1}{8}y \end{cases}$$

**190.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = 8y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = \frac{1}{8}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = \frac{1}{8}x \\ y' = 8y \end{cases}$$

**191.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{8}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = -\frac{1}{8}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = -\frac{1}{8}x \\ y' = -\frac{1}{8}y \end{cases}$$

**192.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{8}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = -8x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = -8x \\ y' = -\frac{1}{8}y \end{cases}$$

**193.** Ripetere l'esercizio 187 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = -8y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x' = -\frac{1}{8}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x' = -\frac{1}{8}x \\ y' = -8y \end{cases}$$

**194.** Dopo aver svolto gli esercizi 187-193, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $y' = n \sqrt[3]{\frac{x'}{m}}$ ;

b. spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è sempre l'insieme  $R$  dei numeri reali.

Dopo aver svolto gli esercizi 182 e 194, esaminare le coppie di funzioni assegnate negli esercizi dal n. **195** al n. **210** e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché sono differenti le funzioni di ogni coppia;

b. tracciare il grafico di ogni funzione.

**195.**  $y = 2\sqrt{x}$

$y = \sqrt{2x}$

**196.**  $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$y = \frac{\sqrt{x}}{2}$

**197.**  $y = -2\sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{-x}$

**198.**  $y = -\sqrt{2x}$

$y = \sqrt{-2x}$

**199.**  $y = 2\sqrt{2x}$

$y = 4\sqrt{x}$

**200.**  $y = 2\sqrt{2x}$

$y = \sqrt{4x}$

**201.**  $y = 2\sqrt{\frac{x}{2}}$

$y = \sqrt{x}$

**202.**  $y = \sqrt{x}$

$y = \frac{\sqrt{2x}}{2}$

**203.**  $y = 3\sqrt[3]{x}$

$y = \sqrt[3]{3x}$

**204.**  $y = \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$

$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$

**205.**  $y = -3\sqrt[3]{x}$

$y = \sqrt[3]{-3x}$

**206.**  $y = -\sqrt[3]{3x}$

$y = 3\sqrt[3]{-x}$

**207.**  $y = 4\sqrt[3]{2x}$

$y = 8\sqrt[3]{x}$

**208.**  $y = 2\sqrt[3]{4x}$

$y = \sqrt[3]{8x}$

**209.**  $y = 3\sqrt[3]{\frac{x}{3}}$

$y = \sqrt[3]{x}$

**210.**  $y = \sqrt[3]{x}$

$y = \frac{\sqrt[3]{3x}}{3}$

## Sull'ellisse

**Trasformare con affinità la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=1$**

- 211.** Disegnare sul piano cartesiano la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=1$ , indicando le coordinate del centro e la lunghezza del raggio.  
Operare l'affinità descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=y \end{cases}$$

Disegnare l'ellisse ottenuta, indicandone le coordinate del centro e la lunghezza dei semiassi.

- 212.** Ripetere l'esercizio 211 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$$

- 213.** Ripetere l'esercizio 211 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x'=4x \\ y'=3y \end{cases}$$

- 214.** Trasformare la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=1$  con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato, descrivendone la lunghezza dei semiassi.

- 215.** Ripetere l'esercizio 214 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=3x \\ y'=\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=2x \\ y'=\frac{3}{4}y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{5}{3}y \end{cases}$$

- 216.** Ripetere l'esercizio 214 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=\frac{5}{2}x \\ y'=2y \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=\frac{8}{3}x \\ y'=2y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=\frac{9}{4}x \\ y'=2y \end{cases}$$

- 217.** Spiegare perché un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rappresenta sempre un'ellisse che ha il centro in O e i semiassi lunghi  $a$  e  $b$ .

Dopo aver risolto l'esercizio 217, scrivere le equazioni delle ellissi che hanno centro in O e i semiassi di lunghezza assegnata negli esercizi dal n. 218 al n. 229.

**218.**  $a=3$

$b=1$

$$\left[ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \right]$$

219.  $a=4$   $b=3$   $[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1]$
220.  $a=1$   $b=\frac{1}{2}$   $[x^2 + 4y^2 = 1]$
221.  $a=1$   $b=\frac{1}{3}$   $[x^2 + 9y^2 = 1]$
222.  $a=\frac{5}{2}$   $b=\frac{3}{2}$   $[\frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1]$
223.  $a=\frac{2}{3}$   $b=\frac{1}{3}$   $[\frac{9x^2}{4} + 9y^2 = 1]$
224.  $a=\sqrt{2}$   $b=1$   $[\frac{x^2}{2} + y^2 = 1]$
225.  $a=\sqrt{5}$   $b=\sqrt{3}$   $[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1]$
226.  $a=1$   $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$   $[x^2 + 2y^2 = 1]$
227.  $a=1$   $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$   $[x^2 + 3y^2 = 1]$
228.  $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$   $b=\sqrt{\frac{3}{2}}$   $[\frac{2x^2}{5} + \frac{2y^2}{3} = 1]$
229.  $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$   $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$   $[\frac{4x^2}{5} + \frac{4y^2}{3} = 1]$

**Disegnare ellissi d'equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$**

230. Esaminare le seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

$$x^2 + 9y^2 = 9$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché le due equazioni rappresentano la stessa ellisse con centro in O e i semiassi sugli assi cartesiani;
- determinare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse;
- tracciare il grafico dell'ellisse.

231. Ripetere l'esercizio 230 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

232. Ripetere l'esercizio 230 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{2x^2}{5} + \frac{2y^2}{3} = 1$$

$$6x^2 + 10y^2 = 15$$



Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 233 al n. 239 e risolvere i seguenti quesiti:

- riconoscere quali equazioni rappresentano ellissi con il centro nell'origine O e gli assi sugli assi cartesiani;
- tracciare il grafico delle corrispondenti ellissi, determinandone la lunghezza dei semiassi.

233.	$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9} + y^3 = 1$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
234.	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y}{4} = 1$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
235.	$x^2 + 4y^2 = 1$	$x^2 - 4y^2 = 1$	$x^2 + 4y^2 = 4$	$x^2 + 4y = 4$
236.	$x^2 - 9y^2 = 1$	$x^2 + 9y^2 = 1$	$x^2 + 9y^2 = 9$	$x^2 + 9y = 9$
237.	$4x^2 + 25y^2 = 100$	$4x^2 + 25y^3 = 100$	$4x^2 - 25y^2 = 100$	$4x^2 + 25y^2 = 1$
238.	$x^2 + 3y^2 = 1$	$x^2 + 3y^2 = 3$	$x + 3y = 3$	$x^4 + 3y^4 = 1$
239.	$6x^2 + 10y^2 = 1$	$6x^2 + 10y = 15$	$6x^2 - 10y^2 = 15$	$6x^2 + 10y^2 = 15$

## Sulle parabole d'equazione $y = ax^2 + bx + c$

### Traslare parabole d'equazione $y = ax^2$

240. Disegnare sul piano cartesiano la parabola d'equazione  $y = 2x^2$ , indicando le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria. Operare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- disegnare la curva trasformata, indicandone le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria;
  - scrivere l'equazione della curva trasformata.  $[y' = 2x'^2 - 12x' + 19]$
241. Ripetere l'esercizio 240 a partire dalla seguente affinità:
- $$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad [y' = 2x'^2 + 12x' + 19]$$
242. Ripetere l'esercizio 240 a partire dalla seguente affinità:
- $$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases} \quad [y = 2x'^2 - 12x' + 17]$$
243. Ripetere l'esercizio 240 a partire dalla seguente affinità:
- $$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 1 \end{cases} \quad [y = 2x'^2 + 12x' + 17]$$

244. Trasformare la parabola  $y=-2x^2$  con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+3 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- disegnare le curve trasformate, indicandone le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria;
- scrivere le equazioni delle curve trasformate.

245. Ripetere l'esercizio 244 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-3 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y-3 \end{cases}$$

246. Trasformare la parabola  $y=\frac{1}{2}x^2$  con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+4 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+4 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- disegnare le curve trasformate, indicandone le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria;
- scrivere le equazioni delle curve trasformate.

247. Ripetere l'esercizio 246 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-4 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-4 \end{cases}$$

248. Disegnare sul piano cartesiano le parabole che hanno le seguenti equazioni:

$$y=\frac{3}{4}x^2$$

$$y=\frac{4}{3}x^2$$

$$y=-\frac{3}{4}x^2$$

Operare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x-\frac{1}{2} \\ y'=y+\frac{2}{3} \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- disegnare ogni curva trasformata, indicandone le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria;
- scrivere l'equazione di ogni curva trasformata.

249. Ripetere l'esercizio 248 a partire dalle seguenti affinità:

$$\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y-\frac{2}{3} \end{cases}$$

250. Ripetere l'esercizio 248 a partire dalle seguenti affinità:

$$\begin{cases} x'=x-\frac{3}{2} \\ y'=y+\frac{5}{4} \end{cases}$$

- 251.** Indicare quali traslazioni si effettuano per passare dalla parabola d'equazione  $y=x^2$  alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=x^2-1$$

$$y=(x-1)^2$$

$$y=(x-1)^2-1$$

Determinare le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria di ogni parabola traslata.

- 252.** Indicare quali traslazioni si effettuano per passare dalla parabola d'equazione  $y=4x^2$  alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=4x^2+3$$

$$y=4(x+3)^2$$

$$y=4(x+3)^2+3$$

Determinare le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria di ogni parabola traslata.

- 253.** Indicare quali traslazioni si effettuano per passare dalla parabola d'equazione  $y=-4x^2$  alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=-4x^2+\frac{1}{2}$$

$$y=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

Determinare le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria di ogni parabola traslata.

- 254.** Indicare quali traslazioni si effettuano per passare dalla parabola d'equazione  $y=\frac{1}{4}x^2$  alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=\frac{1}{4}x^2-2$$

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2$$

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-2$$

Determinare le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria di ogni parabola traslata.

### Disegnare parabole d'equazione $y=ax^2+bx+c$

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 255 al n. 262 e risolvere i seguenti quesiti:

- riconoscere quali equazioni rappresentano parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$ ;
- determinare le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria di ogni parabola;
- tracciare il grafico di ogni parabola, seguendo le indicazioni del testo (p. 274).

**255.**  $y=x^2-2$

$y=-x^2+2$

$y=-x^2-2$

$y=x-2$

**256.**  $y=x^2-2x$

$y=-x^2+2x$

$y^2=-x^2-2$

$y=-x^2-2x$

**257.**  $y=x^2+4x+4$

$y=-4x^3+4x-1$

$y=-4x^2+4x-1$

$y=-x^2+6x-9$

**258.**  $y=x^2-4x+3$

$xy=x^2+3x-2$

$y=-4x^2+8x-3$

$y=-x^2+6x-7$

**259.**  $y=-\frac{1}{4}x^2+x-2$

$y=\frac{1}{2}x^2+x-1$

$y=\frac{1}{2}x-1$

$y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

**260.**  $y=-\frac{3}{2}x^2+3x-2$

$y=3x^2-\frac{3}{2}x+1$

$y=3x^2-\frac{3}{2x}+1$

$y=\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{3}{2}$

**261.**  $y=x^2+\sqrt{2}x$

$y=-x^2+\sqrt{2}$

$y=x^2+\sqrt{2}x$

$y=-\sqrt{2}x^2+2x-\sqrt{2}$

**262.**  $y=x^2-2\sqrt{3}x+3$

$y=-x^2+2\sqrt{3}$

$y=-x^2+2\sqrt{3}x$

$y=-x^2+2\sqrt{3}x$

**Collegamenti con il capitolo quinto: traslare circonferenze d'equazione  $x^2+y^2=r^2$**

263. Disegnare sul piano cartesiano la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=4$ , indicando le coordinate del centro e la lunghezza del raggio. Operare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+1 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. disegnare la curva trasformata, indicandone le coordinate del centro;  
b. scrivere l'equazione della curva trasformata.  $[x'^2+y'^2-6x-2y+6=0]$

264. Ripetere l'esercizio 263 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y+1 \end{cases} \quad [x'^2+y'^2+6x-2y+6=0]$$

265. Ripetere l'esercizio 263 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases} \quad [x'^2+y'^2-6x+2y+6=0]$$

266. Ripetere l'esercizio 263 a partire dalla seguente affinità:

$$\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y-1 \end{cases} \quad [x'^2+y'^2+6x+2y+6=0]$$

267. Disegnare sul piano cartesiano la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=2$  e operare tre traslazioni a piacere; disegnare le curve traslate e scriverne l'equazione.

268. Dopo aver svolto almeno gli esercizi 263 e 267, considerare la circonferenza d'equazione  $x^2+y^2=r^2$  e operare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della curva traslata.

269. Dopo aver svolto l'esercizio 268, verificare che una circonferenza traslata ha il centro  $C(p; q)$ , il raggio lungo  $r$  e l'equazione che è sempre del tipo:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

con le lettere  $a, b, c$  che hanno il seguente significato:

$$a=-2p \quad b=-2q \quad c=p^2+q^2-r^2$$

**Collegamento col paragrafo 7:**

**traslare le funzioni  $y=\sqrt{x}$  e  $y=\sqrt[3]{x}$**

270. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y=\sqrt{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. operare le traslazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;  
b. tracciare il grafico delle funzioni trasformate.

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$$

271. Dopo aver svolto l'esercizio 270, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+q \end{cases}$$

trasforma  $y=\sqrt{x}$  in  $y'=\sqrt{x'}+q$ ;

b. descrivere il dominio delle funzioni traslate;

c. descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$q>0$$

$$q<0$$

272. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y=\sqrt{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

a. operare le traslazioni seguenti e descrivere le funzioni trasformate;

b. tracciare il grafico delle funzioni trasformate;

c. confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$$

273. Dopo aver svolto l'esercizio 272, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y \end{cases}$$

trasforma  $y=\sqrt{x}$  in  $y'=\sqrt{x'-p}$ ;

b. descrivere il dominio delle funzioni trasformate;

c. descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$p>0$$

$$p<0$$

274. Trasformare la funzione  $y=\sqrt{x}$  con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I) } \begin{cases} x'=x \\ y'=y+4 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x'=x+4 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III) } \begin{cases} x'=x+4 \\ y'=y+4 \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.

275. Ripetere l'esercizio 274 a partire dalle seguenti traslazioni:

$$\text{I) } \begin{cases} x'=x \\ y'=y-4 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\text{III) } \begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y-4 \end{cases}$$

276. Dopo aver svolto gli esercizi 274-275, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

trasforma  $y=\sqrt{x}$  in  $y'=\sqrt{x'-p}+q$ ;

b. descrivere il dominio delle funzioni traslate.

277. Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y=\sqrt[3]{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

a. operare le traslazioni seguenti e descrivere le funzioni traslate;

b. tracciare il grafico delle funzioni traslate.

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-3 \end{cases}$$



- 278.** Dopo aver svolto l'esercizio 277, risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:
 
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases}$$
 trasforma  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $y' = \sqrt[3]{x'} + q$ ;
  - spiegare perché il dominio delle funzioni trasformate è sempre l'insieme  $R$  dei numeri reali;
  - descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:
 
$$q > 0 \qquad q < 0$$

- 279.** Disegnare sul piano cartesiano la funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  indicandone il dominio. Risolvere i seguenti quesiti:

- operare le traslazioni seguenti e descrivere le funzioni traslate;
- tracciare il grafico delle funzioni trasformate;
- confrontare le formule e i grafici ottenuti.

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}$$

- 280.** Dopo aver svolto l'esercizio 279, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $y' = \sqrt[3]{x' - p}$ ;

- descrivere il dominio delle funzioni trasformate;
- descrivere il grafico delle funzioni trasformate distinguendo i casi:

$$p > 0$$

$$p < 0$$

- 281.** Traslare la funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I) } \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 8 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III) } \begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y + 8 \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve traslate nell'ordine indicato.

- 282.** Ripetere l'esercizio 281 a partire dalle seguenti affinità:

$$\text{I) } \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 8 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{III) } \begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y - 8 \end{cases}$$

- 283.** Dopo aver svolto gli esercizi 281-282, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

trasforma  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $y' = \sqrt[3]{x' - p} + q$ ;

- descrivere il dominio delle funzioni traslate.

Dopo aver svolto gli esercizi 273 e 283, esaminare le coppie di funzioni assegnate negli esercizi dal n. 284 al n. 299 e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché sono differenti le funzioni di ogni coppia;
- tracciare il grafico di ogni funzione.

**284.**  $y = \sqrt{x+2}$

$y = \sqrt{x+2}$

**285.**  $y = \sqrt{x-2}$

$y = \sqrt{x-2}$

**286.**  $y = \sqrt{x+4}$

$y = \sqrt{x+4}$

**287.**  $y = \sqrt{x-4}$

$y = \sqrt{x-4}$

- |      |                     |                   |      |                     |                     |
|------|---------------------|-------------------|------|---------------------|---------------------|
| 288. | $y=\sqrt{x+4}+4$    | $y=\sqrt{x+8}$    | 289. | $y=\sqrt{x+4}+4$    | $y=\sqrt{x+8}$      |
| 290. | $y=\sqrt{x-4}+4$    | $y=\sqrt{x}$      | 291. | $y=\sqrt{x}$        | $y=\sqrt{x+4}-4$    |
| 292. | $y=\sqrt[3]{x+1}$   | $y=\sqrt[3]{x+1}$ | 293. | $y=\sqrt[3]{x-1}$   | $y=\sqrt[3]{x-1}$   |
| 294. | $y=\sqrt[3]{x+8}$   | $y=\sqrt[3]{x+8}$ | 295. | $y=\sqrt[3]{x-8}$   | $y=\sqrt[3]{x-8}$   |
| 296. | $y=\sqrt[3]{x+1}+1$ | $y=\sqrt[3]{x+2}$ | 297. | $y=\sqrt[3]{x+1}+1$ | $y=\sqrt[3]{x+2}$   |
| 298. | $y=\sqrt[3]{x-1}+1$ | $y=\sqrt[3]{x}$   | 299. | $y=\sqrt[3]{x}$     | $y=\sqrt[3]{x+1}-1$ |

## Sulle trasformazioni proiettive

- 300.** Sul piano  $\pi$  è disegnato il triangolo che ha i seguenti vertici:  
 $A(4; 4)$   $B(3; 1)$   $C(1; 2)$   
 Il triangolo ABC viene proiettato su  $\pi'$  da un punto S che dista  $d=4$  da  $\pi$  e  $d'=4$  da  $\pi'$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni della trasformazione che proietta  $\pi$  su  $\pi'$ ;  
 b. determinare le coordinate dei vertici A', B', C' del triangolo trasformato;  
 c. disegnare il triangolo A'B'C'.
- 301.** Sul piano  $\pi$  è disegnato il rettangolo che ha i seguenti vertici:  
 $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$   $B(1; 1)$   $C(-1; 1)$   $D\left(-1; \frac{1}{2}\right)$   
 Il rettangolo ABCD viene proiettato su  $\pi'$  da un punto S che dista  $d=1$  da  $\pi$  e  $d'=2$  da  $\pi'$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni della trasformazione che proietta  $\pi$  su  $\pi'$ ;  
 b. determinare le coordinate dei vertici A', B', C', D' del quadrilatero trasformato e disegnare il quadrilatero A'B'C'D';  
 c. spiegare perché il quadrilatero trasformato è un trapezio e stabilire in quale punto si incontrano i prolungamenti dei lati obliqui.
- 302.** Ripetere l'esercizio 301 proiettando il rettangolo da un punto S che dista  $d=1$  da  $\pi$  e  $d'=4$  da  $\pi'$ .
- 303.** Ripetere l'esercizio 301 proiettando il rettangolo da un punto S che dista  $d=2$  da  $\pi$  e  $d'=2$  da  $\pi'$ .
- 304.** Disegnare sul piano  $\pi$  delle rette parallele all'asse delle  $y$  come le seguenti:  
 $x=1$   $x=-1$   $x=2$   $x=-2$   
 Le rette vengono proiettate su  $\pi'$  da un punto S che dista  $d=1$  da  $\pi$  e  $d'=3$  da  $\pi'$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni della trasformazione che proietta  $\pi$  su  $\pi'$ ;  
 b. determinare le equazioni delle rette trasformate delle rette date;  
 c. disegnare le rette trasformate su  $\pi'$ .
- 305.** Disegnare sul piano  $\pi$  delle rette parallele all'asse delle  $x$  come le seguenti:  
 $y=1$   $y=2$   $y=3$   $y=4$   
 Le rette vengono proiettate su  $\pi'$  da un punto S che dista  $d=1$  da  $\pi$  e  $d'=3$  da  $\pi'$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scrivere le equazioni della trasformazione che proietta  $\pi$  su  $\pi'$ ;  
 b. determinare le equazioni delle rette trasformate delle rette date;  
 c. disegnare le rette trasformate su  $\pi'$ .

## Parabole ed equazioni di 2° grado

Gli esercizi dal n. 1 al n. 32 richiedono di:

- confrontare e risolvere equazioni di 1° e 2° grado;
- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista grafico.

L'obiettivo fondamentale di questi esercizi è di prevenire la confusione fra equazioni di 1° grado ed equazioni di 2° grado incomplete.

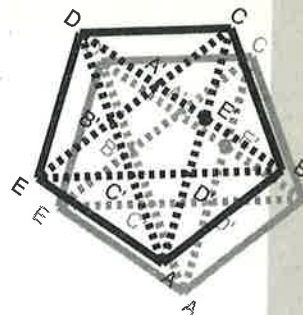
1. Esaminare le seguenti equazioni:

$$4x-9=0$$

$$4x^2-9=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare quale equazione è di 1° grado e quale è di 2° grado;
  - determinare le soluzioni di ogni equazione;
  - interpretare graficamente le soluzioni ottenute;
  - spiegare perché la prima equazione ha una sola soluzione, mentre la seconda equazione ha due soluzioni.
2. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$9x-1=0 \qquad 9x^2-1=0$$
3. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$x-9=0 \qquad x^2-9=0$$
4. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$x-1=0 \qquad x^2-1=0$$
5. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$3x-1=0 \qquad 3x^2-1=0$$
6. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$x-3=0 \qquad x^2-3=0$$
7. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$5x-3=0 \qquad 5x^2-3=0$$
8. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$7x-8=0 \qquad 7x^2-8=0$$
9. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$\frac{3}{2}x-1=0 \qquad \frac{3}{2}x^2-1=0$$
10. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}=0 \qquad \frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}=0$$
11. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$-\frac{3}{2}x+2=0 \qquad -\frac{3}{2}x^2+2=0$$
12. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:
- $$-\frac{4}{5}x+\frac{5}{4}=0 \qquad -\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{4}=0$$



13. Esaminare le seguenti equazioni:

$$16x=0$$

$$16x^2=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare quale equazione è di 1° grado e quale è di 2° grado;
- determinare le soluzioni di ogni equazione;
- interpretare graficamente le soluzioni ottenute;
- spiegare perché si dice che la prima equazione ha una sola soluzione, mentre la seconda equazione ha due soluzioni coincidenti.

14. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{1}{4}x=0$$

$$\frac{1}{4}x^2=0$$

15. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{9}{4}x=0$$

$$\frac{9}{4}x^2=0$$

16. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$3x=0$$

$$3x^2=0$$

17. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{1}{3}x=0$$

$$\frac{1}{3}x^2=0$$

18. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-3x=0$$

$$-3x^2=0$$

19. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{1}{4}x=0$$

$$-\frac{1}{4}x^2=0$$

20. Ripetere l'esercizio 13 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{5}{4}x=0$$

$$-\frac{5}{4}x^2=0$$

21. Esaminare le seguenti equazioni:

$$4x+9=0$$

$$4x^2+9=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- indicare quale equazione è di 1° grado e quale è di 2° grado;
- determinare le soluzioni di ogni equazione;
- interpretare graficamente i risultati ottenuti;
- spiegare perché la prima equazione ha una sola soluzione, mentre la seconda equazione non ha soluzioni reali.

22. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$9x+1=0$$

$$9x^2+1=0$$

23. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x+9=0$$

$$x^2+9=0$$

24. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x+1=0$$

$$x^2+1=0$$

25. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$3x+1=0$$

$$3x^2+1=0$$

26. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x+3=0$$

$$x^2+3=0$$

27. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$5x+3=0$$

$$5x^2+3=0$$

28. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$7x+8=0$$

$$7x^2+8=0$$

29. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x-1=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2-1=0$$

30. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}=0$$

31. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x-2=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2-2=0$$

32. Ripetere l'esercizio 21 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}=0$$

$$-\frac{4}{5}x^2-\frac{5}{4}=0$$

*Gli esercizi dal n. 33 al n. 44 richiedono di:*

*- confrontare e risolvere equazioni di 2° grado;*

*- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista grafico.*

*L'obiettivo fondamentale di questi esercizi è di prevenire la confusione fra le equazioni di 2° grado incomplete che hanno due soluzioni reali e quelle che non hanno soluzioni reali.*

33. Esaminare le seguenti equazioni:

$$4x^2-9=0$$

$$4x^2+9=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare le soluzioni di ogni equazione;

b. interpretare graficamente le soluzioni ottenute;

c. spiegare perché la prima equazione ha due soluzioni reali, mentre la seconda equazione non ha soluzioni reali.

34. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$9x^2-1=0$$

$$9x^2+1=0$$

35. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2-9=0$$

$$x^2+9=0$$

36. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2-1=0$$

$$x^2+1=0$$

37. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$3x^2-1=0$$

$$3x^2+1=0$$

38. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2-3=0$$

$$x^2+3=0$$

39. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$5x^2-3=0$$

$$5x^2+3=0$$

40. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$7x^2-8=0$$

$$7x^2+8=0$$



41. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x^2-1=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2+1=0$$

42. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}=0$$

43. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{3}{2}x^2-2=0$$

$$-\frac{3}{2}x^2+2=0$$

44. Ripetere l'esercizio 33 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-\frac{4}{5}x^2-\frac{5}{4}=0$$

$$-\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{4}=0$$

## Sulla formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

### Riflettere sulla formula risolutiva

Esaminare le parabole assegnate negli esercizi dal n. 45 al n. 64 e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare l'ascissa  $p$  e l'ordinata  $q$  del vertice  $V$  e disegnare la parabola;
- scrivere l'equazione della parabola nella forma  $y=a(x-p)^2+q$ ;
- basandosi sul risultato del quesito (b) risolvere l'equazione:

$$a(x-p)^2+q=0$$

- interpretare graficamente i risultati ottenuti.

45.  $y=x^2-4x+3$

46.  $y=x^2+4x+3$

47.  $y=x^2-2x-3$

48.  $y=x^2+2x-3$

49.  $y=x^2-6x$

50.  $y=x^2+6x$

51.  $y=2x^2-7x+3$

52.  $y=2x^2+7x+3$

53.  $y=4x^2-5x+1$

54.  $y=4x^2+5x+1$

55.  $y=x^2-3x+1$

56.  $y=x^2+3x+1$

57.  $y=2x^2-x-1$

58.  $y=2x^2+x-1$

59.  $y=\frac{1}{2}x^2+x$

60.  $y=-\frac{1}{2}x^2+x$

61.  $y=-\frac{3}{4}x^2+3x+3$

62.  $y=-\frac{3}{4}x^2-3x+3$

63.  $y=-\frac{2}{5}x^2+x-5$

64.  $y=-\frac{2}{5}x^2+x-1$

## Applicare la formula risolutiva

Gli esercizi dal n. 65 al n. 90 richiedono di:

- individuare i coefficienti di un'equazione di 2° grado;
- applicare la formula risolutiva per risolvere equazioni di 2° grado che hanno tutte e due le soluzioni razionali;
- verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.

65. Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga:

Equazione	Coefficienti	Formula risolutiva	Soluzioni	Verifica
$3x^2+7x+2=0$	$a=3; b=7; c=2$	$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} =$ $= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6}$	$x_1 = \frac{-7-5}{6} = -2$ $x_2 = \frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3}$	$3(-2)^2 + 7(-2) + 2 = 0$ $3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$
$3x^2-7x+2=0$				
$-4x^2+5x-1=0$				
$4x^2-5x+1=0$				

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 66 al n. 90 e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare il valore dei coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
- risolvere l'equazione valendosi della formula risolutiva;
- verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.

- |                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| 66. $x^2+5x+4=0$  | $-x^2-5x-4=0$   |
| 67. $x^2-5x+4=0$  | $-x^2+5x-4=0$   |
| 68. $x^2-5x+6=0$  | $-x^2+5x-6=0$   |
| 69. $2x^2-5x+3=0$ | $-3x^2+5x-2=0$  |
| 70. $x^2-x-12=0$  | $12x^2+x-1=0$   |
| 71. $-2x^2+x+6=0$ | $6x^2+x-2=0$    |
| 72. $4x^2-x-3=0$  | $-3x^2-x+4=0$   |
| 73. $x^2+2x-15=0$ | $15x^2-2x-1=0$  |
| 74. $3x^2+2x-5=0$ | $-5x^2-2x+3=0$  |
| 75. $x^2+3x-10=0$ | $-10x^2-3x+1=0$ |
| 76. $5x^2-3x-2=0$ | $-2x^2+3x+5=0$  |

77.	$8x^2+10x-3=0$	$8x^2-10x+3=0$
78.	$-x^2+10x-24=0$	$-24x^2-10x+1=0$
79.	$5x^2+17x+6=0$	$-6x^2+17x-5=0$
80.	$10x^2-17x+3=0$	$-3x^2-17x-10=0$
81.	$5x^2+17x+6=0$	$-6x^2+17x-5=0$
82.	$-x^2+\frac{1}{2}x+3=0$	$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$
83.	$\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$	$-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x+1=0$
84.	$\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}x-1=0$	$-x^2-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}=0$
85.	$\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{5}x-2=0$	$-5x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$
86.	$\frac{5}{3}x^2-x-\frac{2}{3}=0$	$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}=0$
87.	$2x^2+2,5x-0,75=0$	$1,6x^2-2x+0,6=0$
88.	$-0,5x^2+5x-12=0$	$-6x^2-2,5x+0,25=0$
89.	$x^2+3,4x+1,2=0$	$-1,2x^2+3,4x-1=0$
90.	$x^2-1,7x+0,3=0$	$-0,3x^2-1,7x-1=0$

### Collegamento con il primo e il secondo capitolo

Gli esercizi dal n. 91 al n. 111 richiedono di:

- applicare la formula risolutiva per risolvere equazioni di 2° grado che hanno soluzioni irrazionali;
- dare un valore approssimato delle soluzioni;
- distinguere tra soluzioni approssimate e soluzioni esatte.

91. Esaminare l'equazione:

$$x^2+x-1=0$$

Completare il procedimento indicato qui sotto per risolvere i seguenti quesiti:

- risolvere l'equazione;
- verificare che le soluzioni ottenute siano esatte;
- scrivere il valore approssimato delle soluzioni con una cifra dopo la virgola;
- sostituire a  $x$  le soluzioni approssimate ed esaminare i risultati ottenuti.

**Quesito (a)**

$$x = \frac{-\dots \pm \sqrt{\dots \dots \dots (-1)}}{2 \dots} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**Quesito (b)**

- soluzione  $x_1$ :

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

- soluzione  $x_2$ :

.....

**Quesito (c)**

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cong -1,6$$

$$x_2 = \frac{\dots\dots + \dots\dots}{2} \cong 0,6$$

**Quesito (d)**

- soluzione  $x_1 \cong -1,6$ :  $(-1,6)^2 + (-1,6) - 1 = -0,04$

- soluzione  $x_2 \cong 0,6$ :  $(\dots\dots)^2 + \dots\dots - 1 = \dots\dots$

*Si conclude che le soluzioni esatte dell'equazione sono solo quelle espresse con frazioni e radicali; perciò, quando si sostituisce a  $x$  il valore approssimato di una soluzione, in generale non si ottiene 0.*

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 92 al n. 111 e risolvere i seguenti quesiti:

- risolvere ogni equazione valendosi della formula risolutiva;
- verificare che le soluzioni ottenute siano esatte;
- dare un valore approssimato delle soluzioni;
- sostituire a  $x$  le soluzioni approssimate ed esaminare i risultati ottenuti.

- |      |  |   |
|------|--|---|
| 92.  | $x^2 - x - 1 = 0$                      | $-x^2 + x + 1 = 0$                        |
| 93.  | $x^2 + 2x - 1 = 0$                     | $-x^2 + 2x + 1 = 0$                       |
| 94.  | $2x^2 - 6x + 3 = 0$                    | $-3x^2 + 6x - 2 = 0$                      |
| 95.  | $x^2 + x - 3 = 0$                      | $-3x^2 + x + 1 = 0$                       |
| 96.  | $x^2 + x - 3 = 0$                      | $-3x^2 + x + 1 = 0$                       |
| 97.  | $x^2 + 4x + 2 = 0$                     | $-2x^2 + 4x - 1 = 0$                      |
| 98.  | $x^2 + 3x + 1 = 0$                     | $-x^2 + 3x - 1 = 0$                       |
| 99.  | $x^2 - 6x + 6 = 0$                     | $-6x^2 + 6x - 1 = 0$                      |
| 100. | $3x^2 - 9x + 5 = 0$                    | $-5x^2 + 9x - 3 = 0$                      |
| 101. | $13x^2 - 23x + 9 = 0$                  | $-9x^2 + 23x - 13 = 0$                    |
| 102. | $x^2 - 11x + 25 = 0$                   | $-5x^2 + 11x - 5 = 0$                     |
| 103. | $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 = 0$          | $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 3 = 0$            |
| 104. | $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0$          | $-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$            |
| 105. | $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$          | $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1 = 0$            |
| 106. | $\frac{1}{3}x^2 + x - 3 = 0$           | $-3x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$             |
| 107. | $\frac{3}{5}x^2 - 2x + 1 = 0$          | $-\frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 1 = 0$ |
| 108. | $\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ | $-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{8} = 0$   |

132.	$x^2-9=0$	$x^2+9=0$	$9x^2+x=0$	$9x^2+x-1=0$
133.	$2x^2=0$	$2x^2+x=0$	$2x^2+x-3=0$	$2x^2+3=0$
134.	$-3x^2+2=0$	$-3x^2+2x=0$	$-3x^2=0$	$-3x^2+x+1=0$
135.	$\frac{1}{4}x^2+1=0$	$\frac{1}{4}x^2+x-1=0$	$\frac{1}{4}x^2+x=0$	$\frac{1}{4}x^2=0$
136.	$-\frac{1}{4}x^2+9=0$	$-\frac{9}{4}x^2=0$	$-\frac{1}{4}x^2+9x=0$	$-\frac{1}{4}x^2+9x-80=0$
137.	$\frac{5}{3}x^2+1=0$	$\frac{5}{3}x^2=0$	$\frac{5}{3}x^2=0$	$\frac{5}{3}x^2+x-\frac{3}{5}=0$
138.	$-\frac{4}{3}x^2-3=0$	$-\frac{4}{3}x^2-3x=0$	$-\frac{4}{3}x^2=0$	$-\frac{4}{3}x^2+x+\frac{3}{4}=0$
139.	$1,2x^2-4,8=0$	$4,8x^2=0$	$1,2x^2-4,8x=0$	$1,2x^2-4,8x-0,5=0$
140.	$-0,5x^2=0$	$-0,5x^2+x=0$	$-0,5x^2+x+3,5=0$	$-0,5x^2+0,045=0$
141.	$-1,8x^2-3,6=0$	$3,6x^2=0$	$-1,8x^2-3,6x=0$	$-1,8x^2-3,6x-1,8=0$

### Sulla formula ridotta

Gli esercizi dal n. 142 al n. 158 conducono a valersi della formula ridotta per risolvere equazioni di 2° grado che presentano il coefficiente b multiplo di 2.

142. Completare la tabella seguente come mostrato nella prima riga.

Equazione	Coefficienti	Formula ridotta	Soluzioni
$5x^2+14x+8=0$	$a=5; b=2\cdot 7; c=8$	$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-5\cdot 8}}{5}=\frac{-7\pm 3}{5}$	$x_1=-2$ $x_2=-\frac{4}{5}$
$5x^2-14x+8=0$			
$x^2-16x+64=0$			
$x^2+16x+64=0$			
$4x^2-10x+7=0$			
$7x^2+10x+5=0$			

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 143 al n. 158 e risolvere i seguenti quesiti:

- risolvere ogni equazione scegliendo il procedimento più breve;
- verificare che le soluzioni ottenute siano corrette.

143.	$x^2-8x+15=0$	$x^2+8x+15=0$	$x^2+8x=0$	$x^2+8=0$
144.	$7x^2+2x+5=0$	$7x^2-2x=0$	$7x^2-2x+5=0$	$7x^2-2=0$
145.	$3x^2+10=0$	$3x^2+10x=0$	$3x^2+10x-8=0$	$3x^2-10x+8=0$



146.	$4x^2-8x=0$	$4x^2-8x+3=0$	$4x^2-8=0$	$4x^2+8x+5=0$
147.	$9x^2-12x+4=0$	$9x^2=0$	$9x^2+12x+4=0$	$9x^2+12x=0$
148.	$25x^2-50x+21=0$	$25x^2-50x=0$	$25x^2-50=0$	$25x^2+50x+20=0$
149.	$7x^2+60x+108=0$	$7x^2+60x=0$	$7x^2+108=0$	$7x^2-60x+108=0$
150.	$x^2-30x=0$	$x^2-30x+221=0$	$x^2-30=0$	$x^2+30x+221=0$
151.	$3x^2-20x+32=0$	$3x^2-20x=0$	$3x^2+32=0$	$3x^2-20x+32=0$
152.	$27x^2-84x+60=0$	$27x^2+60=0$	$27x^2+84x+60=0$	$27x^2+84=0$
153.	$75x^2+124=0$	$75x^2+124x=0$	$75x^2+124x+51=0$	$75x^2-124x+51=0$
154.	$\frac{1}{2}x^2-2x+2=0$	$\frac{1}{2}x^2+2=0$	$\frac{1}{2}x^2-2x=0$	$\frac{1}{2}x^2+2x+2=0$
155.	$\frac{1}{3}x^2-4x+3=0$	$\frac{1}{3}x^2+3=0$	$\frac{1}{2}x^2-4x=0$	$\frac{1}{2}x^2+4x+3=0$
156.	$3,5x^2-6,2x+2=0$	$3,5x^2-6,2x=0$	$3,5x^2+6,2x+2=0$	$3,5x^2+2=0$
157.	$1,3x^2+10=0$	$1,3x^2+8,8x+10=0$	$1,3x^2+8,8x=0$	$1,3x^2-8,8x+10=0$
158.	$2,5x^2+5x+2,1=0$	$2,5x^2+5x=0$	$2,5x^2+5=0$	$2,5x^2-5x+2,5=0$

## Risolvere equazioni di 2° grado

### Collegamento con i capitoli 1 e 2

Gli esercizi dal n. 159 al n. 174 conducono a risolvere equazioni di 2° grado che presentano dei radicali nei coefficienti. I calcoli necessari si svolgeranno tenendo presenti le regole esposte nei capitoli 1 e 2.

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 159 al n. 174 e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare le equazioni che si possono risolvere valendosi della formula ridotta;
- risolvere ogni equazione scegliendo il procedimento più breve;
- verificare che le soluzioni ottenute siano corrette.

159.	$x^2-4\sqrt{2}x+6=0$	$x^2-\sqrt{2}x-6=0$	$x^2-\sqrt{2}x=0$
160.	$x^2+\sqrt{3}x+6=0$	$x^2-\sqrt{3}=0$	$x^2+2\sqrt{3}x+3=0$
161.	$5x^2-2\sqrt{10}x+2=0$	$5x^2-2\sqrt{10}x=0$	$5x^2-2\sqrt{10}=0$
162.	$7x^2+2\sqrt{14}x+2=0$	$7x^2+2\sqrt{14}=0$	$7x^2+2\sqrt{14}x=0$
163.	$4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$	$4x^2-4\sqrt{3}x+6=0$	$4x^2-4\sqrt{3}x=0$
164.	$\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}=0$	$\sqrt{2}x^2+4x+\sqrt{2}=0$	$\sqrt{2}x^2+4=0$
165.	$\sqrt{3}x^2+3x+2\sqrt{3}=0$	$\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$	$\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}=0$

166.	$\sqrt{5}x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$	$\sqrt{5}x^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$	$\sqrt{5}x^2 = 0$
167.	$\sqrt{2}x^2 - 2x = 0$	$\sqrt[3]{4}x^2 - 1 = 0$	$\sqrt[4]{6}x^2 = 0$
168.	$\sqrt{5}x^2 + 5x = 0$	$\sqrt[4]{5}x^2 - 1 = 0$	$-\sqrt[3]{7}x^2 - 1 = 0$
169.	$x^2 - \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$	$x^2 + \sqrt{3}(1 + \sqrt{2}) = 0$	$x^2 - \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})x = 0$
170.	$x^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x + 2\sqrt{6} = 0$	$x^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})x = 0$	$x^2 + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$
171.	$\sqrt{6}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 1 = 0$	$\sqrt{6}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x = 0$	$\sqrt{6}x^2 = 0$
172.	$\sqrt{2}x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$	$\sqrt{2}x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x = 0$	$\sqrt{2}x^2 - 1 = 0$
173.	$2x^2 - (5\sqrt{5} - 6)x + 2 = 0$	$2x^2 - (5\sqrt{5} - 6) = 0$	$2x^2 - (5\sqrt{5} - 6)x = 0$
174.	$x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = 0$	$x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x = 0$	$x^2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = 0$

### Collegamenti anche con il primo volume

Gli esercizi dal n. 175 al n. 210 richiedono di:

- applicare operazioni fra polinomi, prodotti notevoli e potenze di binomi per svolgere le operazioni indicate (vedere il primo volume, pp. 255-269);
- applicare le nozioni sulle equazioni equivalenti (vedere il primo volume, p. 374) per scrivere le equazioni nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- applicare le nozioni esposte in questo capitolo (paragrafi 1, 2, 3) per risolvere le equazioni così ottenute;
- eseguire anche i calcoli con i radicali tenendo presenti le regole esposte nei capitoli primo e secondo di questo volume.

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 175 al n. 210 e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le equazioni nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

b. determinare le soluzioni reali delle equazioni così ottenute, segnalando le equazioni che non hanno soluzioni reali.

175.	$(3-2x)^2 - \left(\frac{3}{2}x - 4\right)^2 = 56$	$[\pm 6]$	176.	$x(x-1) + x(x+1) = 2$	$[\pm 1]$
177.	$5(x-2)(x+1) + (x+1)^2 = 4x^2$	$[3; -1, 5]$	178.	$(x-7)(x+7) + (x-7)^2 + 20 = 0$	$[2; 5]$
179.	$(2x-5)^2 - (x-4)^2 = 72$	$[-3; 7]$	180.	$(3x-4)^2 - (2x-5)^2 = 3$	$[-1, 2; 2]$
181.	$(x-3)^2 + (x-4)^2 = x$	$[2, 5; 5]$	182.	$(2x-1)^2 = 3(x-1)(x+1)$	$[2]$
183.	$(x-2)^3 - (x-2)^2(x-3) = 0$	$[2]$	184.	$(x-2)^3 - (x-2)^2(x-3) = 1$	$[3; 1]$
185.	$x^2(x-1) - x^2(x-5) = 0$	$[0]$	186.	$x^2(x-1) - x^2(x-5) = 1$	$[\pm 0, 5]$

187.  $4(x-1)(x+2)-(x-1)^2=5(x+3)^2$  [-9; -3]
188.  $(x-1)(x+2)+(x-2)(x+4)+x^2+10=0$  [0; -1]
189.  $(x^2-2)(x+2)+6x^2=x(x+2)^2$  [-0,5; 2]
190.  $(x^2-1)(x-2)^2=(x-2)^2(x-1)^2$  [1; 2]
191.  $(2x-1)(x+2)+7=2[3x^2-x(x-3)]$  [1; -2,5]
192.  $2x-\frac{3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x^2-2}{4}$  [3±√5]
193.  $\frac{x(x+2)}{4}-\frac{x(5-x)}{3}=\frac{x^2}{2}$  [0;14]
194.  $\frac{x^2}{3}+6-6x+\frac{x(x+2)}{2}=\frac{(x-3)x}{3}$  [2; 6]
195.  $\frac{1}{3}(x-2)+(x-1)(x+1)=\frac{x}{2}(x-1)+\frac{2}{3}x$  [-2;  $\frac{5}{3}$ ]
196.  $\frac{(x+1)(x-1)}{6}+\frac{1}{3}[2-(x-1)]=\frac{2}{3}$  [1]
197.  $\frac{1}{2}(x^2+1)+\frac{5}{12}=\frac{4-x^2}{3}+\frac{6x^2+1}{12}$  [±  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ]
198.  $\frac{1-3x}{5}+1-x-\frac{1+x^2}{15}=\frac{(2-x)(2+x)}{3}-\frac{1}{5}$  [0; 6]
199.  $\frac{x^2+3x+2}{10}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)x=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{2}\right)$  [±√3]
200.  $\frac{2}{15}+\frac{3}{5}(2-x)-\frac{(2+x)(2-x)}{3}=\left(1-\frac{x}{15}\right)x$  [0; 4]
201.  $\frac{5}{12}+\frac{1}{2}(x^2+1)-\frac{6x^2+1}{12}=\frac{4-x^2}{3}$  [±  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ]
202.  $(x-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(2x+1)=x+4$  [1-√2; √2]
203.  $(x+2\sqrt{2})^2+(x+4\sqrt{2})^2=8$  [-4√2; -2√2]
204.  $(x-2\sqrt{2})(x-2\sqrt{3})+5=2\sqrt{3}\sqrt{2}$  [√3+√2]
205.  $(x+\sqrt{2})^2+(x-\sqrt{5})^2-4=x(x+2\sqrt{2})$  [√5±√2]
206.  $(\sqrt{2}x+1)^2+2x(x-\sqrt{2})-4=x^2$  [±1]
207.  $x(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{2}-x)(x-\sqrt{6})=2x^2$  [±√2√3]
208.  $x^2-\sqrt{2}x(\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2)+2x(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$  [0; -2√6]
209.  $6+(2\sqrt{2}+1)x^2=(3\sqrt{2}-6\sqrt{3}x+2x^2)\sqrt{2}$  [0; -6√6]
210.  $x^2-(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)+(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+3=2x(\sqrt{2}-2x)$  [√2±1]

## Problemi che conducono a risolvere equazioni di 2° grado

### Problemi di geometria

Risolvere i problemi dal n. 211 al n. 250 percorrendo le tappe indicate nel testo e cioè:

- I. visualizzare il problema con opportuni disegni;
- II. scegliere l'incognita  $x$ ;
- III. precisare le limitazioni dell'incognita;
- IV. tradurre il problema in un'equazione che leghi i dati all'incognita;
- V. risolvere l'equazione;
- VI. controllare che le soluzioni ottenute siano esatte.

Gli esercizi dal n. 211 al n. 227 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:

- conducono a valersi dei teoremi di Pitagora e di Euclide (vedere capitolo primo, paragrafi 1, 2 e 3, pp. 2-14);
- conducono a risolvere equazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

- 211.** Verificare che è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 3, 4, 5 (cioè tre interi consecutivi: 3, 3+1 e 3+2).  
Stabilire in quali casi è rettangolo un triangolo che ha le lunghezze dei lati espresse da tre numeri interi consecutivi.  
[Indicare le lunghezze dei lati con  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ ; il triangolo è rettangolo se vale il teorema di Pitagora. Si ottiene solo  $n=3$ ]
- 212.** Verificare che è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 5, 12 e 13.  
Indicando il numero pari 12 con  $2n$ , si ha che le lunghezze dei lati sono tre interi dati da  $n-1$ ,  $2n$ ,  $2n+1$ . Stabilire in quali casi è rettangolo un triangolo che ha le lunghezze dei lati espresse dai tre interi dati da  $n-1$ ,  $2n$ ,  $2n+1$ .  
[Il triangolo è rettangolo se vale il teorema di Pitagora. Si ottiene solo  $n=6$ ]
- 213.** Determinare la lunghezza dei lati  $a$  e  $b$  di un rettangolo che ha la diagonale lunga 10 e un lato che è  $i \frac{3}{4}$  dell'altro. [a=6; b=8]
- 214.** Ciascuno dei lati uguali di un triangolo isoscele è  $i \frac{5}{8}$  della base e l'altezza relativa alla base è lunga 6; determinare la lunghezza del lato  $a$  e della base  $b$  del triangolo. [a=10; b=16]
- 215.** Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa  $c$  lunga 5, mentre la differenza fra le lunghezze dei cateti  $a$  e  $b$  vale 1. Determinare la lunghezza dei cateti. [a=4; b=3]
- 216.** Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa  $c$  lunga 10, mentre la differenza fra le lunghezze dei cateti  $a$  e  $b$  vale 2. Determinare la lunghezza dei cateti. [a=8; b=6]
- 217.** La diagonale di un quadrato supera di 1 il lato. Risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare la lunghezza del lato del quadrato;  
b. determinare la lunghezza  $d$  della diagonale del quadrato;  
c. verificare che il rapporto fra la diagonale e il lato è  $\sqrt{2}$ . [(b)d=2+ $\sqrt{2}$ ]
- 218.** In un triangolo rettangolo ABC il cateto AC è lungo 4 ed è lunga 6 la proiezione HB del cateto AB sull'ipotenusa BC; risolvere i seguenti quesiti:  
a. calcolare la lunghezza  $x$  di CH;  
b. calcolare i lati BC e AB del triangolo. [(b)BC=8]

219. È dato un rettangolo ABCD, con il lato AB lungo 12 e il lato BC lungo 8. Considerare un punto P sul lato DC e congiungere P con A e con B; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di P per cui risulta:  

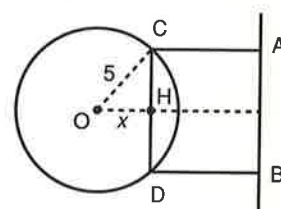
$$PA^2 + PB^2 = AC^2$$
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[Indicando con x la distanza DP si ottengono le soluzioni:  $x_1=4$ ;  $x_2=8$ ]*
220. Dato un quadrato ABCD con il lato lungo 5, considerare un punto P variabile sulla retta AB e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di P per cui la distanza PD è  $\frac{3}{2}$  della distanza PC;
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[Si ottengono per la distanza AP i valori:  $9 \pm \sqrt{11}$ ]*
221. Sui lati di un angolo retto di vertice O sono dati due punti A e B, in modo che risulti OA=9 e OB=8. Considerare un punto C sul segmento OA e un punto D sul segmento OB e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di C e D per cui risulta:  

$$AC = CD = DB$$
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[(a) AC=5]*
222. Sui lati di un angolo retto di vertice O sono dati due punti A e B, in modo che risulti OA=8 e OB=4. Considerare sulla semiretta OA un punto P e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di P per cui risulta:  

$$PB^2 = 2 \cdot PA^2$$
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[Scegliendo come incognita  $x=OP$ , si hanno le soluzioni:  $x_1=4$ ;  $x_2=28$ ]*
223. Disegnare una circonferenza con il raggio lungo 3 e la tangente  $t$  in un suo punto; disegnare una corda AB parallela a  $t$  e tracciare da A e da B le perpendicolari a  $t$ , ottenendo il rettangolo ABCD. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la distanza AD per cui il rettangolo ha la diagonale lunga  $3\sqrt{5}$ ;
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[Si ottengono per la distanza AD le soluzioni:  $x_1=3$ ;  $x_2=5$ ]*
224. In fig. 1 è disegnata una circonferenza con il raggio lungo 5 ed una retta che dista 10 dal centro O della circonferenza; si è quindi disegnato il quadrato ABCD, che ha i vertici A e B sulla retta data e gli altri due sulla circonferenza. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare il lato del quadrato;
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
*[Scegliendo l'incognita  $OH=x$ , si hanno le due soluzioni:  $x_1=0$ ;  $x_2=4$ ]*
225. Disegnare una circonferenza di centro O, con il diametro AB lungo 2; considerare un punto C sul prolungamento di AB dalla parte di B, tracciare da C la tangente CT alla circonferenza e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di C per cui risulta:  

$$CT^2 + CA^2 = 12$$
  - interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute. *[(a) OC=2]*

Figura 1





226. Un punto M varia su una semicirconferenza con il diametro AB lungo 4; da M si traccia la perpendicolare ad AB e si indica con P il piede della perpendicolare. Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare la posizione di M per cui risulta:

$$4 \cdot MP^2 + AP^2 = 16$$

b. interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.

