1

Parabole ed equazioni di 2° grado

L'intersezione di una retta con l'asse delle *x* e la soluzione di un'equazione di 1° grado

In fig. 1 è rappresentata la retta:

$$y = 4x - 1$$

La retta incontra l'asse delle x nel punto A, che presenta le seguenti caratteristiche:
- si trova sull'asse delle x e perciò ha l'ordinata y che vale 0;
- si trova anche sulla retta e perciò ha le coordinate x e y legate da:

$$y = 4x - 1$$

L'ascissa x del punto A si trova allora risolvendo l'equazione:

$$4x - 1 = 0$$

Per risolvere quest'equazione si procede nel modo seguente:
- si aggiunge ai due membri 1, ottenendo:

$$4x = 1$$

- si moltiplicano i due membri per $\frac{1}{4}$, ottenendo:

$$x = \frac{1}{4}$$

Così si trova che:

- l'equazione $4x - 1 = 0$ ha la soluzione $x = \frac{1}{4}$;
- la retta $y = 4x - 1$ incontra l'asse delle x in $A\left(\frac{1}{4};0\right)$.

Si conclude dunque che *la soluzione*

$$x = \frac{1}{4}$$

dell'equazione di 1° grado:

$$4x - 1 = 0$$

indica l'ascissa x *del punto* A *in cui la retta*

$$y = 4x - 1$$

incontra l'asse delle ascisse.

Le due intersezioni di una parabola con l'asse delle *x* e le due soluzioni di un'equazione di 2° grado

In fig. 2 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 1$$

La curva incontra l'asse delle x in due punti A e B che presentano caratteristiche analoghe a quelle indicate prima, e cioè:
- si trovano sull'asse delle x e perciò hanno l'ordinata y che vale 0;
- si trovano anche sulla parabola e perciò hanno le coordinate x e y legate da:

$$y = 4x^2 - 1$$

Le ascisse di questi due punti si trovano allora risolvendo l'equazione

$$4x^2 - 1 = 0$$

L'equazione ottenuta è di 2° grado perché l'incognita x *compare elevata ad esponente 2.* Si tratta di un'equazione particolarmente semplice che può essere risolta con un procedimento analogo a quello seguito prima e cioè:

- si aggiunge ai due membri 1, ottenendo:

$$4x^2 = 1$$

- si moltiplicano i due membri per $\frac{1}{4}$, ottenendo:

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

- si ricavano i due numeri che, elevati al quadrato, danno $\frac{1}{4}$, ottenendo:

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

I due numeri così ottenuti sono *le soluzioni* dell'equazione e vengono anche indicati nel modo seguente:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

I numeri 1 e 2 scritti «al piede» della lettera x si chiamano *pedici* o *deponenti* e vengono usati per elencare ordinatamente più elementi dello stesso tipo; in questo caso vengono usati per contare le due soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Attenzione a non confondere i deponenti con gli esponenti, si ha in particolare:

$x^1 = x \qquad x^2 = x \cdot x$ (1 e 2 sono *esponenti*)

$x_1 \qquad x_2$ indicano le soluzioni di un'equazione di 2° grado (1 e 2 sono *deponenti*)

Si trova dunque che:

- l'equazione $4x^2 - 1 = 0$ ha le *due soluzioni* $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$;
- la parabola $y = 4x^2 - 1$ incontra l'asse delle x nei *due punti* $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ e $B\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Si conclude che *le due soluzioni*

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

dell'equazione di 2° grado:

$$4x^2 - 1 = 0$$

indicano le ascisse dei due punti A *e* B *in cui la parabola*

$$y = 4x^2 - 1$$

incontra l'asse delle x.

Figura 1
Una retta e l'equazione di 1° grado

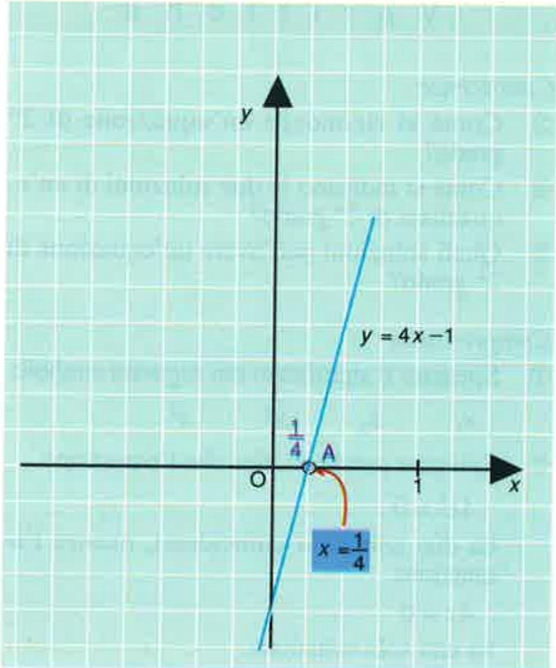
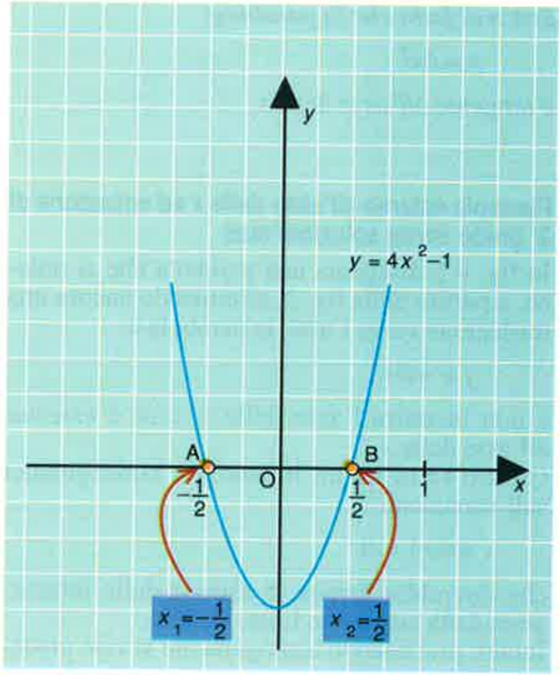


Figura 2
Una parabola e l'equazione di 2° grado



Parabola tangente all'asse delle *x* ed equazione di 2° grado con le due soluzioni coincidenti

In fig. 3 sono disegnate alcune parabole che si ottengono effettuando una traslazione lungo l'asse delle y verso l'alto, a partire dalla parabola di fig. 2.
Si osserva che le due intersezioni con l'asse delle x si avvicinano sempre di più, fino a sovrapporsi quando il vertice della parabola arriva proprio sull'asse delle x. In tal caso si dice che la parabola (in rosso in fig. 3) è *tangente* all'asse delle x, cioè *incontra l'asse delle* x *in due punti coincidenti* con l'origine O.
Dal punto di vista algebrico, la parabola è:

$$y = 4x^2$$

Per determinare le ascisse delle intersezioni con l'asse delle x, si dovrebbe risolvere l'equazione:

$$4x^2 = 0$$

In questo caso, moltiplicando i due membri per $\frac{1}{4}$, si ottiene:

$$x^2 = 0$$

cioè un'equazione di 2° grado che ha le due soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Si conclude dunque che *l'equazione*:

$$4x^2 = 0$$

ha le due soluzioni coincidenti in corrispondenza al fatto che la parabola:

$$y = 4x^2$$

è tangente all'asse delle x.

Parabola esterna all'asse delle *x* ed equazione di 2° grado senza soluzioni reali

In fig. 4 è disegnata una parabola che si ottiene, a partire dalla fig. 3, effettuando ancora una traslazione verso l'alto; la parabola è:

$$y = 4x^2+1$$

e non incontra l'asse delle x, cioè è *esterna* all'asse delle x.
Questo fatto ha un'immediata conseguenza sull'equazione:

$$4x^2+1 = 0$$

che dovrebbe fornire le ascisse delle intersezioni della curva con l'asse delle x.
Infatti, procedendo analogamente ai casi precedenti per risolvere l'equazione, si ha:

$$4x^2 = -1 \quad \text{e quindi} \quad x^2 = -\frac{1}{4}$$

Si arriva così ad un'equazione che non ha soluzioni reali, perché il quadrato di un numero reale non può essere in nessun caso negativo.
Si conclude dunque che *l'equazione*:

$$4x^2+1 = 0$$

non ha soluzioni reali in corrispondenza al fatto che la parabola:

$$y = 4x^2+1$$

non incontra l'asse delle x.

Sintesi dei risultati ottenuti

I casi numerici esaminati suggeriscono qualche conclusione di carattere più generale e cioè:

a. *in un'equazione di 2° grado compare l'incognita* x *elevata al massimo a esponente 2, come per esempio nelle equazioni seguenti:*

$$4x^2 - 1 = 0 \qquad 4x^2 = 0 \qquad 4x^2+1 = 0$$

b. *un'equazione di 2° grado può avere*:
- *due soluzioni reali e distinte* x_1 *e* x_2;
- *due soluzioni reali e coincidenti* $x_1 = x_2$;
- *nessuna soluzione reale.*

Verifiche

Conoscenze

① Come si riconosce un'equazione di 2° grado?

② Come si indicano le due soluzioni di un'equazione di 2° grado?

③ Quali soluzioni può avere un'equazione di 2° grado?

Comprensione

① Spiegare il significato dei seguenti simboli:

$$x_1 \qquad x_2 \qquad x^1 \qquad x^2$$

② Spiegare perché si dice che l'equazione

$$4x^2 = 0$$

ha due soluzioni coincidenti, mentre l'equazione

$$4x = 0$$

ha una sola soluzione.

③ Spiegare perché l'equazione:

$$4x^2+1=0$$

non ha soluzioni reali, mentre l'equazione:

$$4x+1=0$$

ha una soluzione.

Applicazioni

① Esaminare le seguenti equazioni:

$$9x-4=0 \qquad 9x^2-4=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare quale equazione è di 1° grado e quale di 2° grado;
b. determinare le soluzioni di ogni equazione;
c. interpretare graficamente le soluzioni ottenute.

② Ripetere l'esercizio a partire dalle seguenti equazioni:

$$9x=0 \qquad 9x^2=0$$

③ Ripetere l'esercizio a partire dalle seguenti equazioni:

$$9x+4=0 \qquad 9x^2+4=0$$

Collegamento con i capitoli precedenti

① Come si ricavano i numeri che, elevati al quadrato, danno $\frac{1}{4}$?
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 7*)

② Spiegare perché fra i numeri reali non si trovano i numeri che, elevati al quadrato, danno $-\frac{1}{4}$.
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 7*)

③ Descrivere brevemente il procedimento per tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y=4x^2-1 \qquad y=4x^2 \qquad y=4x^2+1$$

(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 9*)

Collegamento con il primo volume

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
- equazione di 1° grado;
- soluzione di un'equazione di 1° grado.
(*Vedere il capitolo 9, pp. 373-374*)

② Esporre il procedimento da seguire per risolvere un'equazione di 1° grado.
(*Vedere il capitolo 9, pp. 373-376*)

③ Un'equazione di 1° grado ha sempre una soluzione?
(*Vedere il capitolo 9, pp. 377-378*)

Figura 3
Una parabola tangente all'asse delle *x*

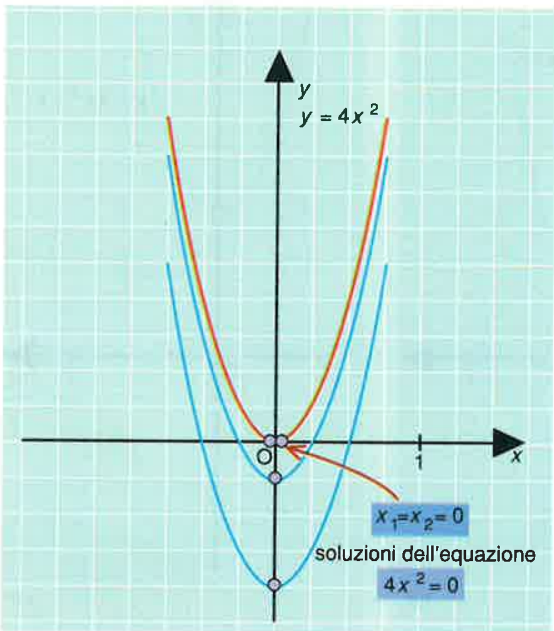
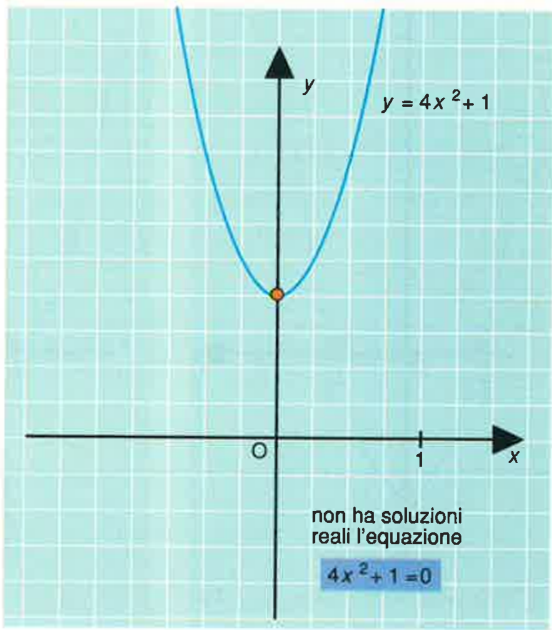