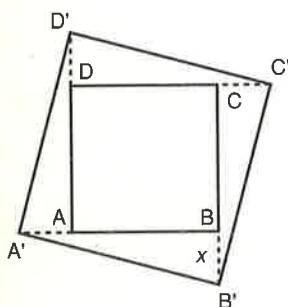
[Si trovano per la distanza AP i valori:  $4; \frac{4}{3}$ ]

227. Inscrivere in una semicirconferenza col diametro AB lungo 4 un trapezio isoscele ABCD che abbia il perimetro lungo 10. [BC=AD=2]

Gli esercizi dal n. 228 al n. 234 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:

- conducono a calcolare l'area di figure piane (vedere il primo volume, pp. 207-212);
- conducono a risolvere equazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

Figura 2



228. Un punto M varia sul lato AB lungo 12 di un quadrato ABCD; internamente al quadrato dato si costruisce il quadrato AMNP, che lascia nel quadrato il poligono concavo MBCDPN. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare la posizione di M per cui il poligono concavo ha l'area quattro volte più grande di quella del rettangolo di lati AM e MB;  
b. interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.

[Si ottengono per la distanza AM le soluzioni:  $x_1=4; x_2=12$ ]

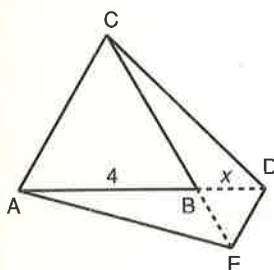
229. In fig. 2 è rappresentato un quadrato ABCD con il lato lungo 20; si è quindi disegnato il quadrato A'B'C'D' prolungando i lati di ABCD di uno stesso segmento nello stesso verso.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare la lunghezza del segmento in modo che A'B'C'D' abbia l'area cinque volte più grande di quello di ABCD;  
b. interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.

[Scegliendo l'incognita  $BB'=x$ , si hanno le soluzioni:  $x_1=-40; x_2=20$ ]

Figura 3



230. In fig. 3 è rappresentato un triangolo equilatero ABC con il lato lungo 4; si è quindi disegnato il trapezio ACDE con la seguente costruzione:

- si sono prolungati i lati AB e CB dalla stessa parte di B di uno stesso segmento, ottenendo i punti D ed E;
- si sono congiunti i punti A, C, D, E.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare la lunghezza del segmento in modo che l'area del trapezio sia  $\frac{25}{16}$  dell'area del triangolo;  
b. interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.

[Scegliendo l'incognita  $BD=x$ , si hanno le soluzioni:  $x_1=-9; x_2=1$ ]

231. A partire dalla stessa costruzione illustrata in fig. 3, risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la lunghezza del segmento in modo che l'area del trapezio sia quattro volte l'area del triangolo;  
b. interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti;  
c. dire quale particolarità presenta il trapezio così ottenuto.

[Scegliendo l'incognita  $BD=x$ , si hanno le soluzioni:  $x_1=-12; x_2=4$ ]

232. È dato un triangolo rettangolo ABC che ha un cateto lungo  $\sqrt{6}$  cm; su ogni lato del triangolo costruire tre triangoli equilateri che siano esterni ad ABC, ottenendo un esagono. Risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare gli altri due lati del triangolo sapendo che l'esagono ha area  $15\sqrt{3}$ ;  
b. costruire il triangolo così determinato.

[(a)  $3\sqrt{2}; 2\sqrt{6}$ ]

233. Disegnare un rettangolo ABCD, con il lato AB lungo 8 e il lato BC lungo 6; effettuare quindi la seguente costruzione:
- fissare sui lati AB, BC, CD, DA i punti M, N, P, Q in modo che risulti:  
 $AM=CN=CP=AQ$
  - congiungere i punti ottenuti, disegnando il quadrilatero MNPQ.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza del segmento AM in modo che l'area del quadrilatero sia la quarta parte dell'area del rettangolo;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti;
  - dire quale particolarità presenta il quadrilatero così ottenuto.
- [Scegliendo come incognita  $x=AM$ , si ottengono le soluzioni:  $x_1=1$ ;  $x_2=6$ ]

234. Un punto P varia su un segmento AB lungo 2. Si costruisce su AP il triangolo equilatero APQ, su PB (dalla parte opposta rispetto ad AB) il quadrato PBRS e si congiunge A con S ottenendo il poligono concavo AQPBRs rappresentato in fig. 4. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di P per cui l'area del poligono vale 4;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.

[Scegliendo come incognita  $x = AP$ , si ottengono le soluzioni:  $x_1=0$ ;  $x_2=\frac{12}{\sqrt{3+2}}$ ]

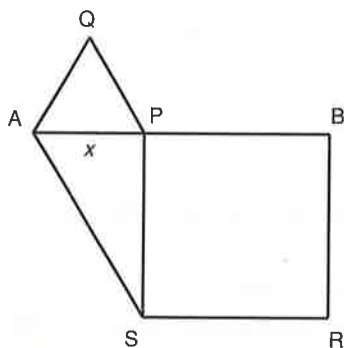
Gli esercizi dal n. 235 al n. 242 conducono a risolvere problemi che presentano le seguenti caratteristiche:

- conducono a valersi anche dei teoremi relativi ai poligoni simili (vedere il capitolo terzo di questo volume);
- conducono a risolvere equazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

235. In fig. 5 sono rappresentati due rettangoli:
- ABCD con i lati lunghi 12 e 8;
  - A'B'C'D' con i lati paralleli ed equidistanti ai lati di ABCD e l'area che vale un terzo di quella di ABCD.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare le dimensioni di A'B'C'D';
  - spiegare perché i due rettangoli non sono simili;
  - dire quanto debbono essere lunghi i lati del rettangolo A'B'C'D', che è simile ad A'B'C'D' e ha l'area che è un terzo di quella di ABCD.
- [Scegliendo l'incognita come indicato in fig. 5, si ottiene:  $A'B'=8$ ;  $B'C'=4$ ]

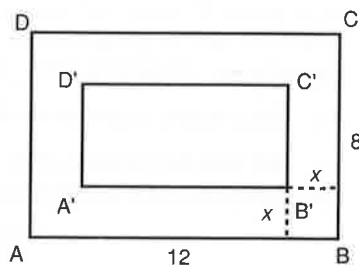
236. È dato un triangolo equilatero con il lato lungo 6; si fissano sui lati AB, BC, CA i punti M, N, P in modo che risulti  $AM=BN=CP=x$ . Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che il triangolo MNP è equilatero;
  - determinare  $x$  in modo che l'area di MNP sia la terza parte dell'area di ABC;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti. [(b)  $x_1=2$ ;  $x_2=4$ ]

Figura 4



Esercizi

Figura 5



237. Disegnare un triangolo ABC con il lato AB lungo 2 e l'altezza CH lunga 20; si vuole prolungare il lato AB dalla parte di B di un segmento BB' e diminuire l'altezza di un segmento CC'=BB', ottenendo un triangolo AB'C' che ha l'area tripla di ABC. Risolvere i seguenti quesiti:
- stabilire la lunghezza del segmento BB' che risolve il problema;
  - spiegare perché i due triangoli così ottenuti non sono simili;
  - dire quanto debbono essere lunghi il lato AB'' e l'altezza C''H del triangolo AB''C'' che è simile ad ABC ed ha l'area tripla. [(a) BB'=10 o 8]
238. Su una retta  $r$  considerare i due segmenti AB lungo 4 e MN lungo 2; costruire (dalla stessa parte rispetto alla retta  $r$ ) il triangolo ABC che ha l'altezza CH lunga 3 e il quadrato MNPQ. Tracciare quindi una retta  $s$ , parallela a  $r$ , che taglia dal triangolo ABC un triangolo A'B'C' e dal quadrato un rettangolo M'N'P'Q. Risolvere i seguenti quesiti:
- stabilire la distanza  $x$  fra le due rette per avere che la somma del triangolo A'B'C' e del rettangolo M'N'P'Q sia equivalente al triangolo ABC;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti. [(a)  $x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$ ]
239. Disegnare un triangolo rettangolo ABC con il cateto AC lungo 6 e il cateto AB lungo 8; considerare sul cateto AC un punto M e da M condurre la perpendicolare MH all'ipotenusa. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di M per cui risulta:  
 $MH^2 + MA^2 = 16$
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti. [(a)  $MA = \frac{96 \pm 20\sqrt{5}}{41}$ ]
240. In un cerchio disegnare una corda AB, tagliata da una seconda corda CD lunga 14 in due parti: AM lunga 8 e MB lunga 4. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché sono simili i triangoli AMC e DMB;
  - determinare la lunghezza dei segmenti CM e MD;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti. [(b)  $7 \pm \sqrt{17}$ ]
241. Da un punto A esterno ad un cerchio si conduce una tangente che tocca la circonferenza in B; dallo stesso punto A si conduce pure una secante, che taglia la circonferenza in due punti C e D. Dal disegno si ricavano le seguenti informazioni:
- il segmento AB è lungo 2 cm;
  - il segmento CD è lungo 3 cm più del segmento AC.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché sono simili i triangoli ABD e ACB;
  - determinare la lunghezza dei segmenti AC e CD. [(b) AC=1; CD=4]
242. Un punto P varia sul lato AB di un triangolo equilatero col lato lungo 10; tracciare da P la perpendicolare PQ al lato AC e la perpendicolare PR al lato BC e considerare il triangolo QRC. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la posizione di P per cui il triangolo QRC ha l'area che è gli  $\frac{11}{20}$  dell'area del triangolo dato;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti. [Per la lunghezza di AP si ottengono i valori:  $5 \pm \sqrt{5}$ ]

I problemi dal n. 243 al n. 250 richiedono anche di applicare le nozioni relative alla sezione aurea (vedere scheda storica, p. 314 di questo volume) e ai poligoni regolari (vedere anche il primo volume, p. 129).

243. Disegnare un quadrato e prolungarne i lati da ambedue le parti di uno stesso segmento, in modo che, congiungendo gli estremi ottenuti, si abbia un ottagono regolare. Determinare il lato del quadrato in modo che l'ottagono abbia area 4.

$$[\sqrt{2\sqrt{2}-2}]$$

244. Considerare il decagono regolare inscritto in un cerchio con il raggio lungo 2. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare il lato del decagono;
  - valendosi del lato ottenuto e del teorema della corda (vedi p. 140), esprimere per mezzo di radicali il seno dell'angolo di  $18^\circ$ ;
  - calcolare l'area  $S$  del poligono.

$$[(c) S=5\sqrt{10-2\sqrt{5}}]$$

245. In fig. 6 è disegnata una circonferenza di centro  $O$  e raggio 1. Nella circonferenza sono disegnati anche due lati consecutivi  $AB$  e  $BC$  del decagono regolare inscritto; si è quindi congiunto  $B$  con  $O$ , ottenendo il diametro  $BD$ ; risolvere i seguenti quesiti:

- applicare il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo  $ABD$  per ricavare la lunghezza di  $BH$ ;
- applicare allo stesso triangolo il secondo teorema di Euclide per ricavare la lunghezza di  $AH$  e quindi di  $AC$ ;
- valersi del lato ottenuto e del teorema della corda (vedi p. 140), per esprimere per mezzo di radicali il seno dell'angolo di  $36^\circ$ .

$$[(b) AC = \frac{1}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}]$$

246. Dopo aver svolto l'esercizio 245, determinare il lato e l'area  $S$  del pentagono regolare inscritto in un cerchio il cui raggio è lungo 4.

$$[S=10\sqrt{10+2\sqrt{5}}]$$

247. È assegnato un segmento  $AB$  lungo 1; si vuole costruire il rettangolo  $ABCD$  caratterizzato dalla seguente proprietà: togliendo al rettangolo il quadrato di lato  $BC$  si ottiene un rettangolo simile a quello dato (fig. 7); verificare che il lato  $BC$  è la sezione aurea di  $AB$ .

248. È assegnato un segmento  $AB$  lungo 1; si vuole costruire il rettangolo  $ABCD$  caratterizzato dalla seguente proprietà: aggiungendo al rettangolo il quadrato di lato  $AB$  si ottiene un rettangolo simile a quello dato (fig. 8); verificare che il lato  $BC$  è la sezione aurea di  $AB$ .

249. In fig. 9 è rappresentato un pentagono regolare con il lato lungo 2 e le sue diagonali; risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché sono simili i triangoli  $ABD$  e  $ABE'$ ;
- calcolare la lunghezza della diagonale  $AD$ .

$$[(b) AD=1+\sqrt{5}]$$

250. Sempre a partire dal pentagono regolare di fig. 9, risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la diagonale del pentagono  $A'B'C'D'E'$ ;
  - calcolare il lato del pentagono  $A'B'C'D'E'$ .

$$[(b) E'D'=1-\sqrt{5}]$$

Figura 6

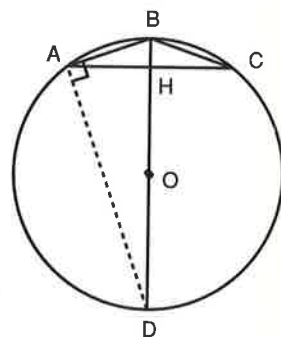


Figura 7

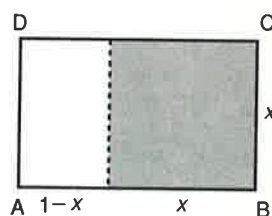


Figura 8

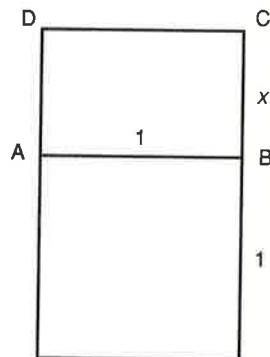
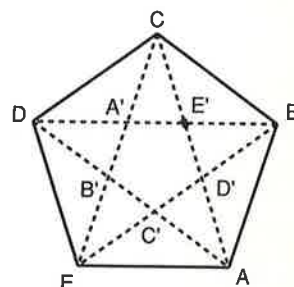


Figura 9



## Problemi di geometria analitica

Gli esercizi dal n. 251 al n. 260 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:

- richiedono nozioni di geometria analitica (vedere il capitolo quinto) o le trasformazioni (vedere il capitolo sesto);
- conducono a risolvere equazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

**251.** Disegnare la parabola:

$$y=3x^2+18x+27$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la parabola è tangente all'asse delle  $x$ ;
- effettuare una traslazione lungo l'asse delle  $x$  a piacere e spiegare perché la parabola ottenuta è ancora tangente all'asse delle  $x$ ;
- effettuare una traslazione lungo l'asse delle  $y$  verso l'alto a piacere e spiegare perché la parabola ottenuta è esterna all'asse delle  $x$ ;
- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-9 \end{cases}$$

determinare l'equazione della parabola trasformata e le sue intersezioni con l'asse delle  $x$ .

**252.** Ripetere l'esercizio 251 a partire dalla parabola:

$$y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$$

e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-1 \end{cases}$$

**253.** Disegnare la parabola:

$$y=-4x^2+8x-4$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la parabola è tangente all'asse delle  $x$ ;
- effettuare una traslazione lungo l'asse delle  $x$  a piacere e spiegare perché la parabola ottenuta è ancora tangente all'asse delle  $x$ ;
- effettuare una traslazione lungo l'asse delle  $y$  verso il basso a piacere e spiegare perché la parabola ottenuta è esterna all'asse delle  $x$ ;
- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases}$$

determinare l'equazione della parabola trasformata e le sue intersezioni con l'asse delle  $x$ .

**254.** Ripetere l'esercizio 253 a partire dalla parabola:

$$y=-2\sqrt{2}x^2+4x-\sqrt{2}$$

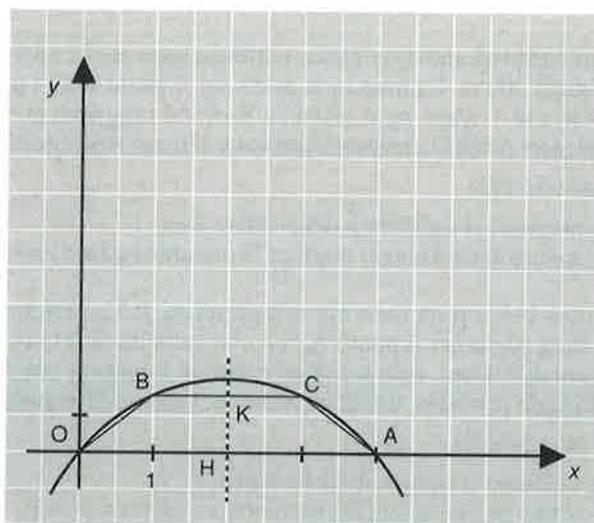
e dalla trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+\sqrt{2} \end{cases}$$



255. Disegnare la parabola d'equazione  $y=x^2-4x+6$  e le seguenti rette:  
 $y=1$        $y=2$        $y=3$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare i punti d'intersezione di ciascuna retta con la parabola;  
 b. stabilire quale retta è secante, quale è tangente e quale è esterna.
256. Ripetere l'esercizio 255 a partire dalla parabola  $x=-y^2+4y+2$  e dalle seguenti rette:  
 $x=6$        $x=2$        $x=7$
257. Disegnare la parabola  $y=-x^2+4x$ , che interseca l'asse delle  $x$  nei punti O e A; considerare un punto B variabile sull'arco OA di parabola e costruire il triangolo OAB. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare le coordinate del punto A;  
 b. determinare l'ascissa del punto B in modo che l'area del triangolo valga  $S=6$ .  
*[Tenere presente che l'altezza del triangolo corrisponde all'ordinata di B; si ottengono per l'ascissa di B le soluzioni:  $x_1=1$ ;  $x_2=3$ ]*
258. Disegnare la parabola  $x=-y^2+8y$ , che interseca l'asse delle  $y$  nei punti O e A; considerare un punto B variabile sull'arco OA di parabola e costruire il triangolo OAB. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare le coordinate del punto A;  
 b. determinare l'ordinata del punto B in modo che l'area del triangolo valga  $S=60$ .  
*[Tenere presente che l'altezza del triangolo corrisponde all'ascissa di B; si ottengono per l'ordinata di B le soluzioni:  $y_1=3$ ;  $y_2=5$ ]*
259. In fig. 10 è rappresentata la parabola d'equazione  $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ , che interseca l'asse delle  $x$  nei punti O e A; si è quindi disegnato un trapezio che ha come base maggiore OA e come base minore una corda BC della parabola parallela a OA. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare le coordinate del punto A;  
 b. determinare l'ascissa del punto B in modo che l'area del trapezio valga  $S=\frac{9}{4}$ .  
*[Tenere presente che il trapezio è simmetrico rispetto alla retta KH; si ottengono le soluzioni:  $x_1=1$ ;  $x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ ]*

Figura 10



- 260.** Disegnare la parabola d'equazione  $x = -\frac{1}{2}y^2 + 2y$ , che interseca l'asse delle  $x$  nei punti O e A e disegnare un trapezio che ha come base maggiore OA e come base minore una corda BC della parabola parallela a OA. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare le coordinate del punto A;
  - determinare l'ordinata del punto B in modo che l'area del trapezio valga  $S = \frac{9}{2}$ .

[Tenendo presenti le indicazioni dell'esercizio 259, si ha:  $y_1 = 1$ ;  $y_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$ ]

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 261 al 264 conducono a risolvere problemi che hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono nozioni elementari di fisica richiamate anche nel testo, pp. 343-347;
- conducono a risolvere equazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

- 261.** Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso l'alto di 8 m/sec.; trascurando la resistenza dell'aria risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il corpo si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:  

$$s = -4,9t^2 + 8t$$
e precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ ;
  - calcolare quanto tempo impiega il corpo a ripassare per il punto di lancio.  
[(b)  $t \cong 0,6$  sec.]
- 262.** Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso il basso di 10 m/sec.; trascurando la resistenza dell'aria risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il corpo si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:  

$$s = 4,9t^2 + 10t$$
e precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ ;
  - calcolare quanto tempo impiega il corpo a percorrere 10 m. [(b)  $t \cong 3,6$  sec.]
- 263.** Lungo una pista automobilistica rettilinea sono segnati due punti di controllo, A e B, distanti 300 m. La macchina passa per il punto A con una velocità di 15 m/sec e accelera di 3 m/sec. ogni secondo; risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la macchina percorre il tratto AB seguendo la legge:  

$$s = 1,5t^2 + 15t$$
e precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ ;
  - calcolare quanto tempo impiega la macchina ad arrivare in B. [(b)  $t \cong 27$  sec.]
- 264.** Lungo la stessa pista descritta nell'esercizio 263, si effettua la seguente prova: la macchina passa per il punto A con una velocità di 30 m/sec. e da quel momento decelera di 3 m/sec. ogni secondo; risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la macchina percorre il tratto AB seguendo la legge:  

$$s = -1,5t^2 + 30t$$
e precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ ;
  - spiegare perché la macchina non riesce ad arrivare in B.

## Problemi vari

265. Lo spazio di frenata  $s$  di un'automobile è legato alla velocità  $v$  da una legge del tipo:

$$s = kv^2$$

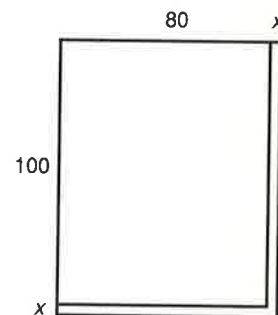
Eseguendo una prova di frenata, si trova che un'auto riesce a fermarsi in 8 metri, quando viaggia alla velocità di 40 km/h; risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il valore di  $k$ , corrispondente all'auto esaminata;
- calcolare la velocità a cui procedeva la stessa auto prima di un incidente, sapendo che si è fermata in 24,5 m. [(b) 70 km/h]

266. Da un foglio rettangolare lungo 10 cm e largo 8 cm viene tagliata una striscia di larghezza uniforme da ciascuno dei suoi lati; rimane così un rettangolo di area 24 cm<sup>2</sup>. Quanto è larga la striscia tagliata? [2 cm]

267. Su due lati di un terreno rettangolare che ha le dimensioni lunghe 80 m e 100 m si vuole costruire una strada (fig. 11), utilizzando 736 m<sup>2</sup> acquistati da un terreno vicino; quanto sarà larga la strada? [4 m]

Figura 11



268. Un tipografo deve preparare un cartellone pubblicitario con i seguenti vincoli (fig. 12):
- il tabellone deve avere le dimensioni di 2 m e 5 m;
  - deve essere lasciato un margine destro e sinistro uguale;
  - deve essere lasciato un margine inferiore e superiore uguale, doppio del margine laterale;
  - l'immagine e la parte scritta debbono occupare 3 m<sup>2</sup>.
- Quali sono i margini da lasciare? [0,5 e 1]

269. Determinare due numeri interi positivi consecutivi, sapendo che il loro prodotto vale 462.

*[Si possono indicare i due numeri con  $x$  e  $x+1$ ; i numeri sono 21 e 22]*

270. Determinare tre numeri interi positivi consecutivi, sapendo che la somma dei loro quadrati è 110.

*[Si possono indicare i tre numeri con  $x-1$ ,  $x$ ,  $x+1$ ; i numeri sono 5, 6 e 7]*

271. Determinare cinque numeri interi positivi consecutivi in modo che la somma dei quadrati dei primi tre sia uguale alla somma dei quadrati degli ultimi due.

*[I numeri sono 10, 11, 12, 13 e 14]*

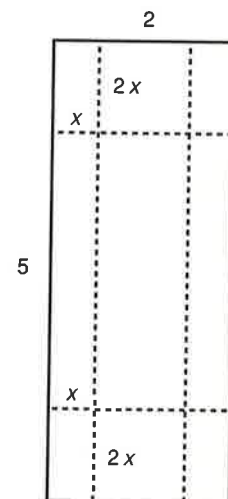
272. Determinare tre numeri dispari positivi consecutivi, sapendo che la somma dei loro quadrati vale 251.

*[Si possono indicare i tre numeri con  $2x-1$ ,  $2x+1$ ,  $2x+3$ ; i numeri sono 7, 9 e 11]*

273. Determinare tre numeri pari positivi consecutivi, sapendo che la somma dei loro quadrati vale 200.

*[Si possono indicare i tre numeri con  $2x-2$ ,  $2x$ ,  $2x+2$ ; i numeri sono 6, 8 e 10]*

Figura 12



## Sulle relazioni fra soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado

### Risolvere un'equazione «a vista»

*Gli esercizi dal n. 274 al n. 287 richiedono di valersi delle relazioni fra soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado per risolvere l'equazione senza valersi della formula risolutiva.*

Esaminare le equazioni proposte negli esercizi dal n. 274 al n. 287 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. risolvere le equazioni «a vista», valendosi delle relazioni fra soluzioni e coefficienti;
- b. verificare che le soluzioni ottenute siano corrette.

274.	$x^2-6x+5=0$	$x^2+6x+5=0$	275.	$x^2-8x+7=0$	$x^2+8x+7=0$
276.	$x^2-14x+13=0$	$x^2+14x+13=0$	277.	$x^2-11x+10=0$	$x^2+11x+10=0$
278.	$x^2-5x+6=0$	$x^2+5x+6=0$	279.	$x^2-7x+6=0$	$x^2+7x+6=0$
280.	$x^2-4x+4=0$	$x^2+4x+4=0$	281.	$x^2-5x+4=0$	$x^2+5x+4=0$
282.	$x^2-7x+10=0$	$x^2+7x+10=0$	283.	$x^2-4x-5=0$	$x^2+4x-5=0$
284.	$x^2-6x+7=0$	$x^2+6x+7=0$	285.	$x^2-x-6=0$	$x^2+x-6=0$
286.	$x^2-3x-10=0$	$x^2+3x-10=0$	287.	$x^2-x-12=0$	$x^2+x-12=0$

### Scrivere un'equazione che ha due soluzioni assegnate

*Gli esercizi dal n. 288 al n. 300 chiedono di valersi delle relazioni fra coefficienti e soluzioni di un'equazione di 2° grado per scrivere un'equazione che abbia due soluzioni assegnate.*

Scrivere le equazioni di 2° grado che hanno le seguenti caratteristiche:

- hanno il coefficiente  $a=1$ ;
- hanno le due soluzioni reali assegnate negli esercizi dal n. 288 al n. 300.

288.	$x_1=0, \quad x_2=2;$	$x_1=-2, \quad x_2=0;$	$x_1=x_2=0$
289.	$x_1=-2, \quad x_2=2;$	$x_1=x_2=2;$	$x_1=x_2=-2$
290.	$x_1=-1, \quad x_2=2;$	$x_1=-2, \quad x_2=1;$	$x_1=x_2=2$
291.	$x_1=1, \quad x_2=9;$	$x_1=-1, \quad x_2=9;$	$x_1=-9 \quad x_2=-1$
292.	$x_1=\frac{1}{4}, \quad x_2=4;$	$x_1=-4, \quad x_2=\frac{1}{4};$	$x_1=-4 \quad x_2=-\frac{1}{4}$
293.	$x_1=0, \quad x_2=\frac{3}{2};$	$x_1=-\frac{3}{2}, \quad x_2=\frac{3}{2};$	$x_1=x_2=-\frac{3}{2}$
294.	$x_1=\frac{4}{5}, \quad x_2=\frac{5}{4};$	$x_1=-\frac{4}{5}, \quad x_2=\frac{5}{4};$	$x_1=-\frac{5}{4} \quad x_2=-\frac{4}{5}$

295.  $x_1=0, \quad x_2=\sqrt{5}; \quad x_1=-\sqrt{5}, \quad x_2=\sqrt{5}; \quad x_1=x_2=-\sqrt{5}$
296.  $x_1=\sqrt{2}, \quad x_2=\sqrt{8}; \quad x_1=-\sqrt{8}, \quad x_2=\sqrt{2}; \quad x_1=x_2=-\sqrt{8}$
297.  $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2=\sqrt{3}; \quad x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\sqrt{3}; \quad x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
298.  $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\sqrt{2}; \quad x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
299.  $x_1=1+\sqrt{2}, \quad x_2=1+\sqrt{2}; \quad x_1=x_2=1+\sqrt{2}; \quad x_1=x_2=1-\sqrt{2}$
300.  $x_1=2+\sqrt{5}, \quad x_2=2-\sqrt{5}; \quad x_1=x_2=2+\sqrt{5}; \quad x_1=x_2=2-\sqrt{5}$

### Sulla scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado

301. Completare la seguente tabella come è indicato nelle prime righe:

Trinomio	$\Delta$ dell'equazione	Soluzioni reali	Scomposizione
$3x^2+x+2$	$\Delta=1-24=-23<0$	nessuna	no
$3x^2-6x+3$	$\Delta=36-36=0$	$x_1=x_2=1$	$3(x-1)^2$
$2x^2-3x-5$	$\Delta=9+40=49>0$	$x_1=-1 \quad x_2=\frac{5}{2}$	$2(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$
$-2x^2+3x+5$			
$-2x^2+3x-5$			
$-2x^2+8x-8$			

Esaminare i trinomi dati negli esercizi dal n. 302 al n. 316 e risolvere i seguenti quesiti:

- stabilire se il trinomio ha radici reali, esaminando il discriminante della corrispondente equazione;
- nel caso in cui il trinomio ha le radici reali, determinarle;
- valersi delle radici ottenute per scomporre il trinomio in fattori.

302.  $4x^2-3x-1 \quad 4x^2-4x+1 \quad 4x^2-4x+3$
303.  $2x^2+7x+3 \quad 2x^2+8x+8 \quad 2x^2+7x+8$
304.  $9x^2-6x+1 \quad 4x^2-6x-4 \quad 9x^2-6x+2$
305.  $4x^2+20x+27 \quad 4x^2+20x+25 \quad 4x^2+20x+9$
306.  $2x^2+5x-3 \quad 4x^2+10x-6 \quad -2x^2-5x+3$
307.  $16x^2-8x+1 \quad 2x^2-x+\frac{1}{8} \quad -x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}$
308.  $12x^2-25x+12 \quad -12x^2+25x-12 \quad -6x^2+2,5x-6$



309.	$x^2+20x+100$	$100x^2+20x+1$	$10x^2+2x+0,1$
310.	$x^2+\sqrt{5}x-10$	$5x^2-\sqrt{5}x-2$	$10x^2+\sqrt{5}x+1$
311.	$4x^2-4\sqrt{6}x+5$	$-4x^2+4\sqrt{6}x-5$	$2x^2-2\sqrt{6}x+\frac{5}{2}$
312.	$x^2-\sqrt{2}x-4$	$x^2-2\sqrt{2}x+2$	$x^2-2$
313.	$4x^2-4\sqrt{3}x+3$	$4x^2-12$	$4x^2-4\sqrt{3}x-1$
314.	$2x^2+3\sqrt{3}x-3$	$\frac{2}{3}x^2+\sqrt{3}x-1$	$-x^2-\frac{3}{2}\sqrt{3}x+\frac{3}{2}$
315.	$2x^2-(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x-3\sqrt{2}$	$2x^2+3\sqrt{2}$	$-2x^2+(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x+3\sqrt{2}$
316.	$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$	$x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}$	$x^2-6$

### Sul segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado

317. Completare la seguente tabella come è indicato nelle prime righe:

Equazione	$\Delta$	Variazioni nel segno dei coefficienti	Segno delle soluzioni
$x^2-13x+36=0$	$\Delta=13^2-4\cdot 36=25>0$	due	due positive
$x^2+13x+36=0$	$\Delta=25>0$	nessuna	due negative
$x^2+13x+45=0$	$\Delta=13^2-4\cdot 45=-11<0$	non si esaminano	no
$-5x^2+11x-2=0$			
$-5x^2-11x-2=0$			
$-5x^2+11x-10=0$			
$-5x^2+10x-5=0$			

Esaminare le equazioni date negli esercizi dal n. 318 al n. 329 e risolvere i seguenti quesiti:

- stabilire se l'equazione ha soluzioni reali, esaminandone il discriminante;
- nel caso in cui l'equazione ha le radici reali, determinarne il segno.

318.	$5x^2-6x+1=0$	$5x^2+6x+1=0$	319.	$-7x^2+8x-1=0$	$-7x^2-8x-1=0$
320.	$-13x^2-14x-1=0$	$-13x^2+14x-1=0$	321.	$5x^2-11x+2=0$	$2x^2+11x+5=0$
322.	$3x^2-5x+8=0$	$3x^2-5x+2=0$	323.	$-3x^2-7x-2=0$	$-3x^2+7x-5=0$
324.	$-4x^2+4x-1=0$	$4x^2+4x+1=0$	325.	$2x^2-5x+2=0$	$2x^2+5x-2=0$
326.	$5x^2-7x+2=0$	$-5x^2-7x-2=0$	327.	$5x^2-4x-1=0$	$-5x^2+4x+1=0$
322.	$7x^2-6x+1=0$	$7x^2+6x-1=0$	329.	$2x^2-x-3=0$	$-2x^2+x+3=0$

## Sul segno di un trinomio di 2° grado

### Studiare il segno di un trinomio di 2° grado

*Gli esercizi dal n. 330 al n. 346 conducono a studiare il segno di trinomi di 2° grado. Per risolvere questi esercizi basta ricordare le conclusioni raggiunte nel paragrafo 6; tuttavia lo svolgimento degli esercizi risulta più efficace se viene accompagnato dal grafico delle parabole che visualizzano ciascun trinomio.*

Studiare il segno dei trinomi assegnati negli esercizi dal n. 330 al n. 346 e interpretare dal punto di vista grafico i risultati ottenuti.

330.	$y=x^2-4$	$y=x^2+4$	$y=4x^2$	$y=x^2+4x$
331.	$y=2x^2$	$y=2+x^2$	$y=-2x^2$	$y=-2+x^2$
332.	$y=-3x^2$	$y=-3x^2+6$	$y=-3x^2+6x$	$y=-3x^2-6$
333.	$y=4x^2-1$	$y=1-4x^2$	$y=x^2-\frac{1}{4}$	$y=-\frac{1}{4}x^2$
334.	$y=x^2-2x$	$y=x^2-2x+1$	$y=x^2-2x+2$	$y=x^2+2$
335.	$y=-4x^2+4x$	$y=-4x^2+4x-2$	$y=-4x^2-1$	$y=-4x^2+4x-1$
336.	$y=-x^2$	$y=-x^2+2x-1$	$y=-x^2+6x-9$	$y=-x^2-9$
337.	$y=x^2+5x+4$	$y=x^2-5x+4$	$y=-x^2+5x-4$	$y=-x^2+5x$
338.	$y=x^2-8x+16$	$y=-x^2+8x-16$	$y=-x^2-8x-16$	$y=-x^2+8$
339.	$y=5x^2+x+1$	$y=-5x^2-x-1$	$y=-5x^2-x$	$y=-5x^2$
340.	$y=x^2+x-3$	$y=x^2+x-20$	$y=-x^2-x+20$	$y=-x^2+20$
341.	$y=2x^2-2\sqrt{2}x+1$	$y=2x^2-2\sqrt{2}x$	$y=2x^2-2\sqrt{2}$	$y=2x^2+2\sqrt{2}$
342.	$y=-3x^2+2\sqrt{3}x-1$	$y=-3x^2+2\sqrt{3}$	$y=-3x^2+2\sqrt{3}x$	$y=2\sqrt{3}x^2$
343.	$y=x^2-6\sqrt{2}x+16$	$y=x^2+16$	$y=x^2-6\sqrt{2}x$	$y=x^2-6\sqrt{2}$
344.	$y=-4x^2+4\sqrt{5}$	$y=-4x^2+4\sqrt{5}x$	$y=-4x^2+4\sqrt{5}x-1$	$y=-4\sqrt{5}x^2$
345.	$y=x^2-\sqrt{7}x$	$y=\sqrt{7}x^2$	$y=x^2-\sqrt{7}x-14$	$y=x^2-\sqrt{7}$
346.	$y=-x^2+4\sqrt{3}$	$y=-4\sqrt{3}x^2$	$y=-x^2+4\sqrt{3}x$	$y=-x^2+4\sqrt{3}x-12$

## Riflettere sul segno di un trinomio di 2° grado

Gli esercizi dal n. 347 al 354 conducono a riflettere sul modo di scrivere i risultati dello studio del segno di un trinomio.

- 347.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=x^2+4$  non ha radici reali, perciò non è possibile studiarne il segno.
  - Il trinomio  $y=x^2-8x+16$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=4$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $x>4$
  - Il trinomio  $y=x^2-8x-9$  ha le radici  $x_1=-1$  e  $x_2=9$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $9<x<-1$
- 348.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=x^2-4$  non ha radici reali, perciò è sempre positivo.
  - Il trinomio  $y=x^2-4$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=2$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $x>2$
  - Il trinomio  $y=x^2-4$  ha le radici  $x_1=-2$  e  $x_2=2$ , perciò risulta:  
 $y<0$  per  $2<x<-2$
- 349.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=4x^2$  non ha radici reali, perciò non è possibile studiarne il segno.
  - Il trinomio  $y=4x^2$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=2$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $x>2$
  - Il trinomio  $y=4x^2$  ha le radici  $x_1=-\frac{1}{2}$  e  $x_2=\frac{1}{2}$ , perciò risulta:  
 $y<0$  per  $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$
- 350.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=x^2-2$  non ha radici reali, perciò è sempre positivo.
  - Il trinomio  $y=x^2-2$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=\sqrt{2}$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $x\neq\sqrt{2}$
  - Il trinomio  $y=x^2-2$  ha le radici  $x_1=-\sqrt{2}$  e  $x_2=\sqrt{2}$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$
- 351.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=-x^2+2x$  non ha radici reali, perciò è sempre negativo.
  - Il trinomio  $y=-x^2+2x$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=2$  perciò risulta:  
 $y<0$  per  $x\neq 2$
  - Il trinomio  $y=-x^2+2x$  ha le radici  $x_1=0$  e  $x_2=-2$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $-2<x<0$
- 352.** Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- Il trinomio  $y=-2x^2$  non ha radici reali, perciò è sempre negativo.
  - Il trinomio  $y=-2x^2$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ , perciò risulta:  
 $y<0$  per  $x\neq\frac{1}{2}$
  - Il trinomio  $y=-2x^2$  ha le radici  $x_1=-\sqrt{2}$  e  $x_2=\sqrt{2}$ , perciò risulta:  
 $y>0$  per  $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

353. Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- a. Il trinomio  $y=-4x^2+1$  non ha radici reali, perciò è sempre negativo.
- b. Il trinomio  $y=-4x^2+1$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ , perciò risulta:

$$y < 0 \quad \text{per} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

- c. Il trinomio  $y=-4x^2+1$  ha le radici  $x_1=-2$  e  $x_2=2$ , perciò risulta:
- $$y > 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 2$$

354. Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori:
- a. Il trinomio  $y=4x+1$  non ha radici reali, perciò è sempre positivo.

- b. Il trinomio  $y=4x+1$  ha le radici coincidenti  $x_1=x_2=-\frac{1}{4}$ , perciò risulta:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad x \neq -\frac{1}{4}$$

- c. Il trinomio  $y=4x+1$  ha le radici  $x_1=-\frac{1}{2}$  e  $x_2=\frac{1}{2}$ , perciò risulta:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{1}{2}$$

355. È dato il seguente trinomio che ha due radici reali:

$$y=2x^2-7x+3$$

Completare la seguente tabella per stabilire quali fra i seguenti numeri si trova all'interno dell'intervallo delle radici: 4, 2, 1, 0.

Trinomio	Segno di $a$	Numero	Corrispondente valore di $y$	Conclusione
$y=3x^2-7x+2$	$a=3>0$	4	$3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 2 = 22 > 0$	$y$ ha lo stesso segno di $a$ perciò 4 non è all'interno dell'intervallo delle radici
$y=3x^2-7x+2$		2		
$y=3x^2-7x+2$		1		
$y=3x^2-7x+2$		0		

356. È dato il seguente trinomio:

$$y=2x^2-7x+3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. stabilire se il trinomio ha radici reali, esaminando il discriminante della corrispondente equazione;
- b. se il trinomio ha radici reali, stabilire, senza risolvere l'equazione, quali fra i seguenti numeri si trova all'interno dell'intervallo delle radici: 0, 1, 2, 4.

357. Ripetere l'esercizio 356 a partire dal trinomio e dai numeri seguenti:

$$y=-x^2+7x-6 \quad -3, 0, 2, 5$$

358. Ripetere l'esercizio 356 a partire dal trinomio e dai numeri seguenti:

$$y=3x^2-2x-1 \quad -2, 0, 1, 4$$

359. Ripetere l'esercizio 356 a partire dal trinomio e dai numeri seguenti:

$$y=-x^2+2x-3 \quad -4, -1, 0, 2$$

360. Ripetere l'esercizio 356 a partire dal trinomio e dai numeri seguenti:

$$y = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 \quad -2, 0, 1, \sqrt{2}, 2\sqrt{6}$$

361. Ripetere l'esercizio 356 a partire dal trinomio e dai numeri seguenti:

$$y = -4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 \quad 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}$$

## Sulle disequazioni di 2° grado

### Risolvere disequazioni di 2° grado

Gli esercizi dal n. 362 al n. 420 richiedono di risolvere disequazioni di 2° grado, seguendo il procedimento indicato nel paragrafo 7.

362. Risolvere la seguente disequazione:

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

completando il procedimento indicato qui sotto.

- I. Si calcola il discriminante  $\Delta$  della corrispondente equazione, ottenendo:

$$\Delta = \dots = 9 > 0$$

Si conclude che il trinomio ha le radici .....

- II. Si determinano le radici del trinomio, date da:

$$x = \frac{7 \pm \dots}{\dots}$$

Si ottengono quindi le radici  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 5$ .

- III. Si studia il segno del trinomio, tenendo presente che risulta:

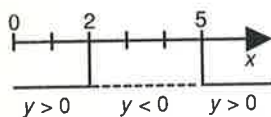
$$a = \dots > 0$$

Si sintetizzano i risultati in uno schema come quello di fig. 13.

- IV. Si conclude che tutte le soluzioni della disequazione data formano l'intervallo:

$$2 < x < 5$$

Figura 13



363. Basarsi sul procedimento seguito nell'esercizio 362 per risolvere la disequazione:
- $$x^2 - 7x + 10 < 0$$

364. Ripetere il procedimento indicato nell'esercizio 362 per risolvere le disequazioni:
- $$-x^2 + 7x - 10 < 0 \quad -x^2 + 7x - 10 > 0$$

365. Spiegare perché le seguenti disequazioni non hanno soluzioni:
- $$x^2 - 4x + 4 < 0 \quad x^2 - x + 5 < 0$$

366. Spiegare perché le seguenti disequazioni non hanno soluzioni:
- $$-9x^2 + 6x - 1 > 0 \quad -2x^2 + x - 5 > 0$$

Esaminare le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. 367 al n. 420 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. determinare tutte le soluzioni di ogni disequazione e rappresentarle sulla retta;  
b. sostituire a  $x$  una soluzione e verificare se si ottiene una disuguaglianza vera.

367.  $x^2 - 8x + 15 > 0$   $x^2 - 8x + 15 < 0$   $x^2 - 8x + 16 > 0$   $x^2 - 8x + 16 < 0$



368.	$-x^2+8x-15>0$	$-x^2+8x-15<0$	$-x^2+8x-16>0$	$-x^2+8x-16<0$
369.	$x^2+8>0$	$x^2+8<0$	$x^2+8x+15>0$	$x^2+8x+15<0$
370.	$-x^2-8>0$	$-x^2-8<0$	$-x^2-8x-15>0$	$x^2-8x-15<0$
371.	$7x^2+2x+5<0$	$7x^2+2x+5>0$	$7x^2-2x<0$	$7x^2-2x>0$
372.	$-7x^2-2x-5<0$	$-7x^2-2x-5>0$	$-7x^2+2x<0$	$-7x^2+2x>0$
373.	$7x^2-2x+5>0$	$7x^2-2x+5<0$	$7x^2-2>0$	$7x^2-2<0$
374.	$-7x^2+2x-5>0$	$-7x^2+2x-5<0$	$-7x^2+2>0$	$-7x^2+2<0$
375.	$3x^2+10x<0$	$3x^2+10x>0$	$3x^2+10x-8<0$	$3x^2+10x-8>0$
376.	$-3x^2-10x<0$	$-3x^2-10x>0$	$-3x^2-10x+8<0$	$-3x^2-10x+8>0$
377.	$3x^2+10>0$	$3x^2+10<0$	$3x^2-10x+8>0$	$3x^2-10x+8<0$
378.	$-3x^2-10>0$	$-3x^2-10<0$	$-3x^2+10x-8>0$	$-3x^2+10x-8<0$
379.	$4x^2-8x<0$	$4x^2-8x>0$	$4x^2-8<0$	$4x^2-8>0$
380.	$-4x^2+8x<0$	$-4x^2+8x>0$	$-4x^2+8<0$	$-4x^2+8>0$
381.	$4x^2-8x+3>0$	$4x^2-8x+3<0$	$4x^2+8x+5>0$	$4x^2+8x+5<0$
382.	$-4x^2+8x-3>0$	$-4x^2+8x-3<0$	$-4x^2-8x-5>0$	$-4x^2-8x-5<0$
383.	$9x^2-12x+4<0$	$9x^2-12x+4>0$	$9x^2<0$	$9x^2>0$
384.	$-9x^2+12x-4<0$	$-9x^2+12x-4>0$	$-9x^2<0$	$-9x^2>0$
385.	$9x^2+12x+4>0$	$9x^2+12x+4<0$	$9x^2+12x>0$	$9x^2+12x<0$
386.	$-9x^2-12x-4>0$	$-9x^2-12x-4<0$	$-9x^2-12x>0$	$-9x^2-12x<0$
387.	$\frac{1}{2}x^2-2x+2<0$	$\frac{1}{2}x^2-2x+2>0$	$\frac{1}{2}x^2+2<0$	$\frac{1}{2}x^2+2>0$
388.	$-\frac{1}{2}x^2+2x-2<0$	$-\frac{1}{2}x^2+2x-2>0$	$-\frac{1}{2}x^2-2<0$	$-\frac{1}{2}x^2-2>0$
389.	$\frac{1}{2}x^2-2x>0$	$\frac{1}{2}x^2-2x<0$	$\frac{1}{2}x^2+2x+2>0$	$\frac{1}{2}x^2+2x+2<0$
390.	$-\frac{1}{2}x^2+2x>0$	$-\frac{1}{2}x^2+2x<0$	$-\frac{1}{2}x^2-2x-2>0$	$-\frac{1}{2}x^2-2x-2<0$
391.	$\frac{1}{3}x^2-4x+3<0$	$\frac{1}{3}x^2-4x+3>0$	$\frac{1}{3}x^2+3<0$	$\frac{1}{3}x^2+3>0$
392.	$-\frac{1}{3}x^2+4x-3<0$	$-\frac{1}{3}x^2+4x-3>0$	$-\frac{1}{3}x^2-3<0$	$-\frac{1}{3}x^2-3>0$

- |      |   |                                       |                               |                          |
|------|---|---------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| 393. | $\frac{1}{2}x^2-4x>0$                   | $\frac{1}{2}x^2-4x<0$                 | $\frac{1}{2}x^2+4x+3>0$       | $\frac{1}{2}x^2+4x+3<0$  |
| 394. | $-\frac{1}{2}x^2+4x>0$                  | $-\frac{1}{2}x^2+4x<0$                | $-\frac{1}{2}x^2-4x-3>0$      | $-\frac{1}{2}x^2-4x-3<0$ |
| 395. | $3,5x^2-6,2x+2<0$                       | $3,5x^2-6,2x+2>0$                     | $3,5x^2-6,2x<0$               | $3,5x^2-6,2x>0$          |
| 396. | $-3,5x^2+6,2x-2<0$                      | $-3,5x^2+6,2x-2>0$                    | $-3,5x^2+6,2x<0$              | $-3,5x^2+6,2x>0$         |
| 397. | $3,5x^2+6,2x+2>0$                       | $3,5x^2+6,2x+2<0$                     | $3,5x^2+2>0$                  | $3,5x^2+2<0$             |
| 398. | $-3,5x^2-6,2x-2>0$                      | $-3,5x^2-6,2x-2<0$                    | $-3,5x^2-2>0$                 | $-3,5x^2-2<0$            |
| 399. | $1,3x^2+8,8x+10>0$                      | $1,3x^2+8,8x+10<0$                    | $1,3x^2+8,8x>0$               | $1,3x^2+8,8x<0$          |
| 400. | $-1,3x^2-8,8x-10>0$                     | $-1,3x^2-8,8x-10<0$                   | $-1,3x^2-8,8x>0$              | $-1,3x^2-8,8x<0$         |
| 401. | $1,3x^2-8,8x+10<0$                      | $1,3x^2-8,8x+10>0$                    | $1,3x^2+10<0$                 | $1,3x^2+10>0$            |
| 402. | $-1,3x^2+8,8x-10<0$                     | $-1,3x^2+8,8x-10>0$                   | $-1,3x^2-10<0$                | $-1,3x^2-10>0$           |
| 403. | $2,5x^2+5x+2,1>0$                       | $2,5x^2+5x+2,1<0$                     | $2,5x^2+5x>0$                 | $2,5x^2+5x<0$            |
| 404. | $-2,5x^2-5x-2,1>0$                      | $-2,5x^2-5x-2,1<0$                    | $-2,5x^2-5x>0$                | $-2,5x^2-5x<0$           |
| 405. | $2,5x^2-5x+2,5<0$                       | $2,5x^2-5x+2,5>0$                     | $2,5x^2+5<0$                  | $2,5x^2+5>0$             |
| 406. | $-2,5x^2+5x-2,5<0$                      | $-2,5x^2+5x-2,5>0$                    | $-2,5x^2-5<0$                 | $-2,5x^2-5>0$            |
| 407. | $x^2-4\sqrt{2}x+6<0$                    | $x^2-4\sqrt{2}x+6>0$                  | $x^2-\sqrt{2}x<0$             | $x^2-\sqrt{2}x>0$        |
| 408. | $-x^2+4\sqrt{2}x-6<0$                   | $-x^2+4\sqrt{2}x-6>0$                 | $-x^2+\sqrt{2}x<0$            | $-x^2+\sqrt{2}x>0$       |
| 409. | $x^2+2\sqrt{3}x+3>0$                    | $x^2+2\sqrt{3}x+3<0$                  | $x^2-\sqrt{3}>0$              | $x^2-\sqrt{3}<0$         |
| 410. | $-x^2-2\sqrt{3}x-3>0$                   | $-x^2-2\sqrt{3}x-3<0$                 | $-x^2+\sqrt{3}>0$             | $-x^2+\sqrt{3}<0$        |
| 411. | $5x^2-2\sqrt{10}x+2<0$                  | $5x^2-2\sqrt{10}x+2>0$                | $5x^2-2\sqrt{10}x<0$          | $5x^2-2\sqrt{10}x>0$     |
| 412. | $-5x^2+2\sqrt{10}x-2<0$                 | $-5x^2+2\sqrt{10}x-2>0$               | $-5x^2+2\sqrt{10}x<0$         | $-5x^2+2\sqrt{10}x>0$    |
| 413. | $7x^2+2\sqrt{14}x+2>0$                  | $7x^2+2\sqrt{14}x+2<0$                | $7x^2+2\sqrt{14}>0$           | $7x^2+2\sqrt{14}<0$      |
| 414. | $-7x^2-2\sqrt{14}x-2>0$                 | $-7x^2-2\sqrt{14}x-2<0$               | $-7x^2-2\sqrt{14}>0$          | $-7x^2-2\sqrt{14}<0$     |
| 415. | $x^2-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}>0$ | $x^2+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})>0$          | $x^2-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})x>0$ |                          |
| 416. | $x^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+2\sqrt{6}<0$ | $x^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x<0$         | $x^2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})<0$  |                          |
| 417. | $-\sqrt{6}x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x-1>0$ | $-\sqrt{6}x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x>0$ | $-\sqrt{6}x^2>0$              |                          |
| 418. | $\sqrt{2}x^2-(2\sqrt{2}+1)x+1<0$        | $\sqrt{2}x^2-(2\sqrt{2}+1)x<0$        | $\sqrt{2}x^2-1<0$             |                          |

419.  $-2x^2+(5\sqrt{5}-6)x-2>0$        $-2x^2+(5\sqrt{5}-6)>0$        $-2x^2+(5\sqrt{5}-6)x>0$

420.  $x^2-(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1>0$        $x^2-(2\sqrt{3}+1)x>0$        $x^2+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1>0$

## Sulle equazioni e disequazioni equivalenti

### Scrivere equazioni o disequazioni equivalenti

Gli esercizi dal n. 421 al n. 432 conducono a scrivere equazioni o disequazioni equivalenti.

421. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$x^2-2x=0$$

Completare la tabella per scrivere delle equazioni equivalenti a quella data con i seguenti procedimenti:

- I. moltiplicando i due membri per un numero positivo;
- II. moltiplicando i due membri per un numero negativo;
- III. aggiungendo ai due membri un polinomio.

Equazione	Soluzioni	I equazione equivalente	II equazione equivalente	III equazione equivalente
$x^2-2x=0$		$2(x^2-2x)=2\cdot 0$ cioè $2x^2-4x=0$	$-3(x^2-2x)=-3\cdot 0$ cioè $-3x^2+6x=0$	$x^2-2x+2x=0+2x$ cioè $x^2=2x$
$x^2-2x=0$				
$x^2-2x=0$				

422. Determinare le soluzioni della disequazione:

$$x^2-2x<0$$

Completare la tabella per scrivere delle disequazioni equivalenti a quella data con i seguenti procedimenti:

- I. moltiplicando i due membri per un numero positivo;
- II. moltiplicando i due membri per un numero negativo;
- III. aggiungendo ai due membri un polinomio.

Disequazione	Soluzioni	I disequazione equivalente	II disequazione equivalente	III disequazione equivalente
$x^2-2x<0$		$2(x^2-2x)<2\cdot 0$ cioè $2x^2-4x<0$	$-3(x^2-2x)>-3\cdot 0$ cioè $-3x^2+6x>0$	$x^2-2x+2x<0+2x$ cioè $x^2<2x$
$x^2-2x<0$				
$x^2-2x<0$				

Determinare le soluzioni delle equazioni e disequazioni assegnate negli esercizi dal n. 423 al n. 432 e scrivere delle equazioni e delle disequazioni equivalenti a quelle date con i seguenti procedimenti:

- I. moltiplicando i due membri per un numero positivo;
- II. moltiplicando i due membri per un numero negativo;
- III. aggiungendo ai due membri un polinomio.

423.	$x^2-1=0$	$x^2-1>0$	$x^2-1<0$
424.	$x^2+1=0$	$x^2+1>0$	$x^2+1<0$
425.	$x^2-\frac{1}{4}=0$	$x^2-\frac{1}{4}>0$	$x^2-\frac{1}{4}<0$
426.	$x^2-x=0$	$x^2-x>0$	$x^2-x<0$
427.	$\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x}=0$	$\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x}>0$	$\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x}<0$
428.	$x^2-\frac{1}{4}x=0$	$x^2-\frac{1}{4}x>0$	$x^2-\frac{1}{4}x<0$
429.	$-\frac{1}{4}x^2=0$	$-\frac{1}{4}x^2>0$	$-\frac{1}{4}x^2<0$
430.	$x^2=0$	$x^2>0$	$x^2<0$
431.	$x^2-2x-3=0$	$x^2-2x-3>0$	$x^2-2x-3<0$
432.	$-3x^2+2x+1=0$	$-3x^2+2x+1>0$	$-3x^2+2x+1<0$

### Collegamenti col primo volume

Un altro procedimento per ottenere disequazioni equivalenti consiste nello sviluppare eventuali operazioni indicate valendosi delle regole di calcolo letterale esposte nel primo volume (capitolo sesto), come si è già applicato negli esercizi 175-210, a proposito delle equazioni.

433. Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga.

Equazione data	Sviluppo dei calcoli	Equazione ottenuta
$(x-1)^2=0$	$(x-1)^2=x^2-2x+1$	$x^2-2x+1=0$
$(x+1)^2=0$		
$(x+1)(x-1)=0$		
$x(x-1)=0$		

434. Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga.

Disequazione data	Sviluppo dei calcoli	Disequazione ottenuta
$(x-1)^2>0$	$(x-1)^2=x^2-2x+1$	$x^2-2x+1>0$
$(x+1)^2<0$		
$(x+1)(x-1)>0$		
$x(x-1)<0$		

Esaminare le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. 435 al n. 445 e risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere le disequazioni che sono equivalenti alla prima, motivando la scelta;
- dove è possibile, modificare le disequazioni che non sono equivalenti alla prima, in modo da renderle ad essa equivalenti.

435.	$x^2>1$	$x>1$	$x^2-1<0$	$0<x^2-1$
436.	$x>2$	$x^2>4$	$0>2-x$	$x^2-4>0$

437.  $x^2 > 0$        $-4x^2 > 0$        $x^2 + 4x < 4x$        $x^2 - 2x > 2x$
438.  $x^2 - 1 > 0$        $(1-x)(1+x) > 0$        $x^2 + 2x - 1 > 2x$        $x^2 > 1$
439.  $-x^2 + 1 < 0$        $(-x+1)^2 < 0$        $x^2 + 1 < 0$        $x^2 > 1$
440.  $-x^2 - 1 > 0$        $(-x-1)(x+1) > 0$        $x^2 < -1$        $x^2 + 1 > 0$
441.  $2x^2 - 1 > 0$        $(2x-1)^2 > 0$        $2(x-1)^2 > 0$        $2x^2 > 1$
442.  $(-x-1)^2 > 0$        $-x^2 - 1 > 0$        $x^2 + 2x + 1 > 0$        $-x^2 + 1 > 0$
443.  $-4x^2 + x < 0$        $4x^2 > x$        $-x^2 + 4x < 0$        $0 < 4x^2 - x$
444.  $x^2 - 4x - 3 < 0$        $x^2 - 4x < 3$        $4x + 3 < x^2$        $x^2 - 2 < 4x$
445.  $-x^2 + x + 2 > 0$        $x + 2 > x^2$        $x^2 < x + 2$        $2 - x^2 > x$
446. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $x+1=0$  si aggiunge ai due membri  $-1$  e si ha  $x=-1$ ;  
 II. da  $x^2+1=0$  si aggiunge ai due membri  $-1$  e si ha  $x^2=-1$  da cui  $x=\pm 1$ ;  
 III. da  $x^2+1>0$  si aggiunge ai due membri  $-1$  e si ha  $x^2>-1$  da cui  $x>\pm 1$ .
447. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $x-4=0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x=4$ ;  
 II. da  $x^2-4=0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x^2=4$  da cui  $x=\pm 2$ ;  
 III. da  $x^2-4>0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x^2>4$  da cui  $x>\pm 2$ .
448. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $x-4=0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x=4$ ;  
 II. da  $x^2-4=0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x^2=4$  da cui  $x=2$ ;  
 III. da  $x^2-4>0$  si aggiunge ai due membri  $4$  e si ha  $x^2>4$  da cui  $x>2$ .
449. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $x+4=0$  si aggiunge ai due membri  $-4$  e si ha  $x=-4$ ;  
 II. da  $x^2+4=0$  si aggiunge ai due membri  $-4$  e si ha  $x^2=-4$  da cui  $x=-2$ ;  
 III. da  $x^2+4>0$  si aggiunge ai due membri  $-4$  e si ha  $x^2>-4$  da cui  $x>-2$ .
450. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $4x=0$  si moltiplicano i membri per  $\frac{1}{4}$  e si ha  $x=\frac{1}{4}$ ;  
 II. da  $4x^2=0$  si moltiplicano i membri per  $\frac{1}{4}$  e si ha  $x^2=\frac{1}{4}$  da cui  $x=\pm \frac{1}{2}$ ;  
 III. da  $4x^2>0$  si moltiplicano i membri per  $\frac{1}{4}$  e si ha  $x^2>\frac{1}{4}$  da cui  $x>\pm \frac{1}{2}$ .
451. Analizzare i seguenti procedimenti e indicare quelli sbagliati, motivando la scelta:  
 I. da  $\frac{1}{4}x=0$  si moltiplicano i membri per  $4$  e si ha  $x=4$ ;  
 II. da  $\frac{1}{4}x^2=0$  si moltiplicano i membri per  $4$  e si ha  $x^2=4$  da cui  $x=\pm 2$ ;  
 III. da  $\frac{1}{4}x^2>0$  si moltiplicano i membri per  $4$  e si ha  $x^2>4$  da cui  $x>\pm 2$ .



Gli esercizi dal n. 452 al n. 484 richiedono di:

- applicare operazioni fra polinomi, prodotti notevoli e potenze di binomi per svolgere le operazioni indicate (vedere il primo volume, pp. 255-269);
- applicare le nozioni sulle disequazioni equivalenti per scrivere le disequazioni nella forma:

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{o} \quad ax^2+bx+c<0$$

- applicare le nozioni esposte in questo capitolo (paragrafi 6 e 7) per risolvere le disequazioni così ottenute;
- eseguire i calcoli con i radicali tenendo presenti le regole esposte nei capitoli 1 e 2 di questo volume.

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 452 al n. 484 e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le disequazioni nella forma:

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{o} \quad ax^2+bx+c<0$$

b. determinare le soluzioni reali delle disequazioni così ottenute, segnalando le equazioni che non hanno soluzioni reali.

- |      |   |                                 |
|------|---|---------------------------------|
| 452. | $(3-2x)^2 < \left(\frac{3}{2}x-4\right)^2 + 56$       | $[-6 < x < 6]$                  |
| 453. | $x(x+1) > 2+x(1-x)$                                   | $[x < -1; x > 1]$               |
| 454. | $(x+1)^2 < 4x^2+5(2-x)(x+1)$                          | $[-1,5 < x < 3]$                |
| 455. | $11+(x-4)^2 > 4x(x-2)$                                | $[x < -2; x > 2]$               |
| 456. | $(2x-5)^2 > 72+(x-4)^2$                               | $[x < -3; x > 7]$               |
| 457. | $(3x-4)^2 < 3+(2x-5)^2$                               | $[-1,2 < x < 2]$                |
| 458. | $(x-3)^2+(x-4)^2 < x$                                 | $[2,5 < x < 5]$                 |
| 459. | $(2x-1)^2 < 3(x-1)(x+1)$                              | [impossibile]                   |
| 460. | $(x-2)^3 > (x-2)^2(x-3)$                              | $[x \neq 2]$                    |
| 461. | $(x-2)^3 < (x-2)^2(x-3)+1$                            | $[3 < x < 1]$                   |
| 462. | $x^2(x-1) < x^2(x-5)$                                 | [impossibile]                   |
| 463. | $x^2(x-1) < x^2(x-5)+1$                               | $[-0,5 < x < 0,5]$              |
| 464. | $4(x-1)(x+2) > 5(x+3)^2+(x-1)^2$                      | $[-9 < x < -3]$                 |
| 465. | $(x-1)(x+2)+x^2+10 > (2-x)(x+4)$                      | $[x < -1; x > 0]$               |
| 466. | $(x^2-2)(x+2) > x(x+2)^2-6x^2$                        | $[-0,5 < x < 2]$                |
| 467. | $(2x-1)(x+2)+7 < 2[3x^2-x(x-3)]$                      | $[x < -2,5; x > 1]$             |
| 468. | $2x - \frac{3}{2} > \frac{x}{2} + \frac{x^2-2}{4}$    | $[3-\sqrt{5} < x < 3+\sqrt{5}]$ |
| 469. | $\frac{x(x+2)}{4} < \frac{x(5-x)}{3} + \frac{x^2}{2}$ | $[0 < x < 14]$                  |

470.  $\frac{x^2}{3} + \frac{x(x+2)}{2} > \frac{(x-3)x}{3} + 6x - 6$  [ $x < 2$ ;  $x > 6$ ]
471.  $\frac{1}{3}(x-2) < \frac{x}{2}(x-1) + \frac{2}{3}x + (1-x)(1+x)$  [ $-2 < x < \frac{5}{3}$ ]
472.  $\frac{1}{3}[2-(x-1)] < \frac{2}{3} + \frac{(1+x)(1-x)}{6}$  [impossibile]
473.  $\frac{1}{2}(x^2+1) + \frac{5}{12} > \frac{4-x^2}{3} + \frac{6x^2+1}{12}$  [ $x < -\frac{\sqrt{6}}{2}$ ;  $x > \frac{\sqrt{6}}{2}$ ]
474.  $\frac{1-3x}{5} - \frac{1+x^2}{15} < \frac{(2-x)(2+x)}{3} - \frac{1}{5} - 1 + x$  [ $0 < x < 6$ ]
475.  $\frac{x^2+3x+2}{10} > \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{15}\right)x + \frac{x}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{x}{2}\right)$  [ $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ]
476.  $\frac{2}{15} + \frac{3}{5}(2-x) > \frac{(2+x)(2-x)}{3} + \left(1 - \frac{x}{15}\right)x$  [ $x < 0$ ;  $x > 4$ ]
477.  $\frac{5}{12} + \frac{1}{2}(x^2+1) < \frac{6x^2+1}{12} + \frac{4-x^2}{3}$  [ $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ ]
478.  $(x-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(2x+1) < x+4$  [ $1-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ]
479.  $(x+2\sqrt{2})^2 + (x+4\sqrt{2})^2 > 8$  [ $x < -4\sqrt{2}$ ;  $x > -2\sqrt{2}$ ]
480.  $(x-2\sqrt{2})(x-2\sqrt{3})+5 < 2\sqrt{3}\sqrt{2}$  [impossibile]
481.  $(x+\sqrt{2})^2 + (x-\sqrt{5})^2 < x(x+2\sqrt{2})+4$  [ $\sqrt{5}-\sqrt{2} < x < \sqrt{5}+\sqrt{2}$ ]
482.  $(\sqrt{2}x+1)^2 < x^2+4+2x(\sqrt{2}-x)$  [ $x < -1$ ;  $x > 1$ ]
483.  $x^2+2x(\sqrt{2}+\sqrt{3}) < 0 + \sqrt{2}x(\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2)$  [ $-2\sqrt{6} < x < 0$ ]
484.  $6+(2\sqrt{2}+1)x^2 > (3\sqrt{2}-6\sqrt{3}x+2x^2)\sqrt{2}$  [ $x < -6\sqrt{6}$ ;  $x > 0$ ]

## Problemi che conducono a risolvere disequazioni di 2° grado

### Problemi di geometria analitica

*Gli esercizi dal 485 al n. 494 propongono problemi di geometria analitica che conducono a risolvere disequazioni di 2° grado con coefficienti numerici.*

Esaminare le parabole assegnate negli esercizi dal n. 485 al n. 488 e risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico sul piano cartesiano;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata vale 1;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata è maggiore di 1;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata è minore di 1.

485.  $y = x^2 - 2x + 1$   $y = x^2 - 2x + 2$   $y = x^2 - 2x + 3$
486.  $y = -x^2 + 2x + 1$   $y = -x^2 + 2x + 2$   $y = -x^2 + 2x + 3$

**Esercizi**

$$\begin{array}{lll}
 487. & y=x^2+1 & y=x^2-3 & y=x^2 \\
 488. & y=-x^2+1 & y=-x^2-3 & y=-x^2
 \end{array}$$

Esaminare le parabole assegnate negli esercizi dal n. 489 al n. 492 e risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico sul piano cartesiano;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata vale  $-1$ ;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata è maggiore di  $-1$ ;
- determinare i valori dell'ascissa per cui l'ordinata è minore di  $-1$ .

$$489. \quad y=x^2+4x+3 \qquad y=x^2+4x-6 \qquad y=x^2+4x+6$$

$$490. \quad y=-x^2+4x-5 \qquad y=-x^2+4x+5 \qquad y=-x^2+4x-6$$

$$491. \quad y=x^2-1 \qquad y=x^2-3 \qquad y=x^2$$

$$492. \quad y=-x^2-1 \qquad y=-x^2-3 \qquad y=-x^2$$

493. Disegnare la parabola  $y=-x^2+4x$ , che interseca l'asse delle  $x$  nei punti  $O$  e  $A$ ; considerare un punto  $B$  variabile sull'arco  $OA$  di parabola e costruire il triangolo  $OAB$ . Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare le coordinate del punto  $A$ ;
- determinare le posizioni di  $B$  per cui l'area del triangolo sia maggiore di 6.  
[Tenere presente che l'altezza del triangolo corrisponde all'ordinata di  $B$ ; si ottengono per l'ascissa di  $B$  le soluzioni:  $1 < x < 3$ ]

494. Disegnare la parabola  $x=-y^2+8y$ , che interseca l'asse delle  $y$  nei punti  $O$  e  $A$ ; considerare un punto  $B$  variabile sull'arco  $OA$  di parabola e costruire il triangolo  $OAB$ . Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare le coordinate del punto  $A$ ;
- determinare le posizioni di  $B$  per cui l'area del triangolo sia maggiore di 60.  
[Tenere presente che l'altezza del triangolo corrisponde all'ascissa di  $B$ ; si ottengono per l'ordinata di  $B$  le soluzioni:  $3 < y < 5$ ]

### Problemi di geometria piana

Gli esercizi dal n. 495 al n. 500 propongono problemi di geometria piana con le seguenti caratteristiche:

- conducono a valersi dei teoremi di Pitagora e di Euclide (vedi pp. 2-14);
- conducono a risolvere disequazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

495. Si costruiscono dei triangoli con le lunghezze dei lati che sono tre interi consecutivi; stabilire in quali casi si ottiene un triangolo rettangolo, in quali casi un triangolo acutangolo, in quali casi un triangolo ottusangolo.  
[Si ha un triangolo ottusangolo per  $n > 3$ ]

496. Si costruiscono dei triangoli con le lunghezze dei lati che sono tre interi dati da  $n-1$ ,  $2n$ ,  $2n+1$ ; stabilire in quali casi si ottiene un triangolo rettangolo, in quali casi un triangolo acutangolo, in quali casi un triangolo ottusangolo.  
[Si ha un triangolo ottusangolo per  $0 < n < 6$ ]

497. È dato un rettangolo  $ABCD$ , con il lato  $AB$  lungo 12 e il lato  $BC$  lungo 8. Considerare un punto  $P$  sul lato  $DC$  e congiungere  $P$  con  $A$  e con  $B$ . Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare le posizioni di  $P$  per cui risulta:

$$PA^2 + PB^2 < AC^2$$

- determinare le posizioni di  $P$  per cui risulta:

$$PA^2 + PB^2 > AC^2$$

[(a) Indicando con  $x$  la distanza  $DP$  si hanno le soluzioni:  $4 < x < 8$ ]

498. Sui lati di un angolo retto di vertice O sono dati due punti A e B, in modo che risulti  $OA=8$  e  $OB=4$ . Considerare sulla semiretta OA un punto P e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare le posizioni di P per cui risulta:  
 $PB^2 > 2 \cdot PA^2$
  - determinare le posizioni di P per cui risulta:  
 $PB^2 < 2 \cdot PA^2$  [(a)  $4 < OP < 28$ ]
499. Disegnare una circonferenza di centro O, con il diametro AB lungo 2; considerare un punto C sul prolungamento di AB dalla parte di B, tracciare da C la tangente CT alla circonferenza e risolvere i seguenti quesiti:
- determinare le posizioni di C per cui risulta:  
 $CT^2 + CA^2 < 12$
  - determinare le posizioni di C per cui risulta:  
 $CT^2 + CA^2 > 12$  [(b)  $OC > 2$ ]
500. Un punto M varia su una semicirconferenza con il diametro AB lungo 4; da M si traccia la perpendicolare ad AB e si indica con P il piede della perpendicolare. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare le posizioni di M per cui risulta:  
 $4 \cdot MP^2 + AP^2 < 16$
  - determinare le posizioni di M per cui risulta:  
 $4 \cdot MP^2 + AP^2 > 16$  [(b)  $\frac{4}{3} < AP < 4$ ]

### Problemi di fisica

*Gli esercizi dal n. 501 al n. 503 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:*

- richiedono nozioni elementari di fisica richiamate anche nel testo, pp. 343-347;
- conducono a risolvere disequazioni di 2° grado con coefficienti numerici.

501. Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso l'alto di 8 m/sec.; trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il corpo si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:  
 $s = -4,9t^2 + 8t$  (precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ );
  - in quali istanti il corpo si trova al disopra del punto di lancio?  
[(b)  $0 < t < 0,6$  sec.]
502. Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso il basso di 10 m/sec.; trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il corpo si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:  
 $s = 4,9t^2 + 10t$  (precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ );
  - in quali istanti il corpo è più lontano di 10 m dal punto di lancio?  
[(b)  $t > 3,6$  sec.]
503. Lungo una pista automobilistica rettilinea sono segnati due punti di controllo, A e B, distanti 300 m. La macchina passa per il punto A con una velocità di 15 m/sec. e accelera di 3 m/sec. ogni secondo; risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la macchina percorre il tratto AB seguendo la legge:  
 $s = 1,5t^2 + 15t$  (precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ );
  - in quali istanti la macchina si trova nel tratto AB?  
[(b)  $0 < t < 27$  sec.]

### Problemi vari

- 504.** Lo spazio di frenata  $s$  di un'automobile è legato alla velocità  $v$  da una legge del tipo:
- $$s = kv^2$$
- Eseguendo una prova di frenata, si trova che un'auto riesce a fermarsi in 8 metri, quando viaggia alla velocità di 40 km/h; risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare il valore di  $k$ , corrispondente all'auto esaminata;
  - a quale velocità dovrebbe procedere la stessa auto per avere uno spazio di frenata minore di 24,5 m? [ $v < 70$  km/h]
- 505.** Da un foglio rettangolare lungo 10 cm e largo 8 cm viene tagliata una striscia di larghezza uniforme da ciascuno dei suoi lati; rimane così un rettangolo di area  $S$ . Quanto deve essere larga la striscia tagliata per avere un rettangolo con l'area  $S$  maggiore di 24 cm<sup>2</sup>? [meno di 2 cm]
- 506.** Un produttore di videocassette offre degli sconti ai negozianti che comprano all'ingrosso più cassette dello stesso tipo: il prezzo base di una cassetta è di 4800 lire, ma questo prezzo viene ridotto di 200 lire per ogni cassetta acquistata. Per esempio, un cliente che acquista 5 cassette paga ogni cassetta:
- $$4800 - 5 \cdot 200 = 3800$$
- La ditta si chiede: qual è il numero  $n$  di cassette che conviene vendere ad ogni cliente con questo sconto?
- Per questo valuta anche le spese di produzione, che sono:
- 1000 lire per ogni cassetta per le materie prime;
  - 12000 lire per spese fisse.
- [ $4 < n < 15$ ]
- 507.** Si deposita in banca un capitale di 9 milioni ad un tasso di interesse composto annuo  $r$ ; risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il montante  $C$  dopo due anni è legato al tasso  $r$  dalla legge:
$$C = 9(1+r)^2$$
  - calcolare il tasso  $r$  per avere un montante  $C$  maggiore di 16 milioni.  
[Vedere primo volume, p. 285; per il quesito (b) si ha:  $r > 33\%$ ]

---

## Sui sistemi di 2° grado

---

### Sistemi di 1° e 2° grado

Gli esercizi dal n. 508 al n. 516 richiedono di:

- confrontare e risolvere sistemi di 1° e 2° grado;
- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista grafico.

L'obiettivo fondamentale di questi esercizi è di prevenire la confusione fra sistemi di 1° grado e sistemi di 2° grado con le soluzioni coincidenti.

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 508 al n. 516 e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare quale sistema è di 1° grado e quale è di 2° grado;
- determinare le soluzioni di ogni sistema;
- interpretare graficamente le soluzioni ottenute;
- spiegare perché uno dei due sistemi ha una sola soluzione, mentre l'altro ha due soluzioni coincidenti.



508.	$\begin{cases} y=2x \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=0 \end{cases}$
509.	$\begin{cases} y=x-1 \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ y=0 \end{cases}$
510.	$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=2x \end{cases}$	$\begin{cases} y=x+1 \\ y=2x \end{cases}$
511.	$\begin{cases} y=x-1 \\ y=2x-2 \end{cases}$	$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=2x-2 \end{cases}$
512.	$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2}y^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2}y \end{cases}$
513.	$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2}y^2+y-\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2} \end{cases}$
514.	$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=-x+2 \end{cases}$	$\begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \end{cases}$
515.	$\begin{cases} y=-\frac{4}{x} \\ y=x-4 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-\frac{x}{4} \\ y=x-4 \end{cases}$
516.	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ y=x \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=x \end{cases}$

### Risolvere sistemi di 2° grado col metodo di sostituzione

Gli esercizi dal n. 517 al n. 536 richiedono di risolvere sistemi di 2° grado e verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.

Esaminare i sistemi dati negli esercizi dal n. 517 al n. 536 e risolvere i seguenti quesiti:

- risolvere i sistemi col metodo di sostituzione;
- verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.

517.	$\begin{cases} x+y=6 \\ y=\frac{1}{2}x^2-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=6 \\ y=1-x^2 \end{cases}$	$[(4; 2) \text{ e } (-6; 12); \text{imp.}]$
518.	$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+12=y^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=6 \\ x+y^2=1 \end{cases}$	$[(2; 4) \text{ e } (12; -6); \text{imp.}]$
519.	$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x^2+2 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-x \\ y=x^2+2 \end{cases}$	$[(1; 3) \text{ due volte}; \text{imp.}]$

520.  $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y^2=2 \end{cases}$   $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y^2=2 \end{cases}$  [(3; 1) due volte; imp.]
521.  $\begin{cases} y=x \\ y=x^2-x+1 \end{cases}$   $\begin{cases} y=-3x+4 \\ y=x^2-x+1 \end{cases}$  [(1; 1) due volte; (-3; 13) e (1; 1)]
522.  $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y^2+y=1 \end{cases}$   $\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y^2+y=1 \end{cases}$  [(1; 1) due volte; (13; -3) e (1; 1)]
523.  $\begin{cases} x=2y+1 \\ y=x^2-8 \end{cases}$   $\begin{cases} x=2y+1 \\ y=x^2 \end{cases}$   $[(-\frac{5}{4}; -\frac{7}{4}) \text{ e } (3; 1); \text{imp.}]$
524.  $\begin{cases} y-2x=1 \\ x-y^2+8=0 \end{cases}$   $\begin{cases} y-2x=1 \\ x=y^2 \end{cases}$   $[(-\frac{7}{4}; -\frac{5}{4}) \text{ e } (1; 3); \text{imp.}]$
525.  $\begin{cases} y=x-2 \\ x^2+y^2=164 \end{cases}$   $\begin{cases} y=x-2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$  [(8; 10) e (-10; -8); imp.]
526.  $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y=4 \end{cases}$  [(-1; 2) e (2; 1); imp.]
527.  $\begin{cases} x-3y=7 \\ x^2+2y^2=9 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+2y^2=9 \\ x=4 \end{cases}$  [(1; -2) e  $(\frac{17}{11}; -\frac{20}{11})$ ; imp.]
528.  $\begin{cases} y+3x+1=0 \\ y^2-3x^2=1 \end{cases}$   $\begin{cases} y=x \\ y^2-3x^2=1 \end{cases}$  [(1; 2) e (0; -1); imp.]
529.  $\begin{cases} y=-3x \\ x^2+y^2+6x-y=1 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+y^2+6x-y=1 \\ x=2 \end{cases}$  [(-1; 3) e  $(\frac{1}{10}; -\frac{3}{10})$ ; imp.]
530.  $\begin{cases} x=-3y \\ x^2-4y^2+xy=2 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2-4y^2+xy=2 \\ x=0 \end{cases}$  [(3; -1) e (-3; 1); imp.]
531.  $\begin{cases} x=y+1 \\ x^2+xy=6 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+xy+6=0 \\ y=x+4 \end{cases}$  [(2; 1) e  $(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$ ; imp.]
532.  $\begin{cases} y=-2y-2 \\ x^2+y^2+xy+x=y \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+y^2+xy+x=y \\ y=x+4 \end{cases}$  [(-2; 2) e (-1; 0); (-2; 2) due volte]
533.  $\begin{cases} y=3 \\ 9x^2+4y^2=29 \end{cases}$   $\begin{cases} 9x^2+4y^2=29 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$  [imp.;  $(\frac{5}{3}; 1)$  e  $(\frac{2}{3}; \frac{5}{2})$ ]
534.  $\begin{cases} x=3 \\ x^2+3y^2-2x=3 \end{cases}$   $\begin{cases} x^2+3y^2-2x=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$  [(3; 0) due volte;  $(-\frac{4}{7}; -\frac{5}{7})$  e (2; 1)]

$$535. \quad \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 4x^2+y^2-2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+y^2-2y=1 \\ y=3 \end{cases} \quad [(\frac{1}{2}; 2) \text{ e } (-\frac{17}{26}; -\frac{6}{13}); \text{imp.}]$$

$$536. \quad \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x^2-2y^2+4x+2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2y^2+4x+2y=1 \\ y=-x \end{cases} \quad [(-17; -10) \text{ e } (1; 2); (1; -1) \text{ due volte}]$$

### Sui sistemi simmetrici

Gli esercizi dal n. 537 al n. 547 presentano dei sistemi simmetrici, che possono essere risolti in due modi:

- col metodo di sostituzione;
- valendosi delle relazioni fra coefficienti e soluzioni di un'equazione di 2° grado, come mostrato nel testo, p. 358.

Risolvere i sistemi simmetrici assegnati negli esercizi dal n. 537 al n. 547 col metodo che si ritiene più opportuno.

$$537. \quad \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \quad [(-3; 1) \text{ e } (1; -3); \text{imp.}]$$

$$538. \quad \begin{cases} x+y=2 \\ xy=-8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=8 \end{cases} \quad [(-2; 4) \text{ e } (4; -2); \text{imp.}]$$

$$539. \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \quad [(-1; -3) \text{ e } (-3; -1); (2; 2) \text{ due volte}]$$

$$540. \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ xy=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \quad [(-2; \frac{5}{2}) \text{ e } (\frac{5}{2}; -2); \text{imp.}]$$

$$541. \quad \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \quad [(-1; \frac{1}{2}) \text{ e } (\frac{1}{2}; -1); \text{imp.}]$$

$$542. \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{12} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{12} \\ xy=\frac{1}{12} \end{cases} \quad [(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}) \text{ e } (\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}); \text{imp.}]$$

$$543. \quad \begin{cases} x+y=-\frac{1}{10} \\ xy=-\frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\frac{1}{10} \\ xy=\frac{1}{5} \end{cases} \quad [(-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}) \text{ e } (\frac{2}{5}; -\frac{1}{2}); \text{imp.}]$$

$$544. \quad \begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=\frac{3}{2} \end{cases} \quad [(\frac{3}{2}; 1) \text{ e } (1; \frac{3}{2}); \text{imp.}]$$

$$\begin{array}{lll}
545. & \begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases} & \begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases} & [(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}) \text{ e } (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}); \text{imp.}] \\
546. & \begin{cases} x+y=2\sqrt{5} \\ xy=1 \end{cases} & \begin{cases} x+y=\sqrt{2} \\ xy=\sqrt{2} \end{cases} & [(\sqrt{5}+2; \sqrt{5}-2) \text{ e } (\sqrt{5}-2; \sqrt{5}+2); \text{imp.}] \\
547. & \begin{cases} x+y=\frac{5\sqrt{3}}{6} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} & \begin{cases} x+y=\frac{5\sqrt{3}}{6} \\ xy=\frac{5\sqrt{3}}{6} \end{cases} & [(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ e } (\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}); \text{imp.}]
\end{array}$$

### Risolvere sistemi di 2° grado

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 548 al n. 552 e risolvere i seguenti quesiti:

- individuare se c'è una sostituzione che rende particolarmente rapida la risoluzione del sistema;
- risolvere il sistema.

$$\begin{array}{lll}
548. & \begin{cases} x-y=0 \\ (x-y)(x+y)+xy=4 \end{cases} & [(-2; -2) \text{ e } (2; 2)] \\
549. & \begin{cases} x+y=0 \\ (x-y)(x+y)+xy+4=0 \end{cases} & [(2; -2) \text{ e } (-2; 2)] \\
550. & \begin{cases} 2x-3y=0 \\ x^2-3y(2x-3y)=9 \end{cases} & [(-3; -2) \text{ e } (3; 2)] \\
551. & \begin{cases} 2y-3x=0 \\ 8y^2+5x(2y-3x)=2 \end{cases} & [(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \text{ e } (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})] \\
552. & \begin{cases} x+3y=2 \\ 5x^2-(3y+x)^2=1 \end{cases} & [(1; 1); (-1; \frac{5}{3})]
\end{array}$$

Risolvere i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 553 al n. 563.

$$\begin{array}{lll}
553. & \begin{cases} x+2y=1+y \\ x(y-3)=1 \end{cases} & [(-1; 2) \text{ due volte}] \\
554. & \begin{cases} x+2(y-1)=0 \\ x(x+y)+2=y(y+1) \end{cases} & [(0; 1) \text{ e } (-10; 6)] \\
555. & \begin{cases} 3x-y-6=0 \\ (x+y)^2-y(x+y)+3=1 \end{cases} & [(1; -3) \text{ e } (\frac{1}{2}; -\frac{9}{2})] \\
556. & \begin{cases} x+y=1 \\ (y+1)^2+xy=3+y^2 \end{cases} & [(0; 1) \text{ e } (-1; 2)]
\end{array}$$

557. 
$$\begin{cases} y+3x=4 \\ (x+1)^2+x(y-1)=3 \end{cases} \quad [(2; -2) \text{ e } (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})]$$
558. 
$$\begin{cases} y+3x=x+1 \\ (y+1)^2-y(x+2)=3x \end{cases} \quad [(1; -1) \text{ e } (\frac{1}{3}; \frac{1}{3})]$$
559. 
$$\begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2-y(x+2)=3x \end{cases} \quad [(2; 1) \text{ e } (-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2})]$$
560. 
$$\begin{cases} y-3x+5=0 \\ (x-y)(x+y)+5x+y(x+1)=(x+2)^2 \end{cases} \quad [(2; 1) \text{ e } (\frac{17}{6}; \frac{7}{2})]$$
561. 
$$\begin{cases} x-y=2 \\ (x+1)^2+(y+1)^2=74 \end{cases} \quad [(6; 4) \text{ e } (-6; 8)]$$
562. 
$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ (x-y)^2+2(y+8)=x(y+10) \end{cases} \quad [(2; 4) \text{ e } (-12; -10)]$$
563. 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \\ \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{4} = -2 \end{cases} \quad [(2; 4) \text{ e } (-2; -4)]$$

## Problemi che conducono a risolvere sistemi di 2° grado

### Problemi di geometria analitica

*Gli esercizi dal n. 564 al n. 579 presentano problemi di geometria analitica che conducono a risolvere sistemi di 2° grado con i coefficienti numerici.*

564. Sono assegnate la parabola d'equazione  $y=x^2-x+2$  e le rette che hanno le equazioni seguenti:
- $y=3x-2$                        $y=3x+2$                        $y=3x-3$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della curva con ciascuna retta;
  - stabilire quale retta è secante, quale è tangente e quale è esterna alla curva;
  - disegnare sul piano cartesiano la curva e le tre rette, verificando graficamente i risultati ottenuti.
565. Ripetere l'esercizio 564, a partire dalla parabola  $y=-4x^2+x+1$  e dalle seguenti rette:
- $y=-3x+2$                        $y=-3x+4$                        $y=-3x$
566. Ripetere l'esercizio 564, a partire dalla curva  $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$  e dalle seguenti rette:
- $y=-2x+\frac{7}{2}$                        $y=-2x$                        $y=-2x+4$



**567.** Ripetere l'esercizio 564, a partire dalla curva  $y=3x^2-2x$  e dalle seguenti rette:

$$y=\frac{9}{2}x-3$$

$$y=4x-3$$

$$y=-x-3$$

**568.** Ripetere l'esercizio 564, a partire dalla curva  $y=-x^2+4x+4$  e dalle seguenti rette:

$$y=x$$

$$y=0$$

$$y=-x$$

**569.** Ripetere l'esercizio 564, a partire dall'iperbole  $y=\frac{2}{x}$  e dalle seguenti rette:

$$y=-\frac{1}{2}x-2$$

$$y=-\frac{1}{2}x$$

$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

**570.** Ripetere l'esercizio 564, a partire dall'iperbole  $y=-\frac{1}{x}$  e dalle seguenti rette:

$$y=\frac{1}{4}x+1$$

$$y=\frac{1}{4}x$$

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$$

**571.** Ripetere l'esercizio 572, a partire dall'iperbole  $y=\frac{4}{x}$  e dalle seguenti rette:

$$y=-x+4$$

$$y=-\frac{1}{2}x+4$$

$$y=4$$

**572.** È assegnata la retta  $y=4x-4$  e le parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=x^2$$

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

$$y=2x^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della retta con ciascuna curva;
- stabilire quale curva è secante, quale è tangente e quale è esterna alla retta;
- disegnare sul piano cartesiano la retta e le tre curve, verificando graficamente i risultati ottenuti.

**573.** Ripetere l'esercizio 572, a partire dalla retta  $y=-4x+8$  e dalle seguenti curve:

$$y=-x^2+2$$

$$y=-x^2+4$$

$$y=-x^2+5$$

**574.** Ripetere l'esercizio 572, a partire dalla retta  $y=2x-1$  e dalle seguenti curve:

$$y=-\frac{1}{8x}$$

$$y=-\frac{1}{x}$$

$$y=-\frac{1}{10x}$$

**575.** Ripetere l'esercizio 572, a partire dalla retta  $y=-x+5$  e dalle seguenti curve:

$$x^2+y^2=4$$

$$x^2+y^2=5$$

$$x^2+y^2=9$$

**576.** Disegnare la parabola d'equazione  $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$  e fissarvi il punto B di ascissa 0 e il punto C di ascissa 3. Considerare un punto P che varia sull'arco BC di parabola e determinare la posizione di P in modo che la somma delle sue distanze dagli assi cartesiani valga 3.

[Indicare con x e y le coordinate di P, con le relative limitazioni; queste coordinate debbono soddisfare l'equazione della parabola, insieme con la condizione  $x+y=3$ . Le coordinate di P si trovano dunque risolvendo un sistema che ha le soluzioni: (3; 0) e (1; 2)]

**577.** Disegnare la parabola d'equazione  $y=-x^2+4x$  e fissarvi il punto O e il punto A di ascissa 3. Considerare un punto P che varia sull'arco OA di parabola e determinare la posizione di P in modo che la somma della sua ordinata e del doppio della sua ascissa valga 5. [P(1; 3)]

578. Disegnare la parabola d'equazione  $x=y^2$  e fissarvi il punto O e il punto A di ordinata 3. Considerare un punto P che varia sull'arco OA di parabola e determinare la posizione di P in modo che la somma della sua ascissa e del doppio della sua ordinata valga 8. [P(4; 2)]
579. Nella zona di piano cartesiano delimitata dalla parabola d'equazione  $y=-x^2+5$  e dall'asse delle  $x$  inscrivere un rettangolo con il perimetro lungo 10.  
[Da un punto P della parabola con le coordinate positive, tracciare la parallela all'asse delle  $x$ , fino ad incontrare la parabola in Q e da P e da Q le parallele all'asse delle  $y$ . Si ottiene: P(2; 1) e Q(-2; 1)]

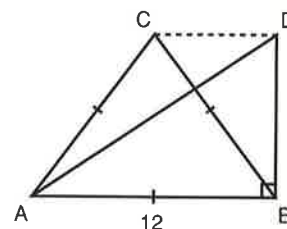
### Problemi di geometria piana

Gli esercizi dal n. 580 al n. 597 presentano problemi di geometria piana con le seguenti caratteristiche:

- richiedono di valersi dei teoremi di Pitagora e di Euclide o della similitudine;
- conducono a risolvere sistemi di 2° grado con i coefficienti numerici.

580. In fig. 14 sono disegnati due triangoli che hanno in comune il lato AB, lungo 12, e il perimetro, lungo 32; il triangolo ABD è rettangolo in B, mentre il triangolo ABC è isoscele. Risolvere i seguenti quesiti:  
a. calcolare i lati AD e DB del triangolo rettangolo;  
b. calcolare i lati e l'altezza relativa alla base del triangolo isoscele;  
c. calcolare l'area dei due triangoli e verificare che il triangolo isoscele ha l'area maggiore.  
[(a) AD=13,6; DB=6,4]
581. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 25 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12; determinare:  
a. le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa;  
b. i cateti.  
[(a) 9; 16]
582. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 5 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 2,4; determinare:  
a. i cateti;  
b. le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.  
[(a) 3; 4; (b) 1,8; 3,2]
583. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga  $\sqrt{13}$  e la somma dei cateti lunga 5; determinare la lunghezza dei cateti.  
[2; 3]
584. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga  $2\sqrt{5}$  e l'area che vale 4; determinare la lunghezza dei cateti.  
[2; 4]
585. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 1 ed è equivalente al doppio del quadrato costruito su tale altezza; determinare il perimetro  $2p$  del triangolo.  
[ $2p=2(\sqrt{6}+2)$ ]
586. Determinare i lati di un rettangolo, di cui si conoscono il perimetro lungo 16 e l'area che vale 12.  
[Le dimensioni sono 6 e 2]
587. Determinare i lati di un rettangolo, di cui si conoscono il perimetro lungo 8 e la diagonale lunga  $\sqrt{10}$ .  
[Le dimensioni sono 3 e 1]
588. Determinare i lati di un rettangolo che ha il perimetro lungo 46, sapendo che la diagonale supera di 2 un lato.  
[Le dimensioni sono 8 e 15]
589. Determinare le diagonali di un rombo, di cui si conoscono il perimetro lungo  $4\sqrt{5}$  e l'area che vale 4.  
[Le diagonali sono lunghe 4 e 2]

Figura 14



590. Un punto P varia all'interno di un rettangolo ABCD di dimensioni 2 e 6; dal punto P si tracciano le parallele ai lati e si considera il triangolo limitato da queste parallele e dalla diagonale AC.  
Determinare i lati del triangolo con l'area che è  $\frac{1}{4}$  dell'area del rettangolo.  
[I cateti sono lunghi  $\sqrt{2}$  e  $3\sqrt{2}$ ]
591. Disegnare un quadrato ABCD con il lato lungo 2; prolungare il lato AB di un tratto BE, il lato AD di un tratto DF e considerare il rettangolo AEGF che ha per dimensioni AE e AF. Stabilire come si debbono scegliere i segmenti BE e DF, in modo che il rettangolo abbia il perimetro tre volte più lungo di quello del quadrato e l'area otto volte più grande di quella del quadrato.  
[2; 6]
592. Determinare la base AB e l'altezza CH di un triangolo isoscele, sapendo che:  
- l'area del triangolo vale 36;  
- nel triangolo è inscritto un quadrato che ha il lato lungo 4.  
[Una delle due soluzioni possibili è: AB=16; CH=6]
593. Determinare il perimetro  $2p$  di un triangolo ABC, rettangolo in A, sapendo che:  
- la somma dei cateti vale 16;  
- nel triangolo è inscritto un quadrato, che ha un vertice in A e il lato lungo 3.  
[ $2p=4(4+\sqrt{10})$ ]
594. Calcolare i lati di un triangolo isoscele ottusangolo inscritto in una circonferenza di centro O e raggio 5, sapendo che la somma della base AB e dell'altezza è uguale al diametro.  
[AB=8]
595. Calcolare i lati di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di centro O e raggio 5, sapendo che la differenza fra l'altezza CH e la base AB è uguale al raggio.  
[AB= $2\sqrt{5}$ ]
596. Determinare la lunghezza delle due basi di un trapezio isoscele, che è circoscritto ad un cerchio di raggio 3 e ha il perimetro lungo 25.  
[Per le proprietà dei trapezi circoscritti ad un cerchio, vedi il primo volume, p. 232; si ottengono le basi lunghe 8 e 4,5]
597. Determinare la lunghezza delle due basi di un trapezio rettangolo, che è circoscritto ad un cerchio di raggio 1 e ha l'area che vale 6.  
[ $3\pm\sqrt{3}$ ]

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 598 al n. 605 conducono a risolvere problemi con le seguenti caratteristiche:

- richiedono nozioni elementari di fisica richiamate anche nel testo, pp. 343-347;
- conducono a risolvere sistemi di 2° grado con coefficienti numerici.

598. Un sasso lasciato cadere percorre una distanza di 122,5 m; risolvere i seguenti quesiti:
- a. spiegare perché la distanza  $s$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:  
 $s=4,9t^2$
  - b. spiegare perché la velocità  $v$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:  
 $v=9,8t$
  - c. calcolare quanto è durata la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine della caduta.  
[(c)  $t=5$  sec.;  $v=49$  m/sec.]

599. Un sasso viene lanciato con una velocità verticale verso l'alto di 63,7 m/sec.; risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la distanza  $s$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:  

$$s=63,7t-4,9t^2$$
  - spiegare perché la velocità  $v$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:  

$$v=63,7-9,8t$$
  - calcolare dopo quanto tempo raggiunge la quota massima e a quale distanza dal punto di lancio si trova tale quota massima.  
 $[t=6,5 \text{ sec.}; s=207,025 \text{ m}]$
600. Un proiettile viene lanciato con una velocità verticale verso l'alto di 68,6 m/sec.; risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le leggi con cui variano la distanza  $s$  e la velocità  $v$  al variare del tempo;
  - calcolare dopo quanto tempo e con quale velocità si trova a 117,6 m dal punto di lancio.  
 $[t_1=2 \text{ sec. e } t_2=12 \text{ sec.}]$
601. Un proiettile viene lanciato con una velocità verticale verso il basso di 68,6 m/sec.; risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le leggi con cui variano la distanza  $s$  e la velocità  $v$  al variare del tempo  $t$ ;
  - calcolare dopo quanto tempo e con quale velocità il proiettile si trova alla distanza di 156,8 m dal punto di lancio.  
 $[t=2 \text{ sec.}]$
602. Dal bordo di un pozzo si lascia cadere un sasso; fra l'istante in cui si lascia la pietra e quello in cui si sente il tonfo sul fondo passano 3 secondi. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il sasso cade verso il fondo del pozzo seguendo la legge:  

$$s=4,9t^2$$
  - spiegare perché il suono risale dal fondo del pozzo seguendo la legge:  

$$s=340t$$
  - spiegare perché il suono e il sasso percorrono la stessa distanza (che corrisponde alla profondità incognita del pozzo) in due tempi diversi, che si possono indicare con  $y$  e  $z$  ed è data la relazione:  

$$y+z=3$$
  - determinare la profondità del pozzo.  
 $[(d) \text{ circa } 40 \text{ m}]$
603. Due automobili A e B percorrono un tratto rettilineo di pista lungo 40 km, partendo contemporaneamente e muovendosi con velocità costante. Determinare le velocità delle due auto, sapendo che:
- l'auto B giunge alla fine del percorso 100 secondi dopo A;
  - l'auto A percorre ogni secondo 20 metri in più di B.
- $[80 \text{ m/sec.}; 100 \text{ m/sec.}]$
604. Al passaggio contemporaneo di due ciclisti A e B in un incrocio O ad angolo retto (fig. 15) viene avviato il cronometro; sapendo che i ciclisti procedono con velocità costanti di 6 m/sec. e 8 m/sec., calcolare dopo quanto tempo la loro distanza AB vale 40 m.  
*[Tenere presente che risulta  $OA=6t$ ,  $OB=8t$  e che il triangolo AOB è rettangolo. Si ottiene:  $t=4 \text{ sec.}$ ]*
605. Un bersaglio parte dalla posizione B e procede verso P con la velocità di 40 m/s; nell'istante in cui il bersaglio parte, viene lanciato da O verso P (fig. 16) un proiettile. Calcolare il tempo  $t$  impiegato dal proiettile a raggiungere il bersaglio e la velocità  $v$  del proiettile, avendo le seguenti informazioni:
- il proiettile e il bersaglio si muovono con velocità costante;
  - il percorso OP supera BP di 5 m.
- [Tenere presente che risulta  $BP=vt$ ,  $OP=vt+5$  e il triangolo OBP è rettangolo. Si ottiene:  $t=0,5 \text{ sec.}; v=40 \text{ m/sec.}$ ]*

Figura 15

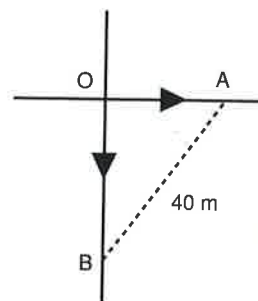
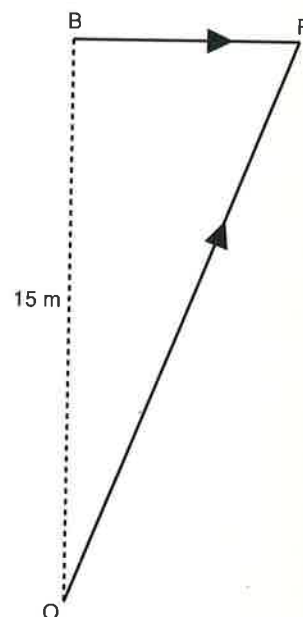


Figura 16



### Problemi vari

606. Il prodotto di due numeri reali vale 4 e la loro somma vale  $3\sqrt{2}$ ; quali sono i due numeri?  
[ $\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{2}$ ]
607. Il prodotto di due numeri reali vale 6 e la loro differenza vale  $\sqrt{3}$ ; quali sono i due numeri?  
[ $2\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ]
608. Dividere il numero 10 in due parti tali che la somma dei loro quadrati sia 62,5.  
[2,5; 7,5]
609. Dividere il numero 18 in due parti tali che la differenza dei loro quadrati sia 106.  
[12; 6]
610. La somma di due numeri è 17, mentre la somma dei loro quadrati supera di 4 il loro doppio prodotto; determinare i due numeri.  
[6; 8]

## Sulle equazioni di 2° grado letterali

### Indicare le equazioni che hanno radici reali

Gli esercizi dal n. 611 al n. 615 richiedono di determinare i valori del parametro per cui un'equazione letterale ha radici reali.

611. Basandosi sull'esempio della prima riga, completare la tabella seguente.

Equazione	a	b	c	$\Delta$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$4x^2-2kx+k^2-3=0$	4	$-2k$	$k^2-3$	$(-2k)^2-4 \cdot 4(k^2-3)=$ $=12(4-k^2)$	$4-k^2=0$ per $k=\pm 2$	$4-k^2>0$ per $-2<k<2$
$x^2+2kx+2k^2-1=0$						
$x^2-4kx+8k^2-1=0$						

612. Dopo aver svolto l'esercizio 611, esaminare l'equazione letterale:  
 $4x^2-2kx+k^2-3=0$   
Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali e coincidenti e determinare il valore delle soluzioni coincidenti;  
b. determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali.
613. Ripetere l'esercizio 612 a partire dall'equazione:  
 $x^2+2kx+2k^2-1=0$  [(a)  $k=\pm 1$ ; (b)  $-1<k<1$ ]
614. Ripetere l'esercizio 612 a partire dall'equazione:  
 $x^2-4kx+8k^2-1=0$  [(a)  $k=\pm \frac{1}{2}$ ; (b)  $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$ ]
615. Spiegare perché ha sempre due soluzioni reali e distinte l'equazione seguente:  
 $x^2-2(k-2)x-k(5k-2)=0$



### Indicare le equazioni che hanno una data soluzione

Gli esercizi dal n. 616 al n. 619 richiedono di individuare i valori del parametro per cui un'equazione ha una data soluzione.

616. Esaminare l'equazione letterale:

$$x^2 - (k+1)x + k + 5 = 0$$

Completare il procedimento indicato qui sotto per determinare il valore del parametro per cui l'equazione ha una soluzione che vale 0.

- Si sostituisce 0 a  $x$  e si ottiene:

$$\dots - (k+1) \dots + k + 5 = k + 5$$

- Il numero 0 è soluzione dell'equazione solo se risulta:

$$\dots = 0 \quad \text{da cui} \quad k = -5$$

- Si ha dunque l'equazione

$$x^2 - (\dots + 1)x + \dots + 5 = 0 \quad \text{ossia} \quad x^2 + 4x = 0$$

- Risolvendo l'equazione ottenuta si trova anche l'altra soluzione; si ha:

$$x(x+4)=0 \quad \text{da cui} \quad x_1 = \dots \quad \text{e} \quad x_2 = \dots$$

617. Dopo aver svolto l'esercizio 616, esaminare l'equazione:

$$x^2 - 4x + 4 - k^2 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare i valori del parametro per cui una soluzione vale 0;

b. calcolare l'altra soluzione delle equazioni ottenute. [ $k = \pm 2$ ;  $x_2 = 4$ ]

618. Esaminare l'equazione:

$$x^2 - 4x + 4 - k^2 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare i valori del parametro per cui una soluzione vale 1;

b. calcolare l'altra soluzione delle equazioni ottenute. [ $k = \pm 1$ ;  $x_2 = 3$ ]

619. Ripetere l'esercizio 618, a partire dall'equazione:

$$x^2 - 2(k-2)x - k(5k-2) = 0$$

$$[k=1 \text{ e } x_1=-3; k=-1 \text{ e } x_1=-7]$$

### Indicare le equazioni che sono di 1° grado

Gli esercizi dal n. 620 al n. 626 richiedono anche di indicare i valori del parametro per cui si ottengono equazioni di 1° grado.