Figura 4
Una parabola esterna all'asse delle *x*



2 La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

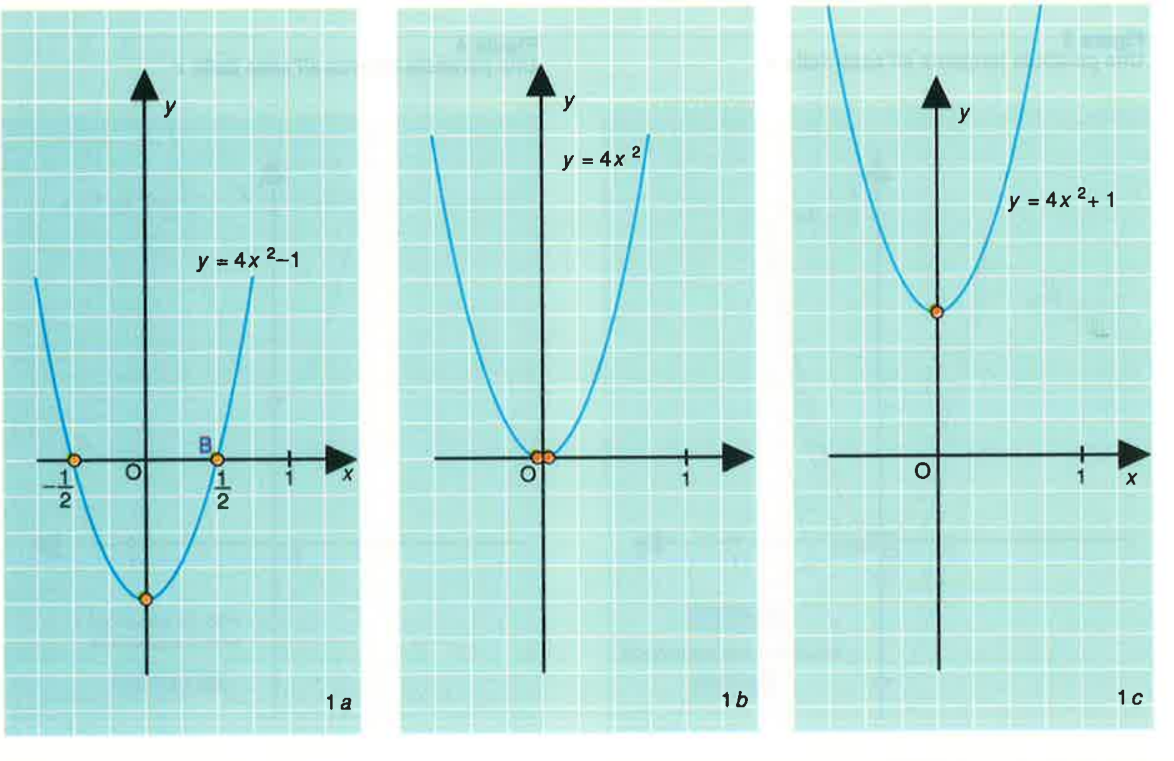
La forma più generale di un'equazione di 2° grado

Nel paragrafo precedente sono stati esaminati tre casi particolari di equazioni di 2° grado:

$$4x^2 - 1 = 0 \qquad 4x^2 = 0 \qquad 4x^2+1 = 0$$

Queste equazioni sono legate alle intersezioni con l'asse delle x di parabole che hanno tutte una caratteristica comune (fig. 1): l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y.
Più in generale, una parabola può avere l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y; ecco qualche esempio.
In fig. 2 sono disegnate le parabole ottenute, a partire da quelle di fig. 1, con una traslazione di due unità lungo l'asse delle x verso destra.

Figura 1
Tre parabole che hanno l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle *y*



Esaminiamo in dettaglio i tre casi seguenti.

A. In fig. 2*a* è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 - 1$$

ossia

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che interseca l'asse delle ascisse in due punti A e B. Le ascisse di questi punti sono le due soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

B. In fig. 2*b* è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 \quad \text{ossia} \quad y = 4x^2 - 16x + 16$$

che è tangente all'asse delle ascisse in due punti coincidenti nel vertice V e perciò ha le due soluzioni coincidenti l'equazione

$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$

C. In fig. 2*c* è rappresentata la parabola:

$$y = 4(x - 2)^2 + 1$$

ossia

$$y = 4x^2 - 16x + 17$$

che non interseca l'asse delle x e perciò non ha soluzioni reali l'equazione

$$4x^2 - 16x + 17 = 0$$

In generale, una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y è sempre del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

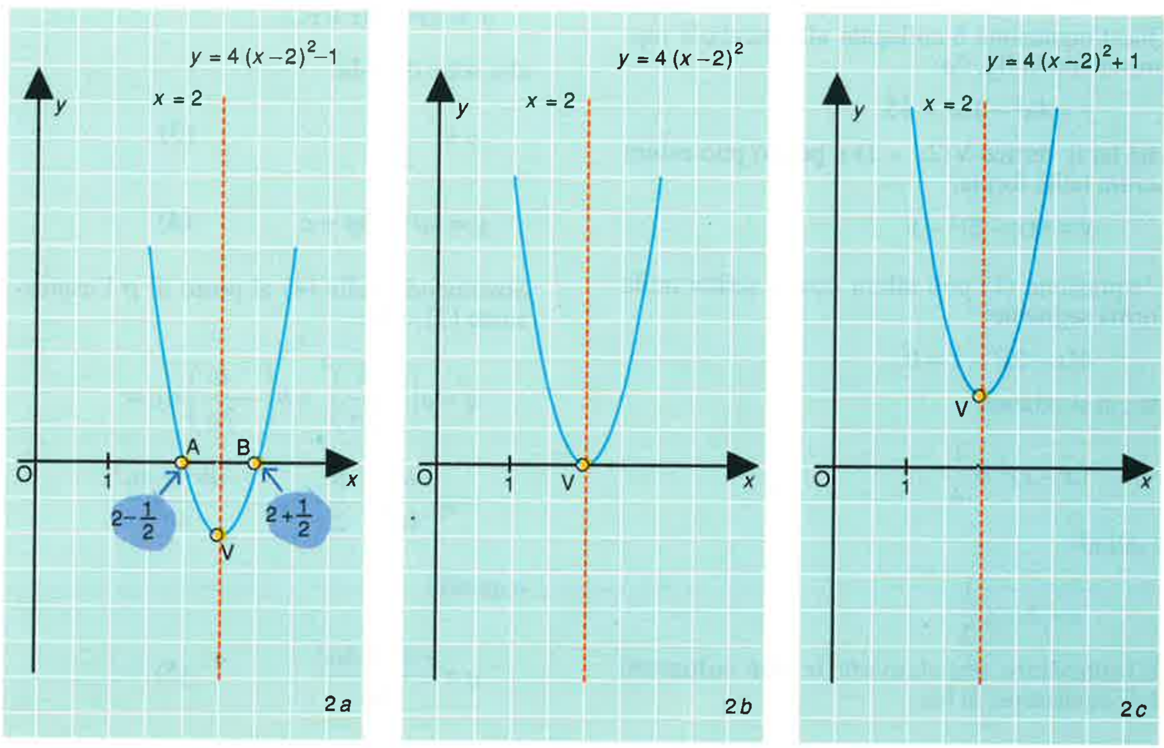
Perciò, per determinare le intersezioni di questa parabola con l'asse delle x, bisogna risolvere la corrispondente equazione di 2° grado, ottenuta sostituendo 0 a y.
Si conclude dunque che *un'equazione di 2° grado si presenta sempre nella forma seguente*:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

In questa formula si ha che:
- la lettera x indica *l'incognita*;
- le lettere a, b, c sono *i coefficienti* dell'equazione, in particolare a e b sono i *coefficienti dell'incognita*, c è il *termine noto*;
- i coefficienti sono dei numeri reali che si possono scegliere liberamente, rispettando un unico vincolo:

$$a \neq 0$$

Figura 2
Tre parabole traslate lungo l'asse delle *x*



Infatti, scegliendo $a = 0$, l'equazione diventa:

$$bx + c = 0$$

e perciò non è più di 2°grado, ma di 1°.

Come si risolve una particolare equazione di 2° grado

La fig. 2 conduce anche a prevedere le soluzioni che può dare un'equazione di 2° grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si avranno infatti (fig. 2):

- *due soluzioni reali e distinte* x_1 e x_2 se la parabola taglia l'asse delle x;
- *due soluzioni reali e coincidenti* $x_1 = x_2$ se la parabola è tangente all'asse delle x;
- *nessuna soluzione reale* se la parabola non taglia l'asse delle x.

Come si possono determinare le soluzioni di un'equazione di 2° grado?

Ecco un caso numerico che condurrà a un procedimento di carattere generale.

Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \qquad (1)$$

Quest'equazione è collegata alla parabola rappresentata in fig. 2*a*:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che ha il vertice V(2; – 1) e perciò può essere scritta nella forma:

$$y = 4(x - 2)^2 - 1$$

L'equazione (1) può allora essere scritta nella forma seguente:

$$4(x - 2)^2 - 1 = 0$$

da cui si ottiene:

$$(x-2)^2 = \frac{1}{4}$$

e quindi:

$$x - 2 = \pm\frac{1}{2}$$

È immediato ora ricavare le due soluzioni dell'equazione; si ha:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2} \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{2}$$

Riprendendo le figure 1*a* e 2*a* si può interpretare graficamente il risultato ottenuto: le due soluzioni indicate in fig. 1*a* sono state traslate di due unità verso destra e si trovano quindi disposte simmetricamente rispetto all'asse della parabola traslata, che è:

$$x = 2.$$

La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

Il procedimento seguito prima è piuttosto lungo, perciò si preferisce arrivare a una formula che fornisca direttamente le soluzioni, senza dover ripetere i calcoli ogni volta che si deve risolvere un'equazione di 2° grado.

Per ottenere questa formula basta ripetere il procedimento indicato prima in generale, cioè a partire dall'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

dove a, b, c sono tre qualunque numeri reali (con $a \neq 0$).

Ecco dunque come si procede.

1. Si determinano le coordinate del vertice $V(p; q)$ della parabola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

che sono date da:

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad (3)$$

$$q = ap^2 + bp + c \qquad (4)$$

Sostituendo nella (4) al posto di p l'espressione (3) si ha:

$$q = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

e quindi:

$$q = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \qquad (5)$$

2. Si scrive l'equazione (2) nella forma:

$$a(x-p)^2+q=0$$

da cui si ricava:

$$(x-p)^2=-\frac{q}{a}$$

e quindi:

$$x-p=\pm\sqrt{-\frac{q}{a}}$$

Così le due soluzioni sono:

$$x_1=p-\sqrt{-\frac{q}{a}} \qquad x_2=p+\sqrt{-\frac{q}{a}} \qquad (6)$$

3. Si ricorda che p e q sono date dalle espressioni (3) e (5) e si trova:

$$-\frac{q}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

e quindi:

$$\sqrt{-\frac{q}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Perciò le (6) diventano:

$$x_1=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Abitualmente le due soluzioni così ottenute vengono riunite nella formula seguente, che prende il nome di *formula risolutiva dell'equazione di 2° grado:*

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Applicare la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado

La formula appena ottenuta è molto utile, perché permette di risolvere rapidamente un'equazione di 2° grado: basta conoscere il valore dei coefficienti a, b, c per calcolare le due soluzioni.

Ecco un esempio. Risolvere l'equazione:

$$2x^2+7x+3=0$$

Si tratta di un'equazione del tipo:

$$ax^2+bx+c=0$$

i cui coefficienti sono:

$$a=2 \qquad b=7 \qquad c=3$$

La formula risolutiva diventa perciò:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{4} \qquad \text{ossia} \qquad x=\frac{-7\pm5}{4}$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque:

$$x_1=\frac{-7-5}{4}=-3$$

$$x_2=\frac{-7+5}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

In definitiva si ottengono le due soluzioni:

$$x_1=-3 \qquad x_2=-\frac{1}{2}$$

Verificare che le soluzioni ottenute sono esatte

È importante, alla conclusione dei calcoli, verificare che le soluzioni ottenute siano esatte. Per verificare se una soluzione è esatta si procede così:

- si sostituisce la soluzione al posto di x nell'equazione data;
- si svolgono i calcoli;
- si controlla che il primo membro sia uguale al secondo.

Ecco il procedimento svolto per l'equazione ora risolta, e cioè:

$$2x^2+7x+3=0$$

1. Soluzione $x_1 = -3$

I membro:

$$2(-3)^2+7(-3)+3=2\cdot9-21+3=\mathbf{0}$$

II membro: **0**

La soluzione è esatta perché il primo membro risulta uguale al secondo membro.

2. Soluzione $x_1 = -\frac{1}{2}$

I membro:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 3 = \mathbf{0}$$

II membro: **0**

La soluzione è esatta.

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere l'equazione di 2° grado nella forma più generale spiegando il significato delle lettere.

② Scrivere la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado, spiegando il significato delle lettere.

Comprensione

① A che cosa serve la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado?

Applicazioni

① Risolvere le seguenti equazioni, verificando se le soluzioni ottenute sono esatte:

$4x^2 + 5x + 1 = 0$ $\qquad$ $4x^2 - 5x + 1 = 0$

② Risolvere le seguenti equazioni verificando se le soluzioni ottenute sono esatte.

$3x^2 + 4x + 1 = 0$ $\qquad$ $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Collegamenti con i capitoli precedenti

① Riprendere le tre parabole rappresentate in fig. 1 ed effettuare una traslazione di due unità lungo l'asse delle x verso sinistra; scrivere le equazioni delle parabole traslate e determinarne le intersezioni con l'asse delle x.
(*Vedere il capitolo 6, p. 240*)

② Spiegare perché le coordinate del vertice $V(p; q)$ di una parabola

$y = ax^2 + bx + c$

sono date dalle formule seguenti:

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad (3)$$

$$q = ap^2 + bp + c \qquad (4)$$

(*Vedere il capitolo 6, pp. 272-275*)

③ Spiegare perchè una parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y e il vertice $V\ (p;\ q)$ si può sempre scrivere nella forma:

$y = a(x - p)^2 + q$

(*Vedere il capitolo 6, pp. 272-275*)

Collegamenti con il primo volume

① Spiegare come si procede per verificare se la soluzione di un'equazione è esatta.

(*Vedere p. 375*)

3 Il discriminante dell'equazione di 2° grado

Le soluzioni di un'equazione di 2° grado esaminate graficamente

Nelle figure 1-3 (vedi p. 308) sono rappresentate di nuovo le tre parabole disegnate nel paragrafo precedente.

- In fig. 1 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

che taglia l'asse delle x in due punti A e B; perciò ha due soluzioni reali e distinte l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \qquad (1)$$

- In fig. 2 è rappresentata la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 16$$

che è tangente all'asse delle x; perciò ha due soluzioni reali e coincidenti l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0 \qquad (2)$$

- In fig. 3 si trova la parabola:

$$y = 4x^2 - 16x + 17$$

che non incontra l'asse delle x; perciò non ha soluzioni reali l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0 \qquad (3)$$

Le soluzioni di un'equazione di 2° grado esaminate mediante la formula risolutiva

La formula risolutiva trovata nel paragrafo precedente, e cioè:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

permette di trovare rapidamente le soluzioni di un'equazione di 2° grado, come le tre scritte prima.

Ma, ci si chiede, la formula (4) permette anche di prevedere quante saranno le soluzioni di un'equazione, senza dover più tracciare dei grafici?

Ecco che cosa si ottiene applicando la formula nei tre casi.