620. Completare la seguente tabella, basandosi sull'esempio della prima riga:

Equazione	$a$	1° grado	Soluzione dell'equazione di 1° grado
$kx^2 - (k+1)x + k - 1 = 0$	$k$	$k=0$	$-x-1=0$ da cui $x=-1$
$kx^2 - 6x + k - 8 = 0$			
$(k-1)x^2 - 2kx + k + 2 = 0$			
$(k-3)x^2 + 4x + k = 0$			
$(k-1)x^2 - 6x + k - 1 = 0$			
$(2k+3)x^2 + 4x + 1 = 0$			

**621.** Esaminare l'equazione letterale:

$$kx^2 - (k+1)x + k - 1 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il valore del parametro per cui l'equazione diventa di 1° grado e risolvere la corrispondente equazione;
- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali;
- determinare il valore del parametro per cui l'equazione ha una soluzione che vale 0 e determinare l'altra soluzione.

$$[(b) 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}; (c) k=1 \text{ e } x_2=2]$$

**622.** Ripetere l'esercizio 621 a partire dall'equazione letterale:

$$kx^2 - 6x + k - 8 = 0$$

$$[(a) x = -\frac{4}{3}; (b) -1 \leq k \leq 9; (d) k=8 \text{ e } x_2 = \frac{3}{4}]$$

**623.** Ripetere l'esercizio 621 a partire dall'equazione letterale:

$$(k-1)x^2 - 2kx + k + 2 = 0$$

$$[(a) x = \frac{3}{2}; (b) k \leq 2; (d) k=-2 \text{ e } x_2=2]$$

**624.** Ripetere l'esercizio 621 a partire dall'equazione letterale:

$$(k-3)x^2 + 4x + k = 0$$

$$[(a) x = -\frac{3}{4}; (b) -1 \leq k \leq 4; (d) k=3 \text{ e } x_2 = \frac{4}{3}]$$

**625.** Esaminare l'equazione letterale:

$$(k-1)x^2 - 6x + k - 1 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il valore del parametro per cui l'equazione diventa di 1° grado e risolvere la corrispondente equazione;
- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali e coincidenti e calcolare le soluzioni coincidenti;
- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali.

$$[(a) x=0; (b) k=4 \text{ e } k=-2; (c) -2 < k < 4]$$

**626.** Esaminare la seguente equazione letterale:

$$(2k+3)x^2 + 4x + 1 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il valore del parametro per cui l'equazione diventa di 1° grado e risolvere la corrispondente equazione;
- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali;
- determinare il valore del parametro per cui l'equazione ha una soluzione che vale 1 e determinare l'altra soluzione.

$$[(a) x = -\frac{1}{4}; (b) k \leq \frac{1}{2}; (c) k=-4 \text{ e } x_1 = -\frac{1}{5}]$$

### Scrivere le soluzioni di un'equazione letterale

Gli esercizi dal n. 627 al n. 636 conducono anche a scrivere le soluzioni di un'equazione di 2° grado letterale.

**627.** Esaminare l'equazione letterale:

$$x^2 - x + m - m^2 = 0$$

Completare il procedimento indicato qui sotto per scrivere le soluzioni dell'equazione.

- si individuano i coefficienti dell'equazione che sono:

$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

$$c = \dots$$

- si calcola il discriminante  $\Delta$ , dato da:

$$\Delta = (\dots)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\dots) = \dots = (2m-1)^2$$

- si esamina il segno di  $\Delta$ , trovando che risulta:

$$(2m-1)^2 > 0 \quad \text{per } \dots$$

- si esprimono le soluzioni delle equazioni date da:

$$x = \frac{\dots \pm \sqrt{\dots}}{2} = \frac{\dots \pm \dots}{2}$$

- si ottengono in definitiva le soluzioni:

$$x_1 = m \quad \text{e} \quad x_2 = 1 - m$$

**628.** Dopo aver svolto l'esercizio 627, esaminare l'equazione letterale:

$$2x^2 - mx - m^2 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali e coincidenti e calcolare le soluzioni coincidenti;
- spiegare perché l'equazione ha sempre le soluzioni reali;
- scrivere le soluzioni dell'equazione.

$$[(a) m=0; (c) x_1 = -\frac{m}{2} \text{ e } x_2 = m]$$

**629.** Ripetere l'esercizio 628 a partire dalla seguente equazione letterale:

$$x^2 - 5mx + 4m^2 = 0$$

$$[(a) m=0; (c) x_1 = m \text{ e } x_2 = 4m]$$

**630.** Esaminare l'equazione letterale:

$$x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'equazione ha sempre le soluzioni reali e coincidenti;
- scrivere le soluzioni dell'equazione.

$$[(b) x_1 = x_2 = 2m]$$

**631.** Ripetere l'esercizio 630 a partire dalla seguente equazione letterale:

$$9x^2 - 6mx + m^2 = 0$$

$$[(b) x_1 = x_2 = \frac{m}{3}]$$

**632.** Esaminare l'equazione letterale:

$$2kx^2 - (k+2)x + 1 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il valore del parametro per cui l'equazione diventa di 1° grado e risolvere la corrispondente equazione;
- determinare i valori del parametro per cui l'equazione ha le soluzioni reali e coincidenti;
- spiegare perché l'equazione ha sempre soluzioni reali;
- scrivere le soluzioni dell'equazione.

$$[(a) x = \frac{1}{2}; (b) k=2; (d) x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1}{k}]$$

**633.** Ripetere l'esercizio 632 a partire dall'equazione seguente:

$$mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

$$[(a) x=1; (b) m=1; (d) x_1 = \frac{1}{m} \text{ e } x_2 = 1]$$

634. Ripetere l'esercizio 632 a partire dall'equazione seguente:

$$2mx^2 - (4m^2 + 1)x + 2m = 0 \quad [(a) x=0; (b) m=\pm \frac{1}{2}; (d) x_1 = \frac{1}{2m} \text{ e } x_2 = 2m]$$

635. Ripetere l'esercizio 632 a partire dalla seguente equazione:

$$(m-1)x^2 - x - m = 0 \quad [(a) x=1; (b) m = \frac{1}{2}; (d) x_1 = \frac{m}{m-1} \text{ e } x_2 = -1]$$

636. Esaminare l'equazione letterale:

$$m^2x^2 - 2mx + 1 = 0$$

Considerando l'incognita espressa dalla lettera  $x$ , risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il valore del parametro per cui l'equazione diventa di 1° grado e risolvere la corrispondente equazione;
- spiegare perché l'equazione ha sempre le soluzioni reali e coincidenti;
- scrivere le soluzioni dell'equazione.

$$[(a) \text{ imp.}; (c) x_1 = x_2 = \frac{1}{m}]$$

### Individuare l'incognita di un'equazione letterale

Gli esercizi dal n. 637 al n. 650 conducono ad esaminare equazioni letterali allo scopo di esplicitare l'incognita.

637. Esaminare l'equazione:

$$km^2 + 3k - 2km - 3m + m^2 = 0$$

Completare il seguente procedimento per scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $m$ .

- Valersi della proprietà commutativa dell'addizione per scrivere affiancati i monomi con la lettera  $m^2$ , i monomi con la lettera  $m$  e i monomi che non presentano la lettera  $m$ ; si ha:

$$km^2 + m^2 - 2km - 3m + \dots = 0$$

- Raccogliere il fattore comune  $m^2$  fra i primi due monomi e il fattore comune  $-m$  fra i secondi due monomi; si ha:

$$(k+1)m^2 - (2k+3)m + k+3 = 0$$

- Si ottiene dunque un'equazione di 2° grado che ha i seguenti coefficienti:

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$$

638. Dopo aver svolto l'esercizio 637, esaminare di nuovo l'equazione

$$km^2 + 3k - 2km - 3m + m^2 = 0$$

Considerare come incognita la lettera  $m$  e risolvere i seguenti quesiti:

- stabilire in quale caso l'equazione diventa di 1° grado e scriverne la soluzione;
- stabilire in quali casi l'equazione di 2° grado ha soluzioni reali.

$$[(a) x=2; k \geq -\frac{3}{4}]$$

639. Esaminare di nuovo l'equazione:

$$km^2 + 3k - 2km - 3m + m^2 = 0$$

Completare il seguente procedimento per scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $k$ .

- Valersi della proprietà commutativa dell'addizione per scrivere affiancati i monomi con la lettera  $k$  e i monomi che non presentano la lettera  $k$ ; si ha:

$$km^2 + k - 2km + \dots = 0$$

- Raccogliere il fattore comune  $k$  fra i primi tre monomi; si ha:

$$(m^2 + 1 - 2m)k + m^2 - 3m + 3 = 0$$

- Si ottiene dunque un'equazione di 1° grado che ha i seguenti coefficienti:

$$a = \dots \quad b = \dots$$

640. Dopo aver svolto l'esercizio 639, esaminare l'equazione:

$$km^2+3+k-2km-3m+m^2=0$$

Considerare come incognita la lettera  $k$  e risolvere i seguenti quesiti:

- stabilire in quale caso l'equazione è impossibile;
- scrivere la soluzione dell'equazione.

$$[(a) m=1]$$

641. Esaminare l'equazione letterale:

$$h(2p^2+4p+3)=3(p+1)^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $p$ ;
- stabilire in quale caso l'equazione diventa di 1° grado e scriverne la soluzione;
- stabilire in quali casi l'equazione di 2° grado ha soluzioni reali.

$$[(b) h=\frac{3}{2}; (c) \frac{3}{2} < h \leq 3]$$

642. Esaminare di nuovo l'equazione letterale:

$$h(2p^2+4p+3)=3(p+1)^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $h$ ;
- spiegare perché l'equazione ha sempre una soluzione;
- scrivere la soluzione dell'equazione.

$$[(a) (2p^2+p+3)h=3(p^2+2p+2)]$$

643. Esaminare l'equazione letterale:

$$4hm^2-1=2\sqrt{3m-m^2}-4h$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $m$ ;
- stabilire in quale caso l'equazione diventa di 1° grado e scriverne la soluzione;
- stabilire in quali casi l'equazione di 2° grado ha soluzioni reali.

$$[(b) h=-\frac{1}{4}; (c) -\frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}]$$

644. Esaminare di nuovo l'equazione letterale:

$$4hm^2-1=2\sqrt{3m-m^2}-4h$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $h$ ;
- spiegare perché l'equazione ha sempre una soluzione;
- scrivere la soluzione dell'equazione.

$$[(a) 4(m^2+1)h=1+2\sqrt{3m-m^2}]$$

645. Esaminare l'equazione letterale:

$$(2m-1)z^2=(m-1)(2z-1)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $z$ ;
- stabilire in quale caso l'equazione diventa di 1° grado e scriverne la soluzione;
- stabilire in quali casi l'equazione di 2° grado ha soluzioni reali.

$$[(b) z=\frac{1}{2}; (c) 0 \leq z \leq 1]$$

646. Esaminare di nuovo l'equazione letterale:

$$(2m-1)z^2=(m-1)(2z-1)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'equazione considerando come incognita la lettera  $m$ ;
- spiegare perché l'equazione ha sempre una soluzione;
- scrivere la soluzione dell'equazione.

$$[(a) (2z^2-2z+1)m=(z-1)^2]$$



647. Esaminare l'equazione letterale:

$$4m^2=k^2+1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- considerare la lettera  $m$  come incognita, spiegare perché l'equazione ha sempre due soluzioni reali e distinte e scrivere le soluzioni;
- considerare la lettera  $k$  come incognita, stabilire in quali casi l'equazione ha soluzioni reali e scrivere le soluzioni.

$$[(a) m=\pm \frac{\sqrt{k^2+1}}{2}; (b) k=\pm \sqrt{4m^2-1}]$$

648. Esaminare l'equazione letterale:

$$k(m^2+1)=m(k^2+1)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- considerare la lettera  $m$  come incognita, stabilire in quali casi l'equazione è di 2° grado, in quali casi ha due soluzioni coincidenti e scrivere le soluzioni;
- considerare la lettera  $k$  come incognita, stabilire in quali casi l'equazione è di 2° grado, in quali casi ha due soluzioni coincidenti e scrivere le soluzioni.

$$[(a) m=\frac{1}{k} \text{ e } m=\frac{2k^2-1}{k}; (b) k=\frac{1}{m} \text{ e } k=\frac{2m^2-1}{m}]$$

649. Ripetere l'esercizio 648 a partire dall'equazione seguente:

$$mk^2-k^2=k+m \quad [m=\frac{-1\pm 3k}{2}; k=\frac{m}{m-1} \text{ e } k=-1]$$

650. Ripetere l'esercizio 648 a partire dall'equazione seguente:

$$2k^2=m(k-m) \quad [m=-2k \text{ e } m=2k; k=-\frac{m}{2} \text{ e } k=m]$$

## Problemi che conducono ad equazioni di 2° grado letterali

### Problemi di geometria analitica

*I problemi dal n. 651 al n. 663 presentano problemi di geometria analitica che conducono ad esaminare equazioni di 2° grado letterali.*

651. Esaminare l'insieme di parabole descritto dall'equazione:

$$y=x^2-4x+k$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare le parabole tangenti all'asse delle  $x$  e tracciarne il grafico;
- indicare quali parabole sono secanti l'asse delle  $x$  e disegnare una parabola secante a piacere;
- indicare quali parabole sono esterne all'asse delle  $x$  e disegnare una parabola esterna a piacere;
- indicare la parabola che passa per l'origine  $O$  e tracciarne il grafico. [(a)  $k=\pm 2$ ]

652. Ripetere l'esercizio 651 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:

$$y=x^2+2x+1+k$$

653. Ripetere l'esercizio 651 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:

$$y=x^2-2kx+3+2k \quad [(a) k=-1 \text{ e } k=3]$$

654. Ripetere l'esercizio 651 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:

$$y=2x^2+4kx+3+k \quad [(a) k=-1 \text{ e } k=\frac{3}{2}]$$

- 655.** Ripetere l'esercizio 651 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:  

$$y = -x^2 + 2kx - k$$
[(a)  $k=0$  e  $k=1$ ]
- 656.** Esaminare l'insieme di curve descritto dall'equazione:  

$$y = x^2 - 2(k-1)x - 4$$
  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché tutte le parabole dell'insieme sono secanti l'asse delle  $x$ ;  
 b. spiegare perché nell'insieme non si trova una parabola che passa per O;  
 c. disegnare una parabola dell'insieme a piacere.
- 657.** Esaminare l'insieme di curve descritto dall'equazione:  

$$y = x^2 - 2kx$$
  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché tutte le parabole dell'insieme sono secanti l'asse delle  $x$ ;  
 b. spiegare perché tutte le parabole dell'insieme passano per O.  
 c. disegnare una parabola dell'insieme a piacere.
- 658.** Esaminare l'insieme di curve descritto dall'equazione:  

$$y = kx^2 - 2x + k$$
  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare il valore del parametro per cui si ottiene una retta e disegnare la retta ottenuta;  
 b. determinare le parabole tangenti all'asse delle  $x$  e tracciarne il grafico;  
 c. indicare quali parabole sono secanti l'asse delle  $x$  e disegnare una parabola secante a piacere;  
 d. indicare quali parabole sono esterne all'asse delle  $x$  e disegnare una parabola esterna a piacere.  
[(a)  $y=-2x$ ; (b)  $k=\pm 1$ ]
- 659.** Ripetere l'esercizio 658 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:  

$$y = kx^2 + 2kx + 3$$
[(a)  $y=3$ ; (b)  $k=3$ ]
- 660.** Ripetere l'esercizio 658 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:  

$$y = kx^2 - 2(k+1)x + k + 1$$
[(a)  $y=-2x+1$ ; (b)  $k=-1$ ]
- 661.** Ripetere l'esercizio 658 a partire dall'insieme di parabole descritto dall'equazione:  

$$y = (2k-1)x^2 - 2x + k$$
[(a)  $y=-2x+\frac{1}{2}$ ; (b)  $k=1$  e  $k=\frac{1}{2}$ ]
- 662.** Esaminare l'insieme di curve descritto dall'equazione:  

$$y = kx^2 - (k+1)x + 1$$
  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare il valore del parametro per cui si ottiene una retta e disegnare la retta ottenuta;  
 b. determinare la parabola tangente all'asse delle  $x$  e tracciarne il grafico;  
 c. spiegare perché nell'insieme non si trovano parabole esterne all'asse delle  $x$ ;  
 d. disegnare una parabola dell'insieme a piacere.  
[(a)  $y=-x+1$ ; (b)  $k=1$ ]
- 663.** Esaminare l'insieme di curve descritto dall'equazione:  

$$y = kx^2 - 3x + 2 - k$$
  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare il valore del parametro per cui si ottiene una retta e disegnare la retta ottenuta;  
 b. spiegare perché tutte le parabole dell'insieme sono secanti l'asse delle  $x$ ;  
 c. determinare la parabola dell'insieme che passa per O e tracciarne il grafico.  
[(a)  $y=-3x+2$ ]

## Problemi di geometria piana

I problemi dal n. 664 al n. 676 presentano problemi di geometria piana che conducono ad esaminare equazioni di 2° grado letterali.

- 664.** La diagonale di un quadrato supera il lato di un segmento lungo  $k$ . Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la lunghezza del lato del quadrato;  
 b. determinare la lunghezza  $d$  della diagonale del quadrato;  
 c. verificare che il rapporto fra la diagonale e il lato è  $\sqrt{2}$ . [(b)  $d=k(2+\sqrt{2})$ ]
- 665.** Dato un quadrato ABCD con il lato lungo  $b$ , considerare un punto P variabile sulla retta AB e determinare la posizione di P per cui risulta:  

$$PD = \frac{3}{2} PC$$
 [AP =  $\frac{b(9 \pm \sqrt{11})}{5}$ ]
- 666.** Disegnare una circonferenza con il raggio lungo  $r$  e la tangente  $t$  in un suo punto; disegnare una corda AB parallela a  $t$  e tracciare da A e da B le perpendicolari a  $t$ , ottenendo il rettangolo ABCD. Determinare la distanza AD, per cui il rettangolo ha la diagonale lunga  $r\sqrt{5}$ .  
[Si ottengono per la distanza AD le soluzioni:  $x_1=r$ ;  $x_2=\frac{5}{3}r$ ]
- 667.** Disegnare una circonferenza con il raggio lungo  $r$  ed una retta che dista  $2r$  dal centro O della circonferenza; determinare il lato del quadrato ABCD, che ha i vertici A e B sulla retta data e gli altri due sulla circonferenza.  
[Per la distanza fra il centro O e il lato CD, si hanno le soluzioni:  $x_1=0$ ;  $x_2=\frac{4}{5}r$ ]
- 668.** Disegnare una circonferenza di centro O, con il diametro AB lungo  $2r$ ; considerare un punto C sul prolungamento di AB dalla parte di B, tracciare da C la tangente CT alla circonferenza e determinare la posizione di C per cui risulta:  

$$CT^2 + CA^2 = 3AB^2$$
 [OC =  $2r$ ]
- 669.** Un punto M varia su una semicirconferenza con il diametro AB lungo  $2r$ ; da M si traccia la perpendicolare ad AB e si indica con P il piede della perpendicolare. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la posizione di M per cui risulta:  

$$4 \cdot MP^2 + AP^2 = AB^2$$
  
 b. interpretare dal punto di vista geometrico le soluzioni ottenute.  
[Si trovano per la distanza AP i valori:  $2r$ ;  $\frac{2r}{3}$ ]
- 670.** Un punto M varia sul lato AB lungo  $b$  di un quadrato ABCD; internamente al quadrato dato si costruisce il quadrato AMNP, che lascia nel quadrato il poligono concavo MBCDPN. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare la posizione di M per cui il poligono concavo ha l'area quattro volte più grande di quella del rettangolo di lati AM e MB;  
 b. interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.  
[Si ottengono per la distanza AM le soluzioni:  $x_1=\frac{b}{3}$ ;  $x_2=b$ ]

671. Disegnare un quadrato ABCD con il lato lungo  $b$ ; disegnare quindi il quadrato A'B'C'D' prolungando i lati di ABCD di uno stesso segmento nello stesso verso. Risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza del segmento in modo che A'B'C'D' abbia l'area cinque volte più grande di quella di ABCD;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti.
- [Si ottengono per la lunghezza del segmento le soluzioni:  $x_1 = -2b$ ;  $x_2 = b$ ]
672. Disegnare un triangolo equilatero ABC con il lato lungo  $b$ ; disegnare quindi il trapezio ACDE con la seguente costruzione:
- prolungare i lati AB e CB dalla stessa parte di B di uno stesso segmento, ottenendo i punti D ed E;
  - congiungere i punti A, C, D, E.
- Determinare la lunghezza del segmento in modo che l'area del trapezio sia  $\frac{25}{16}$  dell'area del triangolo.
- [Si ottengono per la lunghezza del segmento le soluzioni:  $x_1 = -\frac{9b}{4}$ ;  $x_2 = \frac{b}{4}$ ]
673. A partire dalla stessa costruzione indicata nell'esercizio 672, risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza del segmento in modo che l'area del trapezio sia quattro volte l'area del triangolo;
  - interpretare dal punto di vista geometrico i risultati ottenuti;
  - dire quale particolarità presenta il trapezio così ottenuto.
- [Si ottengono per la lunghezza del segmento le soluzioni:  $x_1 = -3b$ ;  $x_2 = b$ ]
674. Un punto P varia su un segmento AB lungo  $b$ . Si costruisce su AP il triangolo equilatero APQ, su PB il quadrato PBRs (dalla parte opposta del triangolo) e si congiunge A con S ottenendo il poligono concavo AQPBRs. Determinare la posizione di P per cui l'area del poligono vale  $b^2$ .
- [Si ottengono per la lunghezza di AP le soluzioni:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{6b}{\sqrt{3}+2}$ ]
675. È dato un triangolo equilatero con il lato lungo  $b$ ; si fissano sui lati AB, BC, CA i punti M, N, P in modo che risulti  $AM=BN=CP=x$ . Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che il triangolo MNP è equilatero;
  - determinare  $x$  in modo che l'area di MNP sia la terza parte dell'area di ABC.
- [(b)  $x_1 = \frac{b}{3}$ ;  $x_2 = \frac{2b}{3}$ ]
676. Un punto P varia sul lato AB di un triangolo equilatero col lato lungo  $b$ ; tracciare da P la perpendicolare PQ al lato AC e la perpendicolare PR al lato BC e considerare il triangolo QRC. Determinare la posizione di P per cui il triangolo QRC ha l'area che è  $\frac{11}{20}$  dell'area del triangolo dato.
- [ $AP = \frac{b}{10} (5 \pm \sqrt{5})$ ]

## Problemi sui poligoni regolari inscritti o circoscritti ad un cerchio

I problemi dal n. 677 al n. 686 presentano problemi sui poligoni regolari inscritti o circoscritti ad un cerchio che conducono ad esaminare equazioni di 2° grado letterali.

677. Valendosi anche delle indicazioni date nella fig. 17, calcolare il lato, il perimetro e l'area del triangolo equilatero ABC inscritto in un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=r\sqrt{3}]$$

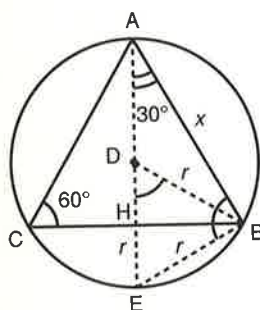
678. Valendosi anche delle indicazioni date nella fig. 18, calcolare il lato, il perimetro e l'area del triangolo equilatero ABC circoscritto ad un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=2r\sqrt{3}]$$

679. Dopo aver svolto gli esercizi 677 e 678, calcolare il raggio  $r$  del cerchio inscritto e il raggio  $R$  del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero con il lato lungo  $b$ .

$$[r=\frac{b}{6}\sqrt{3}; R=\frac{b}{3}\sqrt{3}]$$

Figura 17



680. Valendosi anche delle indicazioni date nella fig. 19, calcolare il lato AB, il perimetro e l'area dell'esagono regolare inscritto ad un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=r]$$

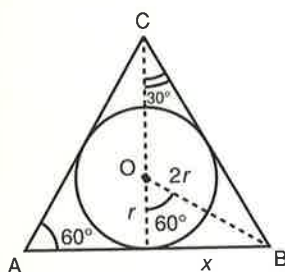
681. Valendosi anche delle indicazioni di fig. 20, calcolare il lato AB, il perimetro e l'area dell'esagono regolare circoscritto ad un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=2r\frac{\sqrt{3}}{3}]$$

682. Dopo aver svolto gli esercizi 680 e 681, calcolare il raggio  $r$  del cerchio inscritto e il raggio  $R$  del cerchio circoscritto ad un esagono regolare con il lato lungo  $b$ .

$$[r=\frac{b}{2}\sqrt{3}; R=b]$$

Figura 18



683. Dopo aver svolto gli esercizi 677-682, risolvere i seguenti quesiti:  
a. calcolare il rapporto fra l'area dell'esagono regolare e l'area del triangolo equilatero inscritti in uno stesso cerchio di raggio  $r$ ;  
b. calcolare il rapporto fra l'area dell'esagono regolare e l'area del triangolo equilatero circoscritti ad uno stesso cerchio di raggio  $r$ .

$$[(a) 2; (b) \frac{2}{3}]$$

684. Valendosi anche delle indicazioni date nella fig. 21, calcolare il lato, il perimetro e l'area del quadrato ABCD inscritto in un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=r\sqrt{2}]$$

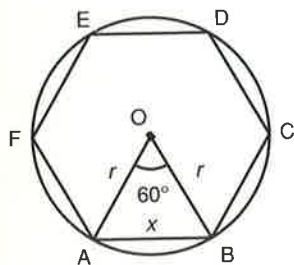
685. Valendosi anche delle indicazioni date nella fig. 22, calcolare il lato, il perimetro e l'area del quadrato ABCD circoscritto ad un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=2r]$$

686. Dopo aver svolto gli esercizi 684 e 685, calcolare il raggio  $r$  del cerchio inscritto e il raggio  $R$  del cerchio circoscritto ad un quadrato con il lato lungo  $b$ .

$$[r=\frac{b}{2}; R=b\sqrt{2}]$$

Figura 19



I problemi dal n. 687 al n. 689 richiedono di valersi delle nozioni sulla sezione aurea, esposte nel testo alle pp. 314-318.

687. Riprendere le considerazioni svolte nel testo, pp. 314-316, per determinare il lato AB, il perimetro e l'area del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB=r\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$$



688. Riprendere l'esercizio 246, p. 693, per calcolare il lato AB, il perimetro e l'area del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio  $r$ .

$$[AB = r \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}]$$

689. Dopo aver svolto gli esercizi 680, 687 e 688, dimostrare che i lati del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari inscritti in un cerchio di raggio  $r$  sono ipotenusa e cateti di uno stesso triangolo rettangolo.

### Problemi di fisica

I problemi dal n. 690 al n. 692 presentano problemi di fisica che conducono ad esaminare equazioni di 2° grado con coefficienti letterali.

690. Un sasso viene lasciato cadere nelle vicinanze della Terra e perciò si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:

$$s = 4,9t^2 \quad (1)$$

Esaminare l'equazione (1) considerando come incognita la lettera  $t$  e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'equazione ha sempre due soluzioni reali;
- scrivere la soluzione positiva.

$$[(b) t = \sqrt{\frac{s}{4,9}}]$$

691. Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso l'alto  $v_0$ ; trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché il corpo si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:

$$s = -4,9t^2 + v_0t$$

e precisare il significato delle lettere  $s$  e  $t$ ;

- calcolare quanto tempo impiega il corpo a ripassare per il punto di lancio.

$$[(b) t = \frac{v_0}{4,9}]$$

692. Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso il basso  $v_0$  e perciò si allontana dal punto di lancio seguendo la legge:

$$s = 4,9t^2 + v_0t \quad (1)$$

Esaminare l'equazione (1) considerando come incognita la lettera  $t$  e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'equazione ha sempre due soluzioni reali;
- valersi della regola dei segni esposta alle pp. 326-328 per spiegare perché l'equazione ha sempre una soluzione positiva ed una negativa;
- scrivere la soluzione positiva.

$$[(c) t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 19,6 \cdot s}}{9,8}]$$

Figura 20

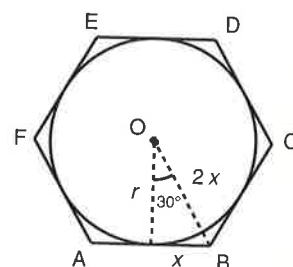


Figura 21

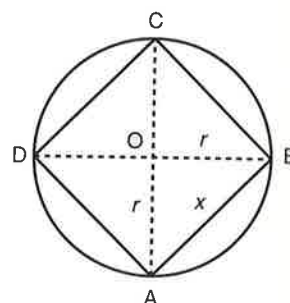
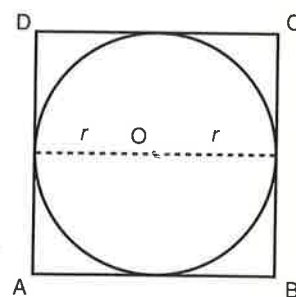


Figura 22



## Sui sistemi di 2° grado letterali

### Indicare i sistemi che hanno soluzioni reali

Gli esercizi dal n. 693 al n. 703 richiedono di determinare i valori del parametro per cui un sistema letterale ha soluzioni reali.

693. Esaminare il sistema:

$$\begin{cases} xy=4 \\ y=mx-m+3 \end{cases}$$

Considerare come incognite le lettere  $x$  e  $y$  e completare il procedimento indicato qui sotto per risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni coincidenti;
- calcolare le soluzioni coincidenti;
- determinare i valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni reali e distinte.

#### Quesito (a)

- Si risolve il sistema per sostituzione ottenendo:

$$\begin{cases} x(\dots)=4 \\ y=mx-m+3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} mx^2+(3-m)x-4=0 \\ y=mx-m+3 \end{cases} \quad (1)$$

- Si esamina l'equazione letterale di 2° grado ottenuta che ha i coefficienti:

$$a=\dots \quad b=\dots \quad c=\dots$$

e quindi il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta=(\dots)^2-4\cdot\dots=m^2+10m+9$$

- Si determinano i valori del parametro per cui il discriminante vale 0 e si ha:

$$m^2+10m+9=0 \quad \text{per} \quad m=\frac{\dots\pm\dots}{\dots}=-5\pm4$$

- Si conclude che il sistema ha le soluzioni coincidenti per  $m_1=-9$  e  $m_2=-1$ .

#### Quesito (b)

- Si sostituisce  $-9$  al posto di  $m$  nelle (1) e si ha:

$$\begin{cases} (\dots)x^2+[3-(\dots)]x+4=0 \\ y=\dots x-(\dots)+3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=\frac{-12\pm0}{\dots} \\ y=-9x+12 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x_1=x_2=\frac{2}{3} \\ y_1=y_2=6 \end{cases}$$

- Si sostituisce  $-1$  al posto di  $m$  nelle (1) e si ha:

$$\begin{cases} (\dots)x^2+[3-(\dots)]x+4=0 \\ y=\dots x-(\dots)+3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=\frac{\dots\pm0}{\dots} \\ y=\dots \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x_1=x_2=2 \\ y_1=y_2=2 \end{cases}$$

#### Quesito (c)

Si studia il segno del discriminante

$$\Delta=m^2+10m+9$$

che è un trinomio di 2° grado con le seguenti caratteristiche:

- coefficiente  $a=\dots>0$
- radici reali e distinte  $m_1=-9$  e  $m_2=-1$

Risulta quindi:

$$\Delta>0 \quad \text{per} \quad \dots$$

Si conclude che il sistema ha le soluzioni reali e distinte per  $m<-9$  o  $m>-1$ .

Dopo aver risolto l'esercizio 693, esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 694 al n. 703; considerare come incognite le lettere  $x$  e  $y$  e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni coincidenti;
- calcolare le soluzioni coincidenti;
- determinare i valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni reali e distinte.

694.	$\begin{cases} xy=2 \\ y=mx-m+1 \end{cases}$	$[(a) m=-1]$	695.	$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ y=mx+3 \end{cases}$	$[(a) m=\pm\sqrt{2}]$
696.	$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=mx \end{cases}$	$[(a) m=4]$	697.	$\begin{cases} x=y^2-2y+2 \\ x+2y=k \end{cases}$	$[(a) k=2]$
698.	$\begin{cases} x^2+2y^2-2=0 \\ y=mx-2m \end{cases}$	$[(a) m=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}]$	699.	$\begin{cases} x^2+4y^2-4=0 \\ y=mx+2 \end{cases}$	$[(a) m=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}]$
700.	$\begin{cases} xy=k \\ x+2y+4=0 \end{cases}$	$[(a) k=2]$	701.	$\begin{cases} x^2+y^2-r^2=0 \\ y=-x+2 \end{cases}$	$[(a) r=\pm\sqrt{2}]$
702.	$\begin{cases} x^2+k^2y^2-k^2=0 \\ y=2x+3 \end{cases}$	$[(a) k=\pm\sqrt{2}]$	703.	$\begin{cases} 2y+x^2-2x-2k=0 \\ x+y=3 \end{cases}$	$[(a) k=1]$

### Indicare i sistemi che sono di 1° grado

Gli esercizi dal n. 704 al n. 708 richiedono di indicare il valore del parametro per cui un sistema letterale di 2° grado diventa di 1° grado.

704. Esaminare il sistema:

$$\begin{cases} y-kx^2+3x-2+k=0 \\ y=-x \end{cases}$$

considerare come incognite le lettere  $x$  e  $y$  e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i valori del parametro per cui il sistema è di 1° grado;
- calcolare le soluzioni del sistema di 1° grado.

#### Quesito (a)

- Si individua nel sistema l'equazione di 2° grado che è .....=0
- Si individua il coefficiente di  $x^2$  che è .....
- Si conclude che il sistema è di 1° grado per  $k=0$

#### Quesito (b)

- Si sostituisce 0 al posto di  $k$  nell'equazione di 2° grado e si ha il sistema di 1° grado:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

- Si risolve il sistema per sostituzione e si ha:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Dopo aver risolto l'esercizio 704, esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 705 al n. 708; considerare come incognite le lettere  $x$  e  $y$  e risolvere i seguenti quesiti:  
a. determinare i valori del parametro per cui il sistema è di 1° grado;  
b. calcolare le soluzioni del sistema di 1° grado.

$$\begin{array}{ll} 705. \quad \begin{cases} y=kx^2+2kx+k+2 \\ y=3x-1 \end{cases} & [(b) (1; 2)] \quad 706. \quad \begin{cases} y=kx^2-(k+1)x+3 \\ 2x+y=0 \end{cases} & [(b) (-3; 6)] \\ 707. \quad \begin{cases} y=(k-1)x^2-2x+k \\ y=3x+1 \end{cases} & [(b) (0; 1)] \quad 708. \quad \begin{cases} y=(k+1)x^2-2kx-4 \\ y+x=2 \end{cases} & [(b) (2; 0)] \end{array}$$

### Scrivere le soluzioni di un sistema letterale

Gli esercizi dal n. 709 al n. 721 conducono a scrivere le soluzioni di sistemi di 2° grado letterali.

709. Completare il procedimento indicato qui sotto per scrivere le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=7k^2 \\ y-k=2x \end{cases}$$

- Si risolve il sistema per sostituzione, ottenendo:

$$\begin{cases} x^2+(\dots)^2-x(\dots)=7k^2 \\ y=\dots \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2+kx-2k^2=0 \\ y=2x+k \end{cases}$$

- Si esamina l'equazione letterale di 2° grado che ha i coefficienti:

$$a=\dots \quad b=\dots \quad c=\dots$$

e quindi il discriminante  $\Delta$  dato da:

$$\Delta=(\dots)^2-4\cdot\dots=9k^2>0 \quad \text{per } k\neq 0$$

- Si scrivono le soluzioni dell'equazione che sono date da:

$$x=\frac{\dots\pm\dots}{\dots} \quad \text{da cui} \quad x_1=-2k \quad x_2=k$$

- Si calcolano le soluzioni del sistema date da:

$$\begin{cases} x_1=-2k \\ y_1=2\cdot(\dots)+k=\dots \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=k \\ y_2=2\cdot(\dots)+k=\dots \end{cases}$$

- Si scrivono le soluzioni del sistema che sono:

$$(-2k; 3k) \quad \text{e} \quad (k; 3k)$$

Dopo aver risolto l'esercizio 709, esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 710 al n. 721 e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare gli eventuali valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni reali e coincidenti;
- indicare i valori del parametro per cui il sistema ha le soluzioni reali e distinte;
- scrivere le soluzioni del sistema.

$$\begin{array}{ll} 710. \quad \begin{cases} 3xy=k^2 \\ x=3y \end{cases} & [(c) (2k; \frac{2k}{3}) \text{ e } (-2k; -\frac{2k}{3})] \\ 711. \quad \begin{cases} x+y=2k \\ xy=k^2-9 \end{cases} & [(c) (k-3; k+3) \text{ e } (k+3; k-3)] \\ 712. \quad \begin{cases} x+y=4m \\ xy=4m^2-9 \end{cases} & [(c) (2k-3; 2k+3) \text{ e } (2k+3; 2k-3)] \end{array}$$

713.  $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4-9k^2 \end{cases}$  [(c)  $(2-3k; 2+3k)$  e  $(2+3k; 2-3k)$ ]
714.  $\begin{cases} x+y=2k \\ x^2+y^2=2(k^2+3) \end{cases}$  [(c)  $(k+\sqrt{3}; k-\sqrt{3})$  e  $(k-\sqrt{3}; k+\sqrt{3})$ ]
715.  $\begin{cases} x+y=4m \\ x^2+y^2=2(4m^2+9) \end{cases}$  [(c)  $(2k+3; 2k-3)$  e  $(2k+3; 2k-3)$ ]
716.  $\begin{cases} x+y=1-k \\ (x+k)(y+1)=(k-x)(y+1) \end{cases}$  [(c)  $(1; -k)$  e  $(-k; 1)$ ]
717.  $\begin{cases} x-2(y-1)=0 \\ x^2-xy+y^2=3k^2+1 \end{cases}$  [(c)  $(-2k; -k-1)$  e  $(2k; k-1)$ ]
718.  $\begin{cases} x-2(y-m)=0 \\ x^2+y^2=m^2+3+xy \end{cases}$  [(c)  $(2; m+1)$  e  $(-2; m-1)$ ]
719.  $\begin{cases} x(x-y)+y(x+y)=4x \\ x+\sqrt{3}y=6 \end{cases}$  [(c)  $(3; \sqrt{3})$  due volte]
720.  $\begin{cases} y+2=2(x-m)+3(m-x) \\ (x+y)^2-2y(x-m)=(m-2)^2 \end{cases}$  [(c)  $(k; -2)$  e  $(k-2; 0)$ ]
721.  $\begin{cases} x+y=m-1 \\ (x+1)(y+m)=(1-x)(y+m) \end{cases}$  [(c)  $(m; -1)$  e  $(-1; m)$ ]

## Problemi che conducono a sistemi di 2° grado letterali

### Problemi di geometria analitica

Gli esercizi dal n. 722 al n. 732 propongono problemi di geometria analitica che conducono ad esaminare sistemi di 2° grado con coefficienti letterali.

722. Esaminare la parabola d'equazione  $y=x^2+1$  e l'insieme di rette descritto dall'equazione  $y=2x+k$ .  
Risolvere i seguenti quesiti:  
a. individuare la retta che è tangente alla curva e determinare le coordinate del punto di contatto;  
b. individuare le rette che intersecano la curva;  
c. scrivere le coordinate dei punti di intersezione;  
d. tracciare il grafico della curva, della retta tangente e di una retta secante a piacere.  
[(a)  $k=0$ ; (b)  $k>0$ ]
723. Ripetere l'esercizio 722 a partire dalla parabola d'equazione  $y=x^2-4$  e dall'insieme di rette descritto dall'equazione  $y=2x+k$ .  
[(a)  $k=-5$ ; (b)  $k>-5$ ]
724. Ripetere l'esercizio 722 a partire dalla parabola d'equazione  $y=-x^2+x+3$  e dall'insieme di rette descritto dall'equazione  $y=x+k$ .  
[(a)  $k=3$ ; (b)  $k<3$ ]



725. Ripetere l'esercizio 722 a partire dall'iperbole d'equazione  $y = \frac{1}{x}$  e dall'insieme di rette descritto dall'equazione  $y = -x + k$ . [(a)  $k = \pm 2$ ; (b)  $k < -2$  o  $k > 2$ ]
726. Ripetere l'esercizio 722 a partire dalla circonferenza d'equazione  $x^2 + y^2 = 8$  e dall'insieme di rette descritto dall'equazione  $y = x + k$ . [(a)  $k = \pm 4$ ; (b)  $-4 < k < 4$ ]
727. Esaminare la retta d'equazione  $y = -2x + 7$  e l'insieme di parabole descritto dall'equazione  $y = -x^2 + 2x + k$ ; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. individuare la curva che è tangente alla retta e determinare le coordinate del punto di contatto;  
 b. individuare le parabole che intersecano la retta;  
 c. scrivere le coordinate dei punti di intersezione;  
 d. tracciare il grafico della retta, della curva tangente e di una curva secante a piacere. [(a)  $k = 3$ ; (b)  $k > 3$ ]
728. Ripetere l'esercizio 727 a partire dalla retta d'equazione  $y = 2x - 9$  e dall'insieme di parabole descritto dall'equazione  $y = x^2 - 4x + k$ . [(a)  $k = 0$ ; (b)  $k < 0$ ]
729. Ripetere l'esercizio 727 a partire dalla retta d'equazione  $y = \frac{1}{4}x$  e dall'insieme di parabole descritto dall'equazione  $x = -y^2 + 4y + k$ . [(a)  $k = 0$ ; (b)  $k > 0$ ]
730. Ripetere l'esercizio 727 a partire dalla retta d'equazione  $y = -x + 7$  e dall'insieme di parabole descritto dall'equazione  $x = -\frac{1}{3}y^2 + y + k$ . [(a)  $k = 4$ ; (b)  $k > 4$ ]
731. Ripetere l'esercizio 727 a partire dalla retta d'equazione  $y = -4x + 8$  e dall'insieme di iperboli descritto dall'equazione  $y = \frac{k}{x}$ . [(a)  $k = 4$ ; (b)  $k < 4$ ]
732. Ripetere l'esercizio 727 a partire dalla retta d'equazione  $y = -2x - 4$  e dall'insieme di iperboli descritto dall'equazione  $y = \frac{k}{x}$ . [(a)  $k = 2$ ; (b)  $k < 2$ ]

### Problemi di geometria piana

*Gli esercizi dal n. 733 al n. 749 propongono problemi di geometria piana che conducono ad esaminare sistemi di 2° grado con coefficienti letterali.*

733. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga  $k\sqrt{13}$  e la somma dei cateti lunga  $5k$ ; determinare la lunghezza dei cateti. [2k; 3k]
734. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga  $k\sqrt{5}$  e l'area che vale  $k^2$ ; determinare la lunghezza dei cateti. [k; 2k]
735. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga  $5k$  e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga  $2,4k$ ; determinare il perimetro del triangolo. [12k]
736. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga  $k$  ed è equivalente al doppio del quadrato costruito su tale altezza; determinarne il perimetro. [ $2k(\sqrt{6} + 2)$ ]
737. Determinare la base AB e l'altezza CH di un triangolo isoscele, sapendo che:  
 - l'area del triangolo vale  $4k^2$ ;  
 - nel triangolo è inscritto un quadrato che ha il lato lungo  $\frac{4k}{3}$ .  
 [Una delle due possibili soluzioni:  $AB = 4k$ ;  $CH = 2k$ ]
738. Determinare i lati di un rettangolo, di cui si conoscono il perimetro lungo  $8k$  e l'area che vale  $3k^2$ . [3k; k]

739. Determinare i lati di un rettangolo, di cui si conoscono il perimetro lungo  $8k$  e la diagonale lunga  $\sqrt{10}k$ .  
[ $3k; k$ ]
740. Determinare i lati di un rettangolo che ha il perimetro lungo  $46k$ , sapendo che la diagonale supera di  $2k$  un lato.  
[ $8k; 15k$ ]
741. Determinare le diagonali di un rombo, di cui si conoscono il perimetro lungo  $4k\sqrt{5}$  e l'area che vale  $4k^2$ .  
[ $4k; 2k$ ]
742. Disegnare un quadrato ABCD con il lato lungo  $b$ ; prolungare il lato AB di un tratto BE, il lato AD di un tratto DF e considerare il rettangolo AEGF che ha per dimensioni AE e AF. Stabilire come si debbono scegliere i segmenti BE e DF, in modo che il rettangolo abbia il perimetro tre volte più lungo di quello del quadrato e l'area otto volte più grande di quella del quadrato.  
[ $BE=b; DF=3b$ ]
743. Calcolare i lati di un triangolo isoscele ottusangolo inscritto in una circonferenza di centro O e raggio  $r$ , sapendo che la somma della base AB e dell'altezza CH è uguale al diametro.  
[ $AB=\frac{8r}{5}$ ]
744. Calcolare i lati di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di centro O e raggio  $r$ , sapendo che la differenza fra l'altezza CH e la base AB è uguale al raggio.  
[ $AB=\frac{2r}{\sqrt{5}}$ ]
745. Determinare la lunghezza delle due basi di un trapezio isoscele, che è circoscritto ad un cerchio di raggio  $r$  e ha il perimetro lungo  $\frac{25r}{3}$ .  
[Per le proprietà dei trapezi circoscritti ad un cerchio, vedi primo volume, p. 232, si ottengono le basi lunghe  $\frac{8r}{3}$  e  $\frac{3r}{2}$ ]
746. Determinare la lunghezza delle due basi di un trapezio rettangolo, che è circoscritto ad un cerchio di raggio  $r$  e ha l'area che vale  $6r^2$ .  
[ $r(3\pm\sqrt{3})$ ]
747. Un punto P varia all'interno di un rettangolo ABCD di dimensioni  $b$  e  $h$ ; dal punto P si tracciano le parallele ai lati e si considera il triangolo limitato da queste parallele e dalla diagonale AC. Determinare i lati del triangolo con l'area che è  $\frac{1}{4}$  dell'area del rettangolo.  
[ $\frac{h}{\sqrt{2}}$  e  $\frac{b}{\sqrt{2}}$ ]
748. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga  $b$ , l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga  $h$  e si vogliono calcolare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa; risolvere i seguenti quesiti:  
a. scrivere le soluzioni dell'equazione letterale ottenuta;  
b. dire in quali casi l'equazione letterale ottenuta ha soluzioni reali e in quali casi il problema ha soluzioni reali;  
c. valendosi anche della regola dei segni, esposta a p. 326, spiegare perché le soluzioni reali dell'equazione sono sempre positive;  
d. esaminare il caso particolare  $b=2h$ .  
[(a)  $\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2-4h^2})$ ; ricordare che  $b$  e  $h$  indicano numeri positivi]

749. Si vogliono determinare le dimensioni di un rettangolo che abbia il perimetro lungo  $2p$  e sia equivalente ad un quadrato con il lato lungo  $b$ . Risolvere i seguenti quesiti:
- scrivere le soluzioni dell'equazione letterale ottenuta;
  - dire in quali casi l'equazione letterale ottenuta ha soluzioni reali e in quali casi il problema ha soluzioni reali;
  - valendosi anche della regola dei segni, esposta a p. 326, spiegare perché le soluzioni reali dell'equazione sono sempre positive;
  - esaminare il caso particolare  $p=2b$ .

$$[(a) \frac{1}{2} (p \pm \sqrt{p^2 - 4b^2})]; \text{ ricordare che } b \text{ e } p \text{ indicano numeri positivi ]$$

### Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. 750 al n. 752 conducono a risolvere problemi che:

- richiedono nozioni elementari di fisica richiamate anche nel testo, pp. 343-347;
- conducono a risolvere sistemi di 2° grado con coefficienti letterali.

750. Un sasso che viene lasciato cadere percorre una distanza  $h$ ; indicare con  $g$  l'accelerazione di gravità e risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché la distanza  $s$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

- spiegare perché la velocità  $v$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$v = g t$$

- calcolare quanto dura la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine.

$$[(c) t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; v = \sqrt{2gh}]$$

751. Un sasso viene lanciato con una velocità verticale verso l'alto  $v_0$ ; indicare con  $g$  l'accelerazione di gravità e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la distanza  $s$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- spiegare perché la velocità  $v$  varia al variare del tempo  $t$  secondo la legge:

$$v = v_0 - g t$$

- calcolare dopo quanto tempo raggiunge la quota massima e a quale distanza dal punto di lancio si trova tale quota massima.

$$[(c) t = \frac{v_0}{g}; h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}]$$

752. Dal bordo di un pozzo si lascia cadere un sasso; fra l'istante in cui si lascia la pietra e quello in cui si sente il tonfo sul fondo passano  $k$  secondi. Indicare con  $g$  l'accelerazione di gravità, con  $V$  la velocità del suono e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché il sasso cade verso il fondo del pozzo seguendo la legge:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

- spiegare perché il suono risale dal fondo del pozzo seguendo la legge:

$$s = V t$$

- spiegare perché il suono e il sasso percorrono la stessa distanza (la profondità  $h$  del pozzo) in tempi diversi, da indicare con  $y$  e  $z$  ed è data la relazione:

$$y + z = k$$

- determinare la profondità  $h$  del pozzo.

$$[(d) h = V \left[ k + \frac{V}{g} - \sqrt{\frac{V}{g} \left( 2k + \frac{V}{g} \right)} \right]]$$

## Sulle equazioni di grado superiore al 2°

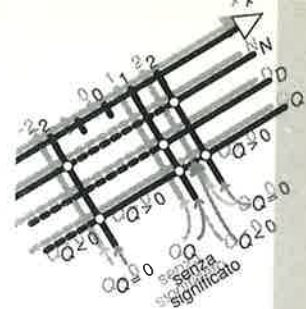
Scrivere equazioni che hanno  $n$  date soluzioni reali

1. Completare la tabella seguente come mostrato nella prima riga.

Soluzioni	Equazione 1	Equazione 2
$x_1=-3; x_2=0; x_3=3$	$[x-(-3)](x-0)(x-1)=0$	$-4[x-(-3)](x-0)(x-1)=0$
$x_1=-3; x_2=1; x_3=3$		
$x_1=-2; x_2=0; x_3=\frac{1}{2}; x_4=2$		
		$6x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)=0$
	$(x+\sqrt{5})(x+1)(x-\sqrt{5})(x-1)=0$	
		$8x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-\sqrt{6})=0$

Scrivere almeno due equazioni che abbiano le soluzioni indicate negli esercizi dal n. 2 al n. 21.

2.  $x_1=-2$        $x_2=-1$        $x_3=0$
3.  $x_1=0$        $x_2=1$        $x_3=2$
4.  $x_1=-5$        $x_2=-3$        $x_3=-1$
5.  $x_1=1$        $x_2=3$        $x_3=5$
6.  $x_1=-\frac{1}{4}$        $x_2=-\frac{1}{5}$        $x_3=0$
7.  $x_1=0$        $x_2=\frac{1}{4}$        $x_3=\frac{1}{5}$
8.  $x_1=-2$        $x_2=-\frac{4}{3}$        $x_3=-\frac{3}{4}$
9.  $x_1=\frac{3}{4}$        $x_2=\frac{4}{3}$        $x_3=2$
10.  $x_1=-\sqrt{5}$        $x_2=-\sqrt{3}$        $x_3=0$
11.  $x_1=0$        $x_2=\sqrt{3}$        $x_3=\sqrt{5}$
12.  $x_1=-4$        $x_1=-\sqrt{10}$        $x_2=-\sqrt{7}$
13.  $x_1=\sqrt{7}$        $x_2=\sqrt{10}$        $x_3=4$
14.  $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$        $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}$        $x_3=-\frac{1}{3}$
15.  $x_1=\frac{1}{3}$        $x_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$        $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$



8

Il calcolo letterale

16.  $x_1=-2$      $x_2=-1$      $x_3=1$      $x_4=2$   
 17.  $x_1=-4$      $x_2=-3$      $x_3=3$      $x_4=4$   
 18.  $x_1=-\frac{1}{2}$      $x_2=-\frac{1}{3}$      $x_3=\frac{1}{3}$      $x_4=\frac{1}{2}$   
 19.  $x_1=-\frac{3}{2}$      $x_2=-\frac{2}{3}$      $x_3=\frac{2}{3}$      $x_4=\frac{3}{2}$   
 20.  $x_1=-\sqrt{3}$      $x_2=-\sqrt{2}$      $x_3=\sqrt{2}$      $x_4=\sqrt{3}$   
 21.  $x_1=-\sqrt{5}$      $x_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$      $x_3=\frac{\sqrt{5}}{5}$      $x_4=\sqrt{5}$

22. Scrivere un'equazione che abbia 5 soluzioni scelte a piacere e un'equazione che abbia 6 soluzioni scelte a piacere.

### Determinare le soluzioni di equazioni di grado superiore al 2°

Scrivere le soluzioni delle equazioni indicate negli esercizi dal n. 23 al n. 32.

23.  $2x(x+3)(x+1)(x-1)=0$   
 24.  $-5x(x+9)(x-2)(x-3)=0$   
 25.  $\frac{3}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)=0$   
 26.  $-\frac{5}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)=0$   
 27.  $\frac{4}{5}\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-1)(x+1)=0$   
 28.  $-\frac{7}{6}\left(x+\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)(x-3)=0$   
 29.  $\sqrt{2}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-1)(x+1)=0$   
 30.  $-\sqrt{5}x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x-2)(x+2)=0$   
 31.  $\frac{\sqrt{2}}{2}x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)(x+2)=0$   
 32.  $-\frac{\sqrt{5}}{6}x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x-2)(x+3)=0$

### Collegamenti con il primo volume

Riprendere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 23 al n. 32 e sviluppare i prodotti indicati al primo membro.

[Per il prodotto di polinomi vedere il primo volume, pp. 166-167]

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 33 al n. 39 e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché tutte le equazioni di uno stesso esercizio sono equivalenti;
- indicare le soluzioni delle equazioni.