1. *Equazione con le due soluzioni reali e distinte.*
   L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \qquad (1)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \qquad b = -16 \qquad c = 15$$

Perciò le due soluzioni dell'equazione sono date da:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8}$$

Le due soluzioni sono perciò:

$$x_1 = \frac{16-4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{16+4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

2. *Equazione con le due soluzioni reali e coincidenti.*
L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0 \qquad (2)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \qquad b = -16 \qquad c = 16$$

Perciò le due soluzioni sono date da:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4}$$

da cui $$x = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{8}$$

Le due soluzioni coincidenti sono perciò:

$$x_1 = x_2 = \frac{16}{8} = 2$$

3. *Equazione senza soluzioni reali.*
L'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0 \qquad (3)$$

ha i coefficienti:

$$a = 4 \qquad b = -16 \qquad c = 17$$

Perciò le due soluzioni sono date da:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 17}}{2 \cdot 4}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{-16}}{8}$$

Dunque, l'equazione non ha soluzioni reali perché non si trova fra i numeri reali la radi-

Figura 1
Una parabola che taglia l'asse delle *x* determina un'equazione di 2° grado con due soluzioni reali e distinte

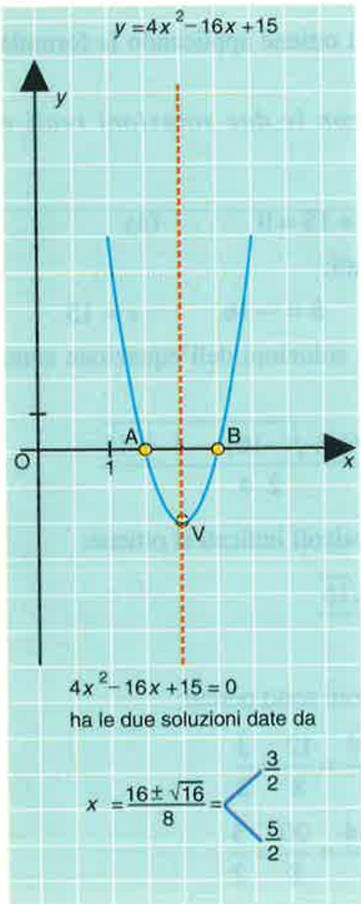


Figura 2
Una parabola tangente l'asse delle *x* determina un'equazione di 2° grado con due soluzioni reali e coincidenti

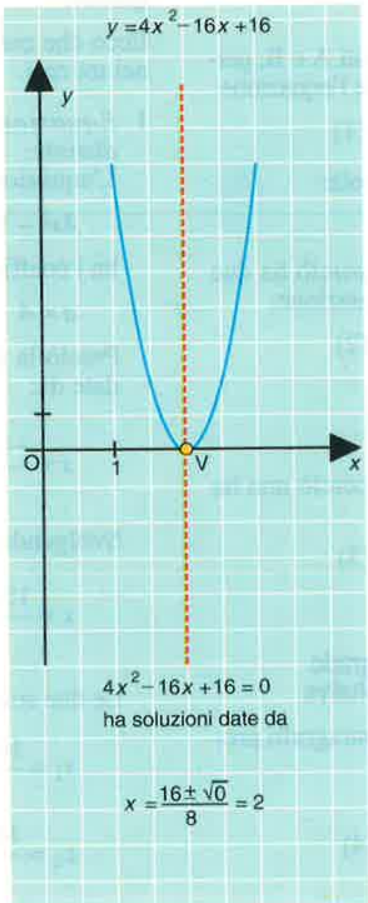
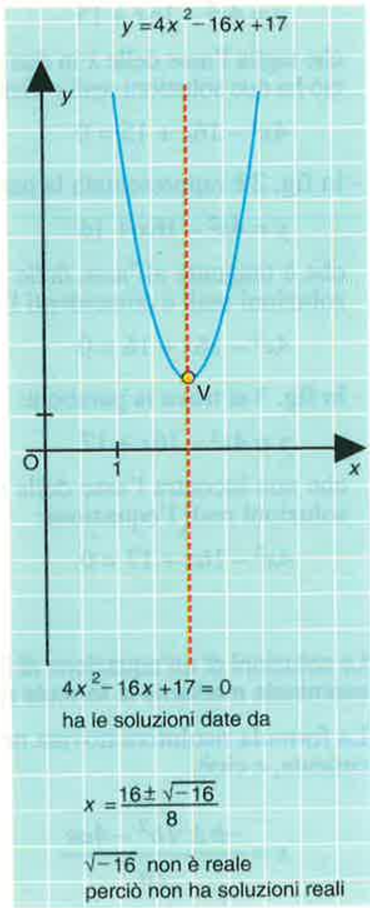


Figura 3
Una parabola esterna all'asse delle *x* determina un'equazione di 2° grado senza soluzioni reali



ce quadrata di un numero negativo; in particolare si ha che:

$\sqrt{-16}$ non è un numero reale

Il discriminante di un'equazione di 2° grado

È dunque il radicando del radicale quadratico a distinguere, ossia a *discriminare*, i vari casi; per questo tale numero prende il nome di *discriminante* dell'equazione di 2° grado ed è contrassegnato dalla lettera Δ, che è la «d» maiuscola nella lingua greca e si legge «delta». Consideriamo dunque il discriminante delle equazioni esaminate prima.

1. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

risulta:

$$\Delta = 16 > 0$$

e l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte, date da:

$$x_1 = \frac{16-\sqrt{\Delta}}{8} \qquad x_2 = \frac{16+\sqrt{\Delta}}{8}$$

2. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$

risulta:

$$\Delta = 0$$

e l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti, date da:

$$x_1 = x_2 = \frac{16}{8}$$

3. Per l'equazione:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0$$

risulta:

$$\Delta = -16 < 0$$

e l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, nella formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

il discriminante Δ è dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

e si trovano i seguenti casi possibili:

1. *Δ > 0 l'equazione ammette le due soluzioni reali e distinte*:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. *Δ = 0 l'equazione ammette le due soluzioni reali e coincidenti*:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3. *Δ < 0 l'equazione non ha soluzioni reali.*

Verifiche

Conoscenze

① Completare le seguenti frasi:
a. un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha il discriminante Δ dato da:

Δ = ...

b. se risulta Δ...0 l'equazione ha due soluzioni ....
c. se risulta Δ...0 l'equazione ha due soluzioni ....
d. se risulta Δ...0 l'equazione non ha ....

Comprensione

① Spiegare perché un'equazione di 2° grado non ha soluzioni reali quando il discriminante è negativo.

Applicazioni

① Esaminare le seguenti equazioni:

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad 2x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$2x^2 + 4x + 3 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il discriminante di ogni equazione;
b. basarsi sul segno del discriminante per dire quante soluzioni ha ogni equazione.

Collegamenti con i capitoli precedenti

① Spiegare il significato dei seguenti termini:
- «radicando»;
- «radicale quadratico».

Portare degli esempi di radicali quadratici che non hanno risultato reale.
(*Vedere il capitolo 1, paragrafo 5, pp. 23-25*)

Risolvere equazioni di 2° grado

Equazioni incomplete

La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado e cioè:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

permette di risolvere tutte le equazioni del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

Ma in alcuni casi particolari le equazioni (2) possono essere risolte più brevemente senza valersi della formula (1); si tratta delle equazioni in cui vale 0 almeno uno dei coefficienti, restando però $a \neq 0$, altrimenti l'equazione non è più di 2° grado.

Ecco i vari casi che si possono presentare:

1. $b = 0$ equazione del tipo $ax^2 + c = 0$;
2. $c = 0$ equazione del tipo $ax^2 + bx = 0$;
3. $b = c = 0$ equazione del tipo $ax^2 = 0$.

Le equazioni di questi tre tipi vengono dette *incomplete*, perché vi mancano alcuni dei monomi che compaiono nell'equazione (2).

Equazioni di questi tre tipi verranno ora risolte in due modi:

- valendosi della formula risolutiva;
- senza valersi della formula risolutiva.

Attività 1

Risolvere l'equazione

$$9x^2 - 4 = 0$$

completando i due procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \ldots$ $b = 0$ $c = \ldots$ $x = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\ldots}}{2\ldots}$ $x_1 = \ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots$	Si aggiunge ai due membri ......, che è l'opposto di ...... e si ha: $9x^2 = \ldots\ldots$ Si moltiplicano i due membri per ......, che è il reciproco di .... e si ha: $x^2 = \ldots\ldots$ Si trovano i due numeri che .... e si ha: $x = \pm \dfrac{2}{3}$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$9x^2 + 4 = 0$$

Attività 2

Risolvere l'equazione

$$2x^2 + 3x = 0$$

completando i due procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \ldots$ $b = \ldots$ $c = 0$ $x = \dfrac{-\ldots \pm \sqrt{\ldots^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2\ldots}$ $x_1 = \ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots$	Si raccoglie il fattore comune x: $x(2x + 3) = 0$ Si ricorda che un prodotto vale 0 solo se vale 0 uno dei due fattori e perciò si ha: $x = 0$ oppure $2x + 3 = 0$ Le soluzioni sono quindi: $x_1 = 0$ $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$2x^2 - 3x = 0$$

Attività 3

Risolvere l'equazione

$$\frac{1}{4}x^2 = 0$$

completando i procedimenti presentati nella seguente tabella.

Risoluzione con la formula	Risoluzione senza formula
$a = \dots \quad b = 0 \quad c = 0$	Si moltiplicano i due membri per ......, che è il reciproco di .... e si ha: $x^2 = \dots\dots\dots$
$x = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot \dots \cdot 0}}{2 \dots}$	Si trovano i due numeri che .... e si ha:
$x_1 = \dots\dots \quad x_2 = \dots\dots$	$x_1 = x_2 = 0$

Ripetere i due procedimenti a partire dall'equazione:

$$-\frac{1}{4}x^2 = 0$$

La formula ridotta

Un caso particolare di equazione di 2° grado è quello in cui il coefficiente b è un multiplo di 2. Ecco qualche esempio.

$3x^2 + 4x + 1 = 0$	cioè	$3x^2 + 2 \cdot 2x + 1 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$	cioè	$x^2 + 2(-3)x + 9 = 0$
$3x^2 + 26x + 16 = 0$	cioè	$3x^2 + 2 \cdot 13x + 16 = 0$

In generale si tratta di equazioni che si possono scrivere nella forma:

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

Attività 4

Completare i procedimenti presentati nella tabella seguente per risolvere:

- l'equazione particolare $3x^2 + 26x + 16 = 0$
- l'equazione generale $ax^2 + 2\beta x + c = 0$

$3x^2 + 26x + 16 = 0$	$ax^2 + 2\beta x + c = 0$
$a = \dots \quad b = 2 \cdot 13 \quad c = \dots$	$a \quad b = 2\beta \quad c$
$x = \dfrac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{(2 \cdot 13)^2 - 4 \cdot \dots \cdot \dots}}{2 \dots}$	$x = \dfrac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4 \dots \cdot \dots}}{2 \dots}$
$x = \dfrac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{4 \cdot 13^2 - 4 \cdot \dots}}{2 \dots}$	$x = \dfrac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4 \dots}}{2 \dots}$
$x = \dfrac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{4 \cdot (13^2 - \dots)}}{2 \dots}$	$x = \dfrac{-2 \cdot \beta \pm \sqrt{4 \cdot (\beta^2 - \dots)}}{2 \dots}$
$x = \dfrac{-2 \cdot 13 \pm 2\sqrt{13^2 - \dots}}{2 \dots}$	$x = \dfrac{-2 \cdot \beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \dots}}{2 \dots}$
$x = \dfrac{2\left(-13 \pm \sqrt{13^2 - \dots}\right)}{2 \dots}$	$x = \dfrac{2\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \dots}\right)}{2 \dots}$
$x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 3 \cdot 16}}{3}$	$x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - a \cdot c}}{a}$

L'ultima formula ottenuta, e cioè:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - a \cdot c}}{a}$$

è anche detta *formula ridotta* e si applica solo quando il coefficiente b è un multiplo di 2, cioè l'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

Attività 5

Esaminare le seguenti equazioni:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$4x^2 + 7x + 4 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché si può usare la formula ridotta per risolvere le prime due equazioni, ma non per risolvere l'ultima;
b. risolvere le tre equazioni.

Attività 6

Date le seguenti equazioni:

$$25x^2 + 50x + 21 = 0 \qquad 7x^2 - 60x + 108 = 0$$

risolverle in due modi, e cioè:

a. usando la formula risolutiva;
b. usando la formula ridotta.

Confrontare i due procedimenti.

Attività 7

Risolvere le seguenti equazioni valendosi del procedimento che si ritiene più opportuno:

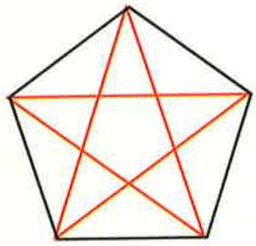
$$5x^2 + 40x = 0$$

$$x^2 + 40x + 400 = 0$$

$$-\frac{1}{9}x^2 = 0$$

La sezione aurea

Figura 1
Un pentagono regolare e un pentagono regolare stellato



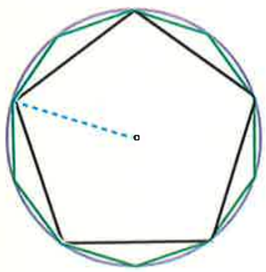
Il pentagono regolare nella scuola pitagorica

Risale alla scuola pitagorica (intorno al 500 a.C.) la costruzione del pentagono regolare con riga e compasso; il simbolo di questa scuola era infatti il pentagono regolare stellato (in rosso in fig. 1), la cui costruzione si basa appunto su quella del pentagono regolare (in nero in fig. 1).

Quando si parla di «costruzione con riga e compasso» ci si riferisce alla costruzione di un poligono regolare a partire da una circonferenza. In particolare, per costruire il pentagono regolare inscritto in una circonferenza, conviene costruire prima il *decagono regolare* inscritto (in verde in fig. 2); congiungendo un vertice sì ed uno no del decagono, si otterrà poi il pentagono (in nero in fig. 2).

Ma come si inscrive un decagono regolare in una circonferenza?

Figura 2
Un decagono e un pentagono regolari inscritti in una circonferenza



Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza

Inscrivere un decagono regolare in una circonferenza significa determinarne la lunghezza del lato; ecco come si può ragionare per determinare il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario.

1. Si immagina di aver costruito il decagono e lo si divide in 10 triangoli isosceli tutti uguali fra loro (fig. 3*a*); si fissa quindi l'attenzione su uno di questi triangoli, per esempio ABO (fig. 3*b*) in cui si ha che:
   - AB è il lato incognito del decagono, e perciò si scrive:

     $$AB = x$$

   - l'angolo $\hat{O}$ è la decima parte dell'angolo giro, perciò risulta:

     $$\hat{O} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

   - i lati OA e OB sono raggi della circonferenza, perciò il triangolo OBA è isoscele e si ha:

     $$OA = OB = 1$$

   - i due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono uguali e si determinano ricordando che la somma degli angoli interni del triangolo vale 180°, perciò risulta:

     $$\hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

2. Si conduce la bisettrice di uno degli angoli alla base, per esempio $\hat{B}$, fino a incontrare il lato AO in S (fig. 3*c*); si determina così il triangolo ABS, che ha gli angoli uguali a quelli del triangolo ABO, dato che risulta:
   - l'angolo $\hat{A} = 72°$;
   - l'angolo $A\hat{B}S = \frac{72°}{2} = 36°$;
   - l'angolo $A\hat{S}B = 180° - (36° + 72°) = 72°$.

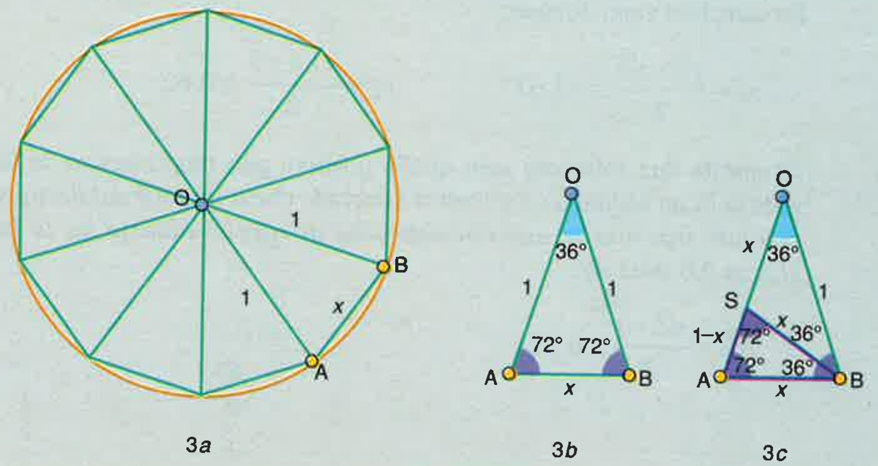


Figura 3
Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza

Il secondo criterio di similitudine (vedi il capitolo terzo, p. 99) garantisce allora che i due triangoli sono simili e perciò hanno i lati omologhi in proporzione. Si considerano, in particolare, i seguenti lati omologhi dei due triangoli AOB e ABS:

OB (lato di AOB) e AB (lato di ABS)
AB (base di AOB) e AS (base di ABS)

Si scrive la seguente proporzione:

$$OB:AB = AB:AS \qquad (1)$$

3. Si considerano le misure dei segmenti presenti nella relazione (1) e si trova che (fig. 3*c*):

   $OB = 1 \qquad AB = x \qquad AS = 1 - x$

   Perciò la (1) diventa:

   $$1:x = x:(1-x)$$

   da cui $x^2 = 1 - x$

   e quindi:

   $$x^2 + x - 1 = 0 \qquad (2)$$

   Dunque, per determinare il lato del decagono regolare bisogna risolvere l'equazione (2), che è del tipo:

   $$ax^2 + bx + c = 0$$

   con

   $a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -1$

Le soluzioni sono dunque date dalla formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che in questo caso diventa:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

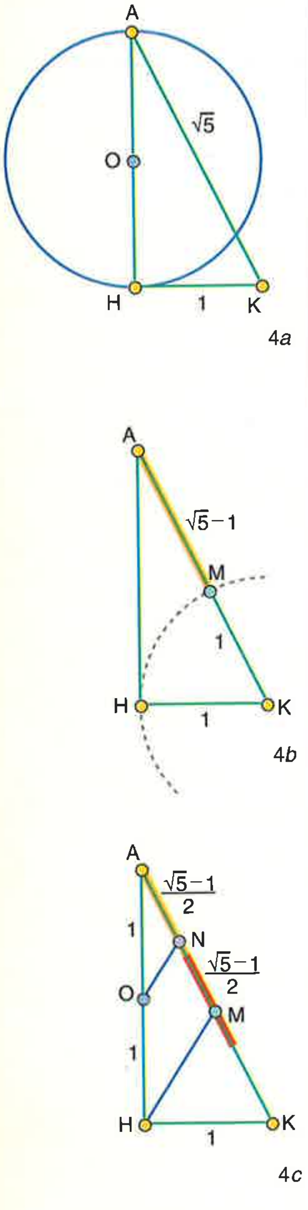
Le soluzioni sono dunque:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cong -1,62 \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cong 0,62$$

Di queste due soluzioni solo quella positiva può rappresentare la lunghezza di un segmento e quindi si conclude che *il lato AB del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario ha la lunghezza* $\overline{AB}$ *data da*:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,62$$

Figura 4
Costruire il lato del decagono regolare



Come costruire il lato del decagono regolare

Il segmento appena ottenuto con un procedimento algebrico si può ottenere con riga e compasso, seguendo la costruzione illustrata in fig. 4, che si può organizzare nel modo seguente:

1. A partire dalla circonferenza di centro O e raggio OH lungo 1, si costruisce il triangolo rettangolo AHK (fig. 4*a*), che ha:
   - il cateto HK lungo 1;
   - il cateto AH lungo 2;
   - l'ipotenusa AK che, per il teorema di Pitagora, è lunga:

   $$\overline{AK} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

2. Si traccia una circonferenza di centro K e raggio 1, fino a intersecare AK in M, determinando un segmento AM, che ha lunghezza (fig. 4*b*):

   $$\overline{AM} = \sqrt{5} - 1$$

3. Si congiunge H con M e da O si traccia la parallela a HM, fino a incontrare il segmento AM in N, ottenendo un segmento AN, che, per il teorema di Talete, ha la lunghezza data da (fig. 4*c*):

   $$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

   e perciò è proprio il lato del decagono regolare.

La sezione aurea

La costruzione del lato del decagono regolare porta a trovare, a partire da un segmento OA, un segmento OS caratterizzato da una singolare proprietà espressa dalla (1), che si può anche riscrivere nella forma seguente (fig. 5):

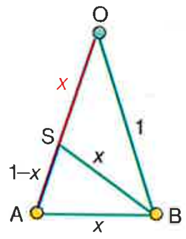
$$OA:OS = OS:(OA - OS)$$

La proprietà si legge così: *il segmento* OS *è medio proporzionale fra l'intero segmento* OA *e la parte rimanente* OA – OS.

È questa proprietà caratteristica che aveva suscitato l'interesse dei pitagorici. Perché questo interesse?

Si trattava prima di tutto di una questione estetica: si era osservato, per esempio, che un rettangolo con le dimensioni proporzionali a OA e OS era più gradevole alla vista di qualunque altro rettangolo; proprio per questo il Partenone (fig. 6) fu costruito scegliendo delle proporzioni di questo tipo.

Figura 5
La sezione aurea



$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}62$

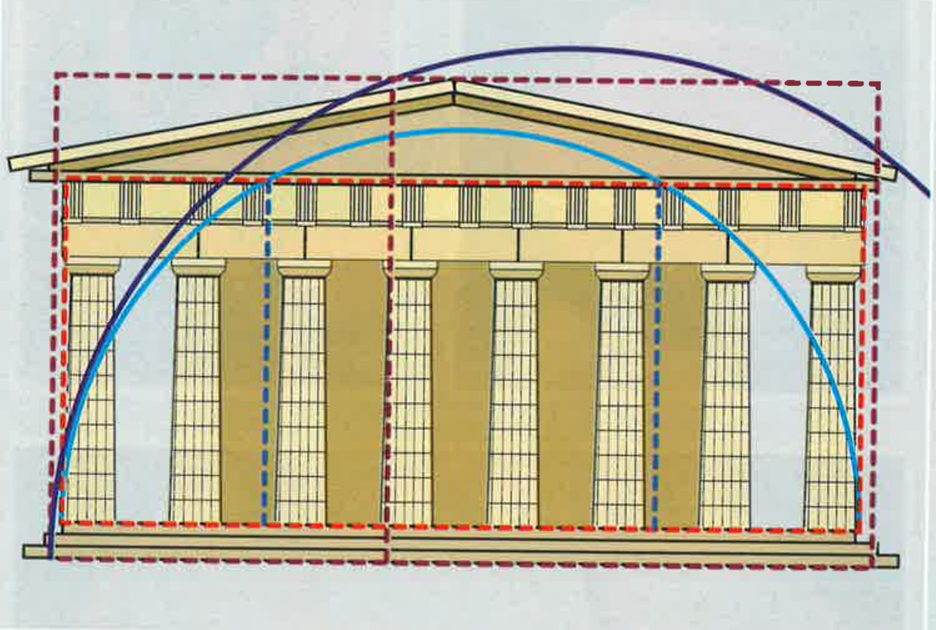


Figura 6
Il Partenone

Nel Rinascimento, col ricercare ovunque, nella pittura, nella scultura e soprattutto nell'architettura, un senso di armonia e di equilibrio, si riscoprirono le proporzioni del Partenone.

In particolare, Luca Pacioli pubblicò nel 1509 un grosso volume illustrato da Leonardo da Vinci, dal titolo *De divina proportione* (fig. 7): la «divina proporzione» è la lunghezza del segmento ottenuto prendendo i $\frac{62}{100}$ di un dato segmento OA, cioè approssimando il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio OA.

Molto più tardi, agli inizi del secolo scorso, quella parte di segmento venne chiamata *sezione aurea*; il nome è legato a un passo del matematico tedesco del Seicento Giovanni Keplero, che scriveva così: «La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora e l'altro è la divisione di un segmento in media ed estrema ragione. Possiamo paragonare il primo ad una misura d'oro e il secondo ad un prezioso gioiello».

Si dice dunque che *il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la* sezione aurea *del raggio.*

La sezione aurea continuò nei secoli a sollecitare ricerche da vari punti di

Figura 7
Un disegno di Leonardo per il libro di Luca Pacioli ***De divina proportione***

vista: nell'Ottocento iniziò, a opera di scienziati tedeschi, una serie di studi per scoprire se la sezione aurea fosse presente anche in natura; indagini e misure accurate hanno condotto a scoprire che la sezione aurea compare, per esempio:

- nella disposizione delle foglie e delle gemme di alcune piante;
- nella disposizione dei petali di alcuni fiori (fig. 8);
- in alcune stelle di mare (fig. 9).

Ma l'armonia di proporzioni legata alla sezione aurea mantiene ancora oggi inalterato il suo fascino, come testimoniano alcune opere di artisti contemporanei: il pittore spagnolo Salvador Dalí ha dipinto un suo famoso quadro (fig. 10) in un rettangolo con le proporzioni auree, inserendovi un grande dodecaedro che, con le sue facce pentagonali, richiama appunto la sezione aurea.

Figura 8 (a sinistra) **Una *camellia japonica*, i cui petali sono distribuiti secondo uno schema legato alla sezione aurea**

Figura 9 (a destra) **Una stella marina pentagonale**

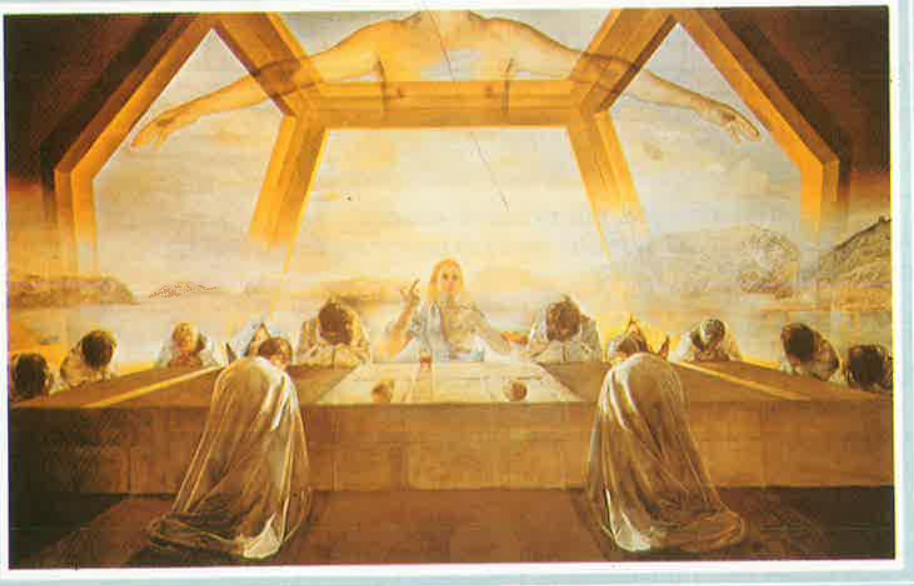


Figura 10 ***La cena* di Salvador Dalì (1955), quadro progettato e realizzato seguendo le proporzioni auree**

4

Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado

Equazioni di 2° grado che «mostrano» le soluzioni

Ecco un'equazione di 2° grado su cui riflettere:

$$(x-2)(x-3)=0 \qquad (1)$$

Per risolvere quest'equazione conviene applicare la legge di annullamento del prodotto: un prodotto vale 0, se vale 0 almeno uno dei due fattori; perciò un numero che rende 0 uno dei due fattori rende 0 tutto il prodotto e, quindi, è soluzione dell'equazione. Dalla (1) si ricava dunque:

$$x-2=0 \qquad \text{oppure} \qquad x-3=0$$

Ci si riduce così a risolvere due equazioni di 1° grado, trovando che le soluzioni dell'equazione (1) sono:

$$x_1=2 \qquad x_2=3$$

E così per risolvere l'equazione:

$$(x+5)(x-2)=0 \qquad (2)$$

basta risolvere le due equazioni di 1° grado:

$$x+5=0 \qquad \text{oppure} \qquad x-2=0$$

Si trova:

$$x_1=-5 \qquad x_2=2$$

Dunque, equazioni come la (1) o la (2) mostrano direttamente le soluzioni, perciò non è certo il caso di eseguire il prodotto dei due binomi per poter poi applicare la formula risolutiva.

Relazioni fra soluzioni e coefficienti

È interessante eseguire il prodotto dei due binomi dopo aver determinato le soluzioni; ecco che cosa si ottiene.

- Per l'equazione (1):

$$x^2-\mathbf{5}x+\mathbf{6}=0$$

con le soluzioni:

$$x_1=2 \qquad x_2=3$$

che danno:

$$x_1+x_2=2+3=\mathbf{5} \qquad x_1\cdot x_2=2\cdot 3=\mathbf{6}$$

- Per l'equazione (2):

$$x^2+\mathbf{3}x-\mathbf{10}=0$$

con le soluzioni:

$$x_1=-5 \qquad x_2=2$$

che danno:

$$x_1+x_2=-5+2=\mathbf{-3} \qquad x_1\cdot x_2=(-5)\cdot 2=\mathbf{-10}$$

Sembra dunque che ci siano delle relazioni che collegano le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado, relazioni che conviene studiare in generale, cioè a partire dall'equazione:

$$ax^2+bx+c=0$$

che ha le soluzioni date da:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

con:

$$\Delta=b^2-4ac$$

Ecco come si può procedere.