[Per le equazioni equivalenti vedere il primo volume, p. 374, e questo volume, p. 337]



33.  $x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+1)=0$   $4x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+1)=0$   $x(4x-1)(x+1)=0$
34.  $x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=0$   $3\cdot 3x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0$   $x(3x-2)(3x+4)=0$
35.  $x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$   $2\cdot 3x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$   $x(2x-1)(3x+1)=0$
36.  $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right)(x+1)=0$   $2\cdot 5\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right)(x+1)=0$   $(2x-3)(5x+7)(x+1)=0$
37.  $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x-6)=0$   $2\cdot 3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x-6)=0$   $(2x-\sqrt{2})(3x+\sqrt{3})(x-6)=0$
38.  $(4x+4)(2x-5)(3x+5)=0$   $4\cdot 2\cdot 3(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)=0$   $(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)=0$
39.  $x(\sqrt{2}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-2\sqrt{3})=0$   $\sqrt{2}\sqrt{3}x(x+1)(x-2)=0$   $x(x+1)(x-2)=0$

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 40 al n. 49 e valersi della legge di annullamento del prodotto per determinarne le soluzioni.

[Per la legge di annullamento del prodotto vedere anche il primo volume, p. 14]

40.  $(3x+3)(2x+4)(5x-10)(2x+10)=0$
41.  $(4x+4)(3x+6)(3x-15)(7x+14)=0$
42.  $(2x+1)(2x-1)(3x-1)(4x+1)=0$
43.  $(4x+2)(4x-2)(6x-2)(8x+2)=0$
44.  $(2x+1)(2x-1)(3x-5)(8x-7)=0$
45.  $(1+2x)(1-2x)(5-3x)(7-8x)=0$
46.  $(\sqrt{2}x+2)(\sqrt{2}x-2)(\sqrt{3}x-3)(\sqrt{3}x+3)=0$
47.  $(2x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{2})(3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3})=0$
48.  $(\sqrt{5}x+6)(\sqrt{5}x-6)(\sqrt{6}x-5)(\sqrt{6}x+5)=0$
49.  $(5x+\sqrt{6})(5x-\sqrt{6})(6x-\sqrt{5})(6x+\sqrt{5})=0$

### Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 50 al n. 53 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. scegliere i polinomi divisibili per  $(x-1)$ , motivando la scelta;  
b. modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per  $(x-1)$ .

50.  $x^3-4x^2+2x-5$   $x^3-4x^2-2x-5$   $x^3+4x^2-2x-5$   $-x^3-4x^2+5$

- |     |               |                 |                  |                   |
|-----|---------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 51. | $-x^4-5x^2+4$ | $x^4-5x^2+4$    | $x^4-5x+4$       | $x^4-5x^2+2x-4$   |
| 52. | $2x^4-5x+4$   | $2x^4-5x^2-x+4$ | $-4x^3+5x-1$     | $-4x^4+5x^2+2x-1$ |
| 53. | $3x^5-x-2$    | $-4x^6+5x^3-1$  | $8x^6-5x^2-2x-1$ | $-7x^5+5x^3+4$    |

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 54 al n. 57 e risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere quelli divisibili per  $(x+1)$ , motivando la scelta;
- modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per  $(x+1)$ .

- |     |                 |                  |                  |                  |
|-----|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 54. | $4x^3+x^2-2x+1$ | $-4x^3-x^2+2x-1$ | $5x^3+2x^2-x+2$  | $5x^3+2x^2+x+2$  |
| 55. | $x^4-5x^2+4$    | $x^4+5x^2+4$     | $x^4+5x+4$       | $-x^4-5x^3+2x-4$ |
| 56. | $6x^3-3x+3$     | $6x^3-3x^2+3$    | $-7x^4-5x^2+2$   | $-7x^4-5x^3+2$   |
| 57. | $-x^5-x-2$      | $x^5+x-2$        | $8x^6-5x^2+2x-1$ | $8x^6-5x^3+2x-1$ |

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 58 al n. 61 e risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere quelli divisibili per  $(x-2)$ , motivando la scelta;
- modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per  $(x-2)$ .

- |     |                     |                   |                   |                     |
|-----|---------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| 58. | $x^3-3x^2+x+2$      | $x^3+3x^2-x-2$    | $x^3+8$           | $x^3-x-6$           |
| 59. | $x^4-5x^2-x+2$      | $x^4-5x^2+x+2$    | $x^4-5x-6$        | $x^4-5x^3+10x-4$    |
| 60. | $2x^4-4x^2-2x+4$    | $2x^4-4x^3-2x+4$  | $-3x^3+6x^2-x+2$  | $-5x^4+10x^3+3x-6$  |
| 61. | $3x^5-12x^3-3x^2+6$ | $3x^5-12x^3-3x+6$ | $-3x^6+12x^4+x-8$ | $-3x^6+12x^4+x^3-8$ |

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 62 al n. 65 e risolvere i seguenti quesiti:

- scegliere quelli divisibili per  $(x+2)$ , motivando la scelta;
- modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per  $(x+2)$ .

- |     |                      |                   |                   |                     |
|-----|----------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| 62. | $x^3+2x^2+x+2$       | $x^3-2x^2-x-2$    | $x^3-8$           | $x^3-x+6$           |
| 63. | $x^4-5x^2-x+2$       | $x^4-5x^2+x+2$    | $x^4+5x-6$        | $x^4-5x^3+10x-4$    |
| 64. | $2x^4-4x^2+3x+6$     | $2x^4-4x^3+3x+6$  | $-3x^3-6x^2+x+2$  | $-5x^4-10x^3+3x+6$  |
| 65. | $-3x^5+12x^3-3x^2+6$ | $3x^5+12x^3+3x+6$ | $-3x^6+12x^4-x-8$ | $-3x^6+12x^4-x^3-8$ |

### Riflettere sulla divisibilità di un polinomio per $(x-a)$

66. Considerare un qualunque polinomio  $P(x)$  di 3° grado scritto nella forma:

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- dimostrare che  $P(x)$  è divisibile per  $(x-1)$  se e solo se la somma dei suoi coefficienti è uguale a 0;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.
67. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 66 ad un qualunque polinomio  $P(x)$  di grado  $n$ , scritto nella forma:

$$P(x)=a_nx^n+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

68. Considerare un qualunque polinomio  $P(x)$  di 3° grado scritto nella forma:
- $$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che  $P(x)$  è divisibile per  $(x+1)$  se e solo se la somma dei coefficienti dei monomi di grado pari è uguale alla somma dei coefficienti dei monomi di grado dispari;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.
69. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 68 ad un qualunque polinomio  $P(x)$  di grado  $n$ , scritto nella forma:
- $$P(x)=a_nx^n+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$
70. Considerare un qualunque polinomio  $P(x)$  di 4° grado con tutti i monomi di grado pari, scritto nella forma:
- $$P(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che se  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$  allora è divisibile anche per  $(x+a)$ ;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.
71. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 70 ad un qualunque polinomio  $P(x)$  di grado  $n$ , con tutti i monomi di grado pari, scritto nella forma:
- $$P(x)=a_nx^n+\dots+a_4x^4+a_2x^2+a_0$$
72. Considerare un polinomio  $P(x)$  di 3° grado, scritto nella forma:
- $$P(x)=mx^3+nx^2+nx+m$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che se  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$ , allora è divisibile anche per  $\left(x-\frac{1}{a}\right)$ ;
  - enunciare il teorema precedente, valendosi del connettivo di implicazione. *[Considerare l'identità  $P(a)=0$  e dividerne i due membri per  $a$ ]*
73. Considerare un polinomio  $P(x)$  di 4° grado, scritto nella forma:
- $$P(x)=mx^4+nx^3+px^2+nx+m$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che se  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$ , allora è divisibile anche per  $\left(x-\frac{1}{a}\right)$ ;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione. *[Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72]*
74. Considerare un polinomio  $P(x)$  di 3° grado, scritto nella forma:
- $$P(x)=mx^3+nx^2-nx-m$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che se  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$ , allora è divisibile anche per  $\left(x-\frac{1}{a}\right)$ ;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione. *[Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72]*
75. Considerare un polinomio  $P(x)$  di 4° grado, scritto nella forma:
- $$P(x)=mx^4+nx^3-nx-m$$
- Risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che se  $P(x)$  è divisibile per  $(x-a)$ , allora è divisibile anche per  $\left(x-\frac{1}{a}\right)$ ;
  - enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione. *[Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72]*

### Sul metodo per selezionare le radici intere di un polinomio

76. Determinare le radici intere del polinomio

$$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

I. Le radici intere del polinomio si trovano fra i divisori del ..... che sono:

$$-1 \quad 1 \quad -2 \quad 2$$

II. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a  $x$  uno dei precedenti numeri; si ha:

$$\bullet P(-1)=2(\dots)^3-7(\dots)^2+7(\dots)-2=\dots \neq 0$$

$$\bullet P(1)=\dots = 0$$

$$\bullet P(-2)=\dots = \dots \neq 0$$

$$\bullet P(2)=\dots = 0$$

III. Si conclude che il polinomio ha le radici intere:  $x_1=1$   $x_2=2$

Esaminare i polinomi degli esercizi dal n. 77 al n. 92 e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;

b. determinare le radici intere del polinomio.

77.  $P(x)=x^3-1$  [1] 78.  $P(x)=x^3+1$  [-1]

79.  $P(x)=x^3-8$  [2] 80.  $P(x)=x^3+8$  [-2]

81.  $P(x)=x^3-2x^2-x+2$  [ $\pm 1$ ; 2] 82.  $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$  [ $\pm 1$ ]

83.  $P(x)=x^4-1$  [ $\pm 1$ ] 84.  $P(x)=x^4-16$  [ $\pm 2$ ]

85.  $P(x)=x^4+2x^2-3$  [ $\pm 1$ ] 86.  $P(x)=x^4-2x^2-8$  [ $\pm 2$ ]

87.  $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$  [ $\pm 2$ ] 88.  $P(x)=x^4+x^3-x^2-4x-12$  [ $\pm 2$ ]

89.  $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$  [1; 2] 90.  $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$  [1; 2]

91.  $P(x)=x^4-10x^2+9$  [ $\pm 1$ ;  $\pm 3$ ] 92.  $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$  [ $\pm 1$ ; 2; 3]

### Sul metodo per selezionare le radici razionali di un polinomio

93. Determinare le radici razionali del polinomio

$$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

I. Le radici razionali del polinomio si trovano fra le frazioni che hanno come numeratore un divisore del ..... e come denominatore un divisore del .....

I divisori del termine noto sono .....

I divisori del ..... sono .....

Le frazioni fra cui cercare le radici razionali del polinomio sono:

$$-1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

II. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a  $x$  uno dei numeri razionali elencati prima; si ha (vedere esercizio 76):

$$P(1)=\dots$$

$$P(2)=\dots$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\dots$$

III. si conclude che il polinomio ha le radici razionali:

$$x_1=\frac{1}{2}$$

$$x_2=1$$

$$x_3=2$$

Esaminare i polinomi degli esercizi dal n. 94 al n. 109 e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri razionali che possono essere radici del polinomio;

b. determinare le radici razionali del polinomio.

94.  $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$  [ $\pm 1$ ;  $\frac{2}{3}$ ] 95.  $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$  [ $\pm 1$ ;  $\frac{3}{2}$ ]

- |      |                            |                           |      |                         |                           |
|------|----------------------------|---------------------------|------|-------------------------|---------------------------|
| 96.  | $P(x)=8x^3-1$              | $[\frac{1}{2}]$           | 97.  | $P(x)=8x^3+1$           | $[-\frac{1}{2}]$          |
| 98.  | $P(x)=16x^4-1$             | $[\pm\frac{1}{2}]$        | 99.  | $P(x)=9x^4+8x^2-1$      | $[\pm\frac{1}{3}]$        |
| 100. | $P(x)=27x^3-8$             | $[\frac{2}{3}]$           | 101. | $P(x)=8x^3+27$          | $[-\frac{3}{2}]$          |
| 102. | $P(x)=81x^4-16$            | $[\pm\frac{2}{3}]$        | 103. | $P(x)=16x^4-81$         | $[\pm\frac{3}{2}]$        |
| 104. | $P(x)=4x^4-13x^2+9$        | $[\pm 1; \pm\frac{3}{2}]$ | 105. | $P(x)=9x^4+8x^2-1$      | $[\pm\frac{1}{3}]$        |
| 106. | $P(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$ | $[\pm\frac{2}{3}]$        | 107. | $P(x)=4x^4-5x^2+1$      | $[\pm 1; \pm\frac{1}{2}]$ |
| 108. | $P(x)=4x^6-x^4+4x^2-1$     | $[\pm\frac{1}{2}]$        | 109. | $P(x)=4x^6-9x^4+4x^2-9$ | $[\pm\frac{3}{2}]$        |

### Sulla divisione di polinomi

Esaminare le divisioni fra polinomi assegnate negli esercizi dal n. 110 al n. 145 e risolvere i seguenti quesiti:

- eeguire la divisione fra i due polinomi, seguendo la regola descritta a p. 397;
- verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D, aggiungere l'eventuale resto R e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

- |      |  |      |  |
|------|--|------|--|
| 110. | $(x^3-1):(x-1)$  | 111. | $(x^3-1):(x+1)$  |
| 112. | $(x^3+1):(x+1)$  | 113. | $(x^3+1):(x-1)$  |
| 114. | $(x^3-8):(x-2)$  | 115. | $(x^3-8):(x+2)$  |
| 116. | $(x^3+8):(x-2)$  | 117. | $(x^3+8):(x+2)$  |
| 118. | $(8x^3-1):(2x-1)$  | 119. | $(8x^3-1):(2x+1)$  |
| 120. | $(8x^3+1):(2x-1)$  | 121. | $(8x^3+1):(2x+1)$  |
| 122. | $(2x^3-7x^2+8x-3):(2x-3)$  | 123. | $(2x^3-7x^2+8x-3):(2x+3)$  |
| 124. | $(12x^3+8x^2-21x-14):(2x-2)$   | 125. | $(12x^3+8x^2-21x-14):(2x+2)$   |
| 126. | $(6x^3+5x^2-9x):(-3x+2)$   | 127. | $(6x^3+5x^2-9x):(3x+2)$  |
| 128. | $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x+1\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$    | 129. | $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x+1\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$    |
| 130. | $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-1\right):\left(2x-\frac{1}{4}\right)$ | 131. | $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-1\right):\left(2x+\frac{1}{4}\right)$ |
| 132. | $(x^3-2x^2-x+2):(x^2-1)$   | 133. | $(x^3-2x^2-x+2):(x^2+1)$   |
| 134. | $(2x^3+3x^2-2x-3):(x^2-1)$   | 135. | $(2x^3+3x^2-2x-3):(x^2+1)$   |
| 136. | $(x^4+2x^2-3):(x^2-1)$   | 137. | $(x^4+2x^2-3):(x^2+1)$   |
| 138. | $(x^4-2x^2-8):(x^2-4)$   | 139. | $(x^4-2x^2-8):(x^2+4)$   |
| 140. | $(x^4+x^3-3x^2-4x-4):(x^2-4)$  | 141. | $(x^4+x^3-3x^2-4x-4):(x^2+4)$  |



142.  $(x^3-2x^2-x+2):(x^2-3x+2)$  143.  $(x^3-2x^2-x+2):(x^2+3x+2)$   
 144.  $(x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x^2-3x+2)$  145.  $(x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x^2+3x+2)$

### Riflettere sulla divisione dei polinomi

146. Calcolare il quoziente  $Q(x)$  della seguente divisione di polinomi  
 $(3x-1-2x^2+6x^3):(1+2x^2)$

completando il procedimento descritto qui sotto.

I. Il procedimento di divisione di due polinomi richiede che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile  $x$ , perciò, *prima di iniziare la divisione, bisogna ordinare i due polinomi*; si ha:

$$(\dots x^3 - \dots x^2 + \dots x - \dots) : (\dots x^2 + \dots)$$

II. Si esegue la divisione.

$$[Q(x)=3x-1]$$

Dopo aver svolto l'esercizio 146, esaminare le divisioni di polinomi assegnate negli esercizi dal n. 147 al n. 156 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. ordinare i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile  $x$ ;  
 b. calcolare il quoziente  $Q(x)$  della divisione.

147.  $(2x^2-9x-4+x^3):(-1-2x+x^2)$   $[Q(x)=x+4]$   
 148.  $(x-3x^2+x^3+2x^4):(x+x^2-1)$   $[Q(x)=2x^2-x]$   
 149.  $(6-19x+4x^2+4x^3):(5x+2x^2-2)$   $[Q(x)=2x-3]$   
 150.  $(20x+4-6x^3+17x^2):(7x+2-2x^2)$   $[Q(x)=3x+2]$   
 151.  $(7x+3-4x^3+2x^2+x^5-x^4):(2x+1+x^2)$   $[Q(x)=x^3-3x^2+x+3]$   
 152.  $(10x^2-10x+3-4x^3):(3-4x+2x^2)$   $[Q(x)=-2x+1]$   
 153.  $(2x^2+7x+3-4x^3+x^5-x^4):(3+x-3x^2+x^3)$   $[Q(x)=x^2+2x+1]$   
 154.  $(4x^2-11x+4x^3+4):(3x-4+2x^2)$   $[Q(x)=2x-1]$   
 155.  $(3x^2-8x-3+10x^3+3x^4):(3x+1+x^2)$   $[Q(x)=3x^2+x-3]$   
 156.  $(3x+4-6x^2+2x^5-x^4-2x^3):(-x+x^2-1)$   $[Q(x)=2x^3+x^2+x-4]$

### Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio può essere scritto valendosi di una qualunque lettera (vedere il primo volume, p. 256) e calcolare i quozienti dei polinomi assegnati negli esercizi dal n. 157 al n. 164.

157.  $(y^6-1):(y^3-1)$   $[Q(y)=y^3+1]$   
 158.  $(z^6-1):(z^2-1)$   $[Q(z)=z^4+z^2+1]$   
 159.  $(17a^2-7a-2-3a^3):(5a+1-a^2)$   $[Q(a)=3a-2]$   
 160.  $(4y-4+4y^4-y^2):(y-2+2y^2)$   $[Q(y)=2y^2-y+1]$   
 161.  $(6m^2-m+1+2m^5-7m^4-m^3):(m-7m^2+2m^3-1)$   $[Q(m)=m^2-1]$   
 162.  $\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{4}k^2-\frac{9}{4}k+\frac{1}{3}k^3\right):\left(\frac{1}{4}k-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}k^2\right)$   $[Q(k)=k-3]$   
 163.  $\left(4b-2-\frac{17}{6}b^2+2b^4-\frac{14}{3}b^3\right):(2-5b+6b^2)$   $[Q(b)=\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{2}b-1]$   
 164.  $\left(4z^4+2z^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}z^8\right):\left(2z^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^4\right)$   $[Q(z)=\frac{1}{4}z^4+2z^2+\frac{1}{2}]$

## Sulla regola di Ruffini

Esaminare le divisioni fra un polinomio ed un binomio del tipo  $(x-a)$  assegnate negli esercizi dal n. 165 al n. 180 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. eseguire la divisione fra i due polinomi, valendosi della regola di Ruffini descritta a p. 400;
- b. verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

165.  $(4x^3+x^2-2x-1):(x+1)$

166.  $(4x^3+x^2-4x-1):(x-1)$

167.  $(x^4-5x^2+x+2):(x-2)$

168.  $(x^3-8x^2+16x-5):(x-5)$

169.  $(2x^3-9x^2+2x+8):(x-4)$

170.  $(x^3-3x^2+3x-9):(x-3)$

171.  $(x^3-3x^2-17x-7):(x+2)$

172.  $(x^4+3x^3+2x^2-5x+16):(x+2)$

173.  $(x^5+2x^4-x^3-2x^2+2x+4):(x+2)$

174.  $(x^5+4x^4+2x^3+7x^2-7x-12):(x+4)$

175.  $\left(3x^3+x^2+\frac{1}{4}x-2\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

176.  $\left(x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right):\left(x+\frac{1}{4}\right)$

177.  $\left(3x^3+x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

178.  $\left(x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

179.  $(3x^3-14x^2-2x+1):\left(x+\frac{1}{3}\right)$

180.  $\left(9x^6-5x^5-\frac{2}{3}x^4+3x^2-x-\frac{2}{3}\right):\left(x-\frac{2}{3}\right)$

Esaminare le divisioni fra un polinomio ed un binomio del tipo  $(x-a)$  assegnate negli esercizi dal n. 181 al n. 190 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. ordinare il polinomio secondo le potenze decrescenti della variabile;
- b. scrivere i coefficienti del polinomio, ricordando di indicare i coefficienti che valgono 0;
- c. valersi della regola di Ruffini per eseguire la divisione;
- d. verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

181.  $(3x^3+5x+13x^2):(x+4)$

182.  $(2x+1+3x^5-2x^4):(x-1)$

183.  $(6x^3+4+2x^4-3x^2):(x+2)$

184.  $(x^2-1+x^3+8x^6):(x+1)$

185.  $(3x^5-2x-5x^4-12x^3+7):(x-3)$

186.  $(15x+x^4-2x^3-4):(x-2)$

187.  $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}\right):\left(x+\frac{1}{5}\right)$

188.  $(2x^3-5x^2+18):\left(x+\frac{3}{2}\right)$

189.  $(4x^4+7x^3-6x^2+x):\left(x-\frac{1}{4}\right)$

190.  $\left(18x^3-x-\frac{1}{3}\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

## Sulla scomposizione in fattori dei polinomi

**Scomporre in fattori polinomi di cui si conosce qualche radice intera**

**191.** Scomporre in fattori il polinomio

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

A. Si ricercano le eventuali radici intere del polinomio che si trovano fra i divisori del .....; questi divisori sono:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}$$

B. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a  $x$  uno dei precedenti numeri; si ha (vedere esercizio 76, p. 748):

$$P(1) = 0$$

$$P(2) = 0$$

Si conclude che il polinomio ha le radici intere:

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

perciò il polinomio è divisibile per  $(x - \dots\dots\dots)$  e  $(x - \dots\dots\dots)$ , cioè è divisibile per

$$(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) = x^2 - 3x + 2$$

C. Si calcola il quoziente della divisione;

$$Q(x) = (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2)$$

ottenendo:

$$Q(x) = \dots\dots\dots$$

D. Si scrive il polinomio scomposto in fattori:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(x - 2)(2x - 1)$$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **192** al n. **220** e risolvere i seguenti quesiti:

- a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;
- b. determinare le radici intere del polinomio e scrivere i binomi per cui è divisibile il polinomio;
- c. dividere il polinomio per i binomi individuati prima;
- d. scrivere il polinomio scomposto in fattori.

**192.**  $P(x) = x^3 - 1$

**194.**  $P(x) = x^3 - 8$

**196.**  $P(x) = x^3 - 27$

**198.**  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

**200.**  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

**202.**  $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$

**204.**  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 5$

**206.**  $P(x) = x^4 - 1$

**208.**  $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

**210.**  $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$

**212.**  $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

**193.**  $P(x) = x^3 + 1$

**195.**  $P(x) = x^3 + 8$

**197.**  $P(x) = x^3 + 27$

**199.**  $P(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

**201.**  $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

**203.**  $P(x) = 6x^3 - 6x^2 + 4x - 32$

**205.**  $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 4$

**207.**  $P(x) = x^4 - 16$

**209.**  $P(x) = 4x^4 - 13x^2 + 9$

**211.**  $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

**213.**  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

214.  $P(x)=x^4+x^3-x^2-4x-12$       215.  $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$   
 216.  $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$       217.  $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$   
 218.  $P(x)=x^4-2x^3-10x^2+4x+16$       219.  $P(x)=x^6-14x^4+49x^2-36$   
 220.  $P(x)=9x^5-18x^4-10x^3+20x^2+x-2$

### Scomporre in fattori polinomi di cui si conosce qualche radice razionale

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 221 al n. 246 e risolvere i seguenti quesiti:

- elencare i numeri razionali che possono essere radici del polinomio, basandosi sul procedimento esposto a p. 394;
- determinare le radici razionali del polinomio e scrivere i binomi per cui è divisibile il polinomio;
- dividere il polinomio per i binomi individuati prima;
- scrivere il polinomio scomposto in fattori.

221.  $P(x)=8x^3-1$       222.  $P(x)=8x^3+1$   
 223.  $P(x)=27x^3-8$       224.  $P(x)=8x^3+27$   
 225.  $P(x)=27x^3+8$       226.  $P(x)=8x^3-27$   
 227.  $P(x)=6x^3-17x^2+16x-6$       228.  $P(x)=2x^3+7x^2+7x+2$   
 229.  $P(x)=4x^3-13x^2-13x+4$       230.  $P(x)=3x^3-7x^2-7x+3$   
 231.  $P(x)=6x^3+7x^2-7x-6$       232.  $P(x)=6x^3-x^2-20x+12$   
 233.  $P(x)=16x^4-1$       234.  $P(x)=81x^4-1$   
 235.  $P(x)=81x^4-16$       236.  $P(x)=16x^4-81$   
 237.  $P(x)=9x^4+8x^2-1$       238.  $P(x)=9x^4+8x^2-1$   
 239.  $P(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$       240.  $P(x)=4x^4-5x^2+1$   
 241.  $P(x)=2x^4+5x^3-5x-2$       242.  $P(x)=6x^4-13x^3+13x-6$   
 243.  $P(x)=3x^4-10x^3+10x-3$       244.  $P(x)=2x^6-5x^5+2x^4-2x^2+5x-2$   
 245.  $P(x)=4x^6-x^4+4x^2-1$       246.  $P(x)=4x^6-9x^4+4x^2-9$

### Scomporre in fattori raccogliendo un fattore comune

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 247 al n. 258.

247.  $x^3-x=x(\dots\dots\dots)$       248.  $x^3-x^2=x^2(\dots\dots\dots)$   
 249.  $2x^3-x^2-x=x(\dots\dots\dots)$       250.  $4x^4-2x^3-2x^2=2x^2(\dots\dots\dots)$   
 251.  $3x^3-9x^2+6x=3x(\dots\dots\dots)$       252.  $2x^4-6x^3+4x^2=2x^2(\dots\dots\dots)$   
 253.  $-x^3+3x^2+4x=\dots\dots\dots(x^2-3x-4)$       254.  $-4x^4+4x^3+8x^2=\dots\dots\dots x^2-x-2)$   
 255.  $-\frac{4}{5}x^4-2x^3+\frac{6}{5}x^2=\dots\dots\dots 2x^2+5x-3)$       256.  $x^4-2x^3-8x^2=\dots\dots\dots\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\right)$   
 257.  $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x=\dots\dots\dots(x^2-2x-3)$       258.  $-\frac{4}{3}x^5-4x^4+8x^3=\dots\dots\dots(x^2+3x-6)$

259. Nei seguenti polinomi raccogliere prima il monomio  $2x$  e poi il monomio  $-2x$ .  
 $2x^3-4x^2+6x$        $-10x^3-8x^2+2x$        $2x^3-x^2+6x$        $-10x^3-8x^2+x$

260. Nei seguenti polinomi raccogliere prima il monomio  $3x^2$  e poi il monomio  $\frac{1}{3}x^2$ .  
 $3x^4-12x^3+6x^2$        $-\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2$        $3x^4-4x^3+6x^2$        $-\frac{2}{3}x^4-x^3+\frac{1}{3}x^2$

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 261 al n. 268.

261.  $(1-x)^3-8(1-x)^2+4(1-x)=(1-x)[(\dots)^2-8(\dots)+4]$

262.  $2(x+1)^3-4(x+1)^2+6(x+1)(x-2)=2(x+1)[\dots]$

263.  $6x(x+2)^2(x+1)-4x^2(x+2)(x+1)+8x(x+2)(x+1)^2=2x(x+2)(x+1)[3(\dots)-2\dots+4(\dots)]$

264.  $2x^2(x+3)-x(x+3)-(x+3)=\dots(2x^2-x-1)$

265.  $-6x^4(2x-1)-4x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)=\dots 3x^2+2x-1)$

266.  $x^3-x^2+2x-2=\dots(x-1)+\dots(x-1)=(x-1)(\dots)$

267.  $15x^3+10x^2-9x-6=\dots(3x+2)-\dots(3x+2)=\dots$

268.  $x^5-3x^3-2x^2-6=\dots(x^2-3)-\dots(x^2-3)=\dots$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 269 al n. 276 raccogliendo opportunamente dei fattori comuni.

269.  $15x^2-6-10x^4+4x^2$

270.  $x^4+3x^3-2x-6$

271.  $1-x-x^2+x^3$

272.  $x^4+x^3-x^2-x$

273.  $x^5-x^4+x^3-x^2$

274.  $2x^5+2x^4-4x^3-4x^2$

275.  $x^4-3x^3-2x^2+6x$

276.  $3x^5+3x^4-9x^3-9x^2$

**Scomporre in fattori valendosi del prodotto notevole**  
 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 277 al n. 279.

277.  $x^4-16=[(x^2)^2-4^2]=(\dots-4)(\dots+4)=(\dots-2)(\dots+2)(\dots+4)$

278.  $4x^4-9=[(2x^2)^2-\dots^2]=\dots=\dots$

279.  $x^8-16=[(x^4)^2-(\dots)^2]=(\dots-4)(\dots+4)=(\dots-2)(\dots+2)(\dots+4)=$   
 $=(\dots-\sqrt{2})(\dots+\sqrt{2})(\dots+2)(\dots+4)$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 280 al n. 288.

280.  $x^4-25$        $x^4-81$

281.  $9x^4-4$        $16x^4-25$

282.  $x^4-2$        $2x^4-1$

283.  $x^8-1$        $x^8-64$

284.  $16x^8-81$        $16x^8-25$

285.  $4x^8-25$        $9x^8-16$

286.  $x^{16}-1$        $x^{16}-64$

287.  $64x^{16}-1$        $16x^{16}-1$

288.  $64x^{16}-81$        $81x^{16}-625$

289. Esaminare le uguaglianze:

$x^4+1=(x^2+1)(x^2-1)$

$x^4-4=(x+2)(x-2)$

$x^8-4=(x^2+2)(x^2-2)$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché le uguaglianze non sono identità;

b. correggere le uguaglianze in modo da trasformarle in identità.



290. Ripetere l'esercizio 289 a partire dalle seguenti uguaglianze:  
 $x^4+9=(x^2+3)(x^2-3)$        $x^4-9=(x+3)(x-3)$        $x^{16}-16=(x^2+4)(x^2-4)$
291. Esaminare l'uguaglianza:  
 $x^{2n}-a=(x^n-\sqrt{a})(x^n+\sqrt{a})$
- Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché l'uguaglianza è vera quando si sceglie  $x$  nell'insieme dei reali,  $a$  nell'insieme dei reali positivi e  $n$  nell'insieme degli interi positivi;  
 b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad  $a$  e  $n$  dei valori a piacere.

### Scomporre in fattori un polinomio valendosi delle potenze di un binomio

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. 292 al n. 295.

292.  $x^4+6x^2+9=[(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 3+3^2]=[x^2+\dots]^2$
293.  $x^8+4x^4+4=[(x^4)^2+2\cdot x^4\cdot 2+2^2]=[x^4+\dots]^2$
294.  $x^3-3x^2+3x-1=[x^3+3\cdot x^2\cdot (-1)+3\cdot x\cdot (-1)^2+(-1)^3]=[x+(\dots)]^3=\dots$
295.  $x^6+3x^4+3x^2+1=[(x^2)^3+3\cdot (x^2)^2\cdot 1+3\cdot x^2\cdot 1^2+1^3]=(x^2+\dots)^3$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 296 al n. 303.

- |      |                     |                       |                       |
|------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 296. | $x^4+10x^2+25$      | $x^4+18x^2+81$        | $4x^4+4x^2+1$         |
| 297. | $9x^4+6x^2+1$       | $9x^4+12x^2+4$        | $4x^4+12x^2+9$        |
| 298. | $x^8+2x^4+1$        | $x^8+6x^4+9$          | $4x^8+4x^4+1$         |
| 299. | $9x^8+6x^4+1$       | $x^3+3x^2+3x+1$       | $x^3+6x^2+12x+8$      |
| 300. | $x^3+9x^2+27x+27$   | $x^3-9x^2+27x-27$     | $8x^3+12x^2+6x+1$     |
| 301. | $8x^3-12x^2+6x-1$   | $8x^3+36x^2+54x+27$   | $8x^3-36x^2+54x-27$   |
| 302. | $27x^3+54x^2+36x+8$ | $27x^3-54x^2+36x-8$   | $x^6+6x^4+12x^2+8$    |
| 303. | $8x^6+12x^4+6x^2+1$ | $8x^6+36x^4+54x^2+27$ | $27x^6+54x^4+36x^2+8$ |

304. Esaminare la seguente uguaglianza:

$$x^{2n}+2ax^n+a^2=(x^n+a)^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché l'uguaglianza è vera comunque si scelgano  $x$  e  $a$  nell'insieme dei reali e  $n$  nell'insieme degli interi positivi;  
 b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad  $a$  e  $n$  dei valori a piacere.

305. Esaminare la seguente uguaglianza:

$$x^{3n}+3ax^{2n}+3a^2x^n+a^3=(x^n+a)^3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. spiegare perché l'uguaglianza è vera comunque si scelgano  $x$  e  $a$  nell'insieme dei reali e  $n$  nell'insieme degli interi positivi;  
 b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad  $a$  e  $n$  dei valori a piacere.

## Scomporre in fattori polinomi biquadratici

**306.** Completare la seguente tabella come è indicato nelle prime righe:

Polinomio biquadratico	Trinomio di 2° grado	Radici reali del trinomio	Trinomio scomposto	Polinomio scomposto
$3x^4+x^2+2$	$3z^2+z+2$	nessuna	no	no
$3x^4+12x^2+12$	$3z^2+12z+12$	$z_1=z_2=2$	$3(z+2)^2$	$3(x^2+2)^2$
$2x^2-3x-5$		$z_1=-1 \quad z_2=\frac{5}{2}$	$2(z+1)\left(z-\frac{5}{2}\right)$	$2(x^2+1)\left(x^2-\frac{5}{2}\right)$
$-2x^4+3x^2+5$				
$-2x^4+3x^2-5$				
$-2x^4+8x^2-8$				

Esaminare i polinomi biquadratici assegnati negli esercizi dal n. **307** al n. **318** e risolvere i seguenti quesiti:

- trasformare il polinomio in un trinomio di 2° grado;
- determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
- valersi delle radici ottenute per scomporre il trinomio in fattori;
- scrivere il polinomio scomposto in fattori.

<b>307.</b>	$4x^4-3x^2-1$	$4x^4-4x^2+1$	$4x^4-4x^2+3$
<b>308.</b>	$2x^4+7x^2+3$	$2x^4+8x^2+8$	$2x^4+7x^2+8$
<b>309.</b>	$9x^4-6x^2+1$	$4x^4-6x^2-4$	$9x^4-6x^2+2$
<b>310.</b>	$4x^4+20x^2+27$	$4x^4+20x^2+25$	$4x^4+20x^2+9$
<b>311.</b>	$2x^4+5x^2-3$	$4x^4+10x^2-6$	$-2x^4-5x^2+3$
<b>312.</b>	$16x^4-8x^2+1$	$2x^4-x^2+\frac{1}{8}$	$-x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}$
<b>313.</b>	$12x^4-25x^2+12$	$-12x^4+25x^2-12$	$-6x^4+2,5x^2-6$
<b>314.</b>	$x^4+20x^2+100$	$100x^4+20x^2+1$	$10x^4+2x^2+0,1$
<b>315.</b>	$x^4+\sqrt{5}x^2-10$	$5x^4-\sqrt{5}x^2-2$	$10x^4+\sqrt{5}x^2+1$
<b>316.</b>	$4x^4-4\sqrt{6}x^2+5$	$-4x^4+4\sqrt{6}x^2-5$	$2x^4-2\sqrt{6}x^2+\frac{5}{2}$
<b>317.</b>	$2x^4+3\sqrt{3}x^2-3$	$\frac{2}{3}x^4+\sqrt{3}x^2-1$	$-x^4-\frac{3}{2}\sqrt{3}x^2+\frac{3}{2}$
<b>318.</b>	$2x^4-(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x^2-3\sqrt{2}$	$-2x^4+(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x^2+3\sqrt{2}$	
<b>319.</b>	$x^4-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2+\sqrt{6}$	$x^4+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2-\sqrt{6}$	
<b>320.</b>	Esaminare l'uguaglianza: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$		

Risolvere i seguenti quesiti:

- descrivere i casi in cui l'uguaglianza è vera;
- scrivere le uguaglianze che si ottengono sostituendo a  $z$  le seguenti potenze di  $x$ :

$$z=x^2$$

$$z=x^3$$

$$z=x^4$$

$$z=x^5$$

321. Dopo aver risolto l'esercizio 320, riscrivere l'uguaglianza:

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

sostituendo a  $z$  una qualunque potenza di  $x$  ad esponente intero positivo, cioè:

$$z=x^n$$

### Scomporre in fattori scegliendo i procedimenti più opportuni

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 322 al n. 341 scegliendo i procedimenti che si ritengono più opportuni.

322.  $x^4-18x^2+81$   $[(x-3)^2(x+3)^2]$
323.  $x^4-10x^2+25$   $[(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2]$
324.  $x^6-3x^4+3x^2-1$   $[(x-1)^3(x+1)^3]$
325.  $x^6-6x^4+12x^2-8$   $[(x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})^3]$
326.  $x^9-3x^6+3x^3-1$   $[(x-1)^3(x^2+x+1)^3]$
327.  $x^4-2x^3+3x^2+8x-4$   $[(x-1)^2(x-2)(x+2)]$
328.  $x^6-1$   $[(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)]$
329.  $x^6-64$   $[(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)]$
330.  $x^{12}-64$   $[(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)(x^2+2)(x^4-2x^2+4)]$
331.  $8x^6-12x^4+6x^2-1$   $[(\sqrt{2}x-1)^3(\sqrt{2}x+1)^3]$
332.  $27x^6-54x^4+36x^2-8$   $[(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^3(\sqrt{3}x+\sqrt{2})^3]$
333.  $8x^6-36x^4+54x^2-27$   $[(\sqrt{2}x-\sqrt{3})^3(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^3]$
334.  $x^4-9x^2+8$   $[(x-1)(x+1)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})]$
335.  $x^6-9x^3+8$   $[(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x+2x+4)]$
336.  $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$   $[(x-2)^2(x-1)(x+1)]$
337.  $x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9$   $[(x-1)^3(x-3)(x+3)]$
338.  $x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9$   $[(x-1)^3(x-3)^2]$
339.  $x^5-2x^3-x^2+2$   $[(x-1)(x^2+x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})]$
340.  $x^5-3x^3-2x^2+6$   $[(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})]$
341.  $x^6-14x^4+49x^2-36$   $[(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)]$

### Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio è la somma di monomi in cui compaiono una o più lettere qualunque dell'alfabeto (vedere il primo volume, p. 256) e scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 342 al n. 356.

342.  $\frac{4}{9}a^3b-\frac{2}{3}a^2b+\frac{1}{4}ab$   $[ab\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\right)^2]$
343.  $24x^3-24a^2x^3+6a^4x^3$   $[6x^3(a-2)^2]$

344.	$\frac{5}{9}x^6y^2-5x^2y^2$	$[5x^2y^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+1\right)\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)]$
345.	$x^4-a^2x^2-4x^2+4a^2$	$[(x-2)(x+2)(x-a)(x+a)]$
346.	$a^3x^3-7a^3x^2+12a^3x$	$[a^3x(x-4)(x-3)]$
347.	$(a-b)^3-1$	$[(a-b-1)\{(a-b)^2+a-b+1\}]$
348.	$(x+y)^3+1$	$[(x+y+1)\{(x+y)^2-x-y+1\}]$
349.	$27a^3-(2a+b)^3$	$[(a-b)(19a^2+7ab+b^2)]$
350.	$81-(y-1)^4$	$[(4-y)(2+y)(y^2-2y+10)]$
351.	$a^4-b^4+3(a^2+b^2)+a^2x+b^2x$	$[(a^2+b^2)(a^2-b^2+3+x)]$
352.	$x^4-16a^4-4ax^3+16a^3x$	$[(x-2a)^3(x+2a)]$
353.	$x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$	$[(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)]$
354.	$a^3-b^3-2b(a^2-b^2)+(a-b)(a^2+b^2)$	$[a(a-b)(2a-b)]$
355.	$a^3-b^3-a(a^2-b^2)+ab-b^2$	$[b(b+1)(a-b)]$
356.	$(x^2+3xy)^2+x^2+9y^2+6xy-(x^2-9y^2)^2$	$[(x+3y)^2(1+6xy-9y^2)]$

## Sulle radici multiple di un polinomio

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. 357 al n. 370 e risolvere i seguenti quesiti:

- scomporre in fattori i polinomi;
- scegliere i polinomi che presentano delle radici multiple motivando la scelta;
- scrivere le radici reali di ogni polinomio, ciascuna con la sua molteplicità.

357.	$x^3-1$	$x^3-3x^2+3x-1$
358.	$x^3+3x^2+3x+1$	$x^3+1$
359.	$x^4-1$	$x^4-2x^2+1$
360.	$x^4+2x^2+1$	$x^4+1$
361.	$x^4-81$	$x^4-18x^2+81$
362.	$x^4+18x^2+81$	$x^4+81$
363.	$x^6-1$	$x^6-3x^4+3x^2-1$
364.	$x^6+3x^4+3x^2+1$	$x^6+1$
365.	$x^6-6x^4+12x^2-8$	$x^6-6x^4$
366.	$8x^6-12x^4+6x^2-1$	$8x^6-12x^4$
367.	$x^9-3x^6+3x^3-1$	$x^9-3x^8$
368.	$x^4-2x^3+3x^2+8x-4$	$x^4-2x^3$
369.	$x^4-4x^3+3x^2+4x-4$	$x^4+4x$
370.	$x^4-2x^3+2x-1$	$x^4+x$

## Collegamenti con i capitoli precedenti

- 371.** Rappresentare sul piano cartesiano le funzioni seguenti:
- $y=x^3$  (vedere il capitolo quinto, paragrafo 5);
  - $y=(x-1)^3$  ottenuta dalla prima con una traslazione nella direzione dell'asse delle  $x$  (vedere capitolo sesto, paragrafo 5);
  - $y=x^3-1$  ottenuta dalla prima con una traslazione nella direzione dell'asse delle  $y$  (vedere capitolo sesto, paragrafo 5).
- Rispondere ai seguenti quesiti:
- a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle  $x$  (vedere capitolo settimo, paragrafo 1);
  - b. osservare che la curva  $y=(x-1)^3$  sembra «appoggiarsi» all'asse delle  $x$  nel punto  $A(1; 0)$  in cui sono riuniti tre punti di intersezione e spiegare perché la curva  $y=x^3-1$  taglia l'asse delle  $x$  nello stesso punto  $A$  senza «appoggiarsi».
- 372.** Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:
- $$y=x^3 \qquad y=(x+1)^3 \qquad y=x^3+1$$
- Rispondere ai seguenti quesiti:
- a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle  $x$ ;
  - b. osservare che la curva  $y=(x+1)^3$  sembra «appoggiarsi» all'asse delle  $x$  nel punto  $B(-1; 0)$  in cui sono riuniti tre punti di intersezione e spiegare perché la curva  $y=x^3+1$  taglia l'asse delle  $x$  nello stesso punto  $B$  senza «appoggiarsi».
- 373.** Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:
- $$y=x^4 \qquad y=(x-1)^4 \qquad y=x^4-1$$
- Rispondere ai seguenti quesiti:
- a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle  $x$ ;
  - b. osservare che la curva  $y=(x-1)^4$  sembra «appoggiarsi» all'asse delle  $x$  nel punto  $A(1; 0)$  in cui sono riuniti quattro punti di intersezione e spiegare perché la curva  $y=x^4-1$  taglia l'asse delle  $x$  in due punti senza «appoggiarsi».
- 374.** Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:
- $$y=x^4 \qquad y=(x+1)^4 \qquad y=x^4+1$$
- Rispondere ai seguenti quesiti:
- a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle  $x$ ;
  - b. osservare che la curva  $y=(x+1)^4$  sembra «appoggiarsi» all'asse delle  $x$  nel punto  $B(-1; 0)$  in cui sono riuniti quattro punti di intersezione e spiegare perché la curva  $y=x^4+1$  non incontra l'asse delle  $x$ .

## Sulle equazioni di grado superiore al 2°

### Equazioni di cui si individua una soluzione

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 375 al n. 409 procedendo nel modo seguente:

- a. individuare le radici intere del polinomio al primo membro, valendosi del procedimento esposto a p. 392;
- b. scomporre in fattori il polinomio al primo membro, valendosi della divisione dei polinomi, esposta a p. 397;
- c. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

- 375.**  $x^3-1=0$  [1]
- 376.**  $x^3+1=0$  [-1]
- 377.**  $x^3-8=0$  [2]



378.	$x^3+8=0$	$[-2]$
379.	$x^3-2x^2-x+2=0$	$[\pm 1; 2]$
380.	$2x^3+3x^2-2x-3=0$	$[\pm 1; \frac{3}{2}]$
381.	$2x^3-7x^2+7x-2=0$	$[1; 2; \frac{1}{2}]$
382.	$3x^3-2x^2-3x+2=0$	$[\pm 1; \frac{2}{3}]$
383.	$x^3+x^2-4x-4=0$	$[\pm 2; -1]$
384.	$x^3-6x^2-9x+14=0$	$[1; -2; 7]$
385.	$3x^3+2x^2-19x+6=0$	$[2; -3; \frac{1}{3}]$
386.	$x^3-20x+32=0$	$[2; -1 \pm \sqrt{17}]$
387.	$2x^3+7x^2+7x+2=0$	$[-1; -2; -\frac{1}{2}]$
388.	$4x^3-13x^2-13x+4=0$	$[-1; 4; \frac{1}{4}]$
389.	$x^3+3x^2-3x-1=0$	$[1; -2 \pm \sqrt{3}]$
390.	$x^3-3x^2+3x-1=0$	$[x_1=x_2=x_3=1]$
391.	$3x^3-7x^2-7x+3=0$	$[-1; 3; \frac{1}{3}]$
392.	$3x^3-5x^2-4x+3=0$	$[-1; \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}]$
393.	$x^4-1=0$	$[\pm 1]$
394.	$x^4-16=0$	$[\pm 2]$
395.	$x^4+x^3-3x^2-4x-4=0$	$[\pm 2]$
396.	$x^4+x^3-x^2-4x-12=0$	$[\pm 2]$
397.	$x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$	$[1; 2]$
398.	$x^4-6x^3+9x^2-4=0$	$[1; 2; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}]$
399.	$2x^4+5x^3-5x-2=0$	$[\pm 1; -2; -\frac{1}{2}]$
400.	$6x^4-13x^3+13x-6=0$	$[\pm 1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}]$
401.	$x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$	$[\pm 1; 2; 3]$
402.	$3x^4-10x^3+10x-3=0$	$[\pm 1; 3; \frac{1}{3}]$

403.  $6x^4-7x^3-13x^2+4x+4=0$   $[-1; 2; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$
404.  $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$   $[x_1=x_2=1; -2; -\frac{1}{2}]$
405.  $9x^5-18x^4-10x^3+20x^2+x+2=0$   $[\pm 1; 2; \pm \frac{1}{3}]$
406.  $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$   $[x_1=x_2=-1; 1; 2; \frac{1}{2}]$
407.  $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$   $[x_1=x_2=1; -1; -2; -\frac{1}{2}]$
408.  $2x^6-5x^5+2x^4-2x^2+5x-2=0$   $[\pm 1; 2; \frac{1}{2}]$
409.  $2x^6+5x^5+2x^4-2x^2-5x-2=0$   $[\pm 1; -2; -\frac{1}{2}]$

### Equazioni di cui si individua un fattore comune

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 410 al n. 428 procedendo nel modo seguente:

- individuare un fattore comune nel polinomio al primo membro, valendosi del procedimento esposto a p. 406;
- scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
- risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

410.  $x^3-x=0$   $[0; \pm 1]$
411.  $x^3-x^2=0$   $[x_1=x_2=0; 1]$
412.  $2x^3-x^2-x=0$   $[0; 1; -\frac{1}{2}]$
413.  $4x^4-2x^3-2x^2=0$   $[x_1=x_2=0; 1; -\frac{1}{2}]$
414.  $3x^3-9x^2+6x=0$   $[0; 1; 2]$
415.  $2x^4-6x^3+4x^2=0$   $[x_1=x_2=0; 1; 2]$
416.  $x^5-3x^3-2x^2-6=0$   $[\sqrt[3]{2}; \pm\sqrt{3}]$
417.  $x^4+3x^3-2x-6=0$   $[-3; \sqrt[3]{2}]$
418.  $x^4+x^3-x^2-x=0$   $[x_1=x_2=-1; 1; 0]$
419.  $x^5-x^4+x^3-x^2=0$   $[x_1=x_2=0; 1]$
420.  $x^4-3x^3-2x^2+6x=0$   $[0; 3; \pm\sqrt{2}]$
421.  $x^4-2x^3-3x^2+6x=0$   $[0; 2; \pm\sqrt{3}]$
422.  $2(x+1)^3-4(x+1)^2+6(x+1)(x-2)=0$   $[-1; \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}]$
423.  $6x(x+2)^2(x+1)-4x^2(x+2)(x+1)+8x(x+2)(x+1)^2=0$   $[x_1=x_2=-2; 0; -1]$

424.  $2x^2(x+3)-x(x+3)-(x+3)=0$   $[-3; -\frac{1}{2}; 1]$
425.  $-6x^4(2x-1)-4x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)=0$   $[x_1=x_2=0; -1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$
426.  $15x^2-6-10x^4+4x^2=0$   $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{2}{5}}]$
427.  $2x^5-2x^4-4x^3-4x^2=0$   $[x_1=x_2=0; -1; \pm\sqrt{2}]$
428.  $3x^5+3x^4-9x^3-9x^2=0$   $[x_1=x_2=0; -1; \pm\sqrt{3}]$

### Equazioni in cui si individua il prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 429 al n. 444 procedendo nel modo seguente:

- individuare nel polinomio al primo membro la differenza di due quadrati;
- scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
- risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

- |                    |                              |                     |                              |
|--------------------|------------------------------|---------------------|------------------------------|
| 429. $x^4-16=0$    | $[\pm 2]$                    | 430. $4x^4-9=0$     | $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$    |
| 431. $x^4-25=0$    | $[\pm\sqrt{5}]$              | 432. $x^4-81=0$     | $[\pm 3]$                    |
| 433. $9x^4-4=0$    | $[\pm\sqrt{\frac{2}{3}}]$    | 434. $16x^4-25=0$   | $[\pm\frac{\sqrt{5}}{2}]$    |
| 435. $x^4-2=0$     | $[\pm\sqrt[4]{2}]$           | 436. $2x^4-1=0$     | $[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$ |
| 437. $x^8-16=0$    | $[\pm\sqrt{2}]$              | 438. $x^8-81=0$     | $[\pm\sqrt{3}]$              |
| 439. $16x^8-81=0$  | $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$    | 440. $16x^8-25=0$   | $[\pm\sqrt{\frac{5}{2}}]$    |
| 441. $x^{16}-16=0$ | $[\pm\sqrt[4]{2}]$           | 442. $16x^{16}-1=0$ | $[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$ |
| 443. $16x^{16}-81$ | $[\pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}}]$ | 444. $81x^{16}-625$ | $[\pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}]$ |

### Equazioni in cui si individua la potenza di un binomio

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 445 al n. 481 procedendo nel modo seguente:

- individuare nel polinomio al primo membro la potenza di un binomio, come mostrato a p. 407;
- scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
- risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

445.  $x^4-2x^2+1=0$   $[x_1=x_2=-1; x_3=x_4=1]$
446.  $x^4+2x^2+1=0$  [nessuna]
447.  $x^4-18x^2+81=0$   $[x_1=x_2=-3; x_3=x_4=3]$