1. *Si addizionano le due soluzioni.*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-b-b-\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

Risulta in definitiva:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. *Si moltiplicano le due soluzioni.*

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{2a \cdot 2a}$$

Si calcola immediatamente il risultato del denominatore:

$$2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$$

Per sviluppare il numeratore conviene applicare il prodotto notevole presentato nel primo volume, p. 267, e cioè:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

considerando

$-b$ al posto di a e $\sqrt{\Delta}$ al posto di b

Si ottiene:

$$(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta}) = (-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2 = b^2 - \Delta$$

e, dato che risulta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si trova poi:

$$b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = b^2 - b^2 + 4ac = 4ac$$

Si ha dunque:

$$\frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a \cdot 2a} = \frac{4ac}{4a^2}$$

e quindi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si conclude dunque che *in un'equazione di 2° grado del tipo*:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le soluzioni x_1 *e* x_2 *sono legate ai coefficienti* a, b, c *dalle relazioni:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (3)$$

Applicazioni delle relazioni fra soluzioni e coefficienti

Le relazioni (3) diventano particolarmente espressive nel caso in cui valga 1 il coefficiente a dell'equazione di 2° grado; si ha infatti:

$$a = 1 \qquad x_1 + x_2 = -b \qquad x_1 \cdot x_2 = c \qquad (4)$$

Queste relazioni hanno varie applicazioni, fra le quali le due seguenti.

A. *Risolvere un'equazione «a vista».*
Ecco un esempio. Per l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

che ha:

$$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 2$$

deve essere:

$$x_1 + x_2 = 3 \qquad x_1 \cdot x_2 = 2$$

e quindi le soluzioni saranno:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$$

B. *Scrivere un'equazione che abbia due soluzioni assegnate.*
Ecco un esempio. Scrivere un'equazione di 2° grado con il coefficiente a che valga 1 e che abbia le seguenti soluzioni:

$$x_1 = 2\sqrt{2} \qquad x_2 = -\sqrt{2}$$

L'equazione si può scrivere subito nella forma:

$$(x - 2\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

quindi si esegue il prodotto dei due binomi valendosi delle regole del calcolo letterale.

Si possono però abbreviare i calcoli con il seguente procedimento.

- Si calcola la somma e il prodotto delle soluzioni, ottenendo:

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 = -4$$

- Basandosi sulle relazioni (4) si scrivono i coefficienti dell'equazione; si ha:

$$a = 1 \qquad b = -\sqrt{2} \qquad c = -4$$

Si ottiene così l'equazione richiesta, che è:

$$x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 = 0$$

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere le due relazioni che legano soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado, spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.

Comprensione

① Spiegare come si ottengono le due relazioni che legano i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di 2° grado.

② Come si modificano le relazioni fra soluzioni e coefficienti di un'equazione di 2° grado, nel caso in cui le due soluzioni siano coincidenti?

Applicazioni

① Indicare le soluzioni delle seguenti equazioni, senza usare la formula risolutiva.

$$x^2 + x - 6 = 0 \qquad x^2 - x - 6 = 0$$

② Scrivere rapidamente un'equazione che ha le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

Collegamento con i capitoli precedenti e con il primo volume

① Spiegare perché risulta:

$$(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$$

(*Vedere il capitolo 6, pp. 258-261*)

② Elencare le proprietà delle operazioni applicate per scrivere che risulta:

$$2a \cdot 2a = 4a^2 \qquad (5)$$

(*Vedere il primo volume, pp. 244-246*)

③ Elencare le proprietà delle operazioni applicate per scrivere che risulta:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \qquad (6)$$

(*Vedere il primo volume, p. 267*)

④ Le due uguaglianze (5) e (6) sono identità o equazioni?
(*Vedere il primo volume, p. 383*)

5

La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado

L'equazione di 2° grado e il corrispondente trinomio

Nei precedenti paragrafi si sono trovati, fra l'altro, i seguenti risultati:

- un'equazione di 2° grado si può sempre scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0 \quad (1)$$

- l'equazione ha le soluzioni x_1 e x_2 legate ai coefficienti a, b, c dalle due relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Il primo membro della (1) e cioè il polinomio:

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{con } a \neq 0$$

prende il nome di *trinomio di 2° grado*, per ricordare che:

- è un polinomio somma di *tre* monomi;
- il monomio di grado massimo è di *2° grado*.

Le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione (1) sono dette *radici del trinomio*.

Come si scompone in fattori un trinomio con due radici reali e distinte

Le relazioni (2) che legano le radici di un trinomio ai suoi coefficienti portano a scrivere il trinomio come prodotto di due binomi di 1° grado, scrittura ricca di applicazioni nel campo del calcolo letterale.
Ecco come si procede, a partire dal trinomio:

$$ax^2 + bx + c$$

1. Si scrivono i coefficienti del trinomio nella forma seguente:

$$ax^2 + a\frac{b}{a}x + a\frac{c}{a}$$

2. Si raccoglie il fattore comune a e si ottiene:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

3. Si applicano le relazioni (2), scrivendo:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

4. Si sviluppano i prodotti indicati dentro le parentesi quadre e si ha:

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2]$$

5. Si raccoglie il fattore comune x fra i primi due termini e il fattore comune $-x_2$ fra gli ultimi due termini, ottenendo:

$$a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$$

6. Si raccoglie il fattore comune $(x - x_1)$, scrivendo:

$$a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

In conclusione, risulta:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \qquad (3)$$

Così un trinomio di 2° grado viene scritto come prodotto dei due binomi di 1° grado $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$, ossia *il trinomio viene scomposto in fattori di 1° grado*.

Un esempio di scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con due radici reali e distinte

Ecco un esempio di applicazione della scomposizione in fattori ora ottenuta.
L'equazione:

$$15x^2 - 7x - 2 = 0$$

ha le soluzioni date da:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 15(-2)}}{2\cdot 15}=\frac{7\pm 13}{30}$$

Le soluzioni sono dunque:

$$x_1=\frac{7-13}{30}=-\frac{6}{30}=-\frac{1}{5}$$

$$x_2=\frac{7+13}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

Si può allora applicare la scomposizione indicata dalla formula (3), dove si ha:

$a=15 \qquad b=-7 \qquad c=-2$

$x_1=-\frac{1}{5} \qquad\qquad x_2=\frac{2}{3}$

Si ha:

$$15x^2-7x-2=15\left[x-\left(-\frac{1}{5}\right)\right]\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

ossia:

$$15x^2-7x-2=15\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

Scomporre in fattori un trinomio con due radici reali e coincidenti

Una particolare situazione si ha quando le radici del trinomio sono coincidenti e cioè si ha:

$x_1=x_2$

In tal caso la formula (3) diventa:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)$

ossia:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2} \qquad (4)$$

Si trova dunque che *un trinomio di 2° grado con le due radici reali e coincidenti si può sempre scrivere come quadrato di un binomio, moltiplicato per il coefficiente* a.

Un esempio di scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con due radici reali e coincidenti

Ecco un esempio di applicazione dell'ultimo risultato ottenuto.
L'equazione:

$25x^2-20x+4=0$

ha le soluzioni date da:

$$x=\frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot 25\cdot 4}}{2\cdot 25}=\frac{20\pm\sqrt{0}}{50}$$

Quindi le soluzioni coincidenti sono:

$$x_1=x_2=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$$

Si può allora applicare la scomposizione indicata dalla formula (4), considerando che risulta:

$a=25 \qquad b=-20 \qquad c=4 \qquad x_1=\frac{2}{5}$

Si ottiene:

$$25x^2-20x+4=25\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini:
- trinomio di 2° grado;
- radici di un trinomio di 2° grado.

② Dire come si scompone in fattori di 1° grado un trinomio di 2° grado nei due casi seguenti:
- il trinomio ha le radici reali e distinte;
- il trinomio ha le radici coincidenti.

Comprensione

① Spiegare come si ricava la scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado nei due casi seguenti:
- il trinomio ha le radici reali e distinte;
- il trinomio ha le radici coincidenti.

Applicazioni

① Scomporre in fattori i seguenti trinomi di 2° grado:

$x^2+4x+3 \qquad 6x^2-13x+6$

$x^2-6x+9 \qquad 4x^2+20x+25$

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Perché in un'equazione di 2° grado deve essere $a\neq 0$?
(*Vedere il paragrafo 2*)

Collegamento con il primo volume

① Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono vere purché sia $a\neq 0$.

$a\frac{b}{a}=b \qquad a\frac{c}{a}=c$

(*Vedere il capitolo 9, p. 383*)

② Su quale proprietà delle operazioni ci si basa per raccogliere un fattore comune?
(*Vedere il capitolo 9, p. 264*)

Il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado

Due casi particolari

Determinare il segno delle soluzioni reali di un'equazione di 2° grado senza risolverla può essere utile in vari problemi: per esempio, se l'incognita rappresenta una grandezza positiva, scoprire che l'equazione ha solo soluzioni negative porta a dichiarare subito il problema impossibile, evitando di eseguire laboriosi calcoli.

Questa previsione del segno delle soluzioni può essere ottenuta a partire dal grafico della parabola corrispondente; ecco due esempi.

1. In fig. 1 è rappresentato il grafico di una parabola del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si tratta della parabola:

$$y = 3x^2 - 9x + 4$$

Il grafico presenta le seguenti caratteristiche:

- l'asse di simmetria s ha equazione:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{in questo caso} \quad x = -\frac{-9}{2 \cdot 3}$$

ossia:

$$x = \frac{3}{2}$$

- il punto P di intersezione con l'asse delle y ha l'ascissa $x = 0$ e perciò ha le coordinate:

$$P(0; 4)$$

- la parabola incontra l'asse delle x in due punti d'ascissa positiva.

Quest'ultima caratteristica permette di concludere che *l'equazione*

$$3x^2 - 9x + 4 = 0$$

ha le due soluzioni reali e distinte che sono certamente positive.

2. A partire dalla parabola:

$$y = 3x^2 + 9x + 4$$

si può ripetere un procedimento analogo; si trova che (fig. 2):

- l'asse di simmetria s è:

$$x = -\frac{3}{2}$$

- l'intersezione con l'asse delle y è P(0; 4);
- la curva taglia l'asse delle x in due punti d'ascissa negativa.

Si conclude che *l'equazione*

$$3x^2 + 9x + 4 = 0$$

ha le due soluzioni reali entrambe negative.

Dal grafico della parabola al segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado

Generalizzando le osservazioni precedenti, si riesce a stabilire il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado senza risolverla. Ecco come ragionare per arrivare a una regola generale.

Il grafico di una parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

viene caratterizzato da due elementi indicati nei casi particolari:

- l'asse di simmetria s che ha l'equazione:

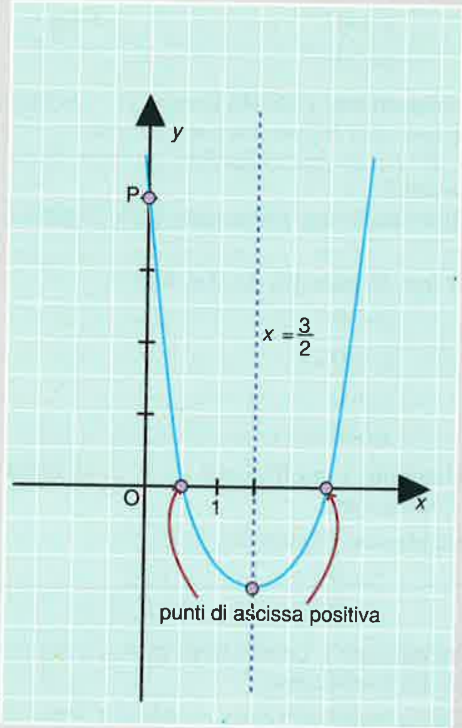
$$x = -\frac{b}{2a}$$

- il punto di intersezione con l'asse delle y che è P(0; c).

Si distinguono due casi:

I. la parabola volge la concavità verso l'alto e perciò risulta $a > 0$;

II. la parabola volge la concavità verso il basso e perciò risulta $a < 0$.



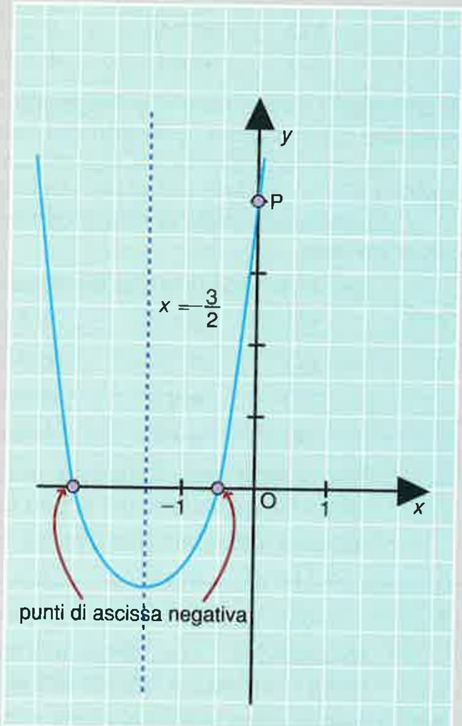


Figura 1 (a sinistra)
Una parabola che incontra l'asse delle *x* in due punti d'ascissa positiva

Figura 2 (a destra)
Una parabola che incontra l'asse delle *x* in due punti d'ascissa negativa

I. $a > 0$
Riprendendo la fig. 1, si nota che:

- i punti di s hanno l'ascissa positiva, cioè risulta:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \quad \text{e quindi } b < 0$$

- il punto P(0; c) ha ordinata positiva, cioè risulta:

$$c > 0$$

- le due soluzioni sono positive, cioè risulta:

$$x_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad x_2 > 0$$

Si conclude dunque che la situazione di fig. 3*a* è caratterizzata da:

$$x_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad x_2 > 0$$

con

$$a > 0 \qquad b < 0 \qquad c > 0$$

Analizzando nello stesso modo le altre situazioni che si possono presentare, si ottengono i risultati esposti in fig. 3.

II. $a < 0$
Analoghe considerazioni si possono ripetere nei casi in cui la parabola rivolge la concavità verso il basso, ottenendo i risultati esposti in fig. 4.