448.  $x^4+18x^2+81=0$  [nessuna]
449.  $x^4-6x^2+9=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt{3}; x_3=x_4=\sqrt{3}]$
450.  $x^4+6x^2+9=0$  [nessuna]
451.  $4x^4-4x^2+1=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{1}{2}}; x_3=x_4=\sqrt{\frac{1}{2}}]$
452.  $4x^4+4x^2+1=0$  [nessuna]
453.  $9x^4-6x^2+1=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{1}{3}}; x_3=x_4=\sqrt{\frac{1}{3}}]$
454.  $9x^4+6x^2+1=0$  [nessuna]
455.  $9x^4-12x^2+4=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}; x_3=x_4=\sqrt{\frac{2}{3}}]$
456.  $9x^4+12x^2+4=0$  [nessuna]
457.  $4x^4-12x^2+9=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}; x_3=x_4=\sqrt{\frac{3}{2}}]$
458.  $4x^4+12x^2+9=0$  [nessuna]
459.  $x^8-2x^4+1=0$   $[x_1=x_2=-1; x_3=x_4=1]$
460.  $x^8+2x^4+1=0$  [nessuna]
461.  $x^8-8x^4+256=0$   $[x_1=x_2=-2; x_3=x_4=2]$
462.  $x^8+8x^4+256=0$  [nessuna]
463.  $x^8-6x^4+9=0$   $[x_1=x_2=-\sqrt[4]{3}; x_3=x_4=\sqrt[4]{3}]$
464.  $x^8+6x^4+9=0$  [nessuna]
465.  $x^3-3x^2+3x-1=0$   $[x_1=x_2=x_3=1]$
466.  $x^3+3x^2+3x+1=0$   $[x_1=x_2=x_3=-1]$
467.  $x^3+6x^2+12x+8=0$   $[x_1=x_2=x_3=-2]$
468.  $x^3-6x^2+12x-8=0$   $[x_1=x_2=x_3=2]$
469.  $x^3+9x^2+27x+27=0$   $[x_1=x_2=x_3=-3]$
470.  $x^3-9x^2+27x-27=0$   $[x_1=x_2=x_3=3]$
471.  $8x^3+12x^2+6x+1=0$   $[x_1=x_2=x_3=-\frac{1}{2}]$
472.  $8x^3-12x^2+6x-1=0$   $[x_1=x_2=x_3=\frac{1}{2}]$
473.  $8x^3+36x^2+54x+27=0$   $[x_1=x_2=x_3=-\frac{3}{2}]$
474.  $8x^3-36x^2+54x-27=0$   $[x_1=x_2=x_3=\frac{3}{2}]$
475.  $27x^3+54x^2+36x+8=0$   $[x_1=x_2=x_3=-\frac{2}{3}]$

476.  $27x^3-54x^2+36x-8=0$   $[x_1=x_2=x_3=\frac{2}{3}]$
477.  $x^6+3x^4+3x^2+1=0$  [nessuna]
478.  $x^6+6x^4+12x^2+8=0$  [nessuna]
479.  $x^6-3x^4+3x^2-1=0$   $[x_1=x_2=x_3=-1; x_4=x_5=x_6=1]$
480.  $x^6-6x^4+12x^2-8=0$   $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{2}; x_4=x_5=x_6=\sqrt{2}]$
481.  $8x^6-12x^4+6x^2-1=0$   $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{1}{2}}; x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{1}{2}}]$

### Equazioni biquadratiche

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 482 al n. 509 procedendo nel modo seguente:

- trasformare il polinomio al primo membro in un trinomio di 2° grado;
- determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
- scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
- risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

- |   |                                       |  |                               |
|---|---------------------------------------|--|-------------------------------|
| 482. $x^4-5x^2+4=0$                                 | $[\pm 1; \pm 2]$                      | 483. $x^4+5x^2+4=0$                      | [nessuna]                     |
| 484. $x^4+10x^2+9=0$                                | [nessuna]                             | 485. $x^4-10x^2+9=0$                     | $[\pm 1; \pm 3]$              |
| 486. $4x^4-13x^2+9=0$                               | $[\pm 1; \pm \frac{3}{2}]$            | 487. $4x^4-13x^2+9=0$                    | [nessuna]                     |
| 488. $9x^4+8x^2-1=0$                                | $[\pm 1]$                             | 489. $9x^4-8x^2-1=0$                     | $[\pm \frac{1}{3}]$           |
| 490. $4x^4-5x^2+1=0$                                | $[\pm 1; \pm \frac{1}{2}]$            | 491. $x^4+2x^2-3=0$                      | $[\pm 1]$                     |
| 492. $x^4-2x^2-8=0$                                 | $[\pm 2]$                             | 493. $x^4+2x^2-8=0$                      | $[\pm \sqrt{2}]$              |
| 494. $x^4-2x^2+6=0$                                 | $[\pm \sqrt{3}; \pm \sqrt{2}]$        | 495. $x^4+2x^2+6=0$                      | [nessuna]                     |
| 496. $5x^4+4x^2-1=0$                                | $[\pm \sqrt{\frac{1}{5}}]$            | 497. $2x^4-3x^2-5=0$                     | $[\pm \sqrt{\frac{5}{2}}]$    |
| 498. $4x^4-3x^2-1=0$                                | $[\pm 1]$                             | 499. $3x^4-4x^2-7=0$                     | $[\pm \sqrt{\frac{7}{3}}]$    |
| 500. $2x^4-3x^2-2=0$                                | $[\pm \sqrt{2}]$                      | 501. $2x^4+5x^2-3=0$                     | $[\pm \sqrt{\frac{1}{2}}]$    |
| 502. $-\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}=0$ | $[\pm 1]$                             | 503. $\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+1=0$ | [nessuna]                     |
| 504. $0,6x^4+0,7x^2-2=0$                            | $[\pm \sqrt{\frac{4}{3}}]$            | 505. $0,6x^4-0,7x^2-2=0$                 | $[\pm \sqrt{\frac{5}{2}}]$    |
| 506. $x^4-4\sqrt{2}x^2+6=0$                         | $[\pm \sqrt[4]{18}; \pm \sqrt[4]{2}]$ | 507. $\sqrt{2}x^4+x^2+\sqrt{2}=0$        | [nessuna]                     |
| 508. $-x^4+2\sqrt{2}x^2+6=0$                        | $[\pm \sqrt[4]{18}]$                  | 509. $\sqrt{2}x^4+3x^2-\sqrt{8}=0$       | $[\pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$ |



## Equazioni trinomie

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 510 al n. 517 procedendo nel modo seguente:

- trasformare il polinomio al primo membro in un trinomio di 2° grado;
- determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
- scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
- risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

510.	$x^6+7x^3-8=0$	$[1; -2]$	511.	$x^6+x^3-6=0$	$[\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{3}]$
512.	$x^6+x^3+3=0$	[nessuna]	513.	$8x^6-31x^3-4=0$	$[-\frac{1}{2}; \sqrt[3]{4}]$
514.	$x^8-17x^4+16=0$	$[\pm 1; \pm 2]$	515.	$16x^8+31x^4-2=0$	$[\pm \frac{1}{2}]$
516.	$x^8+x^4-20=0$	$[\pm\sqrt{2}]$	517.	$x^8-20x^4+64=0$	$[\pm 2; \pm\sqrt{2}]$

## Collegamenti con i capitoli o i paragrafi precedenti

- Risolvere i seguenti quesiti:
  - spiegare perché un'equazione biquadratica non può avere solo una soluzione reale;
  - spiegare perché un'equazione biquadratica non può avere 5 soluzioni reali (vedere il capitolo ottavo, paragrafo 3).
- Riprendere la regola di Cartesio per determinare il segno delle radici reali di un'equazione di 2° grado (vedere il capitolo settimo, p. 326) e completare la seguente tabella:

Equazione biquadratica	Esame dell'equazione $az^2+bz+c=0$	Segno delle soluzioni di $az^2+bz+c=0$	Soluzioni della biquadratica
$x^4+13x^2+45=0$	$z^2+13z+45=0$ I. $\Delta=13^2-4\cdot 45=-11<0$	nessuna soluzione reale	nessuna reale
$x^4-13x^2+36=0$	$z^2-13z+36=0$ I. $\Delta=13^2-4\cdot 36=25>0$ II. due variazioni	2 soluzioni positive $z_1>0 \quad z_2>0$	4 soluzioni reali $x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1} \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}$
$x^4-3x^2-4=0$	$z^2-3z-4=0$ I. $\Delta=3^2-4\cdot(-4)\cdot 1=25>0$ II. una variazione	1 soluzione positiva $z_1<0 \quad z_2>0$	2 soluzioni reali $x_{1,2}=\pm\sqrt{z_2}$
$x^4+13x^2+36=0$	$z^2+13z+36=0$ I. $\Delta=25>0$ II. nessuna variazione	2 soluzioni negative $z_1<0 \quad z_2<0$	nessuna reale
$-5x^4-11x^2-2=0$			
$-5x^4+11x^2-10=0$			
$-5x^4+10x^2-5=0$			

- Dopo aver svolto l'esercizio 519, descrivere i casi i cui un'equazione biquadratica ha:
  - quattro soluzioni reali;
  - due soluzioni reali;
  - nessuna soluzione reale.

## Equazioni varie

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 521 al n. 537 scegliendo i procedimenti che si ritengono più opportuni.

- |      |                                |   |
|------|--------------------------------|---|
| 521. | $x^6-1$                        | $[\pm 1]$   |
| 522. | $x^6-64$                       | $[\pm 2]$   |
| 523. | $x^{12}-1$                     | $[\pm 1]$   |
| 524. | $x^{12}-64$                    | $[\pm \sqrt{2}]$  |
| 525. | $x^9-3x^6+3x^3-1=0$            | $[x_1=x_2=x_3=1]$   |
| 526. | $x^4-9x^2+8=0$                 | $[\pm 1; \pm \sqrt{8}]$   |
| 527. | $x^4-2x^3+3x^2+8x-4=0$         | $[x_1=x_2=1; \pm 2]$  |
| 528. | $x^6-9x^3+8=0$                 | $[1; 2]$  |
| 529. | $x^5-2x^3-x^2+2=0$             | $[1; \pm \sqrt{2}]$   |
| 530. | $x^5-3x^3-2x^2+6=0$            | $[\sqrt[3]{2}; \pm \sqrt{3}]$                                       |
| 531. | $x^4-10x^2+25$                 | $[x_1=x_2=\sqrt{5}; x_3=x_4=-\sqrt{5}]$                             |
| 532. | $8x^6+36x^4+54x^2+27=0$        | $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}; x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{3}{2}}]$ |
| 533. | $27x^6+54x^4+36x^2+8=0$        | $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{2}{3}}; x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{2}{3}}]$ |
| 534. | $x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$         | $[x_1=x_2=2; \pm 1]$  |
| 535. | $x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9=0$  | $[x_1=x_2=x_3=1; \pm 3]$  |
| 536. | $x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9=0$ | $[x_1=x_2=x_3=1; x_4=x_5=3]$  |
| 537. | $x^6-14x^4+49x^2-36=0$         | $[\pm 1; \pm 2; \pm 3]$   |

## Equazioni letterali

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 538 al n. 549 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera  $x$ ;
- b. esaminare i vari casi che si possono presentare a seconda dei valori assunti dal parametro.

- |      |                         |                               |
|------|-------------------------|-------------------------------|
| 538. | $x^3-kx^2=0$            | $[x_1=x_2=0; k]$              |
| 539. | $4x^3-2kx=0$            | $[0; \pm \sqrt{\frac{k}{2}}]$ |
| 540. | $x^3-4kx^2+4k^2x=0$     | $[x_1=x_2=2k; 0]$             |
| 541. | $x^4-kx^3=0$            | $[x_1=x_2=x_3=0; k]$          |
| 542. | $x^4-kx^2=0$            | $[x_1=x_2=0; \pm \sqrt{k}]$   |
| 543. | $x^4-kx=0$              | $[0; \sqrt[3]{k}]$            |
| 544. | $4x^4-25k^2x^2+36k^4=0$ | $[\pm 2k; \pm \frac{3k}{2}]$  |
| 545. | $9k^4x^4+10k^2x^2+1=0$  | $[\text{nessuna}]$            |

546.  $x^4 - 9k^2x^2 = 4k^2(x^2 - 9k^2)$   $[\pm 2k; \pm 3k]$   
 547.  $x^4 - 4k^2x^2 = k^2(x^2 - 4k^2)$   $[\pm k; \pm 2k]$   
 548.  $x^4 - 2kx^2 + k^2 = 0$   $[x_1 = x_2 = \sqrt{k}; x_3 = x_4 = -\sqrt{k}]$   
 549.  $x^4 - 4kx^4 + 4k^2x^2 = 0$   $[x_1 = x_2 = 0; x_3 = x_4 = 2k]$

Dopo aver svolto gli esercizi 519 e 520, esaminare le equazioni biquadratiche assegnate negli esercizi dal n. 550 al n. 557 e stabilire quante sono le soluzioni reali di ogni equazione senza risolverla.

550.  $x^4 - 2x^2 + k = 0$  551.  $x^4 - 2x^2 + k^2 = 0$   
 552.  $x^4 - 4x^2 - k^2 = 0$  553.  $x^4 + 4x^2 + k^2 = 0$   
 554.  $x^4 + 4x^2 - k^2 = 0$  555.  $x^4 + 2kx^2 - 1 = 0$   
 556.  $x^4 + 2k^2x^2 - 1 = 0$  557.  $x^4 - 2k^2x^2 - 1 = 0$

## Sulle frazioni algebriche

558. Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe.

Frazione algebrica	Denominatore D	D=0	Numeri per cui la frazione ha significato
$\frac{2x}{2x-4}$	D=2x-4	2x-4=0 da cui x=2	x≠2
$\frac{2x}{x^2+4}$	D=x^2+4	x^2+4=0 senza soluzioni reali	tutti i reali
$\frac{x^2+4}{2x}$			
$\frac{4x^2-x}{x^2-4}$			
$\frac{4x^2-1}{4x^2-x}$			

Dopo aver svolto l'esercizio 558, esaminare le frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. 559 al n. 564 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il denominatore D della frazione;
- determinare i valori di x per cui risulta D=0;
- determinare i valori di x per cui la frazione ha significato.

559.  $\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}$   $\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$   $\frac{x^2-2x+1}{2x-1}$   $\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x+1}$   
 560.  $\frac{2x^2-x}{x^2-1}$   $\frac{x^2-2x}{2x^2+1}$   $\frac{x+1}{x-1}$   $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x-5}$   
 561.  $\frac{4x-9}{4x}$   $\frac{4x^2}{4x^2-9}$   $\frac{x^2+3x}{4x^2+9}$   $\frac{x-2}{x^2-4x+4}$   
 562.  $\frac{5x-3}{4x^2}$   $\frac{4x+4}{4x^2+4}$   $\frac{4x^2+4x}{4x^2-4}$   $\frac{3x}{x^2-6x+9}$   
 563.  $\frac{x^3+1}{x^4-1}$   $\frac{2x^4}{x^4+1}$   $\frac{x^4-2x^2+1}{x^3-1}$   $\frac{x^3-2x^2}{x^3-10x^2+9x}$   
 564.  $\frac{x^2-1}{x^4-1}$   $\frac{2x^3}{x^3-8}$   $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+2x^2+1}$   $\frac{2x^4-4x^2}{4x^3-8x}$

**565.** Completare il procedimento per ridurre ai minimi termini la frazione algebrica:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

A. Si scompongono in fattori primi il numeratore e il denominatore (vedere paragrafo 4 di questo capitolo):

$$x^2-9=(\dots+\dots)(\dots-\dots) \quad x^2-3x=x(\dots-\dots)$$

B. Si divide numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{\boxed{x-3}(\dots)}{\boxed{x-3}\dots} = \frac{x+3}{x}$$

C. Si indicano i valori di  $x$  per cui la semplificazione è valida:

- i due termini della frazione sono stati divisi per  $\dots-\dots$ ;
- risulta  $\dots-\dots=0$  per  $x=\dots$ ;
- la semplificazione non è valida per  $x=\dots$ , ma è valida per qualunque altro valore reale di  $x \neq 3$ .

Dopo aver svolto l'esercizio 565, esaminare le frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n.566 al n.585 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. ridurre ai minimi termini la frazione;
- b. indicare i valori di  $x$  per cui la semplificazione è valida.

- |             |                             |   |
|-------------|-----------------------------|---|
| <b>566.</b> | $\frac{x^2-1}{x^2+x}$       | $\left[ \frac{x-1}{x}; x \neq -1 \right]$               |
| <b>567.</b> | $\frac{x^2-2x+1}{4x^2-4}$   | $\left[ \frac{x-1}{4x+4}; x \neq 1 \right]$             |
| <b>568.</b> | $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$    | $\left[ \frac{x-2}{x+2}; x \neq -2 \right]$             |
| <b>569.</b> | $\frac{x^2-2x+1}{4x^2-4}$   | $\left[ \frac{x-1}{4x+4}; x \neq 1 \right]$             |
| <b>570.</b> | $\frac{6x^2+12x+6}{3x^2-3}$ | $\left[ \frac{2x+2}{x-1}; x \neq -1 \right]$            |
| <b>571.</b> | $\frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$    | $\left[ \frac{x-3}{x-1}; x \neq -3 \right]$             |
| <b>572.</b> | $\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$  | $\left[ \frac{x+1}{x-1}; x \neq 2 \right]$              |
| <b>573.</b> | $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$ | $\left[ \frac{x-3}{x+3}; x \neq 3 \right]$              |
| <b>574.</b> | $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$ | $\left[ \frac{x+3}{x+4}; x \neq 1 \right]$              |
| <b>575.</b> | $\frac{x^2+x-6}{-x^2+4x-4}$ | $\left[ \frac{x+3}{2-x}; x \neq 2 \right]$              |
| <b>576.</b> | $\frac{x^4-1}{x^3+1}$       | $\left[ \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}; x \neq 1 \right]$ |
| <b>577.</b> | $\frac{x^3+27}{x^2+6x+9}$   | $\left[ \frac{x^2-3x+9}{x+3}; x \neq -3 \right]$        |
| <b>578.</b> | $\frac{x^3+1}{x^6-1}$       | $\left[ \frac{1}{x^3-1}; x \neq -1 \right]$             |

$$\begin{array}{ll}
579. & \frac{x^2-2x+4}{x^3+8} \quad \left[ \frac{1}{x+2} \right] \\
580. & \frac{x^4-1}{x^8-2x^4+1} \quad \left[ \frac{1}{x^4-1}; x \neq \pm 1 \right] \\
581. & \frac{x^3-8}{x^2+x-6} \quad \left[ \frac{x^2+2x+4}{x+3}; x \neq 2 \right] \\
582. & \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-1} \quad \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}; x \neq 1 \right] \\
583. & \frac{x^3-1}{x^4-x^3+3x^2-3} \quad \left[ \frac{x^2+x+1}{x^3+3x+3}; x \neq 1 \right] \\
584. & \frac{4x^2+4x+1}{16x^4-8x^2+1} \quad \left[ \frac{1}{(2x-1)^2}; x \neq -\frac{1}{2} \right] \\
585. & \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-5x^2+8x-4} \quad \left[ \frac{x-2}{x-1}; x \neq 2 \right]
\end{array}$$

### Moltiplicazioni e divisioni di frazioni algebriche

Esaminare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. 586 al n. 593 e risolvere i seguenti quesiti:

- eeguire le operazioni indicate;
- ridurre ai minimi termini le frazioni ottenute;
- indicare i valori di  $x$  per cui la semplificazione è valida.

$$\begin{array}{ll}
586. & \frac{1}{9+3x} \cdot \frac{3+x}{2x} \quad \frac{1}{9+3x} : \frac{2x}{3+x} \quad \left[ \frac{1}{6x}; x \neq -3 \right] \\
587. & \frac{4x^2}{3x-6} \cdot \frac{9x-18}{2x} \quad \frac{4x^2}{3x-6} : \frac{2x}{9x-18} \quad [6x; x \neq 0 \text{ e } x \neq 2] \\
588. & \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{6x^2}{x+1} \quad \frac{x^2-1}{2x} : \frac{x+1}{6x^2} \quad [3x(x-1); x \neq 0 \text{ e } x \neq -1] \\
589. & \frac{x^2-2x+1}{3x} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} \quad \frac{x^2-2x+1}{3x} : \frac{x^2-1}{x^2} \quad \left[ \frac{x(x-1)}{3(x+1)}; x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \right] \\
590. & \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4} \quad \frac{x+2}{x-2} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} \quad \left[ \frac{x-2}{x+2}; x \neq \pm 2 \right] \\
591. & \frac{x^3-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2+x+1} \quad \frac{x^3-1}{x^2-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+x} \quad [x; x \neq \pm 1] \\
592. & \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-3x}{x^2-1} \quad \left[ \frac{x}{x+3}; x \neq \pm 1 \text{ e } x \neq 3 \text{ e } x \neq -2 \right] \\
593. & \frac{x^2+2x-3}{x^2-9} \cdot \frac{2x^2-6x+3}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} \quad \left[ \frac{2(x-3)}{x-2}; x \neq \pm 3 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -2 \text{ e } x \neq 1 \right]
\end{array}$$

### Potenze di frazioni algebriche

Esaminare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. 594 al n. 598 ed eseguire le potenze indicate.

$$\begin{array}{ll}
594. & \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^2 \quad \frac{(x-2)^2}{x+3} \quad \frac{x-2}{(x+3)^2} \\
595. & \left( \frac{2x-1}{4x-3} \right)^2 \quad \frac{(2x-1)^2}{4x-3} \quad \frac{2x-1}{(4x-3)^2}
\end{array}$$



596.	$\left(\frac{x^2-2}{x^3+1}\right)^2$	$\frac{(x^2-2)^2}{x^3+1}$	$\frac{x^2-2}{(x^3+1)^2}$
597.	$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$	$\frac{(x-1)^3}{x+1}$	$\frac{x-1}{(x+1)^3}$
598.	$\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)^3$	$\frac{(x^2-1)^3}{x-2}$	$\frac{x^2-1}{(x-2)^3}$

### Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

Eseguire le addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. 599 al n. 626, basandosi sul procedimento organizzato nei seguenti passi:

- scomporre in fattori i denominatori;
- calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori;
- ad ogni frazione sostituire una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato;
- addizionare le frazioni così ottenute;
- ridurre ai minimi termini la somma.

599.	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$	$\left[\frac{1}{x-x^2}\right]$
600.	$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}$	$\left[\frac{2}{x(x-2)}\right]$
601.	$1+x + \frac{x^2}{1-x}$	$\left[\frac{1}{1-x}\right]$
602.	$\frac{1}{x-2} + x+2$	$\left[\frac{x^2-3}{x-2}\right]$
603.	$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$	$\left[\frac{2}{x^2-1}\right]$
604.	$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+2}$	$\left[\frac{5}{2x+2}\right]$
605.	$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x+1}$	$\left[\frac{1}{x}\right]$
606.	$\frac{3}{x^2-3x} - \frac{1}{x-3}$	$\left[-\frac{1}{x}\right]$
607.	$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} - 2$	$\left[\frac{16}{x^2-4}\right]$
608.	$\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{x}{x+1} + 1$	$\left[\frac{x+2}{(x+1)^2}\right]$
609.	$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+2} - \frac{2}{3x+3}$	$\left[\frac{11}{6x+6}\right]$
610.	$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x-4} + \frac{1}{3x-6}$	$\left[\frac{5}{6x-12}\right]$
611.	$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$	$\left[\frac{x^2+1}{x^2(x+1)}\right]$
612.	$\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-1}$	$\left[\frac{3}{x^2-1}\right]$

613.  $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{x-2}{x^2-x} - \frac{3}{x^2-1}$   $\left[ \frac{1}{1-x^2} \right]$
614.  $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x^2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1}$   $\left[ \frac{2}{x^2-1} \right]$
615.  $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-3x+2}$   $\left[ \frac{2}{x-2} \right]$
616.  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-5x+6}$   $\left[ \frac{1}{x-2} \right]$
617.  $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{2x+1}{x^3-x}$   $\left[ \frac{2}{x^2-1} \right]$
618.  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} + \frac{x^2+3}{1-x^2}$   $\left[ \frac{x}{x+1} \right]$
619.  $\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{x}{x^2-2x+4} + \frac{1}{x+2}$   $\left[ \frac{(x-2)^2}{x^3+8} \right]$
620.  $\frac{x^2}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1}$   $\left[ \frac{2+3x}{1-x^3} \right]$
621.  $\frac{x+2}{x^2+7x+10} - \frac{x-3}{x^2-8x+15} + \frac{x^2-15}{x^2-25}$   $[1]$
622.  $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}$   $[x-1]$
623.  $\frac{x^2+3x-1}{x^3-3x^2+3x+1} + \frac{x}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x-1}$   $\left[ \frac{3x^2}{(x-1)^3} \right]$
624.  $\frac{1}{x^3+6x^2+12x+8} - \frac{2}{x^2+4x+4} + \frac{1}{x+2}$   $\left[ \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3} \right]$
625.  $\frac{2}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$   $\left[ \frac{3}{x^2-4} \right]$
626.  $\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2} - \frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2} + \frac{16}{x^4-5x^2+4}$   $\left[ \frac{-8}{(x^2-1)(x+2)} \right]$

### Semplificare espressioni con frazioni algebriche

Semplificare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. 627 al n. 646, seguendo il procedimento indicato a p. 423 e cioè:

1. svolgere le operazioni racchiuse fra parentesi;
2. in assenza di parentesi seguire la priorità delle operazioni;
3. ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.

627.  $\left( \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) \left( x - \frac{4}{x} \right)$   $[8]$
628.  $\left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) \frac{x^2-4}{x}$   $[2]$
629.  $\left( \frac{2x^2}{x+1} - x \right) \left( x - \frac{1+2x-x^3}{1-x^2} \right)$   $[1]$
630.  $\left( \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^2+x} \right) \left( 1 - \frac{2}{x+3} \right)$   $\left[ \frac{1}{x^2} \right]$

631.  $\left[ 1 + \frac{3x(x+1)}{1-x-2x^2} \right] \left( 1-5x + \frac{9x^2}{x+1} \right)$   $[1-2x]$
632.  $\left[ 1 + \frac{3(x+1)}{x^2-x-2} \right] \left( x-5 + \frac{9}{x+1} \right)$   $[x-2]$
633.  $\left( \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+3} - \frac{5x}{x^2+x-6} \right) \left( 1 + \frac{3}{x} \right)$   $\left[ -\frac{5}{x} \right]$
634.  $\left( \frac{2+x}{2-x} + \frac{2x^2-4-2x}{4-4x+x^2} \right) \left( \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right)$   $\left[ 1 + \frac{x}{2} \right]$
635.  $\left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} \right)^2 \left( x + \frac{4}{x} - 4 \right)$   $\left[ \frac{1}{x} \right]$
636.  $\left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^2$   $\left[ \frac{2(x+2)}{x(x-2)} \right]$
637.  $\left( \frac{x^4-1}{x^2-x+1} \right) : \left[ \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2 \right]$   $[(x-1)^3]$
638.  $\left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2 \left( \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$   $\left[ \frac{x-1}{x+1} \right]$
639.  $\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}}{\frac{x}{x+1}}$   $\left[ -\frac{1}{x} \right]$
640.  $\frac{1 - \frac{1}{x}}{\left( 1 + \frac{1}{x} \right) (x^2-1)}$   $\left[ \frac{1}{(x+1)^2} \right]$
641.  $\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}}{1 + \frac{x}{x^2-1}}$   $[2]$
642.  $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}$   $\left[ -\frac{1}{x} \right]$
643.  $\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$   $\left[ 2x \frac{x^2-1}{x^2+1} \right]$
644.  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{\left( 1 - \frac{1}{x} \right) \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)}$   $[1]$
645.  $\frac{\frac{x}{2x-2} - \frac{x}{2x+2} - \frac{1}{1-x^2}}{1 + \frac{1}{x-1}}$   $\left[ \frac{1}{x} \right]$
646.  $\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2+2x+1}}{\left( 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)^2}$   $\left[ \frac{1}{1-2x^2} \right]$

### Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio è una somma di monomi in cui compaiono una o più lettere qualunque dell'alfabeto (vedere il primo volume, p. 256) e semplificare le espressioni contenenti frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. 647 al n. 656.

647.  $\left( 1 - \frac{a}{a-b} \right) \frac{a-b}{b^2}$   $\left[ -\frac{1}{b} \right]$
648.  $\frac{1 + \frac{x}{y}}{\left( 1 - \frac{x}{y} \right) \left( \frac{y-x}{y+x} \right)}$   $[1]$
649.  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3ab}{3b-2a} \right) \frac{3ab}{3b-2a}$   $[3]$

650.  $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{3xy}{xy - x - y + 1}$  [1]
651.  $\left[1 + \frac{3x(x+y)}{y^2 - xy - 2x^2}\right] \left(y - 5x + \frac{9x^2}{x+y}\right)$  [y-2x]
652.  $\left(\frac{1}{a-2b} + \frac{1}{a+2b}\right) \frac{a^2 - 4b^2}{a}$  [2]
653.  $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \left(\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right)$   $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$
654.  $\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2$   $\left[\frac{2(a+b)}{a(a-b)}\right]$
655.  $\left(\frac{a^2}{4a^2 + 4ab + b^2} - \frac{a-b}{6a+3b}\right) \frac{12a+6b}{a^3 - b^3}$   $\left[\frac{(2a+b)(a-b)}{2}\right]$
656.  $\left(\frac{a}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{3a+3b}\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}\right)$   $\left[\frac{a-2b}{3a^2b^2}\right]$

## Sulle equazioni fratte

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 657 al n. 700 seguendo il procedimento indicato a p. 425 e cioè:

a. scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{N}{D} = 0$$

dove  $N$  e  $D$  sono due polinomi;

b. risolvere l'equazione

$$N=0$$

c. verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione assegnata.

### Equazioni di 1° grado

657.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{7}{12}$  [2]
658.  $\frac{3}{x} - \frac{1}{4} = \frac{8}{5x} + \frac{1}{10}$  [4]
659.  $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2(2x-1)}$  [impossibile]
660.  $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x+2}{2x-6}$  [0]
661.  $\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x+1}$  [-5]
662.  $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x+2}$  [6]
663.  $\frac{1-x}{x-1} + \frac{4x}{2x+1} = 1$  [impossibile]
664.  $\frac{3}{2-2x} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x-1} = 0$  [4]

$$665. \quad \frac{2x-3}{x-2} - \frac{3x+1}{2-x} = 1 - \frac{x}{2x-4} \quad [0]$$

$$666. \quad \frac{2}{x-1} + 3 = 1 - \frac{2x}{1-x} \quad [\text{indeterminata per } x \neq 1]$$

$$667. \quad \frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} = 1 + \frac{5x-12}{12-6x} \quad [\text{indeterminata per } x \neq 2]$$

$$668. \quad 3 - \frac{x}{2 + \frac{x}{2}} = \frac{8}{4+x} \quad [-4]$$

### Equazioni di 2° grado

$$669. \quad \frac{8x-2}{5} = \frac{2}{x} \quad [-1; \frac{5}{4}]$$

$$670. \quad 2x + \frac{7}{x} = 8 + x \quad [1; 7]$$

$$671. \quad x - \frac{x+2}{x-2} = \frac{4x-4}{5} \quad [-3; 6]$$

$$672. \quad \frac{x}{2} - \frac{12}{x+3} = \frac{7+x^2}{4x+12} \quad [-11; 5]$$

$$673. \quad 2x-1 + \frac{2(5x-1)}{2x-1} = \frac{3}{2x-1} \quad [-2]$$

$$674. \quad 4(x+1) = \frac{4(2x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1} \quad [\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$$

$$675. \quad \frac{2x+5}{x} - \frac{x-3}{x^2} = \frac{3}{4} \quad [-2; -\frac{6}{5}]$$

$$676. \quad \frac{x+5}{x} + \frac{1-4x}{x^2} = 7 \quad [-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$$

$$677. \quad \frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 1 \quad [\text{impossibile}]$$

$$678. \quad \frac{2x}{x-3} - \frac{1-3x}{x+3} = \frac{15}{x^2-9} \quad [-\frac{6}{5}; 2]$$

$$679. \quad 1 - \frac{3x}{x^2-9} + \frac{x}{2x-6} = 0 \quad [-2]$$

$$680. \quad \frac{2-x}{2x+2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad [-2]$$

$$681. \quad \frac{4x}{x-4} + \frac{3}{x-8} = \frac{22x-48}{x^2-12x+32} \quad [12; \frac{3}{4}]$$

$$682. \quad \frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2}{x^2-3x+2} + \frac{x-1}{x-2} \quad [-3]$$

$$683. \quad \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1 \quad [\pm 2]$$

$$684. \quad \frac{3x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{2} \quad [-5; 0]$$

$$685. \quad \frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{6x-8} - \frac{4}{3x^2-4x} = 1 \quad [-6]$$



686.  $\frac{x+3}{x^2-2x+1} + \frac{1}{2x-2} + \frac{5+x}{1-x^2} = 0$  [impossibile]
687.  $\frac{x+1}{3x-3x^2} - \frac{x-1}{2x+2x^2} + \frac{7}{6x} = 0$   $[-3; 2]$
688.  $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$   $[2]$
689.  $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{2(x+4)}{x+1} = 3 - \frac{3x+1}{x-2}$   $[\frac{5}{4}; -5]$
690.  $\frac{7x+10}{x+2} + \frac{3-4x}{x-1} = \frac{2x^2+11}{x^2+x-2} = 0$   $[-3; 5]$

### Equazioni di grado superiore al 2°

691.  $x^2 + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{7}{8x^2-8} \right) = 0$   $[\pm \frac{1}{2}]$
692.  $5 \left( \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{8}{1-x^4} \right) = \frac{9}{2} - \frac{4}{1-x^2}$   $[\pm 3]$
693.  $5 \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x^4-1} \right) = \frac{3x^2}{x^2-1}$   $[\pm \sqrt{\frac{5}{3}}]$
694.  $\frac{3x^2}{x^2-1} + \frac{2}{3(x^4-1)} = 0$  [impossibile]
695.  $\frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{15}{2(x^4-1)} = 0$   $[\pm \frac{\sqrt{6}}{3}]$
696.  $\frac{18}{x^2-4} = x^2-7$   $[\pm 1; \pm \sqrt{10}]$
697.  $x^2+2 + \frac{5}{4(x^2-1)} = 0$   $[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}]$
698.  $\frac{x^2+12}{x^4-x^2+4} + \frac{12}{x^2-2} = 1$   $[\pm 1; \pm 4]$
699.  $\frac{x^2-4}{x^2+2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2+2}{x^2-4}$   $[\pm(1+\sqrt{3})]$
700.  $\frac{x^2-3}{x^2+1} - \frac{x^2-1}{x^2-3} = 3$   $[\pm \sqrt[4]{\frac{19}{3}}]$

### Equazioni letterali di 2° grado

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 701 al n. 715 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera  $x$ ;
- esaminare i vari casi che si possono presentare a seconda dei valori assunti dal parametro.

701.  $\frac{1}{k-x} + \frac{3}{2k} = \frac{1}{x}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1 = \frac{k}{3}; \quad x_2 = 2k \text{ per } k \neq 0 \\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato} \end{array} \right]$

702.  $kx+3=\frac{1}{kx-1}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=x_2=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{k} \text{ per } k\neq 0 \\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato} \end{array} \right]$
703.  $\frac{x-4k}{k}-1=\frac{x-k}{x-4k}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=2k; \quad x_2=7k \text{ per } k\neq 0 \\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato} \end{array} \right]$
704.  $\frac{1}{2x-m}+\frac{1}{x-m}=\frac{1}{m}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=x_2=\frac{m(3\pm\sqrt{3})}{2} \text{ per } m\neq 0 \\ \text{(b) per } m=0 \text{ l'equazione perde significato} \end{array} \right]$
705.  $kx+\frac{1}{x}=k+\frac{1}{kx}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=\frac{1}{k}; \quad x_2=\frac{k-1}{k} \text{ per } k\neq 0 \text{ e } k\neq 1 \\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato} \\ \text{per } k=1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione} \end{array} \right]$
706.  $\frac{x}{k+1}+\frac{k}{x}=\frac{1}{x}+\frac{2k}{k+1}$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=k-1; \quad x_2=k+1 \text{ per } k\neq \pm 1 \\ \text{(b) per } k=-1 \text{ l'equazione perde significato} \\ \text{per } k=1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione} \end{array} \right]$
707.  $x+\frac{1}{k}+\frac{1-k^2}{(k^2-k)x}=0$   $\left[ \begin{array}{l} \text{(a) } x_1=1; \quad x_2=-\frac{1+k}{k} \text{ per } k\neq \pm 1 \text{ e } k\neq 0 \\ \text{(b) per } k=1 \text{ e } k=0 \text{ l'equazione perde significato} \\ \text{per } k=-1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione} \end{array} \right]$
708.  $\frac{(x+2)(x-2)}{x}=2m+\frac{x-10m}{2mx}$   $[(a) \quad x_1=\frac{1}{2m}; \quad x_2=2m]$
709.  $\frac{x^2+m^2}{x^2-m^2}=\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x-m}$   $[(a) \quad x_1=x_2=1\pm\sqrt{1-m^2}]$
710.  $\frac{(a-2)x^2+ax}{x^2-1}+\frac{a+1}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{ax}{x-1}$   $[(a) \quad x_1=a+1]$
711.  $\frac{k^2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{kx^2}{x^2-1}+k$   $[(a) \quad x_1=\frac{1}{k-1}; \quad x_2=\frac{k}{k-1}]$
712.  $2x^2+\frac{1}{2x^2}=2k+\frac{1}{2k}$   $[(a) \quad x_1=x_2=\pm\sqrt{k}; \quad x_3=x_4=\pm\frac{\sqrt{k}}{2k}]$
713.  $\frac{1}{x^2+m^2}+\frac{1}{2x^2-m^2}=\frac{x^2+2m^2}{x^4+m^2x^2}$   $[(a) \quad x_1=x_2=\pm m; \quad x_3=x_4=\pm m\sqrt{2}]$
714.  $\frac{1}{x^2+k^2}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2kx-2k^2}=\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{2kx+2k^2}$   $[(a) \quad x_1=x_2=\pm k\sqrt{2}]$
715.  $\frac{(1-x^2)^2-(x^2-2k)^2}{(1-x^2)(x^2-2k)}=\frac{8k}{1-4k^2}$   $[(a) \quad x_1=x_2=\pm\sqrt{\frac{1+4k^2}{2}}; \quad x_3=x_4=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+4k^2}{k}}]$

## Sul segno di un polinomio

Studiare il segno dei polinomi proposti negli esercizi dal n. 716 al n. 733, seguendo il procedimento indicato a p. 430 e cioè:

- scomporre il polinomio in fattori di 1° o 2° grado;
- determinare il segno del polinomio P, tenendo presente che si ha:
  - $P=0$  solo se almeno uno dei fattori vale 0;
  - $P<0$  solo se il polinomio presenta un numero dispari di fattori negativi.

716.  $P(x)=x^3-1$

717.  $P(x)=x^3+1$

718.  $P(x)=x^3-8$

719.  $P(x)=x^3+8$

720.  $P(x)=x^4-1$

721.  $P(x)=x^4-16$

722.  $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

723.  $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

724.  $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$

725.  $P(x)=3x^3+2x^2-4x-3$

726.  $P(x)=3x^3-5x^2+7x-5$

727.  $P(x)=6x^3-6x^2+4x-32$

728.  $P(x)=x^4+2x^2-3$

729.  $P(x)=x^4-2x^2-8$

730.  $P(x)=4x^4-13x^2+9$

731.  $P(x)=4x^4-5x^2+1$

732.  $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

733.  $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$

## Sul segno di un quoziente di polinomi

Studiare il segno dei quozienti di polinomi proposti negli esercizi dal n. 734 al n. 743, seguendo il procedimento indicato a p. 429 e cioè:

- studiare il segno del numeratore N e del denominatore D;
- determinare il segno del quoziente Q, tenendo presente che si ha:
  - Q privo di significato se risulta  $D=0$ ;
  - $Q=0$  se risulta  $N=0$  e  $D\neq 0$ ;
  - $Q>0$  se N e D hanno lo stesso segno;
  - $Q<0$  se N e D hanno segno opposto.

734.  $Q(x)=\frac{x}{x-1}$

$Q(x)=\frac{x-1}{x}$

735.  $Q(x)=\frac{2x}{x+1}$

$Q(x)=\frac{x+1}{2x}$

736.  $Q(x)=\frac{x-2}{x+2}$

$Q(x)=\frac{x+2}{x-2}$

737.  $Q(x)=\frac{3x-4}{3x+4}$

$Q(x)=\frac{3x+4}{3x-4}$

738.  $Q(x)=\frac{2x}{2x^2+x}$

$Q(x)=\frac{2x^2+x}{2x}$

739.  $Q(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

$Q(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

740.  $Q(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

$Q(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

741.  $Q(x)=\frac{x^2-2x+1}{4x^2+4}$

$Q(x)=\frac{4x^2+4}{x^2-2x+1}$

742.  $Q(x)=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+1}$

$Q(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$

743.  $Q(x)=\frac{2x^2}{x^3-1}$

$Q(x)=\frac{x^3-1}{2x^2}$

## Sulle equazioni irrazionali

### Equazioni irrazionali di grado non superiore al 2°

Risolvere le equazioni irrazionali proposte negli esercizi dal n. 744 al n. 781, seguendo il procedimento indicato a p. 432 e cioè:

- a. elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
- b. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
- c. se i due membri dell'equazione sono stati elevati ad un esponente pari, verificare che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione di partenza.

744.	$\sqrt{x}=2$	$\sqrt[3]{x}=2$	
745.	$\sqrt{x-1}=2$	$\sqrt[3]{x-1}=2$	
746.	$\sqrt{x^2+x}=0$	$\sqrt[3]{x^2+x}=0$	
747.	$\sqrt{x^2-9}=0$	$\sqrt[3]{x^2-9}=0$	
748.	$\sqrt{x^2+3x-5}=1-x$		[impossibile]
749.	$\sqrt{x^2+3x-5}=x-1$		$[\frac{6}{5}]$
750.	$3-2x=\sqrt{9x^2-9x}$		$[\frac{4}{3}]$
751.	$2x-3=\sqrt{9x^2-9x}$		[impossibile]
752.	$\sqrt{x^2-3x+2}=x-3$		[impossibile]
753.	$\sqrt{x^2-3x+2}=3-x$		$[\frac{7}{3}]$
754.	$\sqrt[3]{3x^3-2x}=x\sqrt[3]{3}$		[0]
755.	$\sqrt[3]{x(x^2-9)+2(x^2-13)}=x+1$		[-9; -3]
756.	$3-x=\sqrt{-2x^2+x+5}$		$[1; \frac{4}{3}]$
757.	$x-3=\sqrt{-2x^2+x+5}$		[impossibile]
758.	$\sqrt[4]{x^4-4x^3+3x^2}=1-x$		$[\frac{1}{3}; 1]$
759.	$\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2}=x+1$		[3]
760.	$\sqrt{1+3x}=1-3x$		[0]
761.	$\sqrt{1+3x}=3x-1$		[1]
762.	$\sqrt{5x+1}=2(1-x)$		$[\frac{1}{4}]$
763.	$\sqrt{5x+1}=2(1-x)$		[3]

764.	$\sqrt[3]{x^3+x-2}=x-1$	$[-\frac{1}{3}; 1]$
765.	$\sqrt[3]{x^3-1}=x-1$	$[0; 1]$
766.	$5\sqrt{x-1}=-x-5$	[impossibile]
767.	$5\sqrt{x-1}=x+5$	$[5; 10]$
768.	$\sqrt{3x+6}=x-4$	$[10]$
769.	$\sqrt{3x+6}=4-x$	$[1]$
770.	$\sqrt{x-1}=-\frac{2}{5}x$	[impossibile]
771.	$\sqrt{x-1}=\frac{2}{5}x$	$[\frac{5}{4}; 5]$
772.	$\sqrt[3]{x^3+26}=x+2$	$[-3; 1]$
773.	$\sqrt[3]{(x+1)^3+10x+17}=x+2$	$[-\frac{5}{3}; 2]$
774.	$\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$	$[1]$
775.	$\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+5}$	$[6]$
776.	$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}$	$[6]$
777.	$\sqrt{x-4}=\sqrt{3-x}$	[impossibile]
778.	$\sqrt{x+2}=\sqrt{2(x+1)}$	$[0]$
779.	$\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x-1}$	$[1]$
780.	$\sqrt{x^2+3}=\sqrt{3-x}$	$[-1; 0]$
781.	$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x+1}$	$[-1; 1]$

### Equazioni in cui si deve isolare un radicale

782. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x^2+7}-1=\sqrt{2}x$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione è ancora irrazionale;
- isolare il radicale, cioè lasciare al primo membro solo il radicale, scrivendo l'equazione nella forma:

$$\sqrt{x^2+7}=\sqrt{2}x+1$$

- risolvere l'equazione irrazionale ottenuta con il procedimento seguito negli esercizi 744-781.

$$[(c) \sqrt{2}]$$



Dopo aver svolto l'esercizio 782, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. 783 al n. 788 procedendo nel modo seguente:

- isolare il radicale;
- elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
- risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
- verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

783.  $2x = \sqrt{x^2 + 4} - 2$  [0]

784.  $\sqrt{6x+12} - 3 = x$  [ $\pm\sqrt{3}$ ]

785.  $\sqrt{8x+21} - x = 4$  [ $\pm\sqrt{5}$ ]

786.  $2x + \sqrt{x+4} = 2$  [0]

787.  $2x = 4 - \sqrt{3x+4}$  [ $\frac{3}{4}$ ]

788.  $x - \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 3$  [impossibile]

789. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{2(x-1)} = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione rimane irrazionale;
- lasciare in ciascun membro solo un radicale, scrivendo l'equazione nella forma:

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2(x-1)}$$

- risolvere l'equazione irrazionale ottenuta con il procedimento seguito negli esercizi 744-781. [(c) impossibile]

Dopo aver svolto l'esercizio 789, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. 790 al n. 797 procedendo nel modo seguente:

- scrivere l'equazione in modo che ciascun membro presenti solo un radicale;
- elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
- risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
- verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

790.  $\sqrt{16-x} - \sqrt{56+x} = 0$  [-1; 0]

791.  $\sqrt{18x-5} - \sqrt{6x+1} = 0$  [ $\frac{1}{2}$ ]

792.  $2\sqrt{28+x} - \sqrt{40-2x} = 0$  [-12]

793.  $\sqrt{x^2+67} - 2\sqrt{5x-8} = 0$  [11; 9]

794.  $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+3} = 0$  [impossibile]

795.  $\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x} = 0$  [1]

796.  $\sqrt{64x^2-81} - \sqrt{16x^2+63} = 0$  [ $\pm\sqrt{3}$ ]

797.  $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$  [impossibile]

## Equazioni che si risolvono elevando più volte a potenza

798. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x+3}=1+\sqrt{10-x}$$

che non può essere scritta in modo da presentare in ciascun membro solo un radicale. Risolvere i seguenti quesiti:

- elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione rimane irrazionale;
- isolare il radicale nell'equazione irrazionale ottenuta ed elevare di nuovo i due membri al quadrato, ottenendo un'equazione razionale;
- risolvere l'equazione razionale ottenuta e verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.

[(c) 6]

Dopo aver svolto l'esercizio 798, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. 799 al n. 810 procedendo nel modo seguente:

- elevare i membri al quadrato, ottenendo un'equazione ancora irrazionale;
- isolare il radicale nell'equazione ottenuta;
- elevare di nuovo al quadrato i due membri dell'equazione fino ad ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
- risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
- verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

799.  $\sqrt{4x+5}=2+\sqrt{2(x+2)}$  [ $-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}$ ]

800.  $\sqrt{3x-8}=2+\sqrt{x-4}$  [4; 8]

801.  $\sqrt{6x-2}=1+\sqrt{2x-1}$  [ $\frac{1}{2}; 1$ ]

802.  $1+\sqrt{3x-5}=\sqrt{3x}$  [impossibile]

803.  $\sqrt{x+9}=8-\sqrt{x-7}$  [16]

804.  $\sqrt{18x+10}=1+3\sqrt{2x-1}$  [5]

805.  $\sqrt{3x-8}=2+\sqrt{x-4}$  [4; 8]

806.  $\sqrt{8-x}=4+3\sqrt{8+x}$  [8; -8]

807.  $\sqrt{9x-41}+2\sqrt{x+6}=5\sqrt{x-1}$  [10]

808.  $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+32}=5\sqrt{x}$  [4]

809.  $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x+1}$  [1; 6]

810.  $\sqrt{10x-1}-2\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-1}$  [1]

## Equazioni irrazionali di grado superiore al 2°

Risolvere le equazioni irrazionali proposte negli esercizi dal n. 811 al n. 822, seguendo il procedimento indicato a p. 734 e cioè:

- elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
- risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado superiore al 2°;
- se i due membri dell'equazione sono stati elevati ad un esponente pari, verificare che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione di partenza.

811.  $3x^2+2=\sqrt{20x^2+5}$  [±1]

812.  $x^2-3=\sqrt{3x^2+1}$  [±2√2]

813.  $\sqrt{-x^3+6x^2+4}=x+2$  [0; 1; 4]
814.  $\sqrt[3]{6x^3+4x+8}=2+x$   $[-\frac{4}{5}; 0; 2]$
815.  $\sqrt[3]{x^3-3x^2+4x+1}=2x+1$   $[0; 2; -\frac{1}{7}]$
816.  $\sqrt[3]{x^3-6x^2+13x-7}=2x-1$   $[\pm 1; \frac{6}{7}]$
817.  $\sqrt[3]{8x^2+16x}=x+2$   $[\pm 2]$
818.  $\sqrt[3]{2x^2-8x+8}=x-2$  [2; 4]
819.  $\sqrt[4]{x^4+1}=x+1$  [0]
820.  $\sqrt[4]{x^4-1}=x-1$  [1]
821.  $\sqrt[4]{x^4-4x^3+1}=1-x$   $[0; \frac{2}{3}]$
822.  $\sqrt[4]{x^4-4x^3+1}=x-1$  [impossibile]

### Riflettere sulle equazioni irrazionali

823. Esaminare le equazioni:  
 $\sqrt{5x+11}=0$        $\sqrt{8x}=\sqrt{2x}-1$        $\sqrt{3x^2}-\sqrt{3}=0$        $\sqrt{5x^2}+\sqrt{20x}=0$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché nessuna delle equazioni è irrazionale;  
 b. risolvere le equazioni.
824. Esaminare l'equazione:  
 $\sqrt{x}=-4$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché non si trova un valore di  $x$  che rende negativa l'espressione:  
 $\sqrt{x}$   
 b. spiegare perché l'equazione assegnata è impossibile, senza risolverla.
825. Esaminare le equazioni:  
 $\sqrt{x}=-2$        $\sqrt[3]{x}=-2$        $\sqrt{x-1}=-2$        $\sqrt[3]{x-1}=-2$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. scegliere le equazioni impossibili motivando la scelta;  
 b. risolvere le altre equazioni.

## Equazioni irrazionali letterali

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 826 al n. 834 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera  $x$ ;
- esaminare i vari casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

$$826. \quad x-k=\sqrt{k(k-x)} \quad \left[ \begin{array}{l} x_1=k \text{ sempre valida} \\ x_2=0 \text{ valida solo per } k \leq 0 \end{array} \right]$$

$$827. \quad x=\sqrt{k(2x-k)} \quad [x_1=x_2=k \text{ valida solo per } k \geq 0]$$

$$828. \quad \sqrt{(k+2)x+1}=\sqrt{kx+1} \quad [0]$$

$$829. \quad x+2m=\sqrt{2x^2+2mx+m^2} \quad [x_1=-m; x_2=3m \text{ valide solo per } m \geq 0]$$

$$830. \quad \sqrt{k(6x+5k)}=5k-3x \quad \left[ \begin{array}{l} x_1=\frac{2}{3}k \text{ valida solo per } k \geq 0 \\ x_2=\frac{10}{3}k \text{ valida solo per } k \leq 0 \end{array} \right]$$

$$831. \quad 2m-2x=\sqrt{4x^2-m^2} \quad [x=\frac{5}{8}m \text{ valida solo per } k \geq 0]$$

$$832. \quad x=\sqrt{(x-2k)(x+2k)} \quad [x=\frac{2}{3}k \text{ valida solo per } k \geq 0]$$

$$833. \quad \sqrt{6x+m}=\sqrt{9x-5m^2} \quad [x=6m^2 \text{ valida solo per } m \geq 0]$$

$$834. \quad \sqrt{x+3a^2}=a+\sqrt{10a^2-x} \quad [x=6a^2 \text{ valida solo per } a \geq 0]$$

### Collegamento con il paragrafo precedente: equazioni irrazionali fratte

835. Esaminare l'equazione:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché l'equazione è irrazionale e fratta (vedere il paragrafo 6, p. 420);
- completare il procedimento iniziato qui sotto per risolvere l'equazione.

I. Si riducono tutti i termini allo stesso denominatore  $\sqrt{x^2+2x}$  e si ottiene:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}} - \frac{\dots\dots\dots}{\sqrt{x^2+2x}} = 0$$

II. Si aggiungono le frazioni ottenendo:

$$\frac{\dots\dots\dots}{\sqrt{x^2+2x}} = 0 \quad \text{cioè un'equazione del tipo } \frac{N}{D} = 0$$

III. Si risolve l'equazione  $N=0$ , cioè:

$$\dots\dots\dots = 0 \quad \text{da cui } x=4$$

IV. Si verifica che la soluzione sia soluzione dell'equazione di partenza; si ha:

$$\frac{2}{\sqrt{\dots\dots^2+2\dots\dots}} - \frac{1}{\sqrt{\dots\dots+2}} = \dots\dots\dots = 0$$

e perciò si conclude che l'equazione ha la soluzione  $x=4$ .

Dopo aver risolto l'esercizio 835, risolvere le equazioni dal n. 836 al n. 845 che sono irrazionali e fratte.

$$836. \quad \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0 \quad [3]$$

837.  $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4x+9}} - \frac{9}{\sqrt{16x^2+36x}} = 0$  [4]
838.  $\sqrt{x+6} - \frac{12}{\sqrt{x+6}} + \sqrt{x} = 0$  [3]
839.  $\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x-4} + \frac{2}{\sqrt{x-4}} = 0$  [6]
840.  $\sqrt{2x-5} + 1 = \frac{2}{\sqrt{2x-5}}$  [3]
841.  $\sqrt{4x+1} + \sqrt{8x} = \frac{21}{\sqrt{4x+1}}$  [2]
842.  $\sqrt{x^2-x-1} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-x-1}} - 2$  [2]
843.  $\sqrt{x+4} = \frac{4}{\sqrt{x+4}} + \sqrt{2}$  [4]
844.  $\sqrt{5x-48} + \frac{12}{\sqrt{x+8}} = \sqrt{x+8}$  [10]
845.  $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} + \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = 6$  [ $\pm\sqrt{8}$ ]

### Equazioni irrazionali fratte letterali

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. 846 al n. 854 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera  $x$ ;
- esaminare i vari casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

846.  $\sqrt{x+a} - \frac{a}{2\sqrt{x+a}} = \frac{\sqrt{x+a}}{2}$  [ $x=0$  valida solo per  $a>0$ ]
847.  $\frac{2a}{\sqrt{x+a}} - \sqrt{x+a} = \sqrt{x+a}$  [ $x = \frac{a}{3}$  valida solo per  $a>0$ ]
848.  $\frac{5x+7k}{\sqrt{x-k}} = 2\sqrt{x-k} + 3\sqrt{2x}$  [ $x=9k$  valida solo per  $k>0$ ]
849.  $\sqrt{5k+x} + \sqrt{5k-x} = \frac{12k}{\sqrt{5k+x}}$  [ $x=4k$  valida solo per  $k>0$ ]
850.  $\sqrt{x+2m} - \frac{4}{\sqrt{x+2m}} = \sqrt{2}$  [ $x=8-2m$ ]
851.  $\sqrt{x+m} - \sqrt{x} = \frac{x+m-m\sqrt{2}}{\sqrt{x+m}}$  [ $x=m$  valida solo per  $m>0$ ]
852.  $\sqrt{x+k} + \sqrt{x} = \frac{2k}{\sqrt{x+k}}$  [ $x = \frac{k}{3}$  valida solo per  $k>0$ ]



$$853. \quad \frac{3k}{\sqrt{x^2+k}} = x + \sqrt{x^2+k}$$

$$[x=2\sqrt{\frac{k}{5}} \text{ valida solo per } k>0]$$

$$854. \quad \frac{2+\sqrt{x+k}}{3} + \frac{1}{1+\sqrt{x+k}} = \frac{5}{3}$$

$$[x_1=-k; x_2=-k+4]$$

## Sulle disequazioni irrazionali

### Studio del segno di funzioni irrazionali

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal n. 855 al n. 862 e risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico delle funzioni, basandosi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendendo gli esercizi 284-299 del capitolo sesto (p. 673);
- studiare il segno di ogni funzione.

$$855. \quad y=\sqrt{x} \quad y=\sqrt{x-1} \quad y=\sqrt{x-1} \quad y=\sqrt{x+1} \quad y=\sqrt{x+1}$$

$$856. \quad y=\sqrt{-x} \quad y=\sqrt{-x-2} \quad y=\sqrt{-x-2} \quad y=\sqrt{-x+2} \quad y=\sqrt{-x+2}$$

$$857. \quad y=-\sqrt{x} \quad y=-\sqrt{x-1} \quad y=-\sqrt{x-1} \quad y=-\sqrt{x+1} \quad y=-\sqrt{x+1}$$

$$858. \quad y=-\sqrt{-x} \quad y=-\sqrt{-x-3} \quad y=-\sqrt{-x-3} \quad y=-\sqrt{-x+3} \quad y=-\sqrt{-x+3}$$

$$859. \quad y=\sqrt[3]{x} \quad y=\sqrt[3]{x-1} \quad y=\sqrt[3]{x-1} \quad y=\sqrt[3]{x+1} \quad y=\sqrt[3]{x+1}$$

$$860. \quad y=\sqrt[3]{-x} \quad y=\sqrt[3]{-x-2} \quad y=\sqrt[3]{-x-2} \quad y=\sqrt[3]{-x+2} \quad y=\sqrt[3]{-x+2}$$

$$861. \quad y=-\sqrt[3]{x} \quad y=-\sqrt[3]{x-1} \quad y=-\sqrt[3]{x-1} \quad y=-\sqrt[3]{x+1} \quad y=-\sqrt[3]{x+1}$$

$$862. \quad y=-\sqrt[3]{-x} \quad y=-\sqrt[3]{-x-4} \quad y=-\sqrt[3]{-x-4} \quad y=-\sqrt[3]{-x+4} \quad y=-\sqrt[3]{-x+4}$$

863. Esaminare le funzioni:

$$y=\sqrt{x-p+q}$$

$$y=-\sqrt{x-p+q}$$

- basarsi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendere gli esercizi 284-299 del capitolo sesto per descrivere le caratteristiche dei grafici delle funzioni;

- esaminare il segno di ogni funzione.

864. Esaminare le funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x-p+q}$$

$$y=-\sqrt[3]{x-p+q}$$

- basarsi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendere gli esercizi 284-299 del capitolo sesto per descrivere le caratteristiche dei grafici delle funzioni;

- esaminare il segno di ogni funzione.

### Disequazioni irrazionali che si possono risolvere sia con l'aiuto dei grafici che con metodi algebrici

Esaminare le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. 865 al n. 872 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. risolvere le disequazioni con l'aiuto dei grafici;
- b. risolvere le disequazioni con i metodi algebrici descritti a p. 439;
- c. confrontare i procedimenti e i risultati ottenuti.

865.	$13-x < \sqrt{x+7}$	$13-x > \sqrt{x+7}$
866.	$\sqrt{5-2x} > 6x-1$	$\sqrt{5-2x} < 6x-1$
867.	$x-1 < \sqrt{2x-2}$	$x-1 > \sqrt{2x-2}$
868.	$\sqrt{x+1} < 3-2x$	$\sqrt{x+1} > 3-2x$
869.	$\sqrt{x-2} < x-3$	$\sqrt{x-2} > x-3$
870.	$1-x < \sqrt{4-2x}$	$1-x > \sqrt{4-2x}$
871.	$\sqrt{x-3} < 5-x$	$\sqrt{x-3} > 5-x$
872.	$x-1 < \sqrt{x-1}$	$x-1 > \sqrt{x-1}$

### Disequazioni irrazionali che si risolvono con metodi algebrici

Risolvere le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. 873 al n. 892 con i metodi algebrici descritti a p. 439.

873.	$\sqrt[3]{x^3+2} < x-1$	$\sqrt[3]{x^3+2} > x-1$
874.	$\sqrt[3]{x^3-4x} > x+1$	$\sqrt[3]{x^3-4x} < x+1$
875.	$x+1 > \sqrt[3]{3x^2+x^3}$	$x+1 < \sqrt[3]{3x^2+x^3}$
876.	$\sqrt[3]{x^3+1} > x+1$	$\sqrt[3]{x^3+1} < x+1$
877.	$x+2 > \sqrt{-x^2+3x+10}$	878. $x+2 < \sqrt{-x^2+3x+10}$
879.	$\sqrt{-x^2+6x-5} > x-1$	880. $\sqrt{-x^2+6x-5} < x-1$
881.	$\sqrt{9x^2-6x-8} < 3x+5$	882. $\sqrt{9x^2-6x-8} > 3x+5$
883.	$\sqrt{4x^2-4x-15} > 2x+1$	884. $\sqrt{4x^2-4x-15} < 2x+1$
885.	$\sqrt{x^2+x+3} < x+6$	886. $\sqrt{x^2+x+3} > x+6$
887.	$\sqrt{2x^2+x-3} > x-1$	888. $\sqrt{2x^2+x-3} < x-1$
889.	$2x+2 > \sqrt{x^2+5x+4}$	890. $2x+2 < \sqrt{x^2+5x+4}$
891.	$\sqrt{x^4+10x^2} > x^2+4x$	892. $\sqrt{x^4+10x^2} < x^2+4x$

## Sui sistemi di grado superiore al 2°

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 893 al n. 897 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. valutare il grado del sistema;
- b. determinare le soluzioni di ogni sistema;
- c. interpretare graficamente le soluzioni ottenute.

$$\begin{array}{ll}
 893. \quad \begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = x^2 - 2x \end{cases} & [(0;0); (2; 0)] \\
 894. \quad \begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = x^2 - 2x \end{cases} & [(0;0); (\frac{5}{2}; \frac{5}{4})] \\
 895. \quad \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} & [(\sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ due volte}; (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \text{ due volte}] \\
 896. \quad \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} & [\text{nessuna soluzione reale}] \\
 897. \quad \begin{cases} xy = 2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + x \end{cases} & [(2; 1); (1 \pm \sqrt{5}; \frac{2}{1 \pm \sqrt{5}})]
 \end{array}$$

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 898 al n. 919 e risolvere i seguenti quesiti:

- a. valutare il grado del sistema;
- b. determinare le soluzioni di ogni sistema.

$$\begin{array}{ll}
 898. \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x = y^2 - 1 \end{cases} & [(0; 1); (0; -1)] \\
 899. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} & [\text{nessuna}] \\
 900. \quad \begin{cases} x = \frac{4}{9}y^2 - \frac{8}{3}y + 4 \\ x = y^2 + 4y^2 + 4 \end{cases} & [(4; 0); (100; -12)] \\
 901. \quad \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = \frac{y^2}{6} + \frac{y}{2} \end{cases} & [(0; 0); (3; 3)] \\
 902. \quad \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 9 \\ x = y^2 - \frac{5}{2} \end{cases} & [(-\frac{1}{2}; \sqrt{2}) \text{ due volte}; (-\frac{1}{2}; -\sqrt{2}) \text{ due volte}] \\
 903. \quad \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases} & [(0; -1) \text{ due volte}; (\sqrt{\frac{7}{8}}; \frac{3}{4}); (-\sqrt{\frac{7}{8}}; \frac{3}{4})] \\
 904. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} & [(0; 1) \text{ due volte}; (0; -1) \text{ due volte}]
 \end{array}$$

905.  $\begin{cases} x^2+18y^2=18 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$   $[(\pm 3\sqrt{\frac{6}{7}}; \pm \frac{2}{\sqrt{7}}); (-3\sqrt{\frac{6}{7}}; \frac{2}{\sqrt{7}}); (3\sqrt{\frac{6}{7}}; -\frac{2}{\sqrt{7}})]$
906.  $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$   $[(0; 1) \text{ due volte}; (0; -1) \text{ due volte}]$
907.  $\begin{cases} x^2+25y^2=25 \\ xy=-2 \end{cases}$   $[\pm\sqrt{5}; \pm \frac{2}{\sqrt{5}}]; (\pm 2\sqrt{5}; \pm \frac{1}{\sqrt{5}})]$
908.  $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ xy=1 \end{cases}$   $[(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ due volte}; (-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ due volte}]$
909.  $\begin{cases} x=y^2-1 \\ y=x^2-1 \end{cases}$   $[(0; -1); (-1; 0); (\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2})]$
910.  $\begin{cases} xy=3 \\ x=y^2-4 \end{cases}$   $[(-3; -1); (\frac{6}{1\pm\sqrt{13}}; \frac{1\pm\sqrt{13}}{2})]$
911.  $\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x+1 \\ y=3x+1 \end{cases}$   $[(0; 1) \text{ due volte}; (-3; -8)]$
912.  $\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=x^3-3x^2-3x+1 \end{cases}$   $[(0; 1) \text{ due volte}; (3; -8)]$
913.  $\begin{cases} y=x \\ y=2x^3-3x^2+1 \end{cases}$   $[(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); (\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2})]$
914.  $\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x+1 \\ y=x^3-3x^2-3x+1 \end{cases}$   $[(0; 1); (-1; 0)]$
915.  $\begin{cases} y=3x+3 \\ y=\frac{1+x^3}{x^2} \end{cases}$   $[(-1; 0) \text{ due volte}; (\frac{1}{2}; \frac{9}{2})]$
916.  $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \\ y=\frac{2x-1}{2x^3} \end{cases}$   $[(1; \frac{1}{2}) \text{ tre volte}; (-1; \frac{3}{2})]$
917.  $\begin{cases} y=x^2-\frac{1}{2}x \\ y=\frac{2x-1}{2x^3} \end{cases}$   $[(1; \frac{1}{2}); (-1; \frac{3}{2}); (\frac{1}{2}; 0)]$
918.  $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x^2+1 \\ y=x^2+\frac{1}{x^2} \end{cases}$   $[(-\sqrt{2}; \frac{5}{2}) \text{ due volte}; (\sqrt{2}; \frac{5}{2}) \text{ due volte}]$
919.  $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ y=\frac{12}{x^2}-1 \end{cases}$   $[(\pm\sqrt{12}; 0); (\pm\sqrt{3}; 3)]$

### Collegamenti col capitolo precedente: sistemi con coefficienti letterali

Riprendere le considerazioni svolte nel testo nel capitolo settimo, p. 368 e negli esercizi 693-721 del capitolo settimo (pp. 735-739) per esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. 920 al n. 926 e risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere le soluzioni del sistema;
- esaminare i casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

920. 
$$\begin{cases} y=x^2+k \\ y=2x^2+4x+3 \end{cases} \quad [(-2 \pm \sqrt{1+k}; 2k+5 \pm 4\sqrt{2+k})]$$
921. 
$$\begin{cases} y=-x^2+2ax \\ y=\frac{x^2}{a^4}-\frac{2x}{a^3} \end{cases} \quad [(0; 0); (2a; 0)]$$
922. 
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=kx^2 \end{cases} \quad [(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{1+k^2}-1}{2k^2}}; \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{2k})]$$
923. 
$$\begin{cases} x^2+a^2y^2=a^2 \\ y=x^2-1 \end{cases} \quad [(0; -1) \text{ due volte}; (\pm \sqrt{\frac{2a^2-1}{a}}; 1-\frac{1}{a^2})]$$
924. 
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \quad [\pm 2\sqrt{\frac{r^2-1}{3}}; \pm \sqrt{\frac{4-r^2}{3}}]$$
925. 
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=k \end{cases} \quad [(\pm \sqrt{2+\sqrt{4-k^2}}; \pm \sqrt{\frac{k}{\sqrt{2+\sqrt{4-k^2}}}}); (\pm \sqrt{2-\sqrt{4-k^2}}; \pm \sqrt{\frac{k}{\sqrt{2-\sqrt{4-k^2}}}})]$$
926. 
$$\begin{cases} y=\frac{a^2}{x^2}-1 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \quad [(\pm a; 0); (\pm \sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}; \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2})]$$

## Problemi riassuntivi di tutto il capitolo

### Problemi di geometria analitica

Gli esercizi dal n. 927 al n. 949 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:

- richiedono di riprendere la geometria analitica (vedere il capitolo quinto) o sulle trasformazioni (vedere il capitolo sesto);
- conducono a risolvere equazioni o sistemi del tipo esaminato nel capitolo ottavo.

927. Tracciare il grafico della funzione:

$$y=x^3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la curva ottenuta tocca l'asse delle  $x$  in tre punti coincidenti;
- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle  $x$ ;

- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle  $x$ .



- 928.** Tracciare il grafico della funzione:

$$y=x^3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché la curva ottenuta è tangente all'asse delle  $x$ ;
- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle  $x$ ;

- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle  $x$ .

- 929.** Ripetere l'esercizio 927 a partire dalla funzione:

$$y=x^4$$

- 930.** Ripetere l'esercizio 928 a partire dalla funzione:

$$y=x^4$$

- 931.** Tracciare il grafico della funzione:

$$y=\sqrt{x}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta  $r$  d'equazione:

$$y=2$$

- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta  $r$ ;

- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta  $r$

- 932.** Tracciare il grafico della funzione:

$$y=\sqrt{x}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il punto d'intersezione della curva con l'asse delle  $x$ ;
- effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e l'asse delle  $x$ ;

- c. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e l'asse delle  $x$ .

- 933.** Ripetere l'esercizio 931 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[3]{x}$$

- 934.** Ripetere l'esercizio 932 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[3]{x}$$

- 935.** Ripetere l'esercizio 931 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[4]{x}$$

- 936.** Ripetere l'esercizio 932 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[4]{x}$$

- 937.** Tracciare i grafici della funzione  $y=\sqrt{4-x^2}$  e della retta d'equazione  $y=1$ ; determinare le coordinate dei punti d'intersezione fra la curva e la retta.

[Per il grafico della curva, vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

- 938.** Tracciare i grafici della funzione  $y=\sqrt{9-x^2}$  e della retta d'equazione  $y=2$ ; determinare le coordinate dei punti d'intersezione fra la curva e la retta.

[Per il grafico della curva, vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

Esaminare le coppie di funzioni assegnate negli esercizi dal n. **939** al n. **948** e risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico delle funzioni assegnate, tenendo presenti le considerazioni svolte nei capitoli quinto e sesto;
- calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione delle curve con gli assi cartesiani;
- interpretare dal punto di vista grafico i risultati ottenuti.

<b>939.</b>	$y=(x+1)^3$	$y=x+1$	<b>940.</b>	$y=(x+1)^3$	$y=3x+1$
<b>941.</b>	$y=x^3+1$	$y=x+1$	<b>942.</b>	$y=x^3+1$	$y=2x$
<b>943.</b>	$y=(x-1)^3$	$y=x-1$	<b>944.</b>	$y=x^3-1$	$y=x-1$
<b>945.</b>	$y=x^4-1$	$y=x^2-1$	<b>946.</b>	$y=x^3-1$	$y=x^4-1$
<b>947.</b>	$y=x^3+1$	$y=1-x^2$	<b>948.</b>	$y=x^3+1$	$y=(x+1)^3$

- 949.** Disegnare sul piano cartesiano le curve che hanno le equazioni seguenti:

$$xy=2 \quad x=y^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il punto di intersezione delle due curve;
- spiegare perché il grafico permette di ottenere il valore esatto di  $\sqrt[3]{2}$ ;
- in generale, quali curve bisogna disegnare per ottenere il valore esatto di  $\sqrt[3]{a}$ ?

## Problemi di geometria

Gli esercizi dal n. 950 al n. 960 propongono problemi con le seguenti caratteristiche:

- richiedono di valersi dei teoremi di Pitagora e di Euclide o delle nozioni fondamentali sulla similitudine;
- conducono a risolvere equazioni o sistemi del tipo esaminato nel capitolo ottavo.

- 950.** Disegnare il triangolo rettangolo ABC che ha il cateto AC lungo 1 e il cateto AB lungo  $\sqrt{2}$ . Determinare sul cateto AB un punto P in modo che risulti:  
 $CP = \sqrt{2}BP$  [AP =  $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ ]
- 951.** Disegnare un quadrato ABCD con il lato lungo 4; scegliere sulla semiretta AB un punto E in modo che il perimetro del triangolo CDE sia uguale a quello del quadrato.  
[BE =  $3\sqrt{2} - 2$ ]
- 952.** Disegnare un quadrato ABCD e su ogni lato costruire, esternamente al quadrato, un triangolo isoscele con l'altezza lunga 36; risolvere i seguenti quesiti:  
 a. determinare il lato del quadrato in modo che il perimetro dell'ottagono ottenuto sia  $\frac{13}{5}$  del perimetro del quadrato;  
 b. calcolare l'area  $S$  dell'ottagono ottenuto. [(b)  $S = 3060$ ]
- 953.** Disegnare una circonferenza di centro O e raggio  $r$  ed una tangente  $t$  alla circonferenza; condurre una corda AB parallela a  $t$  e, dagli estremi della corda, condurre le perpendicolari AA' e BB' a  $t$ . Stabilire a quale distanza dal centro si deve condurre la corda in modo che il rettangolo AA'B'B abbia perimetro  $2r$ .  
[ $\frac{2r\sqrt{5}}{5}$ ]
- 954.** Disegnare il quadrato inscritto in una semicirconferenza con il diametro AB lungo  $2r$ ; indicare con P e Q i vertici che si trovano sul diametro AB, con R e S i vertici che si trovano sulla semicirconferenza. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché il triangolo ASB è rettangolo;  
 b. determinare la lunghezza del lato del quadrato.  
[Scelta come incognita la lunghezza di AP, il lato del quadrato è lungo  $2r \frac{\sqrt{5}}{5}$ ]
- 955.** Un triangolo rettangolo ha i cateti AB e AC lunghi, rispettivamente, 4 e 3; condurre per A una retta esterna al triangolo e indicare con B' e C' le proiezioni ortogonali di B e di C sulla retta. Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché i due triangoli ABB' e ACC' sono simili;  
 b. calcolare quanto vale la distanza AB', sapendo che B'C' è lungo  $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ .  
[Si ottengono per la distanza AB' i due valori  $2\sqrt{2}$  e  $\frac{62}{25}\sqrt{2}$ ]
- 956.** Da un punto P esterno alla circonferenza di centro O e raggio  $r$  si tracciano le tangenti PN e PM; determinare la distanza OP in modo che risulti:  
 $OP = 4MN$  [OP =  $2r\sqrt{8 \pm 2\sqrt{15}}$ ]
- 957.** Disegnare un quadrante, quarta parte di un cerchio di centro A e raggi AD e AE lunghi  $r$ . Costruire un trapezio rettangolo ABCD nel modo seguente:  
 - da D tracciare la semiretta che è perpendicolare a AD e si trova dalla stessa parte del quadrante;  
 - da un punto C della semiretta condurre un'altra tangente  $t$ , che tocca la circonferenza in T ed incontra il prolungamento di AE in B.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. condurre da C la perpendicolare CH ad AB e spiegare perché i due triangoli ATB e BCH sono uguali;  
 b. determinare AB, sapendo che il perimetro del trapezio è lungo  $5r$ .  
[AB =  $\frac{r}{4}(6 \pm \sqrt{2})$ ]

958. Data una semicirconferenza con il centro  $O$  e il diametro  $AC$  lungo  $2r$ , tracciare per  $A$  la semiretta che è perpendicolare ad  $AC$  e si trova dalla stessa parte della semicirconferenza. Fissare un punto  $M$  sulla semiretta e tracciare da  $M$  un'altra tangente  $t$ , che tocca in  $B$  la semicirconferenza. Indicare con  $K$  l'intersezione fra la semicirconferenza e il segmento  $OM$  e risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché il quadrilatero  $AOBK$  ha le diagonali perpendicolari;
  - determinare la posizione di  $M$  per cui l'area del quadrilatero  $AOBK$  vale  $\frac{r^2}{2}$ .

$$[AM = \frac{r}{\sqrt{3}}]$$

959. Un punto  $M$  varia all'interno di un angolo retto di vertice  $O$ , mantenendo la distanza da un lato uguale a  $b$  e la distanza dall'altro lato uguale a  $2b$ . Tracciare una retta per  $M$  che incontra i due lati dell'angolo nei punti  $A$  e  $B$  e stabilire per quale posizione di  $M$  risulta:

$$AM^2 + BM^2 = 10b^2$$

[Condurre da  $M$  la perpendicolare  $MM'$  al lato  $OA$ ; si ottiene:  $MM' = b$  e  $OM' = 2b$ ; si ottengono per la distanza  $AM'$  i due valori  $b$  e  $2b$ ]

960. In un cerchio di centro  $O$  e raggio  $r$  determinare una corda  $AB$  in modo che, sommando l'area del triangolo  $AOB$  con l'area del triangolo equilatero di lato  $AB$ , si ottenga  $\frac{\sqrt{3}}{2} r^2$ .

[Indicando con  $2x$  la lunghezza della corda, si arriva ad un'equazione biquadratica

$$\text{che ha le due soluzioni positive } x_1 = \frac{r}{2} \text{ e } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r]$$

### Problemi vari

961. Si deposita in banca un capitale di 8 milioni ad un tasso di interesse composto annuo  $r$ ; risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché il montante  $C$  dopo tre anni è legato al tasso  $r$  dalla legge:

$$C = 8(1+r)^3$$

b. calcolare il tasso  $r$  per avere un montante  $C$  di 12 milioni.

[Vedere il primo volume, p. 285; si ha  $r \approx 14\%$ ]

962. Si deposita in banca un capitale di  $A$  milioni ad un tasso di interesse composto annuo  $r$ ; risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché il montante  $C$  dopo  $n$  anni è legato al tasso  $r$  dalla legge:

$$C = A(1+r)^n$$

b. scrivere la formula che permette di calcolare il tasso annuo d'interesse  $r$  necessario per ottenere un montante  $C$ , impiegando un capitale  $A$  per  $n$  anni.

$$[\text{Vedere il primo volume, p. 285; si ottiene } r = \sqrt[n]{\frac{C}{A}} - 1]$$

963. Viene proposto di investire una somma di denaro  $A = 10$  milioni con tasso di interesse composto annuo variabile nel modo seguente:

- $r = 8\%$  per i primi due anni;
- $r = 10\%$  per i successivi cinque anni;
- $r = 15\%$  per gli ultimi tre anni.

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il montante  $C$  che si ottiene dopo 10 anni;
- calcolare il tasso fisso annuo  $r$  necessario per ottenere, dopo 10 anni, lo stesso montante.

[Vedere l'esercizio 962; si ottiene  $r \approx 16\%$ ]



## Valutazione oggettiva delle probabilità

### Valutazione oggettiva della probabilità nei giochi

1. Valutare la probabilità che, lanciando un dado, si ottenga:
  - a. il numero 4;
  - b. un numero più grande di 4;
  - c. un numero più piccolo di 4.
2. Valutare la probabilità che, lanciando un dado, si ottenga:
  - a. un numero primo;
  - b. un numero multiplo di 2;
  - c. un numero multiplo di 3.
3. Una carta è scelta a caso da un mazzo di 52 carte francesi ben mischiate. Valutare la probabilità di estrarre:
  - a. una carta di cuori;
  - b. una carta nera;
  - c. un asso.
4. Una carta è scelta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate. Valutare la probabilità di estrarre:
  - a. una carta di denari;
  - b. una figura;
  - c. un re.
5. Sul tavolo della roulette si trova scritto «manque» e «passe»; questi termini hanno il seguente significato:
  - «manque» indica l'insieme dei numeri da 1 a 18;
  - «passe» indica l'insieme dei numeri da 19 a 36.Valutare la probabilità dei seguenti eventi:
  - a. esce un numero dell'insieme «manque»;
  - b. esce un numero dell'insieme «passe»;
  - c. esce 0.
6. Nel gioco della roulette, determinare la probabilità dei seguenti eventi:
  - a. esce un numero pari;
  - b. esce un numero dispari.
7. Nel gioco della roulette, determinare la probabilità dei seguenti eventi:
  - a. esce un numero nero;
  - b. esce un numero rosso.
8. In alcuni casinò si usa la roulette con due zeri; ripetere gli esercizi 5, 6 e 7 in questa nuova situazione.
9. In alcune città d'Italia avviene l'estrazione dei numeri del lotto, cioè si estraggono cinque numeri da un bussolotto che contiene novanta numeri; valutare la probabilità che venga estratto per primo il numero 70 in una data città.
10. Una lotteria offre un grosso pacco regalo e vende 500 biglietti; valutare le seguenti probabilità:
  - la probabilità  $p$  di vincere il premio comprando un biglietto;
  - la probabilità  $p'$  di vincere il premio comprando dieci biglietti.



11. Prendere informazioni su una lotteria nazionale recente (per esempio la Lotteria Italia) per conoscere i premi offerti ed il numero di biglietti venduti e valutare le seguenti probabilità:
- la probabilità  $p$  di vincere il primo premio acquistando un biglietto;
  - la probabilità  $p'$  di vincere il primo premio acquistando venti biglietti.

### **Valutazione oggettiva della probabilità in altre situazioni**

12. In una classe composta di 14 ragazzi e 12 ragazze si estrae a caso il nome di uno studente; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
- a. viene estratto un ragazzo;
  - b. viene estratta una ragazza.
13. Si sceglie una lettera a caso dalla parola *meccanicamente*; valutare la probabilità di estrarre una consonante. Quali sono le lettere che hanno la stessa probabilità di essere estratte?
14. Esaminare l'elenco alfabetico degli alunni della classe e valutare la probabilità che un alunno estratto a caso abbia il cognome che inizia con una data lettera, per esempio «a».
15. Valutare la probabilità che un meteorite cadendo colpisca una terra emersa, sapendo che la superficie della Terra è di 510 milioni di  $\text{km}^2$  e le terre emerse occupano 149 milioni di  $\text{km}^2$ .
16. Valutare la probabilità che un satellite artificiale cadendo colpisca l'Italia, sapendo che la superficie della Terra è di 510 milioni di  $\text{km}^2$  e l'Italia ha una superficie di 301 277  $\text{km}^2$ .

### **Riflettere sulla valutazione oggettiva della probabilità**

17. Esaminare l'elenco telefonico della propria città e dire quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un abbonato estratto a caso abbia il cognome che inizia con una data lettera, per esempio «a».
18. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un alunno della scuola scelto a caso sia di una data classe, per esempio la II<sup>a</sup>A?
19. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un alunno della scuola scelto a caso sia iscritto alla prima classe?
20. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un insegnante della scuola scelto a caso insegni matematica?
21. Si sceglie a caso una classe della scuola; in quale caso risulta ugualmente probabile che la classe scelta sia una prima o una seconda?

### Sulla probabilità totale di due eventi

22. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:  
a. esce 3;  
b. esce un numero pari.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità che esca 3 o un numero pari?
23. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:  
a. esce 6;  
b. esce un numero pari.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità che esca 6 o un numero pari?
24. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi; considerare i seguenti eventi:  
a. si estrae un re;  
b. si estrae un asso.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità di estrarre un re o un asso?
25. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi; considerare i seguenti eventi:  
a. si estrae una carta di cuori;  
b. si estrae un re.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità di estrarre un re o una carta di cuori?
26. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane; considerare i seguenti eventi:  
a. si estrae un re;  
b. si estrae un sette.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità di estrarre un re o un sette?
27. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane; considerare i seguenti eventi:  
a. si estrae un sette;  
b. si estrae una carta di denari.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità di estrarre un sette o una carta di denari?
28. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
a. esce un numero pari;  
b. esce il numero 7.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità che esca 7 o un numero pari?
29. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
a. esce un numero dispari;  
b. esce il numero 7.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità che esca 7 o un numero dispari?

30. Valutare la probabilità dei seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:  
a. il numero 45 viene estratto per primo;  
b. il numero 45 viene estratto per secondo.  
I due eventi sono compatibili o incompatibili?  
Qual è la probabilità che il numero 45 esca per primo o per secondo?

**Sulla probabilità che un evento non si verifichi**

31. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. esce 6;  
b. non esce 6.
32. Valutare la probabilità dei seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:  
a. viene estratto per primo il numero 90;  
b. non viene estratto per primo il numero 90.
33. Si estrae una carta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. si estrae un re;  
b. non si estrae un re;  
c. si estrae una carta di bastoni;  
d. non si estrae una carta di bastoni.
34. Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte francesi ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. si estrae un asso;  
b. non si estrae un asso;  
c. si estrae una figura;  
d. non si estrae una figura.
35. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. esce un numero pari;  
b. non esce un numero pari;  
c. esce un numero dispari.
36. Valutare la probabilità dei seguenti eventi nel gioco della roulette:  
a. esce numero pari;  
b. non esce un numero pari;  
c. esce un numero dispari.
37. Confrontare le situazioni presentate negli esercizi 35 e 36; spiegare perché si verifica che:  
- nel lancio di un dado gli eventi (b) e (c) sono equiprobabili;  
- nel gioco della roulette gli eventi (b) e (c) non sono equiprobabili.

## Scoprire come si calcola la probabilità totale di tre eventi

38. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
 a. esce il numero 4;  
 b. esce un numero primo;  
 c. esce un numero maggiore di 3;  
 d. esce 4 o un numero primo o un numero maggiore di 3.  
*[Rappresentare l'insieme  $P$  dei numeri primi, l'insieme  $M$  dei numeri maggiori di 3 e collocare correttamente il numero 4. Per l'evento (d) si ottiene  $p=1$ ]*
39. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
 a. esce il numero 2;  
 b. esce un numero primo;  
 c. esce un numero minore di 3;  
 d. esce 2 o un numero primo o un numero minore di 3. [(d)  $p=\frac{4}{6}$ ]
40. Nel gioco della roulette valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
 a. esce il numero 25;  
 b. esce un numero dispari;  
 c. esce un numero rosso;  
 d. esce 25 o un numero rosso o un numero dispari. [(d)  $p=\frac{26}{37}$ ]
41. Nel gioco della roulette valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
 a. esce un numero nero;  
 b. esce un numero pari;  
 c. esce un numero «manque» (cioè compreso fra 1 e 18);  
 d. esce un numero nero o pari o «manque». [(d)  $p=\frac{31}{37}$ ]
42. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
 a. si estrae un re;  
 b. si estrae una carta di coppe;  
 c. si estrae una figura;  
 d. si estrae una carta di coppe o un re o una figura. [(d)  $p=\frac{19}{40}$ ]
43. Lo svolgimento degli esercizi 38-42 suggerisce la seguente legge generale per valutare la probabilità  $p$  che si verifichi almeno uno fra tre eventi:  

$$p=q+r+s-a-b-c+d$$
 dove le lettere hanno il seguente significato:  
 $q$  è la probabilità che si verifichi il 1° evento;  
 $r$  è la probabilità che si verifichi il 2° evento;  
 $s$  è la probabilità che si verifichi il 3° evento;  
 $a$  è la probabilità che si verifichino insieme il 1° e il 2° evento;  
 $b$  è la probabilità che si verifichino insieme il 1° e il 3° evento;  
 $c$  è la probabilità che si verifichino insieme il 2° e il 3° evento;  
 $d$  è la probabilità che si verifichino insieme il 1°, il 2° e il 3° evento.  
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. esaminare la formula e spiegarne il significato, basandosi su un esempio opportunamente scelto;  
 b. scrivere la formula nel caso di tre eventi incompatibili.

## Probabilità composta

### Sulla probabilità composta di due eventi

44. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:  
a. esce un numero pari;  
b. esce un numero minore di 5.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che esca un numero pari e minore di 5?
45. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:  
a. esce un numero dispari;  
b. esce un numero maggiore di 3.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che esca un numero dispari e maggiore di 3?
46. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:  
a. esce un numero nero;  
b. esce un numero dispari.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che esca un numero dispari e nero?
47. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:  
a. esce un numero rosso;  
b. esce un numero «manque» (cioè compreso fra 1 e 18).  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che esca un numero «manque» e nero?
48. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:  
a. esce un numero pari;  
b. esce un numero «passe» (cioè compreso fra 19 e 36).  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che esca un numero «passe» e pari?
49. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:  
a. viene estratto per primo il numero 70 in un'estrazione;  
b. viene estratto per primo il numero 70 nell'estrazione della settimana successiva.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità che il numero 70 sia estratto per primo due volte di seguito?
50. Si lancia un dado due volte; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. si ottiene 6 al primo lancio;  
b. si ottiene 6 al secondo lancio.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità di ottenere 6 due volte di seguito?
51. Si lancia un dado due volte; valutare la probabilità dei seguenti eventi:  
a. si ottiene 6 al primo lancio;  
b. si ottiene 1 al secondo lancio.  
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?  
Qual è la probabilità di ottenere al primo lancio 6 e al secondo lancio 1?
52. Calcolare la probabilità che esca zero due volte di seguito in una roulette con un solo zero.



53. Calcolare la probabilità che esca zero due volte di seguito in una roulette con due zeri.
54. Da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate si estraggono due carte nel modo seguente:  
 - si estrae la prima carta;  
 - si rimette la carta nel mazzo e si mischiano le carte;  
 - si estrae la seconda carta.  
 Calcolare la probabilità  $p$  di estrarre due carte di denari.
55. Da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate si estraggono due carte nel modo seguente:  
 - si estrae la prima carta;  
 - si lascia da parte la carta estratta;  
 - si estrae la seconda carta.  
 Calcolare la probabilità  $p$  di estrarre due carte di denari.
56. Qual è la probabilità  $p$  che in un'estrazione del lotto in una data città venga estratto per primo il numero 10 e per secondo il numero 20?

### Come scoprire la probabilità composta di tre eventi

57. Calcolare la probabilità  $p$  che, lanciando una moneta tre volte, si ottengano tre teste.
58. Calcolare la probabilità  $p$  che, lanciando un dado tre volte, si ottenga tre volte 1.
59. Calcolare la probabilità  $p$  che, nel gioco del lotto di una data città, il numero 55 sia il primo estratto per tre volte di seguito.
60. Calcolare la probabilità  $p$  che, nel gioco del lotto di una data città, venga estratto per primo il numero 20, per secondo il numero 30 e per terzo il numero 40.
61. Nel gioco della roulette valutare la probabilità  $p$  di avere un numero che sia contemporaneamente nero, dispari e «manque».  
*[Può essere utile valersi di un diagramma ad albero come quello presentato nel paragrafo 3. Si ottiene:  $p = \frac{4}{37} \approx 0,108$ ]*
62. Nel gioco della roulette valutare la probabilità  $p$  di avere un numero che sia contemporaneamente nero, pari e «manque».
63. Nel gioco della roulette valutare la probabilità  $p$  di avere un numero che sia contemporaneamente rosso, pari e «passe».
64. Nel gioco della roulette valutare la probabilità  $p$  di avere un numero che sia contemporaneamente rosso, dispari e «passe».

65. Lo svolgimento degli esercizi 57-64, eventualmente visualizzato con diagrammi ad albero, suggerisce la seguente legge generale per valutare la probabilità  $p$  che si verifichino simultaneamente tre eventi:

$$p=q \cdot r \cdot s$$

dove le lettere hanno il seguente significato:

- $q$  è la probabilità che si verifichi il primo evento;
- $r$  è la probabilità che, dopo essersi verificato il primo evento, si verifichi anche il secondo;
- $s$  è la probabilità che, dopo essersi verificati i primi due eventi, si verifichi anche il terzo.

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. esaminare la formula e spiegarne il significato, basandosi su un esempio opportunamente scelto;
- b. spiegare qual è il significato delle lettere nel caso di tre eventi indipendenti.

---

## Sulla probabilità totale e composta

---

66. In una classe composta di 10 ragazze e 15 ragazzi vengono estratti due alunni che parteciperanno a un viaggio premio; valutare le seguenti probabilità:

- la probabilità  $p$  che siano estratte due ragazze;
- la probabilità  $q$  che siano estratti due ragazzi;
- la probabilità  $r$  che siano estratti due ragazze o due ragazzi;
- la probabilità  $s$  che siano estratti un ragazzo ed una ragazza.

$$[p = \frac{3}{20}; \quad q = \frac{7}{20}; \quad r = \frac{1}{2}; \quad s = 1 - r]$$

67. Si lancia cinque volte un dado; calcolare la probabilità  $p$  che esca 6 almeno una volta.

[La probabilità  $q$  che 6 non esca cinque volte è... e quindi  $p=1-q=...$ ]

68. Si lancia cinque volte un dado; calcolare la probabilità  $p$  che esca un numero pari almeno una volta.

$$[p \approx 0,97]$$

69. Si lanciano due dadi, uno grigio e uno nero, e si calcola la somma dei due numeri che compaiono; valutare le seguenti probabilità:

- la probabilità  $p$  che la somma sia 2 (cioè si abbia 1 sul dado grigio e 1 su quello nero);
- la probabilità  $q$  che la somma sia 3 (cioè si abbia 1 sul dado grigio e 2 sul dado nero o, viceversa, 2 sul dado grigio e 1 su quello nero).

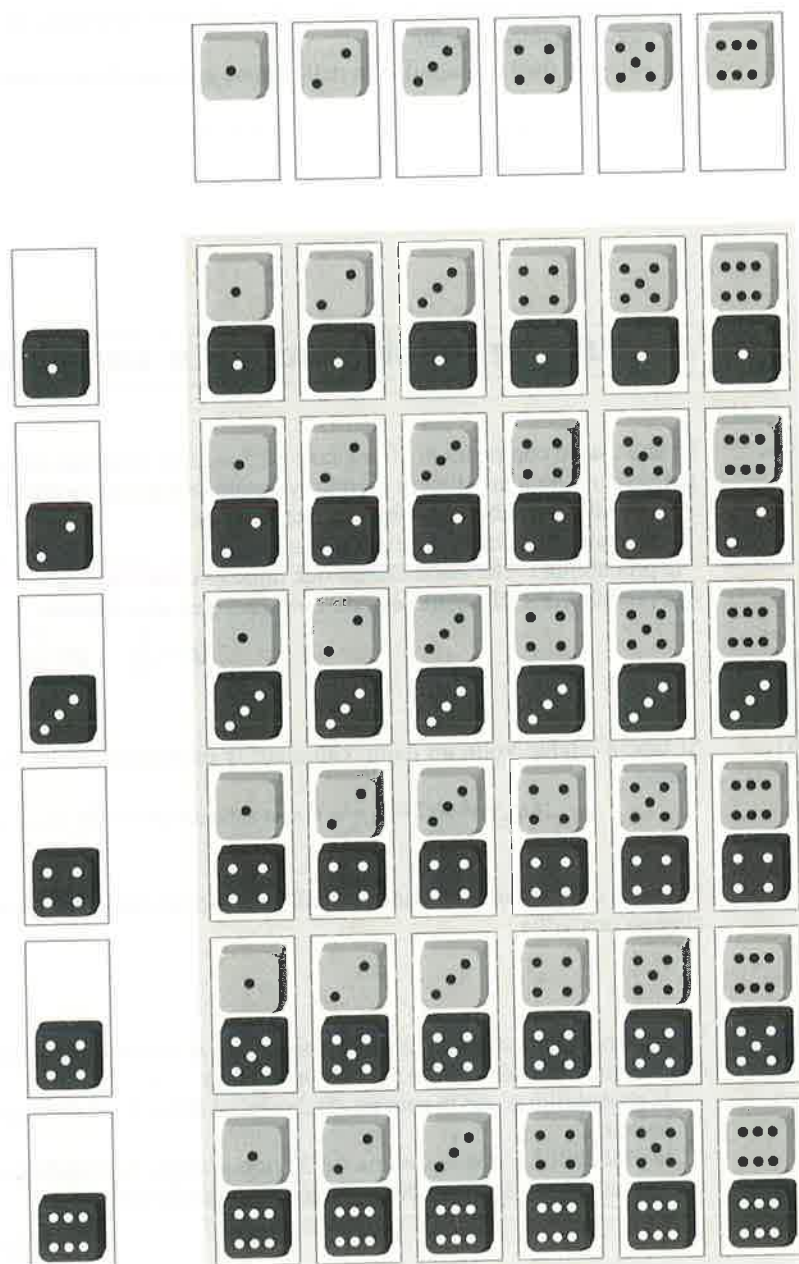
$$[p = \frac{1}{36}; \quad q = \frac{1}{18}]$$

70. Aiutandosi anche con la fig. 1, indicare:
- le somme possibili che si possono ottenere nel gioco descritto nell'esercizio precedente;
  - la probabilità di ogni somma;
  - le somme che hanno la stessa probabilità;
  - la somma più probabile.

71. Basandosi anche sullo svolgimento dell'esercizio precedente, calcolare la probabilità  $p$  che, lanciando una volta due dadi, si ottengano due numeri uguali.

$$[p = \frac{1}{6}]$$

Figura 1  
Lancio di due dadi



72. Si lanciano cinque volte due dadi; calcolare la probabilità  $p$  che escano almeno una volta due numeri uguali.  
[ $p \approx 0,6$ ]
73. Si lanciano cinque volte due dadi; calcolare la probabilità  $p$  che si abbia almeno una volta un doppio 3.  
[ $p \approx 0,13$ ]
74. Si lanciano dieci volte due dadi; calcolare la probabilità  $p$  che si abbia almeno una volta un doppio 3.  
[ $p \approx 0,25$ ]
75. Nell'antico gioco della morra due giocatori mostrano contemporaneamente la loro mano destra, stendendo la mano chiusa a pugno (zero dita) oppure uno o due o tre o quattro o cinque dita; ogni giocatore deve indovinare il numero che si ottiene «sommando le dita» di entrambi.  
Valutare i possibili risultati della «somma delle dita» e la probabilità di ciascun risultato.
76. Basandosi anche sullo svolgimento dell'esercizio precedente, calcolare la probabilità  $p$  che, giocando una volta a morra, i due giocatori mostrino due numeri uguali.  
[ $p = \frac{1}{6}$ ]
77. Calcolare la probabilità  $p$  che, giocando sei volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta due numeri uguali.  
[ $p \approx 0,67$ ]
78. Calcolare la probabilità  $p$  che, giocando sei volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta un doppio 3.  
[ $p \approx 0,15$ ]
79. Calcolare la probabilità  $p$  che, giocando dodici volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta un doppio 3.  
[ $p \approx 0,29$ ]
80. Valutare la probabilità  $p$  che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un numero, ad esempio 38.  
[Il numero può essere estratto per primo o per secondo o per terzo o per quarto o per quinto. Si ha:  $p = \frac{5}{90} \approx 0,056$ ]
81. Valutare la probabilità  $p$  che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un dato ambo, ad esempio i numeri 38 e 83.  
[Deve essere estratto il numero 38 e, fra i rimanenti 89 numeri, il numero 83. Si ha:  $p = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \approx 0,0025$ ]
82. Valutare la probabilità  $p$  che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un dato terno, ad esempio i numeri 38, 83 e 11.  
[ $p = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} \approx 8,5 \cdot 10^{-5}$ ]

## Scoprire errori nel calcolo delle probabilità

83. Un giocatore alla roulette dice:  
«Punto sul 10 che non è uscito in questi ultimi quattro lanci, dato che ora la probabilità che esca 10 è aumentata».  
Perché il giocatore sbaglia?
84. Un giocatore alla roulette dice:  
«Punto sul numero 25, così i casi sono due o esce 25 oppure non esce 25, perciò ho una probabilità di vincita del 50%».  
Perché il giocatore sbaglia?
85. Si estrae a caso uno studente di una classe composta di 16 ragazzi e 10 ragazze; uno studente dice:  
«O viene estratto un ragazzo o viene estratta una ragazza; i casi sono due, ciascuno con una probabilità del 50%».  
Perché il ragazzo sbaglia? Qual è la probabilità che venga estratto un ragazzo? Qual è la probabilità che venga estratta una ragazza?
86. Due giocatori A e B stanno giocando ad estrarre la carta più alta da un mazzo di carte napoletane; il giocatore A scopre un 5 e il giocatore B dice:  
«Ora ho la stessa probabilità di vincere o di perdere».  
Perché il giocatore B sbaglia? Qual è la probabilità di vincita, di pareggio e di perdita del giocatore B?
87. Un giocatore di roulette dice:  
«Punto su manque e dispari, perché ci sono 18 numeri manque e 18 numeri dispari, perciò è sicuro che esce manque o dispari».  
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la probabilità che esca un numero manque o un numero dispari?
88. Un giocatore di roulette dice:  
«Punto su passe e rosso, perché ci sono 18 numeri passe e 18 numeri rossi, perciò è sicuro che esce passe o rosso».  
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la probabilità che esca un numero passe o un numero rosso? (Per il colore dei numeri della roulette vedi fig. 2 del paragrafo 2).
89. Una persona acquista due biglietti di una lotteria che offre un premio e vende 100 biglietti; acquistando i biglietti la persona dice:  
«Con due biglietti ho solo 2 probabilità su 100 di perdere».  
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la sua probabilità di perdere?
90. Prendere informazioni su una lotteria nazionale recente per conoscere i premi offerti ed il numero di biglietti venduti.  
Calcolare la probabilità  $p$  di non vincere alcun premio acquistando un biglietto.  
Calcolare la probabilità  $q$  di non vincere alcun premio acquistando dieci biglietti.  
Discutere con qualche persona che non ha studiato il calcolo delle probabilità per capire come valuta le probabilità  $p$  e  $q$ ; scoprire se vengono commessi degli errori.
91. In una classe composta di 10 ragazze e 15 ragazzi vengono estratti due alunni che parteciperanno ad un viaggio premio; un ragazzo dice:  
«O vengono estratti due ragazzi o vengono estratte due ragazze o viene estratto un ragazzo ed una ragazza; i casi sono tre, ciascuno con una probabilità  $\frac{1}{3}$ ».  
Perché il ragazzo sbaglia? Come si doveva impostare il ragionamento per esaminare correttamente la situazione?



## Probabilità e genetica

92. Una malattia ereditaria rara, ma curabile, è la *galattosemia*. Un neonato galattosemico manca di un enzima necessario per digerire il latte e perciò mostra gravi reazioni anche quando viene nutrito col latte materno. Basta nutrire il bambino con uno speciale latte artificiale per assicurargli una crescita del tutto normale; altrimenti si hanno gravi conseguenze, come la deficienza mentale o la morte.
- Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:
- GG persona sana anche geneticamente;
  - gg persona galattosemica;
  - Gg «portatore sano» di galattosemia.
- La malattia è dunque *recessiva*, perché si manifesta solo quando la situazione cromosomica è «gg» (omozigote).
- Descrivere le situazioni che si possono presentare e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
- a. figli di due «portatori sani di galattosemia»;
  - b. figli di un galattosemico e di un «portatore sano»;
  - c. figli di un genitore galattosemico e di un genitore sano anche geneticamente.
93. Fra le caratteristiche ereditarie del sangue ha particolare importanza la presenza del *fattore Rh*, una sostanza scoperta nel 1940, che porta a catalogare gli individui in Rh positivi (o  $Rh^+$ ) e Rh negativi (o  $Rh^-$ ).
- Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:
- RR individuo  $Rh^+$ ;  
rr individuo  $Rh^-$ ;  
Rr individuo  $Rh^+$ .
- In questo caso la caratteristica esaminata (la presenza del fattore Rh nel sangue) è *dominante*, cioè si manifesta anche nella situazione cromosomica Rr (eterozigote). È importante conoscere il proprio fattore Rh, perché il sangue di tipo  $Rh^-$  reagisce contro il sangue di tipo  $Rh^+$  e quindi bisogna tenere presente questa reazione nelle trasfusioni. Il fattore Rh è ancora più importante per le donne: una donna  $Rh^-$  che concepisce un figlio  $Rh^+$  può manifestare delle reazioni contro «il sangue estraneo» del figlio.
- Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
- a. madre rr e padre RR;
  - b. madre rr e padre Rr;
  - c. madre RR e padre rr.
94. Al principio del secolo si è scoperto che non sempre si può trasfondere il sangue di una persona in un'altra. Questo fatto ha portato a suddividere il sangue delle persone in quattro *gruppi sanguigni*, che ora sono chiamati 0, A, B, AB.
- Dal punto di vista genetico, le situazioni possibili sono le seguenti:
- AA } individuo con sangue di gruppo A;  
A0 }
- BB } individuo con sangue di gruppo B;  
B0 }
- 00 individuo con sangue di gruppo 0;  
AB individuo con sangue di gruppo AB.
- Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
- a. un genitore 0 e l'altro AB;
  - b. i due genitori AB;
  - c. un genitore A0 e l'altro B0;
  - d. un genitore AA e l'altro BB.

95. Il *favismo* è un'anomalia ereditaria legata al cromosoma X. Le persone portatrici di quest'anomalia risultano del tutto sane, ma hanno delle gravi crisi in cui vengono distrutti i globuli rossi del sangue, quando mangiano fave o prendono particolari farmaci.
- Il favismo e la microcitemia, di cui si parla nel testo, sono «scritti» su cromosomi differenti, tuttavia è abbastanza comune in Sardegna che un individuo (prevalentemente maschio) sia microcitemico e affetto da favismo.
- Descrivere le situazioni possibili e valutare le probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
- madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre microcitemico e affetto da favismo;
  - madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre microcitemico e non affetto da favismo;
  - madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre sano;
  - madre sana anche geneticamente, padre microcitemico e affetto da favismo.