La regola dei segni o regola di Cartesio

Le figure 3 e 4 sembrano mostrare tanti risultati diversi difficilmente memorizzabili; si può invece trarre una semplice regola generale osservando che si trovano le *due soluzioni positive* nei seguenti casi (figure 3*a* e 4*a*):

(1)	$a > 0$	$b < 0$	$c > 0$
(2)	$a < 0$	$b > 0$	$c < 0$

In ambedue i casi si nota che, leggendo ordinatamente i coefficienti a, b, c, si trovano due cambiamenti, o meglio *due variazioni*, nel segno dei coefficienti.

Si conclude che *in un'equazione di 2° grado due soluzioni positive sono legate a due variazioni nel segno dei coefficienti.*

Esaminando nello stesso modo le altre situazioni presentate nelle figure 3 e 4, si trovano:

- *una soluzione positiva* nei seguenti casi (figure 3*b*, 3*c*, 4*b*, 4*c*):

(1)	$a > 0$	$b < 0$	$c < 0$
(2)	$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$
(3)	$a < 0$	$b > 0$	$c > 0$
(4)	$a < 0$	$b < 0$	$c > 0$

Nei quattro casi, leggendo ordinatamente i coefficienti a, b, c, si trova *una sola variazione* nel segno dei coefficienti.

- *nessuna soluzione positiva* nei seguenti casi (figure 3*d*, 4*d*):

(1)	$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$
(2)	$a < 0$	$b < 0$	$c < 0$

In ambedue i casi, leggendo ordinatamente i coefficienti a, b, c, non si trova *nessuna variazione* nel segno dei coefficienti.

Queste osservazioni possono essere sintetizzate nella seguente *regola dei segni* o *regola di Cartesio: un'equazione di 2° grado ha tante soluzioni positive quante sono le variazioni di segno dei suoi coefficienti.*

La regola dei segni vale solo se le soluzioni sono reali

Un'osservazione importante: la regola dei segni appena trovata ha significato solo se l'equazione esaminata ha soluzioni reali; infatti tutto il procedimento perde senso se l'equazione non ha soluzioni reali e perciò la corrispondente parabola non interseca l'asse delle x.

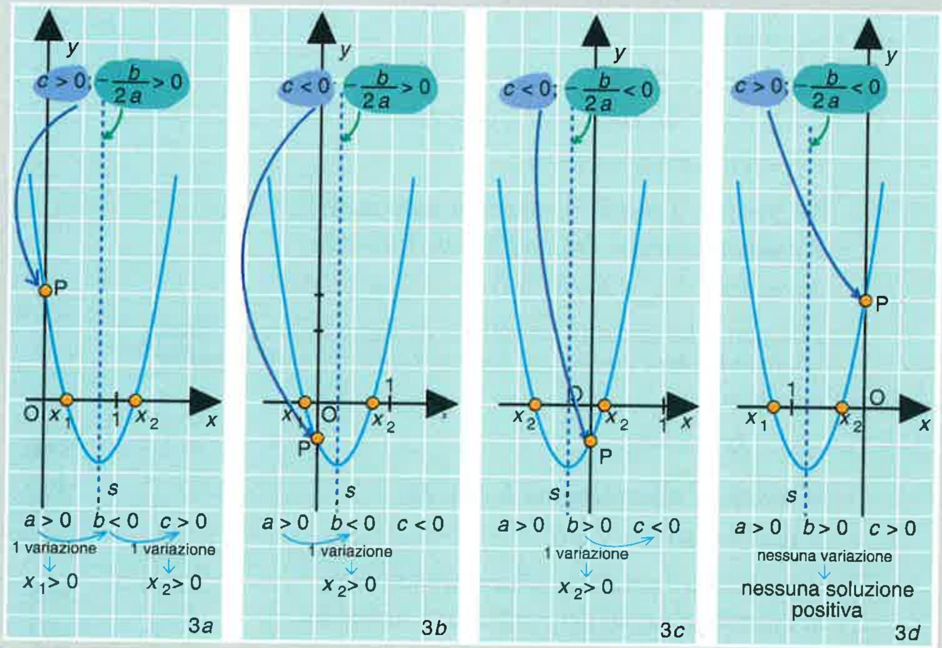


Figura 3
Il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado nel caso $a > 0$

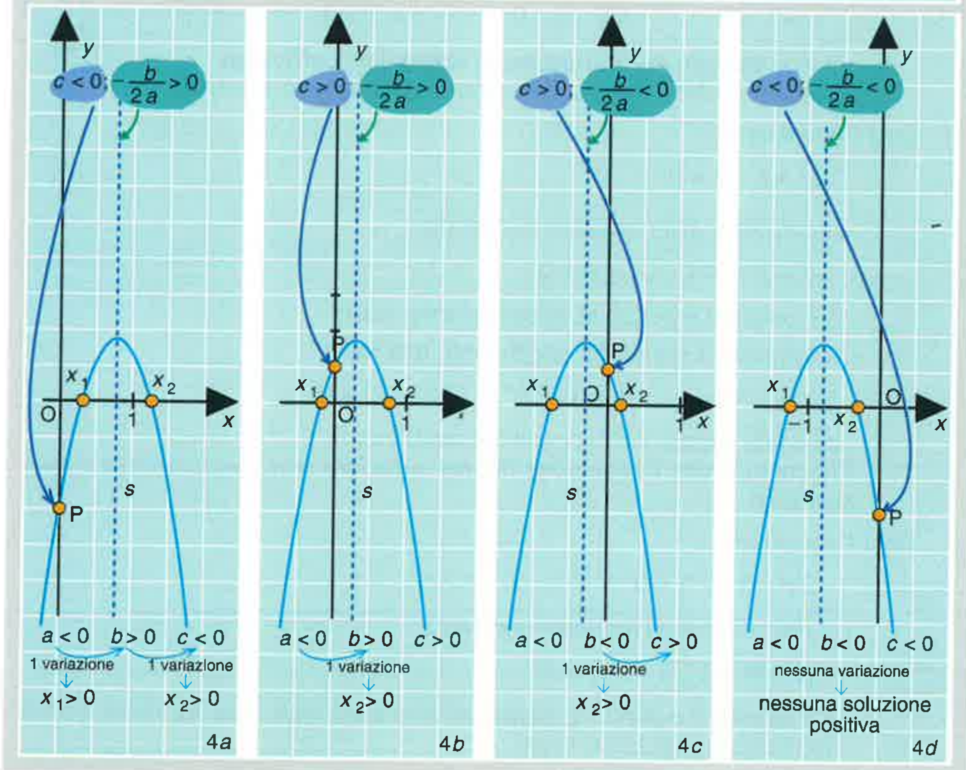


Figura 4
Il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado nel caso $a < 0$

Quindi, prima di applicare la regola dei segni, bisogna sempre controllare che l'equazione assegnata abbia soluzioni reali, studiando il segno del discriminante Δ, infatti *l'equazione ha soluzioni reali solo se risulta*:

$$\Delta \geq 0$$

Applicazioni della regola dei segni

Ecco qualche applicazione della regola dei segni.

1. Data l'equazione:

$$5x^2 + 11x + 2 = 0$$

- *si calcola il discriminante* Δ dato da:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 81 > 0$$

Δ è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- *si esamina il segno dei coefficienti*, trovando:

$$a = 5 > 0 \qquad b = 11 > 0 \qquad c = 2 > 0$$

cioè non si ha nessuna variazione di segno dei coefficienti.
Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali negative.*

2. Data l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

- *si calcola il discriminante* Δ dato da:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$$

Δ è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- *si esamina il segno dei coefficienti*, trovando:

$$a = 1 > 0 \qquad b = -3 < 0 \qquad c = 2 > 0$$

cioè si trovano due variazioni di segno dei coefficienti.
Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali positive.*

3. Data l'equazione:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

- *si calcola il discriminante* Δ dato da:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$$

Δ è positivo e perciò le soluzioni sono reali;

- *si esamina il segno dei coefficienti*, trovando:

$$a = 1 > 0 \qquad b = 1 > 0 \qquad c = -2 < 0$$

cioè una variazione di segno dei coefficienti.
Si conclude che *l'equazione ha due soluzioni reali, una positiva e una negativa.*

4. Data l'equazione:

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

- *si calcola il discriminante* Δ dato da:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$$

Δ è negativo e perciò le soluzioni non sono reali; non ha senso quindi applicare la regola dei segni.

6 Il segno di un trinomio di 2° grado

Dal grafico della parabola al segno del trinomio di 2° grado

Il grafico delle parabole del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

ha condotto alla scoperta di vari risultati algebrici, fra cui la formula risolutiva dell'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

Questa formula è stata ottenuta osservando che l'equazione (2) indica le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse delle x, punti che sono caratterizzati da una proprietà: hanno l'ordinata y=0.

Ma sono al massimo due i punti della parabola con l'ordinata che vale 0, mentre gli altri punti avranno l'ordinata y positiva o negativa (fig. 1). Proprio esaminando i punti di ordinata positiva o negativa, si arriva a stabilire *il segno del trinomio di 2° grado* scritto al secondo membro della (1); si tratta di determinare

- i valori di x per cui risulta:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

- i valori di x per cui risulta:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Per questo conviene distinguere i tre casi seguenti:

I. la parabola non incontra l'asse delle x, cioè il trinomio non ha radici reali;

II. la parabola tocca l'asse delle x in un punto, cioè il trinomio ha due radici reali e coincidenti;

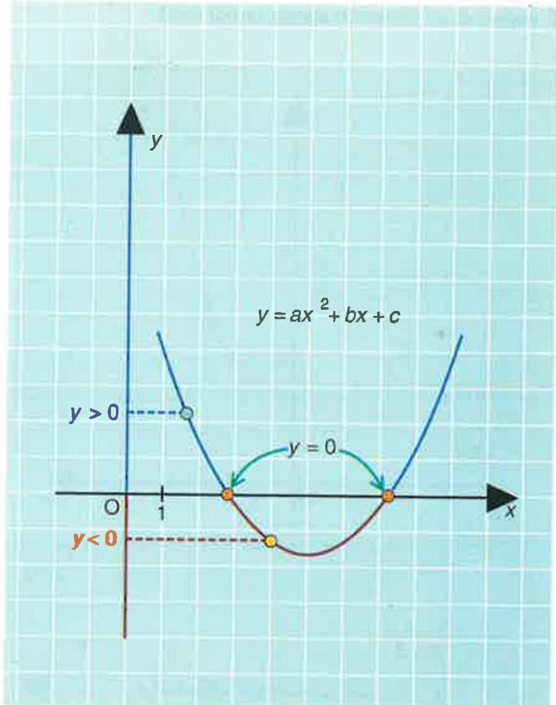
III. la parabola taglia l'asse delle x in due punti, cioè il trinomio ha due radici reali e distinte.

Per ognuno dei tre casi si distinguono poi due situazioni:

A. la parabola rivolge la concavità verso l'alto, cioè il trinomio presenta il coefficiente *a positivo*;

B. la parabola rivolge la concavità verso il basso, cioè il trinomio presenta il coefficiente *a negativo*.

Figura 1
Il segno di un trinomio di 2° grado



I. Il segno di un trinomio senza radici reali

A. *Coefficiente* a > 0

Cominciamo ad esaminare il trinomio

$$y = x^2 - 2x + 5 \qquad (3)$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

- il coefficiente $a = 1 > 0$;
- nessuna radice reale, dato che, nella corrispondente equazione, risulta $\Delta = -16 < 0$.

Rappresentando la funzione (3) sul piano cartesiano (fig. 2*a*) si ottiene una curva con le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva non interseca l'asse delle x.

La parabola si trova dunque tutta al disopra dell'asse delle x e perciò tutti i suoi punti hanno l'ordinata y positiva.
Si conclude che, per il trinomio (3) senza soluzioni reali, risulta:

$y > 0$ per qualunque valore di x

ossia:

$x^2 - 2x + 5 > 0$ per qualunque valore di x

B. *Coefficiente* a < 0

Considerazioni analoghe si possono ripetere a partire dal trinomio

$$y = -x^2 + 2x - 5 \qquad (4)$$

che è rappresentato in fig. 2*b* e presenta le seguenti caratteristiche:

- il coefficiente $a = -1 < 0$;
- nessuna radice reale, dato che, nella corrispondente equazione, risulta $\Delta = -16 < 0$.

Ora la parabola si trova tutta al disotto dell'asse delle x e perciò tutti i suoi punti hanno l'ordinata y negativa.

Dunque, per il trinomio (4) senza radici reali, risulta:

$y < 0$ per qualunque valore di x

ossia:

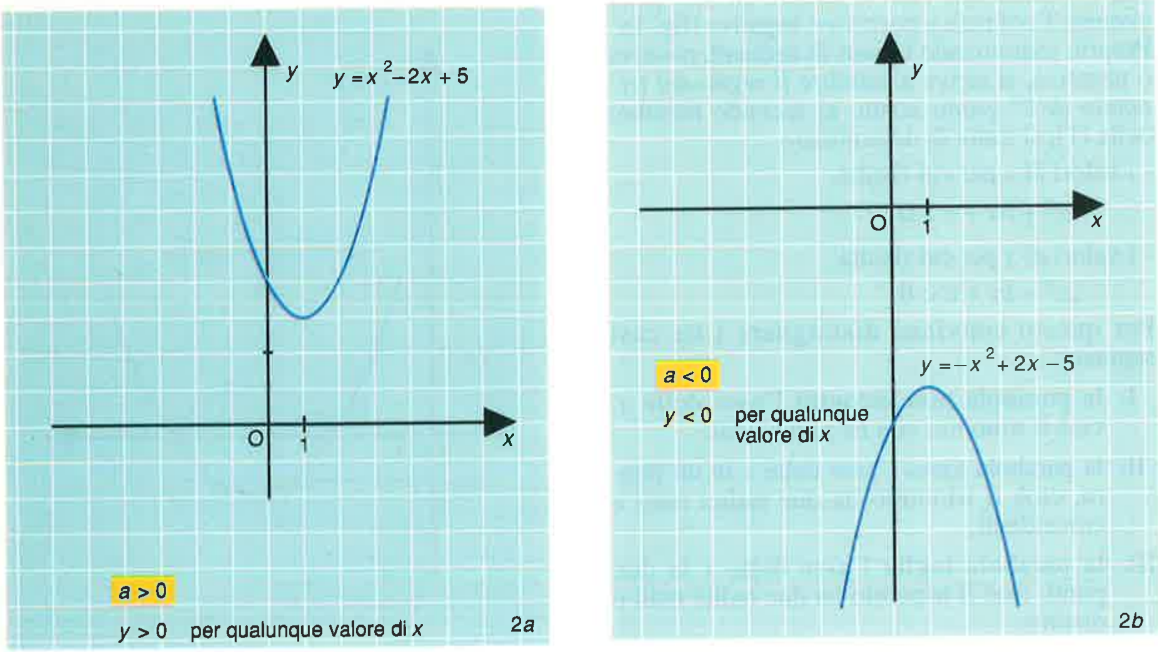
$-x^2 + 2x - 5 < 0$ per qualunque valore di x

Il procedimento ora esposto può sempre essere ripetuto per esaminare il segno di un trinomio di 2° grado senza soluzioni reali. Si può tuttavia evitare di tracciare il grafico, osservando che il segno del trinomio dipende solo dal segno del primo coefficiente a:

- dato *a positivo, il trinomio* è sempre *positivo;*
- dato *a negativo, il trinomio* è sempre *negativo.*

Si conclude che *un trinomio di 2° grado senza radici reali mantiene il segno del coefficiente* a *per qualunque valore reale di x.*

Figura 2
Il segno di un trinomio senza radici reali



II. Segno di un trinomio con le radici reali e coincidenti

A. *Coefficiente* a > 0

Esaminiamo ora il trinomio

$$y = x^2 - 6x + 9 \qquad (5)$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

- coefficiente $a = 1 > 0$;

- due radici coincidenti $x_1 = x_2 = 3$.

Rappresentando la funzione (5) sul piano cartesiano si ottiene la curva di fig. 3*a*, con le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;

- la curva è tangente all'asse delle x nel vertice V(3; 0).

Dal grafico risulta che i punti della parabola hanno tutti l'ordinata y positiva, con un'unica eccezione: il punto V(3; 0), in cui la curva tocca l'asse delle x.

Dunque, per il trinomio (5) con le due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = 3$, risulta:

$y > 0$ per qualunque valore di $x \neq 3$

ossia:

$x^2 - 6x + 9 > 0$ per qualunque valore di $x \neq 3$

B. *Coefficiente* a <0

È facile ora esaminare il trinomio

$$y = -x^2 + 6x - 9 \qquad (6)$$

che è rappresentato in fig. 3*b* e presenta le seguenti caratteristiche:

- coefficiente $a = -1 < 0$;

- due radici coincidenti $x_1 = x_2 = 3$.

In questo caso tutti i punti della parabola hanno l'ordinata y negativa, escluso il punto V(3; 0), in cui la curva tocca l'asse delle x.

Dunque, per il trinomio (6) con le due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = 3$, risulta:

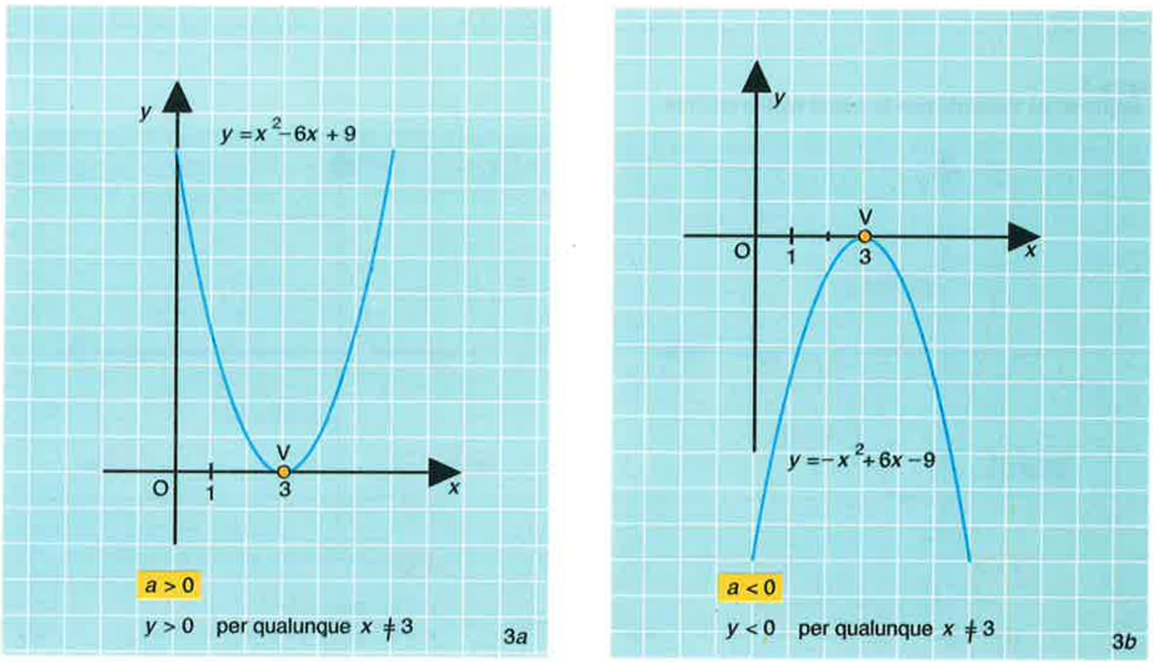
$y < 0$ per qualunque valore di $x \neq 3$

ossia:

$x^2 - 6x + 9 < 0$ per qualunque valore di $x \neq 3$

Le considerazioni svolte hanno carattere generale e si possono riassumere nella seguente regola: *un trinomio di 2° grado con due radici reali e coincidenti* $x_1 = x_2$ *mantiene il segno del coefficiente* a *per qualunque valore reale di* $x \neq x_1$.

Figura 3
Il segno di un trinomio con due radici reali e coincidenti



III. Segno di un trinomio con le radici reali e distinte

A. *Coefficiente* a > 0

Presenta invece una maggior varietà di situazioni il trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (7)$$

che ha:

- il coefficiente a=1>0;
- le due radici reali e distinte $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

La parabola corrispondente è rappresentata in fig. 4*a* e presenta le seguenti caratteristiche:

- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva taglia l'asse delle x nei punti A(−1; 0) e B(3; 0).

Il grafico mostra dunque una parabola che si trova in parte sopra e in parte sotto l'asse delle x.
Osserviamo prima di tutto l'arco al disotto dell'asse delle x (in rosso in fig. 4*a*); quest'arco è formato da punti che presentano le seguenti caratteristiche:

- hanno *tutti l'ordinata* y *negativa*, dato che si trovano al disotto dell'asse delle x;
- hanno le ascisse che «riempiono» sull'asse delle x il segmento che è delimitato dalle due radici e può essere descritto dalla formula:

$$-1 < x < 3$$

Si possono sintetizzare queste osservazioni scrivendo che risulta:

$$y < 0 \qquad \text{per} \qquad -1 < x < 3$$

Occupiamoci ora dei punti della parabola che si trovano al disopra dell'asse delle x e perciò hanno *l'ordinata* y *positiva*.
Questi punti si trovano su due archi di parabola (in blu in fig. 4*a*) e perciò le loro ascisse riempiono sull'asse delle x due semirette ben separate:

- una semiretta è delimitata *a destra* dalla radice più piccola (cioè −1) e può essere descritta dalla formula:

$$x < -1$$

- l'altra semiretta è delimitata *a sinistra* dalla radice più grande (cioè 3) e può essere descritta dalla formula:

$$x > 3$$

Queste osservazioni si riassumono scrivendo che risulta:

$$y > 0 \qquad \text{per } x < -1 \qquad \text{oppure } x > 3$$

Dunque, per il trinomio (7) con le due radici reali e distinte $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, risulta:

$$y > 0 \qquad \text{per } x < -1 \qquad \text{oppure } x > 3$$
$$y < 0 \qquad \text{per} \qquad -1 < x < 3$$

ossia:

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \text{per } x < -1 \quad \text{oppure } x > 3$$
$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \text{per } -1 < x < 3$$

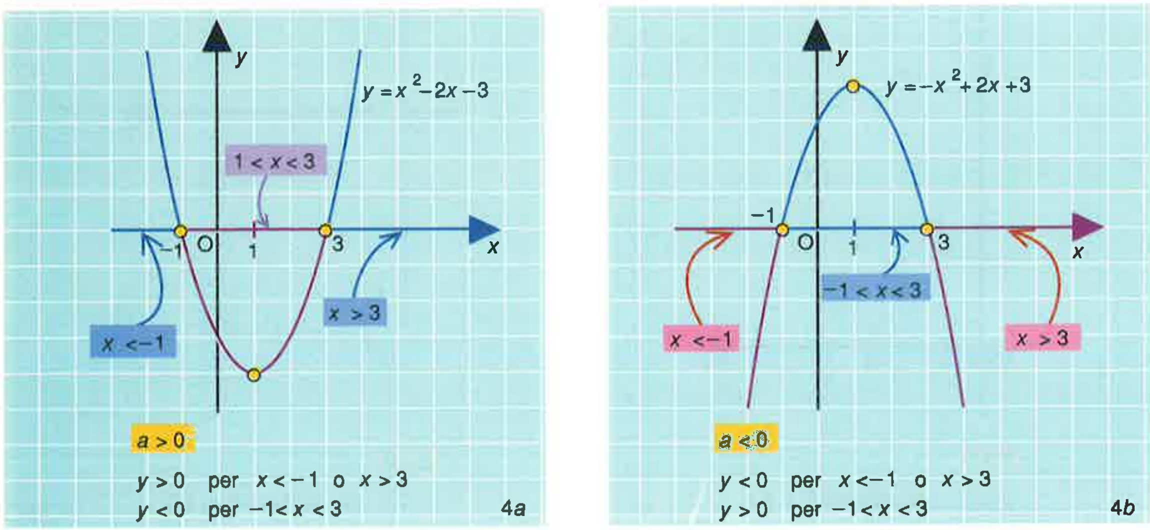
B. *Coefficiente a < 0*

Si possono ora ripetere considerazioni analoghe, pur con qualche indispensabile modifica, per esaminare il trinomio:

$$y = -x^2 + 2x + 3 \qquad (8)$$

che è rappresentato in fig. 4*b* e presenta le seguenti caratteristiche:

Figura 4
Il segno di un trinomio con le radici reali e distinte



- il coefficiente $a = -1 < 0$;
- le due radici reali e distinte $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

Anche questa parabola taglia l'asse delle x e perciò si trova in parte sopra e in parte sotto l'asse delle x; ora risulta però:

$y > 0$ per $-1 < x < 3$

$y < 0$ per $x < -1$ oppure $x > 3$

ossia:

$-x^2 + 2x + 3 > 0$ per $-1 < x < 3$

$-x^2 + 2x + 3 < 0$ per $x < -1$ oppure $x > 3$

Per riassumere questo terzo caso con una regola più facile da ricordare, si chiama *intervallo delimitato dalle radici* o *intervallo delle radici* il segmento formato dai numeri x per cui risulta:

$-1 < x < 3$

Così si può dare la seguente regola generale: *un trinomio di 2° grado con due radici reali e distinte ha:*
- *il segno opposto a quello del coefficiente* a *per qualunque valore reale di* x *contenuto nell'intervallo delle radici;*
- *lo stesso segno del coefficiente* a *per qualunque valore reale di* x *esterno all'intervallo delle radici.*

Verifiche

Conoscenze

① Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado senza radici reali.

② Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado con le radici reali e coincidenti.

③ Descrivere il segno di un trinomio di 2° grado con le radici reali e distinte.

Comprensione

① Spiegare il significato della frase «stabilire il segno di un trinomio di 2° grado».

② Spiegare perché il grafico della parabola permette di determinare il segno di un trinomio di 2° grado, portando degli esempi diversi da quelli presentati nel testo.

③ Spiegare perché tutte le affermazioni seguenti sono errate e correggere gli errori.

a. Il trinomio $y = x^2 + x + 1$ non ha soluzioni reali, perciò non è possibile studiarne il segno.

b. Il trinomio $y = x^2 - 2x + 1$ ha le soluzioni $x_1 = x_2 = 1$, perciò risulta:

$y > 0$ per $x > 1$

c. Il trinomio $y = x^2 - 3x$ ha le soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$, perciò risulta:

$y > 0$ per $3 < x < 0$

Applicazioni

① Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:

$y = 2x^2 - x + 1$ $\quad y = -2x^2 + x - 1$

② Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:

$y = 4x^2 - 4x + 1$ $\quad y = -4x^2 + 4x - 1$

③ Studiare il segno dei seguenti trinomi di 2° grado:

$y = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad y = -2x^2 + 3x - 1$

Collegamenti con i paragrafi 3 e 5 di questo capitolo

① Spiegare perché non hanno radici reali i trinomi

$y = -x^2 + 2x - 5$ $\quad y = x^2 - 2x + 5$

② Spiegare perché hanno le radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = 3$ i trinomi

$y = x^2 - 6x + 9$ $\quad y = -x^2 + 6x - 9$

③ Spiegare perché hanno le radici reali e distinte $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ i trinomi

$y = x^2 - 2x - 3$ $\quad y = -x^2 + 2x + 3$

Collegamenti col primo volume

① Spiegare come si stabilisce l'ordinata y di un punto del piano cartesiano.
(*Vedere pp. 330-332*)

② Spiegare perché la formula

$x < -1$

descrive sull'asse delle x la semiretta che è delimitata *a destra* dal numero -1.
(*Vedere pp. 88-90*)

③ Spiegare perché la formula

$x > 3$

descrive sull'asse delle x la semiretta che è delimitata *a sinistra* dal numero 3.
(*Vedere pp. 88-90*)

④ Spiegare perché la formula

$-1 < x < 3$

descrive sull'asse delle x il segmento delimitato *a sinistra* dal numero -1 e *a destra* dal numero 3.
(*Vedere p. 90*)

⑤ Spiegare perché non si può trovare il segmento descritto dalle seguenti disuguaglianze:

$3 < x < -1$

(*Vedere p. 90*)

7 Le disequazioni di 2° grado

Disequazioni di 2° grado

Nel paragrafo precedente lo studio del segno di trinomi di 2° grado ha condotto a scrivere formule come le seguenti:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \qquad (1)$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \qquad (2)$$

$$-x^2 + 2x - 5 > 0 \qquad (3)$$

Le precedenti formule sono tutte *disequazioni di 2° grado*, cioè formule del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

dove a, b, c indicano tre qualunque numeri reali, scelti con l'unico vincolo che sia $a \neq 0$.

Le soluzioni di una disequazione di 2° grado

Per le disequazioni di 2° grado si possono ripetere alcune delle considerazioni svolte per le disequazioni di 1° grado (vedi il primo volume, pp. 426-428); in particolare si ha che:

- *le disequazioni sono delle formule che diventano proposizioni quando a* x *si sostituisce un numero reale;* per esempio dalla (1) si ottengono le proposizioni seguenti:
- sostituendo 0 a x:

$$0^2 - 2 \cdot 0 - 3 < 0 \qquad \text{cioè} \qquad -3 < 0 \qquad \text{vera}$$

- sostituendo 4 a x:

$$4^2 - 2 \cdot 4 - 3 < 0 \qquad \text{cioè} \qquad 5 < 0 \qquad \text{falsa}$$

- *le soluzioni di una disequazione di 2° grado sono i numeri che, sostituiti a* x, *trasformano la disequazione in una proposizione vera;* per esempio, 0 è una soluzione della disequazione (1), mentre 4 non lo è.