## Probabilità e proposizioni

96. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
 A: esce un numero pari;  
 B: esce un numero rosso.  
 Spiegare il significato dei seguenti simboli:  
 $P(A)$  e  $P(B)$ ;  
 $\sim A$  e  $P(\sim A)$ ;  
 $\sim B$  e  $P(\sim B)$ .  
 Calcolare  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(\sim A)$  e  $P(\sim B)$ .
97. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
 A: esce un numero pari;  
 B: esce un numero rosso.  
 Spiegare il significato dei seguenti simboli:  
 $A \vee B$  e  $P(A \vee B)$ ;  
 $A \wedge B$  e  $P(A \wedge B)$ .  
 Calcolare  $P(A \vee B)$  e  $P(A \wedge B)$ .
98. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
 A: esce un numero pari;  
 B: esce un numero rosso.  
 Spiegare il significato dei seguenti simboli:  
 $A \mid B$  e  $P(A \mid B)$ ;  
 $B \mid A$  e  $P(B \mid A)$ .  
 Calcolare  $P(A \mid B)$  e  $P(B \mid A)$ .
99. Ripetere gli esercizi 96-98 a partire dai seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
 A: esce un numero manque;  
 B: esce un numero nero.
100. Ripetere gli esercizi 96-98 a partire dai seguenti eventi relativi al gioco della roulette:  
 A: esce un numero passe;  
 B: esce un numero dispari.

101. Esprimere con i simboli della logica la condizione per riconoscere due eventi A, B incompatibili.
102. Esprimere con i simboli della logica la condizione per riconoscere due eventi A, B indipendenti.
103. Riprendere l'esercizio 43 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità totale di tre eventi.
104. Riprendere l'esercizio 43 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità totale di tre eventi incompatibili.
105. Riprendere l'esercizio 65 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità composta di tre eventi.
106. Riprendere l'esercizio 65 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità composta di tre eventi indipendenti.

*Oltre agli esercizi precedenti, si possono svolgere tutti gli esercizi dal n. 1 al n. 91 adottando i simboli della logica.*

## Le prove ripetute

### Il lancio ripetuto di una moneta

107. Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta tre volte:  
A: esce croce solo all'ultimo lancio;  
B: esce croce solo una volta.  
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.
108. Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta tre volte:  
A: esce croce nei primi due lanci;  
B: esce croce due volte.  
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.
109. Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:  
A: esce croce solo al primo lancio;  
B: esce croce solo una volta.  
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.
110. Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:  
A: esce testa negli ultimi due lanci;  
B: esce due volte testa.  
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.
111. Calcolare le probabilità  $p$  e  $q$  dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:  
A: esce testa negli ultimi tre lanci;  
B: esce tre volte testa.  
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

112. Calcolare le probabilità  $p$ ,  $q$  e  $r$  dei seguenti eventi:  
 A: si lancia una moneta quattro volte ed esce una volta croce;  
 B: si lancia una moneta quattro volte ed esce croce solo al quarto lancio;  
 C: si è già lanciata una moneta tre volte ottenendo tre volte croce, si lancia la moneta un'altra volta e si ottiene croce.  
 Spiegare perché si trovano tre probabilità diverse.

$$[p = \frac{1}{4}; q = \frac{1}{16}; r = \frac{1}{2}]$$

## Il fattoriale

113. Calcolare il risultato dei seguenti fattoriali:  
 $4!$                        $6!$                        $9!$                        $12!15!$
114. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:  
 $3 \cdot 5!$                        $3! \cdot 5$                        $3! \cdot 5!$                        $[360; 30; 720]$
115. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:  
 $4+6!$                        $(4+6)!$                        $4!+6$                        $4!+6!$   
 $[724; 3\,628\,800; 30; 744]$
116. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:  
 $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$                        $\frac{8!}{5!} \cdot 3!$                        $\frac{8!}{(5 \cdot 3)!}$                        $\frac{8!}{5 \cdot 3!}$   
 $[56; 2016; \approx 3 \cdot 10^{-8}; 1344]$
117. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:  
 $\frac{9!}{4!+3!}$                        $\frac{9!}{4!} + 3!$                        $\frac{9!}{(4+3)!}$                        $\frac{9!}{4+3!}$   
 $[12\,096; 15\,126; 72; 36\,288]$
118. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:  
 $\frac{6! \cdot 3! + 4! \cdot 5!}{6! + 5!}$                        $\frac{6! \cdot 3! + 4! \cdot 5!}{6! \cdot 5!}$                        $\frac{6! \cdot 5!}{6! + 5!}$   
 $[\approx 8,6; \approx 0,08; \approx 102,8]$
119. Esaminare l'espressione:  
 $\frac{1}{6! \cdot 3!} + \frac{1}{4! \cdot 5!}$   
 Risolvere i seguenti quesiti:  
 a. spiegare perché, scomponendo in fattori i due denominatori, si ottiene:  
 $6! \cdot 3! = 6 \cdot 5! \cdot 3!$                        $4! \cdot 5! = 4 \cdot 3! \cdot 5!$   
 b. spiegare perché il minimo comune multiplo dei denominatori è:  
 $6! \cdot 4!$   
 c. calcolare il risultato dell'addizione indicata.                       $[(c) \frac{10}{6! \cdot 4!}]$
120. Dopo aver svolto l'esercizio 119, calcolare il risultato della seguente espressione:  
 $\frac{1}{4! \cdot 7!} + \frac{1}{5! \cdot 6!}$                        $[\frac{12}{5! \cdot 7!}]$

121. Dopo aver svolto gli esercizi 119 e 120, calcolare il risultato della seguente espressione:
- $$11! \cdot \left[ \frac{1}{4! \cdot 7!} + \frac{1}{5! \cdot 6!} \right] \quad \left[ \frac{12!}{5! \cdot 7!} \right]$$
122. Dopo aver svolto l'esercizio 121, calcolare il risultato della seguente espressione:
- $$\frac{11!}{4! \cdot 7!} + \frac{11!}{5! \cdot 6!} \quad \left[ \frac{12!}{5! \cdot 7!} \right]$$
123. Scrivendo il prodotto dei primi 5 numeri pari, si ha:
- $$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5)$$
- Applicare opportunamente le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione per esprimere il prodotto dei primi 5 numeri pari per mezzo del fattoriale.
- $$[2^5 \cdot 5!]$$
124. Ripetere l'esercizio 123 per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi 10 numeri pari.
- $$[2^{10} \cdot 10!]$$
125. Dopo aver svolto gli esercizi 123 e 124, trovare una formula generale per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi  $n$  numeri pari.
126. Scrivendo il prodotto dei primi 5 numeri dispari, si trova:
- $$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$
- Valersi anche dei risultati dell'esercizio 123 per esprimere il prodotto dei primi 5 numeri dispari per mezzo del fattoriale.
- $$\left[ \frac{10!}{2^5 \cdot 5!} \right]$$
127. Ripetere l'esercizio 126 per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi 10 numeri dispari.
- $$\left[ \frac{20!}{2^{10} \cdot 10!} \right]$$
128. Dopo aver svolto gli esercizi 126 e 127, trovare una formula generale per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi  $n$  numeri dispari.

### Proprietà del fattoriale

129. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:
- $$\frac{10!}{10 \cdot 9!} \quad \frac{11!}{11 \cdot 10!} \quad \frac{24!}{24 \cdot 23!}$$
- Spiegare perché le tre espressioni hanno tutte risultato 1.
130. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:
- $$20! - 20 \cdot 19! \quad 30! - 30 \cdot 29! \quad 45! - 45 \cdot 44!$$
- Spiegare perché le tre espressioni hanno tutte risultato 0.
131. Dopo aver svolto gli esercizi 129 e 130, spiegare perché le seguenti uguaglianze sono due *identità*, cioè due uguaglianze vere, qualunque sia il numero intero positivo sostituito alla lettera  $n$ .
- $$(n+1)! - (n+1)n! = 0 \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)n!} = 1$$
132. Dopo aver svolto l'esercizio 131 spiegare perché anche le seguenti uguaglianze sono due *identità*:
- $$n! - n(n-1)! = 0 \quad \frac{n!}{n(n-1)!} = 1$$



133. Spiegare perchè il reciproco di 0 non esiste, mentre il reciproco di 0! è 1.
134. Spiegare perché non si divide per 0, mentre si può dividere per 0!.

### Le permutazioni

135. Permutando le lettere di una parola si ottiene un *anagramma*; se per esempio la parola è ROMA, alcuni anagrammi sono:

MORA                  AMOR                  RAMO                  OMAR

Calcolare quanti sono gli anagrammi della parola ROMA e scriverli tutti, indicando quelli che hanno significato nella lingua italiana.

136. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalla parola CANE.
137. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalla parola SORTO.
138. Per contare i numeri che si possono formare con le cinque cifre 0, 2, 4, 6, 8 si può ragionare così:
- si contano i numeri che si possono formare permutando le cinque cifre;
  - da questi numeri si eliminano tutti quelli che iniziano con 0 (questi si ottengono scrivendo 0 e successivamente un numero ottenuto permutando le quattro cifre diverse da 0).
- Completare il procedimento per stabilire quanti sono i numeri che si possono formare con le cinque cifre 0, 2, 4, 6, 8.

[ $P_5 - P_4 = 96$ ]

139. Stabilire quanti sono i numeri di dieci cifre che si possono formare con le dieci cifre decimali.

[3 265 920]

### Permutazioni di elementi non tutti diversi

140. Stabilire quanti anagrammi si possono formare con la parola COCCO, scriverli tutti e indicare quali hanno senso nella lingua italiana.
141. Ripetere l'esercizio 140, a partire dalla parola MAMMA.
142. Stabilire quanti numeri si possono formare con le 7 cifre 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

[ $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \dots$ ]

143. Stabilire quanti numeri si possono formare con le 7 cifre 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4.

[ $\frac{7!}{2! \cdot 5!} = \dots$ ]

144. Sono date 9 cifre, di cui 2 uguali fra loro, altre 3 uguali fra loro e le altre 4 pure uguali fra loro, come per esempio le seguenti: 1, 1, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7. Stabilire quanti numeri di 9 cifre si possono formare con le cifre assegnate.

[1260]

145. Dopo aver svolto l'esercizio 144, stabilire quanti numeri di 10 cifre si possono formare con le seguenti cifre:

3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5.

[2520]

146. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola ORRORE.

[60]

147. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola ALLELE.

[60]

148. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola APPANNA.

[210]

## I coefficienti binomiali

149. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{5}{3} \quad \binom{5}{2}$$

150. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{6}{2} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{3}$$

151. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{7}{2} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4}$$

152. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} \quad \binom{10}{6} \cdot \binom{6}{5}$$

153. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{4} \quad \binom{12}{8} \cdot \binom{8}{6}$$

154. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{15}{7} \cdot \binom{7}{6} \quad \binom{15}{9} \cdot \binom{9}{8}$$

155. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{5} \quad \binom{11}{4} + \binom{11}{5}$$

[Per calcolare il risultato della seconda espressione, vedere anche gli esercizi 119, 120, 121]

156. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{10}{4} \quad \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$$

157. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{15}{7} \quad \binom{14}{6} + \binom{14}{7}$$

158. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{4} \quad \binom{12}{3} \cdot \frac{9}{4}$$

159. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{16}{7} \quad \binom{16}{6} \cdot \frac{10}{7}$$

### Proprietà dei coefficienti binomiali

- 160.** Svolgendo gli esercizi 149-151, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, le seguenti:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} \qquad \binom{7}{3} = \binom{7}{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. osservare che le precedenti uguaglianze si possono anche scrivere nella forma:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{7-2} \qquad \binom{7}{3} = \binom{7}{7-3}$$

- b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (1)$$

dove  $n$  e  $k$  sono due qualunque numeri interi positivi, con  $k < n$ .

- c. stabilire se l'uguaglianza (1) è vera anche per  $k = n$ .

- 161.** Svolgendo gli esercizi 152-154, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{4} = \binom{12}{8} \cdot \binom{8}{6}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{12-8} = \binom{12}{8} \cdot \binom{8}{12-6}$$

- b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{h} \cdot \binom{h}{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{n-h} \qquad (2)$$

- c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere  $n, k, h$  perché la formula abbia significato.

- 162.** Svolgendo gli esercizi 155-157, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{15}{7} = \binom{14}{6} + \binom{14}{7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{14+1}{6+1} = \binom{14}{6} + \binom{14}{6+1}$$

- b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad (3)$$

- c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere  $n$  e  $k$  perché la formula abbia significato.

163. Dopo aver svolto l'esercizio 162, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere  $n$  e  $k$  perché la formula abbia significato.

164. Svolgendo gli esercizi 158-159, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{16}{7} = \binom{16}{6} \cdot \frac{10}{7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{16}{6+1} = \binom{16}{6} \cdot \frac{16-6}{6+1}$$

- b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \quad (4)$$

- c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere  $n$  e  $k$  perché la formula abbia significato.

## I coefficienti binomiali e le prove ripetute

### Lanci ripetuti di una moneta

165. Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità  $p$  che esca tre volte testa.  
 $[p = \frac{15}{128} \approx 0,12]$
166. Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità  $q$  che esca sette volte croce.  
 $[q = \frac{15}{128} \approx 0,12]$
167. Dopo aver svolto gli esercizi 165 e 166, risolvere i seguenti quesiti relativi al lancio di una moneta  $n$  volte:
- calcolare la probabilità  $p$  che escano  $k$  teste;
  - calcolare la probabilità  $q$  che escano  $n-k$  croci;
  - spiegare perché risulta sempre  $p=q$ .
- [Si può anche tenere presente l'esercizio 160]
168. Calcolare le probabilità  $p$ ,  $q$  e  $r$  dei seguenti eventi:
- A: si lancia una moneta sei volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci;
- B: si lancia una moneta otto volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci;
- C: si lancia una moneta dieci volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci.

$$[p = \frac{5}{16} \approx 0,31; q = \frac{35}{128} \approx 0,27; r = \frac{63}{256} \approx 0,25]$$

169. Dopo aver svolto l'esercizio 168, scrivere una formula generale per la probabilità  $p$  che in un numero pari di lanci di una moneta si abbia un ugual numero di teste e di croci.  
[Indicando il numero dei lanci con  $2n$ , si deve avere testa  $n$  volte]
170. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità  $p$  che entrambe ottengano 0 teste.  
[Con la probabilità composta,  $p = \left[ \binom{3}{0} \frac{1}{2^3} \right]^2 \approx 0,016$ ]
171. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità  $q$  che entrambe ottengano 1 testa.  
[Con la probabilità composta,  $q = \left[ \binom{3}{1} \frac{1}{2^3} \right]^2 \approx 0,141$ ]
172. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità  $r$  che entrambe ottengano 2 teste.  
[Con la probabilità composta,  $r = \left[ \binom{3}{2} \frac{1}{2^3} \right]^2 \approx 0,141$ ]
173. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità  $s$  che entrambe ottengano 3 teste.  
[Con la probabilità composta,  $s = \left[ \binom{3}{3} \frac{1}{2^3} \right]^2 \approx 0,016$ ]
174. Dopo aver svolto gli esercizi 170-173, risolvere il seguente problema: due persone lanciano una moneta tre volte; qual è la probabilità  $t$  che entrambe ottengano lo stesso numero di teste?  
[Con la probabilità totale,  $t = p + q + r + s \approx 0,312$ ]
175. Dopo aver svolto l'esercizio 174, risolvere il seguente problema: quattro persone lanciano una moneta tre volte; qual è la probabilità  $v$  che tutte ottengano lo stesso numero di teste?  
[ $v = \frac{3^4 + 1}{2^{11}} \approx 0,040$ ]

### Altre prove ripetute

176. Si lancia un dado da poker; risolvere i seguenti problemi
- calcolare la probabilità  $p$  di avere asso e la probabilità  $q$  di non avere asso, lanciando il dado la prima volta;
  - calcolare la probabilità  $r$  di avere asso le prime tre volte e di non avere asso le successive sette volte, lanciando il dado dieci volte;
  - calcolare la probabilità  $s$  di ottenere tre volte asso lanciando il dado dieci volte.
- [(a)  $p = \frac{1}{6}$ ,  $q = \frac{5}{6}$ ; (b)  $r = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,0013$ ; (c)  $s = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,155$ ]
177. Dopo aver svolto l'esercizio 176, scrivere una formula più generale per calcolare la probabilità  $s$  che, lanciando  $n$  volte il dado, si ottenga  $k$  volte asso.  
$$s = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$
178. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità  $s$  che lanciando 20 volte il dado, si ottenga 6 volte asso.  
$$s = \binom{20}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \approx 0,065$$



179. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità  $s$  che, lanciando 20 volte il dado, si ottenga due volte asso.

$$[s = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 0,198]$$

180. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità  $s$  che, lanciando 20 volte il dado, si ottenga una volta asso.

$$[s = \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \approx 0,104]$$

181. Dopo aver svolto l'esercizio 176, considerare, ancora più in generale, un evento che ha probabilità  $p$  di verificarsi e  $q=1-p$  di non verificarsi; scrivere la formula che dà la probabilità  $r$  che l'evento si verifichi  $k$  volte su  $n$  prove.

$$[r = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}]$$

## Il binomio di Newton

182. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$$(a+b)^8$$

$$(x+1)^8$$

$$(y+2)^8$$

$$(x^2+1)^8$$

183. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$$(a+b)^9$$

$$(x+1)^9$$

$$(y+3)^9$$

$$(x^3+1)^9$$

184. Tenere presente che risulta:

$$a-b=a+(-b)$$

e calcolare le seguenti potenze di binomi:

$$(a-b)^8$$

$$(x-1)^8$$

$$(y-2)^8$$

$$(x^2-1)^8$$

185. Dopo aver svolto l'esercizio 184, calcolare le seguenti potenze di binomi:

$$(a-b)^9$$

$$(x-1)^9$$

$$(y-3)^9$$

$$(x^3-1)^9$$

186. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$$

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^5$$

187. Scrivere la formula per lo sviluppo del binomio  $(a+b)^4$  e applicarla al caso in cui risulti  $a=b=1$ , completando le formule seguenti:

$$(1+1)^4=2^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\dots\dots\dots$$

188. Scrivere la formula per lo sviluppo del binomio  $(a+b)^5$  ed applicarla al caso in cui risulti  $a=1$ ,  $b=-1$ , completando le formule seguenti:

$$(1-1)^5=0=\binom{5}{0}-\binom{5}{1}+\dots\dots\dots$$

189. Completare la fig. 2, che rappresenta il triangolo di Tartaglia (vedi il primo volume, p. 272) e la fig. 3, che riprende il triangolo di Tartaglia indicandone ogni elemento con un coefficiente binomiale.

Figura 2  
Il triangolo di Tartaglia

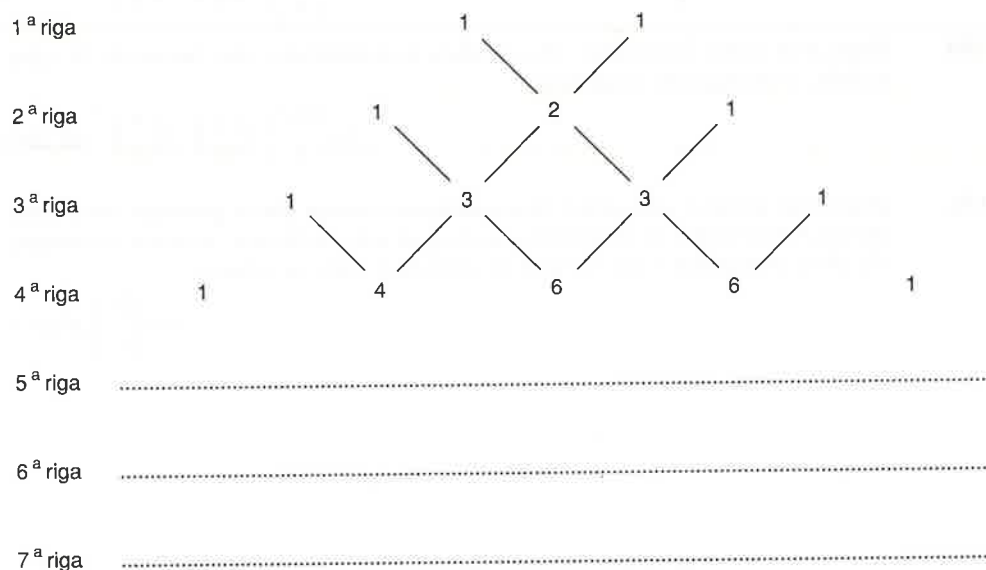
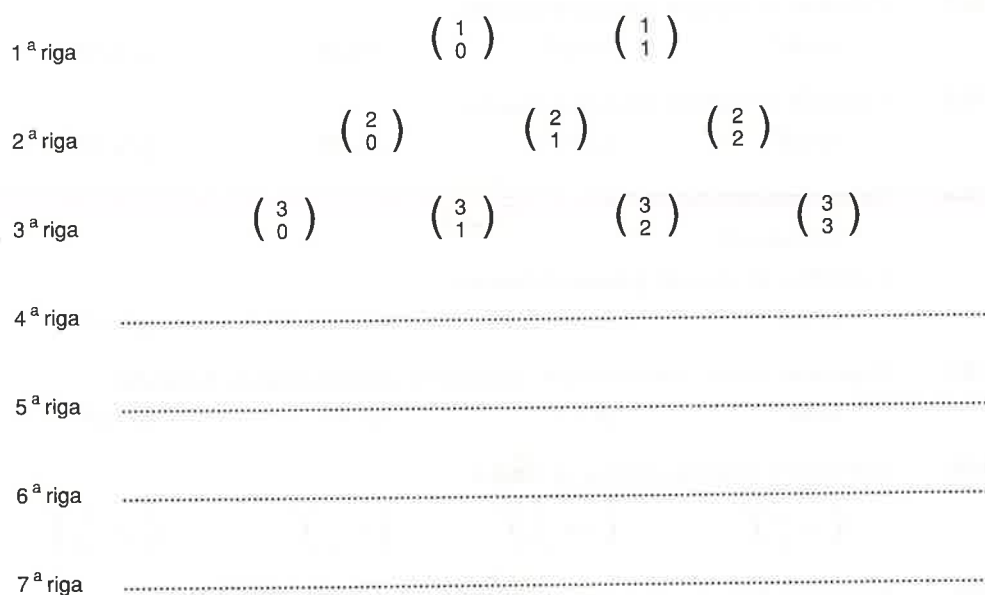


Figura 3  
Il triangolo di Tartaglia  
e i coefficienti binomiali



190. Dopo aver svolto l'esercizio 189, spiegare perché la legge di formazione del triangolo di Tartaglia permette di ritrovare la proprietà dei coefficienti binomiali esaminata nell'esercizio 163, e cioè:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

---

## Il calcolo combinatorio

---

191. Spiegare il significato dei seguenti termini:  
- combinazioni di  $n$  elementi  $k$  a  $k$ ;  
- disposizioni di  $n$  elementi  $k$  a  $k$ .
192. Spiegare il significato dei seguenti simboli:  
 $C_{n,k}$        $D_{n,k}$
193. Determinare il valore numerico dei seguenti simboli:  
 $C_{7,3}$        $D_{7,3}$        $C_{10,4}$        $D_{10,4}$
194. Calcolare quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un ambo non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri.  
[4005]
195. Calcolare quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un terno non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri.  
[117 480]
196. Calcolare quante quaterne si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un terno non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri.  
[2 555 190]
197. Calcolare quante cinquine si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in una cinquina non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri.  
[43 949 268]
198. Nel gioco dello scopone a ciascuno dei quattro giocatori vengono date 10 delle 40 carte del mazzo di carte napoletane; calcolare quanti sono i gruppi di 10 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte.  
[847 660 528]
199. Nel gioco del poker si distribuiscono a ciascun giocatore 5 carte, tolte da un mazzo di 32 carte; calcolare quanti sono i gruppi di 5 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte.  
[201 376]
200. Nel poker all'americana si distribuiscono a ciascun giocatore 5 carte, tolte dal mazzo di 52 carte francesi; calcolare quanti sono i gruppi di 5 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte.  
[2 598 960]

### Applicazioni al calcolo delle probabilità

201. Calcolare la probabilità  $p$  di uscita di un dato ambo al gioco del lotto, tenendo presente che:  
- il numero dei casi possibili è dato dalle combinazioni dei 90 numeri 5 a 5;  
- i casi favorevoli sono tutte le cinquine in cui due numeri formano l'ambo scelto e gli altri 3 sono scelti liberamente fra i rimanenti 88 numeri, perciò il numero dei casi favorevoli è dato dalle combinazioni di 88 numeri 3 a 3.  
[ $p \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ ]
202. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità  $q$  di uscita di un dato terno a lotto.  
[ $q \approx 8,5 \cdot 10^{-5}$ ]

203. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità  $r$  di uscita di una data quaterna a lotto.  $[r \approx 1,96 \cdot 10^{-6}]$
204. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità  $s$  di uscita di una data cinquina a lotto (fig. 4).  $[s \approx 2,37 \cdot 10^{-8}]$
205. Calcolare la probabilità  $p$  che, fra le 10 carte date a un giocatore di scopone scientifico, ci siano 4 sette. Tenere presenti anche gli esercizi 198 e 201.  $[p \approx 7,41 \cdot 10^{-5}]$
206. Calcolare la probabilità  $q$  che, fra le 5 carte date a un giocatore di poker, ci siano 4 assi. Tenere presenti anche gli esercizi 199 e 201.  $[q \approx 1,4 \cdot 10^{-4}]$
207. Ripetere l'esercizio 206 per il poker all'americana. Tenere presenti anche gli esercizi 200 e 201.  $[q \approx 1,85 \cdot 10^{-5}]$

**Figura 4**  
Una cinquina al lotto

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90



## Altri modi di valutare la probabilità

### Probabilità statistica

208. L'epatite virale di tipo A è una malattia infettiva che si contrae principalmente mangiando alimenti contaminati dal virus. La malattia deve essere denunciata alle autorità sanitarie, che pubblicano periodicamente il numero dei casi denunciati. Esaminare la tabella A, dove sono riportati, per alcune regioni d'Italia:
- i casi di epatite A denunciati nel 1989;
  - il numero di abitanti nel 1989.
- Basandosi sui dati della tabella rispondere ai seguenti quesiti:
- valutare, per ogni regione, la probabilità che un abitante si ammali di epatite A;
  - valutare la probabilità che un italiano si ammali di epatite A;
  - stabilire se è ragionevole sostenere che la probabilità di ammalarsi di epatite A è circa la stessa in Lombardia e in Puglia, visto che il numero dei casi denunciati nel 1989 è stato circa lo stesso;
  - stabilire se è ragionevole sostenere che la probabilità di ammalarsi di epatite A è circa la stessa in Lazio e in Campania.

**Tabella A**  
**Casi di epatite A denunciati nel 1989**

Regione	Numero dei casi	Numero di abitanti
Valle d'Aosta	0	115 270
Piemonte	105	4 357 559
Lombardia	190	8 911 985
Trentino-Alto Adige	19	886 679
Veneto	86	4 385 023
Friuli-V.G.	45	1 202 877
Liguria	23	1 727 212
Emilia-Romagna	105	3 921 597
Toscana	89	3 560 582
Umbria	22	820 316
Marche	14	1 430 726
Lazio	156	5 170 672
Abruzzo	6	1 266 448
Molise	2	335 348
Campania	157	5 808 705
Puglia	220	4 069 359
Basilicata	5	623 175
Calabria	4	2 152 539
Sicilia	44	5 172 785
Sardegna	7	1 657 562
Italia	1299	57 576 429

Fonte: *Annuario statistico italiano*, ISTAT, 1990

209. Nel 1989 sono nati in Italia 558 992 bambini, di cui 287 507 maschi e 271 485 femmine. A partire da questi dati, valutare statisticamente la probabilità  $p$  di nascita di una femmina e la probabilità  $q$  di nascita di un maschio in Italia.



210. Dei 558 992 bambini nati in Italia nel 1989, ne sono nati vivi soltanto 555 686, di cui 285 822 maschi e 269 864 femmine. A partire da questi dati risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la probabilità  $p$  di nascita di un maschio vivo;
  - riprendere dall'esercizio precedente la probabilità  $q$  di nascita di un maschio e calcolare la probabilità  $r$  che un bambino nato maschio sia vivo;
  - spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 469 per calcolare la probabilità composta.
211. Esaminare la tabella B, in cui sono riportati i dati relativi al numero dei morti in Italia nel 1988, suddivisi per causa e per età; rispondere ai seguenti quesiti:
- per ogni classe di età valutare la probabilità di morire per tumore;
  - per ogni classe di età valutare la probabilità di morire per incidente stradale.

**Tabella B**  
**Morti nel 1988**

Cause	Classi di età		
	15-24	25-44	45-64
Tumori	663	4695	43 228
Malattie infettive	38	140	515
Disturbi psichici	492	900	1867
Altre malattie	1103	5846	41 811
Incidenti stradali	2193	2113	2204
Altri incidenti	1114	2600	3408
Totale morti	5603	16 294	93 033
Popolazione	9 370 886	16 161 657	13 935 159

Fonte: *Annuario statistico italiano*, ISTAT, 1989 e 1990

212. Sempre a partire dai dati della tabella B, risolvere i seguenti quesiti, relativi ai giovani fra i 15 e i 24 anni:
- valutare la probabilità  $p$  di morire per incidente stradale;
  - valutare la probabilità  $q$  di morire per altro incidente;
  - valutare la probabilità  $r$  di morire per incidente stradale o altro incidente;
  - spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 465 per calcolare la probabilità totale di due eventi incompatibili.
213. Da un'indagine statistica fra i 2000 abitanti di un paese della Sardegna risulta che:
- 500 persone sono microcitemiche (vedi p. 467);
  - 100 sono affette da favismo (vedi esercizio 95, p. 806);
  - 200 sono affette sia da favismo che da microcitemia.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la probabilità  $q$  di incontrare in quel paese un microcitemico;
  - calcolare la probabilità  $r$  di incontrare in quel paese un individuo affetto da favismo;
  - calcolare la probabilità  $s$  di incontrare in quel paese un individuo affetto da microcitemia e da favismo;
  - calcolare la probabilità  $p$  di incontrare in quel paese un individuo affetto da microcitemia o da favismo;
  - spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 465 per calcolare la probabilità totale di due eventi compatibili.

214. Alcuni test clinici, come per esempio quello di gravidanza, danno una risposta che può essere positiva o negativa: nell'esempio, test positivo significa che la donna è incinta, test negativo significa che la donna non è incinta. Tuttavia, qualche volta il test dà risultati sbagliati; ecco una statistica di un laboratorio di analisi, relativamente a 3000 test di gravidanza effettuati:
- fra i 1000 test risultati negativi, 80 erano sbagliati (cioè la donna era incinta, mentre il test stabiliva che non lo era);
  - fra i 2000 test risultati positivi solo 5 erano sbagliati (cioè la donna non era incinta, mentre il test stabiliva che lo era).
- A partire da questi dati risolvere i seguenti quesiti:
- a. calcolare la probabilità  $q$  che un test positivo indichi la gravidanza (cioè determinare il *valore predittivo del test positivo*);
  - b. calcolare la probabilità  $r$  che un test negativo escluda la gravidanza (cioè determinare il *valore predittivo del test negativo*);
  - c. calcolare la probabilità  $p$  che il test dia indicazioni esatte (cioè determinare l'*efficienza del test*).

### Probabilità soggettiva

215. Valutare la probabilità di vincita di un pugile dato 1 a 3.
216. Determinare una regola generale per valutare la probabilità di vincita di un cavallo o di un pugile dati  $h$  contro  $k$ .
217. La probabilità  $p$  che un cavallo vinca è stata valutata:
- $$p = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$
- Calcolare la corrispondente quota di scommessa.
218. Determinare una regola generale per esprimere la quota di scommessa corrispondente a una probabilità di vincita data da:
- $$p = \frac{a}{100} = a\%$$
219. Esaminare le seguenti puntate al gioco della roulette:
- il banco paga 35 volte la posta se esce il numero scelto dal giocatore (vincita «en plein»);
  - il banco paga 17 volte la posta se esce uno fra due numeri vicini scelti dal giocatore (vincita «à cheval»).
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. confrontare le probabilità soggettiva e oggettiva di ciascuna puntata in una roulette con un solo zero;
  - b. confrontare le probabilità soggettiva e oggettiva di ciascuna puntata in una roulette con due zeri.
220. Un esperto giocatore di totocalcio si potrebbe sentire «quasi sicuro» di indovinare il risultato di ogni partita di calcio di una giornata del campionato e, quindi, valutare con un numero vicino a 1 la probabilità  $q$  di indovinare un pronostico. Calcolare la probabilità  $p$  che l'esperto «faccia 13», indovinando contemporaneamente i 13 pronostici di una giornata. Ecco un esempio: se si valuta  $q=0,9$ , quanto vale  $p$ ?

$$[p \approx 0,25]$$

## Le assicurazioni

221. In un contratto annuale di assicurazione di un'automobile contro l'incendio si trova che la *somma assicurata* è 10 milioni di lire, mentre il *premio* è 8000 lire. Con questi termini si intende dire che l'assicurato paga all'inizio dell'anno una quota di 8000 lire (il premio) alla società assicuratrice; da parte sua la società si impegna a risarcire all'assicurato 10 milioni (la somma assicurata) se l'automobile subisce un incendio.  
Così, l'assicurato è disposto a pagare 8000 lire per avere 10 milioni se si verifica l'incendio e, d'altra parte, la compagnia d'assicurazione accetta il contratto. Perciò un'assicurazione può essere considerata un particolare tipo di scommessa, da cui ricavare una valutazione soggettiva della probabilità di un evento.  
Qual è la probabilità di incendio dell'auto che si ricava dal contratto esaminato?
222. In un contratto annuale di assicurazione di un'automobile contro l'incendio si trova che la *somma assicurata* è 15 milioni di lire, mentre il *premio* è 9000 lire. Qual è la probabilità di incendio dell'auto che si ricava dal contratto?
223. Il premio che deve pagare l'assicurato per stipulare una polizza contro l'incendio viene spesso deciso dalla società assicuratrice nel modo seguente:  
- in base a dati statistici si valuta la probabilità  $p$  di incendio;  
- si determina il premio  $Q$  con la seguente formula:

$$Q = p \cdot S + C$$

dove  $S$  è la somma assicurata, mentre  $C$  è una maggiorazione destinata a coprire le spese e a ricavare un guadagno.

Riprendere i due contratti esaminati negli esercizi 221 e 222: se la società assicuratrice pratica per entrambi la stessa maggiorazione  $C$  e valuta egualmente la probabilità di incendio  $p$ , quanto valgono  $C$  e  $p$ ?

[Si è condotti a risolvere un sistema di primo grado in due incognite che fornisce  $p = 2 \cdot 10^{-4}$  e  $C = 6000$ ]

# Indice

## CAPITOLO PRIMO

### I numeri irrazionali

<b>1.</b>	
Il teorema di Pitagora	2
<b>Scheda storica.</b>	
Il teorema di Pitagora prima di Pitagora	5
<b>2.</b>	
Il primo teorema di Euclide	9
<b>3.</b>	
Il secondo Teorema di Euclide	12
<b>Attività.</b>	
Applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide	15
<b>4.</b>	
Dalla geometria alla scoperta dei numeri irrazionali	20
<b>5.</b>	
I radicali quadratici	23
<b>6.</b>	
I radicali: il caso generale	26
<b>7.</b>	
Potenze a esponente frazionario	28
<b>Attività.</b>	
Le radici con il calcolatore tascabile	30
<b>8.</b>	
Proprietà delle potenze e calcoli con i radicali	34
<b>Attività.</b>	
Potenze e prodotti di radicali	37
<b>Sintesi.</b>	
Che cosa bisogna sapere	41
<b>Attività finali.</b>	
Che cosa bisogna saper fare	43

## CAPITOLO SECONDO

### L'insieme dei numeri reali

<b>1.</b>	
L'insieme dei numeri reali	46
<b>Scheda informativa.</b>	
Le frazioni continue	50

<b>2.</b>	
Valori approssimati di un numero reale	54
<b>3.</b>	
Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri reali	57
<b>4.</b>	
Calcoli con i numeri reali	59
<b>Attività.</b>	
Calcoli con frazioni, radicali e potenze a esponente frazionario	62
<b>Attività.</b>	
Calcoli con il calcolatore tascabile	65
<b>Scheda informativa.</b>	
Le approssimazioni e la propagazione degli errori	67
<b>5.</b>	
I numeri reali in geometria: il rapporto fra due segmenti	70
<b>6.</b>	
Il teorema di Talete	73
<b>Scheda storica.</b>	
I numeri reali nella storia	78
<b>Sintesi.</b>	
Che cosa bisogna sapere	81
<b>Attività finali.</b>	
Che cosa bisogna saper fare	84

## CAPITOLO TERZO

### Dai triangoli simili alla trigonometria

<b>1.</b>	
Poligoni simili	88
<b>Scheda informativa.</b>	
Poligoni omotetici e poligoni simili	92
<b>2.</b>	
Triangoli simili	95
<b>3.</b>	
I criteri di similitudine dei triangoli	98
<b>Attività.</b>	
Bisettrici, altezze e aree di triangoli simili	102

<b>Scheda applicativa.</b> La similitudine nella natura	105
<b>4.</b> Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo	108
<b>5.</b> Le funzioni trigonometriche	112
<b>Scheda applicativa.</b> La rifrazione della luce	116
<b>Scheda storica.</b> Come è nata la trigonometria	119
<b>6.</b> Relazioni fra lati e angoli di un triangolo	122
<b>Attività.</b> Risolvere problemi di trigonometria	126
<b>Scheda informativa.</b> La triangolazione e l'area del triangolo	130
<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	136
<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	138

## CAPITOLO QUARTO

### Introduzione alla logica

<b>Attività.</b> Esaminare frasi che esprimono una condizione	144
<b>1.</b> Proposizioni condizionali. L'implicazione	146
<b>2.</b> La doppia implicazione	148
<b>Scheda informativa.</b> L'implicazione e gli insiemi	150
<b>3.</b> L'implicazione nell'enunciato dei teoremi	153
<b>4.</b> Vari modi di enunciare un teorema	155
<b>5.</b> Definizioni e termini primitivi, teoremi e assiomi	157
<b>Scheda informativa.</b> Qualche idea sulle geometrie non-euclidee	160
<b>Scheda storica.</b> La logica nella storia	164
<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	166
<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	168

## CAPITOLO QUINTO

### Geometria analitica

<b>1.</b> Le coordinate reali. L'equazione della circonferenza	172
<b>2.</b> Rappresentare leggi matematiche sul piano cartesiano	176
<b>Scheda applicativa.</b> Alcune leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali	181
<b>Scheda informativa.</b> Curve crescenti e curve decrescenti	185
<b>3.</b> Le funzioni in geometria analitica. La parabola e l'iperbole	188
<b>4.</b> Curve, funzioni e relazioni	192
<b>Scheda storica.</b> Il concetto di funzione nella storia	196
<b>Scheda applicativa.</b> Le funzioni nella realtà	200
<b>5.</b> Le funzioni $y = x^n$ e il loro grafico	202
<b>6.</b> La funzione $y =  x $ e il suo grafico	204
<b>Scheda informativa.</b> Il riferimento polare	206
<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	209
<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	212

## CAPITOLO SESTO

### Trasformazioni

<b>1.</b> Trasformazioni affini	216
<b>2.</b> Le equazioni di una trasformazione affine	221
<b>3.</b> Aree di figure affini	226
<b>Scheda applicativa.</b> Le trasformazioni nella natura	230
<b>4.</b> Dalle equazioni di un'affinità alle equazioni di una simmetria	234



<b>5.</b> Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani	239	<b>5.</b> La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado	322
<b>Scheda informativa.</b> Dalle traslazioni ai vettori	243	<b>Scheda informativa.</b> Il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado	324
<b>6.</b> Trasformare le funzioni $y = x^n$ con simmetrie	248	<b>6.</b> Il segno di un trinomio di 2° grado	329
<b>7.</b> Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$	253	<b>7.</b> Le disequazioni di 2° grado	334
<b>Attività.</b> Lavorare con le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$	258	<b>8.</b> Equazioni e disequazioni equivalenti	337
<b>8.</b> Le funzioni $y = ax^2$ e $y = \frac{k}{x}$	262	<b>Attività.</b> Studiare il segno di un trinomio e risolvere disequazioni di 2° grado	340
<b>Scheda informativa.</b> L'ellisse	267	<b>Scheda applicativa.</b> Equazioni e disequazioni di 2° grado nella fisica	343
<b>9.</b> Le parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$	272	<b>Scheda informativa.</b> Relazioni di equivalenza	348
<b>Attività.</b> Disegnare parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$	276	<b>9.</b> I sistemi di 2° grado	350
<b>Scheda storica.</b> Le trasformazioni nella storia	278	<b>Attività.</b> Risolvere sistemi di 2° grado	354
<b>Scheda informativa.</b> Le equazioni delle trasformazioni proiettive	282	<b>Scheda applicativa.</b> I sistemi di 2° grado nella fisica	359
<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	290	<b>10.</b> Le equazioni di 2° grado a coefficienti letterali	363
<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	294	<b>Scheda informativa.</b> I sistemi di 2° grado a coefficienti letterali	368
		<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	374
		<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	377

## CAPITOLO SETTIMO

### Equazioni, disequazioni e sistemi di 2° grado

<b>1.</b> Parabole ed equazioni di 2° grado	298
<b>2.</b> La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado	302
<b>3.</b> Il discriminante dell'equazione di 2° grado	307
<b>Attività.</b> Risolvere equazioni di 2° grado	310
<b>Scheda storica.</b> La sezione aurea	314
<b>4.</b> Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado	319

Indice

## CAPITOLO OTTAVO

### Il calcolo letterale

<b>1.</b> Equazioni di grado superiore al 2°	388
<b>2.</b> Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$	391
<b>Scheda informativa.</b> Le radici razionali di un polinomio	394
<b>3.</b> Divisione di polinomi	397
<b>Scheda informativa.</b> La regola di Ruffini	400

825

<b>4.</b>	Scomporre in fattori un polinomio	406	<b>Scheda informativa.</b> Probabilità e proposizioni. La formula di Bayes	481
<b>5.</b>	Le radici multiple di un polinomio	410	<b>4.</b> Le prove ripetute	483
<b>Attività.</b>	Risolvere equazioni di grado superiore al 2°	412	<b>5.</b> Le permutazioni e il fattoriale di un numero	486
<b>Scheda storica.</b>	Equazioni e formule risolutive	416	<b>6.</b> I coefficienti binomiali	488
<b>6.</b>	Le frazioni algebriche	420	<b>Scheda informativa.</b> Il binomio di Newton e il calcolo combinatorio	491
<b>Attività.</b>	Risolvere equazioni fratte	425	<b>7.</b> Altri modi di valutare la probabilità	495
<b>Scheda informativa.</b>	Il segno di un polinomio e di un quoziente di polinomi	429	<b>Scheda applicativa.</b> Probabilità statistica e genetica. Il mongolismo	498
<b>7.</b>	Le equazioni irrazionali	432	<b>Sintesi.</b> Che cosa bisogna sapere	500
<b>Scheda informativa.</b>	Le disequazioni irrazionali	436	<b>Attività finali.</b> Che cosa bisogna saper fare	502
<b>8.</b>	Sistemi di grado superiore al 2°	443		
<b>Sintesi.</b>	Che cosa bisogna sapere	448		
<b>Attività finali.</b>	Che cosa bisogna saper fare	452		

## CAPITOLO NONO

### Probabilità

<b>1.</b>	La valutazione oggettiva della probabilità	458
<b>Scheda applicativa.</b>	Probabilità e genetica. La determinazione del sesso	461
<b>2.</b>	La probabilità totale	463
<b>Scheda applicativa.</b>	Probabilità totale e genetica. Morbo di Cooley e microcitemia	467
<b>3.</b>	La probabilità composta	469
<b>Scheda applicativa.</b>	Probabilità composta e genetica. Il daltonismo	472
<b>Attività.</b>	Scoprire errori nel calcolo delle probabilità	475
<b>Scheda storica.</b>	Le origini del calcolo delle probabilità	478

## Esercizi

### CAPITOLO PRIMO

Il teorema di Pitagora	506
Il primo teorema di Euclide	509
Il secondo teorema di Euclide	510
Sui teoremi di Pitagora e di Euclide	511
I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono ad equazioni di 1° grado	512
I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono a sistemi di 1° grado	514
I numeri irrazionali	515
I radicali quadratici e la loro scrittura decimale	517
Radicali	518

Potenze a esponente frazionario	519
Le radici con il calcolatore tascabile	521
Calcoli con i radicali	522

## CAPITOLO SECONDO

L'insieme dei numeri reali	532
Rappresentare i numeri reali sulla retta	533
Ordinamento dei numeri reali	536
Sulle frazioni continue	539
Sui valori approssimati di un numero irrazionale	540
Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali	542
Calcoli con i numeri reali	545
Il calcolatore tascabile per eseguire calcoli con numeri reali	564
Approssimazioni e propagazione degli errori	566
Sul rapporto fra due segmenti	567
Sul teorema di Talete	571

## CAPITOLO TERZO

Sui poligoni simili	576
Sui poligoni omotetici	578
Sui criteri di similitudine dei triangoli	580
La similitudine nella realtà	587
Sulle relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo	590
Sulle funzioni trigonometriche	591
Problemi sui triangoli rettangoli	593
Sul teorema dei seni	600
Sul teorema del coseno	600
Problemi sui triangoli non rettangoli	601
Sull'area del triangolo	606

## CAPITOLO QUARTO

Sull'implicazione	609
Sulla doppia implicazione	611
Implicazione e doppia implicazione	612
Implicazione e insiemi	613
L'implicazione nell'enunciato dei teoremi	614
Vari modi di enunciare un teorema	615
Definizioni e termini primitivi, teoremi e assiomi	618
Sulle geometrie non euclidee	621

## CAPITOLO QUINTO

Sulle coordinate reali	622
Sulle rette parallele agli assi cartesiani	623
Sulle circonferenze con centro nell'origine	624
Rappresentare leggi matematiche sul piano cartesiano	625
Leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali	627
Leggi crescenti e leggi decrescenti	630
Su parabola e iperbole	630
Curve e funzioni	631
Sul grafico delle funzioni $y = x^n$	634
Sul grafico di $y =  x $	634
Sul riferimento polare	636

## CAPITOLO SESTO

Sulle trasformazioni affini	638
Sulle equazioni di una trasformazione affine	640
Sulle aree di figure affini	642
Sulle simmetrie	644
Sulla composizione di trasformazioni	646
Sulle traslazioni	647
Comporre più trasformazioni	651
Sui vettori	652
Trasformare con simmetrie le funzioni $y = x^n$	654
Sulle funzioni $y = \sqrt[n]{x}$	656
Sulle funzioni $y = ax^2$	659
Sull'ellisse	666
Sulle parabole d'equazione $y = ax^2 + bx + c$	668
Sulle trasformazioni proiettive	674

## CAPITOLO SETTIMO

Parabole ed equazioni di 2° grado	675
Sulla formula risolutiva dell'equazione di 2° grado	678
Sul discriminante dell'equazione di 2° grado	682
Le equazioni incomplete	683
Sulla formula ridotta	684
Risolvere equazioni di 2° grado	685
Problemi che conducono a risolvere equazioni di 2° grado	688
Sulle relazioni fra soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado	698
Sulla scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado	699

Sul segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado	700
Sul segno di un trinomio di 2° grado	701
Sulle disequazioni di 2° grado	704
Sulle equazioni e disequazioni equivalenti	707
Problemi che conducono a risolvere disequazioni di 2° grado	711
Sui sistemi di 2° grado	714
Problemi che conducono a risolvere sistemi di 2° grado	719
Sulle equazioni di 2° grado letterali	724
Problemi che conducono ad equazioni di 2° grado letterali	730
Sui sistemi di 2° grado letterali	736
Problemi che conducono a sistemi di 2° grado letterali	739

### CAPITOLO OTTAVO

Sulle equazioni di grado superiore al 2°	743
Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$	745
Sulla divisione di polinomi	749
Sulla regola di Ruffini	751
Sulla scomposizione in fattori dei polinomi	752
Sulle radici multiple di un polinomio	758
Sulle equazioni di grado superiore al 2°	759

Sulle frazioni algebriche	767
Sulle equazioni fratte	773
Sul segno di un polinomio	777
Sul segno di un quoziente di polinomi	777
Sulle equazioni irrazionali	778
Sulle disequazioni irrazionali	785
Sui sistemi di grado superiore al 2°	787
Problemi riassuntivi di tutto il capitolo	789

### CAPITOLO NONO

Valutazione oggettiva delle probabilità	794
Probabilità totale	796
Probabilità composta	799
Sulla probabilità totale e composta	801
Probabilità e genetica	805
Probabilità e proposizioni	806
Le prove ripetute	807
Il fattoriale	808
I coefficienti binomiali	811
I coefficienti binomiali e le prove ripetute	813
Il binomio di Newton	815
Il calcolo combinatorio	817
Altri modi di valutare la probabilità	819

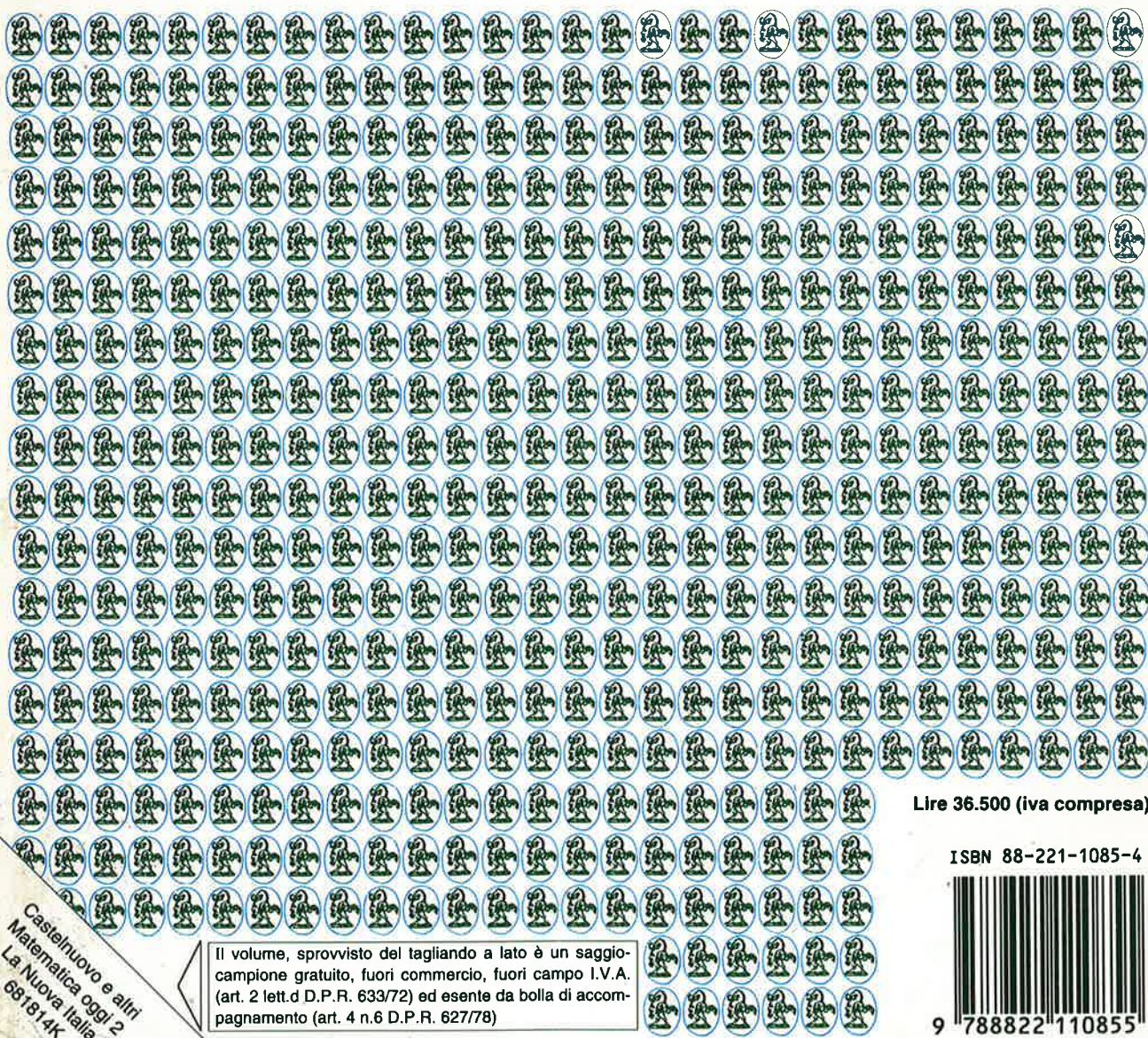




La Nuova Italia

# Castelnuovo/Gori Giorgi/Valenti

## Matematica oggi 2



Lire 36.500 (iva compresa)

ISBN 88-221-1085-4



9 788822 110855

Il volume, sprovvisto del tagliando a lato è un saggio-campione gratuito, fuori commercio, fuori campo I.V.A. (art. 2 lett.d D.P.R. 633/72) ed esente da bolli di accompagnamento (art. 4 n.6 D.P.R. 627/78)

Castelnuovo e altri  
Matematica oggi 2  
La Nuova Italia  
681814K