Come si risolve una disequazione di 2° grado

Per determinare rapidamente tutte le soluzioni di una disequazione di 2° grado scritta in una delle forme seguenti:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

conviene procedere così:

- si studia il segno del corrispondente trinomio $y = ax^2 + bx + c$;
- dai risultati ottenuti si traggono i valori di x che trasformano la disequazione in una proposizione vera.

Ecco qualche esempio.

1. Risolvere la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \qquad (1)$$

- Si studia il segno del trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

ha le radici reali $\quad x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

ha il coefficiente $\quad a = 1 > 0$

Il trinomio ha dunque (fig. 1):

- segno negativo quando x varia nell'intervallo delle radici;
- segno positivo quando x varia all'esterno dell'intervallo delle radici.

- La disequazione (1) richiede di determinare i valori di x che rendono il trinomio negativo, perciò tutte le soluzioni richieste sono i numeri reali che formano l'intervallo delle radici.

Si può concludere scrivendo:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \qquad \text{per} \qquad -1 < x < 3$$

2. Risolvere la disequazione:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \qquad (2)$$

- Si studia il segno del trinomio:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

ha le radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = 3$
ha il coefficiente $a = 1 > 0$

Il trinomio ha dunque segno positivo per qualunque valore reale di x diverso da 3 (fig. 2).

- La disequazione (2) richiede di determinare i valori di x che rendono il trinomio positivo, perciò le soluzioni della disequazione (2) sono tutti i numeri reali escluso 3.

Si può dunque concludere scrivendo:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \qquad \text{per} \qquad \text{qualunque } x \neq 3$$

3. Risolvere la disequazione:

$$-x^2 + 2x - 5 > 0 \qquad (3)$$

- Si studia il segno del trinomio

$$y = -x^2 + 2x - 5$$

che presenta le seguenti caratteristiche:

non ha soluzioni reali
ha il coefficiente $a = -1 < 0$

Il trinomio ha dunque segno negativo per qualunque valore reale di x (vedi il paragrafo 6, p. 330).

- La disequazione (3) porta a cercare i valori di x che rendono il trinomio positivo, perciò *la disequazione non ha soluzioni.*

Uno schema grafico per descrivere il segno di un trinomio di 2° grado

Si osserva dunque che il procedimento per risolvere le disequazioni di 2° grado è tutto basato sui risultati ottenuti studiando il segno di un trinomio di 2° grado.

Figura 1
Il segno del trinomio $y = x^2 - 2x - 3$

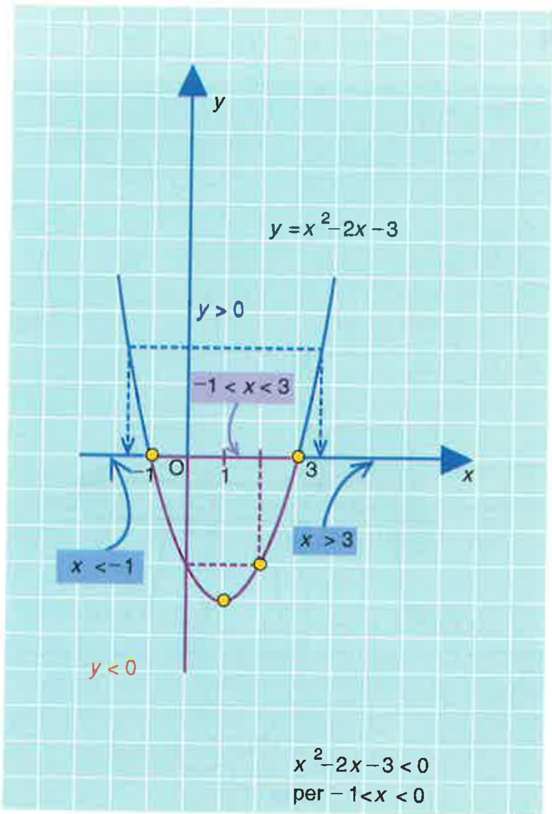
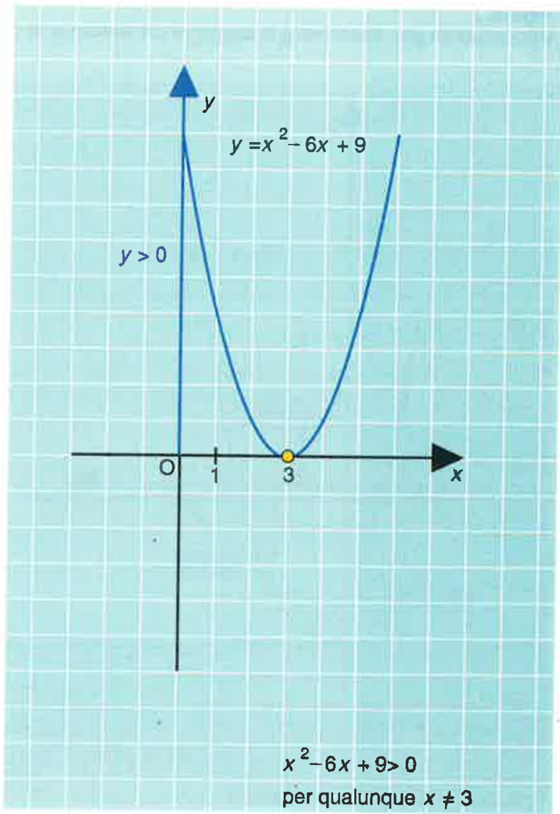


Figura 2
Il segno del trinomio $y = x^2 - 6x + 9$



Perciò può essere utile visualizzare questi risultati con uno schema grafico, che vediamo a partire da un esempio.
Dopo aver studiato il segno del trinomio

$$y = x^2 - 2x - 3$$

si procede nel modo seguente (fig. 3*b*):

- si disegna il solo asse delle x;
- si indicano sull'asse le radici del trinomio e cioè -1 e 3;
- si disegna un tratto continuo sotto i numeri che, sostituiti a x, rendono $y > 0$;
- si disegna una linea tratteggiata sotto i numeri che, sostituiti a x, rendono $y < 0$;
- si disegna un grosso punto in corrispondenza delle due radici del trinomio, cioè dei numeri che, sostituiti a x, rendono $y = 0$.

In questo modo si vedono subito le soluzioni di una disequazione; per esempio:

- la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

ha come soluzioni i numeri indicati dalla linea continua;

- la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

ha come soluzioni i numeri indicati dalla linea tratteggiata.

Verifiche

Conoscenze

① Che cos'è una disequazione di 2° grado?
② Che cosa sono le soluzioni di una disequazione di 2° grado?
③ Come si risolve una disequazione di 2° grado?

Comprensione

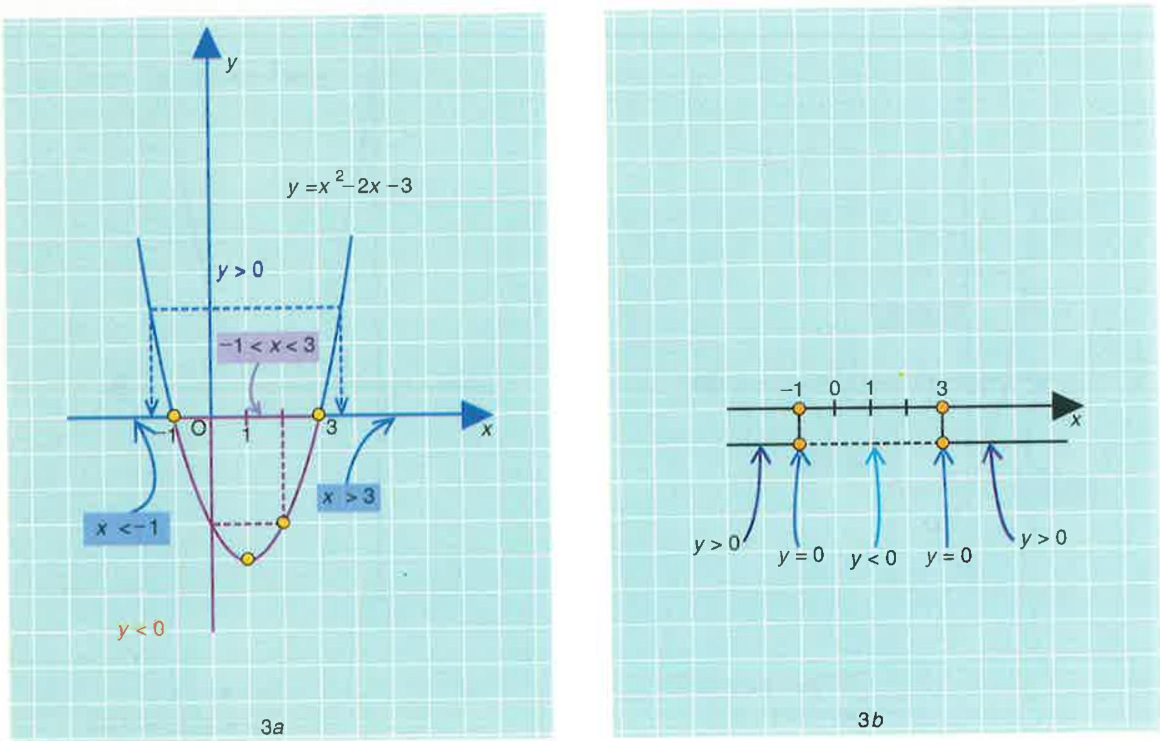
① Portare qualche esempio di disequazione di 2° grado che non ha soluzioni.

Applicazioni

① Risolvere le seguenti disequazioni:
$x^2 - 6x + 9 < 0$ $\quad$ $x^2 - 2x + 5 > 0$

② Risolvere le seguenti disequazioni:
$-x^2 + 2x + 3 < 0$ $\quad$ $-x^2 + 2x + 3 > 0$

Figura 3
Uno schema per descrivere il segno di un trinomio di 2° grado



8

Equazioni e disequazioni equivalenti

Dal grafico di parabole a equazioni di 2° grado equivalenti

In fig. 1 sono rappresentate le tre parabole seguenti:

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (1)$$

$$y = 2x^2 - 4x - 6 \qquad (2)$$

$$y = -x^2 + 2x + 3 \qquad (3)$$

Le tre curve intersecano l'asse delle x negli stessi punti:

A(–1; 0) B(3; 0)

Questo significa che le tre equazioni:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad (4)$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad (5)$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad (6)$$

hanno tutte le stesse soluzioni:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$$

Equazioni che hanno le stesse soluzioni si dicono *equivalenti*, perciò le equazioni (4), (5) e (6) sono equivalenti.
È immediato osservare che queste tre equazioni possono anche presentarsi nella forma:

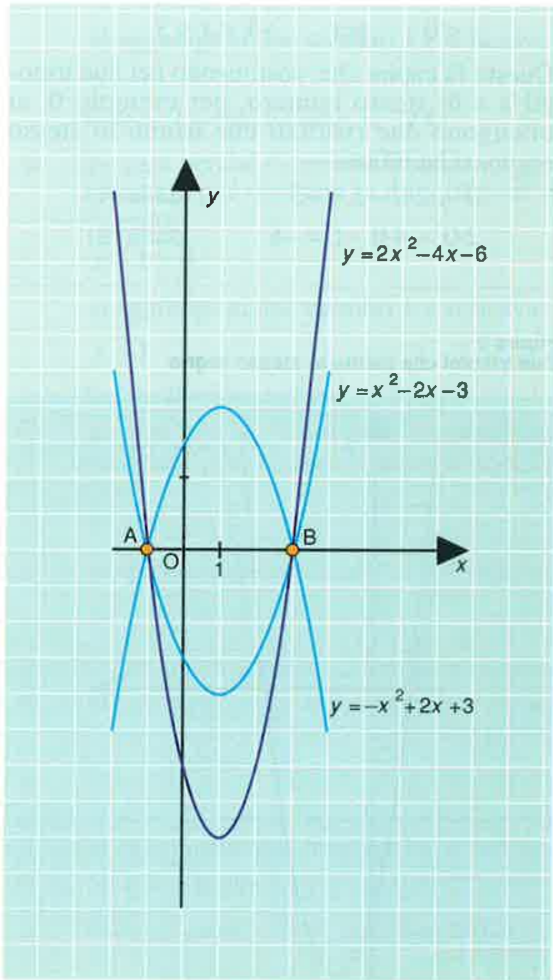
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 2x - 3) = 2 \cdot 0$$

$$(-1)(x^2 - 2x - 3) = (-1) \cdot 0$$

Si ritrova così un noto risultato (vedi il primo volume, p. 374): *moltiplicando i due membri di un'equazione per uno stesso numero si ottiene un'equazione equivalente.*

Figura 1
Tre parabole che tagliano l'asse delle x negli stessi due punti



Moltiplicando i due membri di un'equazione per 0 non si ottiene un'equazione equivalente

È opportuno precisare che il risultato esposto prima è valido, purché si tenga presente un'eccezione: moltiplicando i due membri di un'equazione per 0 si ottiene l'uguaglianza:

$$0 = 0$$

Si ottiene dunque un'equazione indeterminata, qualunque sia l'equazione di partenza.
Perciò si dice più precisamente: *moltiplicando i due membri di un'equazione* ***per uno stesso numero diverso da 0*** *si ottiene un'equazione equivalente.*

Disequazioni equivalenti

Fissiamo ora l'attenzione sulle parabole di fig. 2, grafico dei trinomi:

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (1)$$
$$y = 2x^2 - 4x - 6 \qquad (2)$$

Risulta per le due curve:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \ \text{ oppure } \ x > 3$$
$$y < 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 3$$

Questo fa capire che, sostituendo nei due trinomi a x lo stesso numero, per esempio 0, si ottengono due risultati che hanno lo stesso segno; si ha infatti:

$$0^2 - 2{\cdot}0 - 3 = \mathbf{-3} \qquad \text{dalla (1)}$$
$$2{\cdot}0^2 - 4{\cdot}0 - 6 = \mathbf{-6} \qquad \text{dalla (2)}$$

Si ottengono quindi due numeri diversi (–3 e –6), ma entrambi negativi.
Dunque, i numeri che sono soluzioni della disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

sono pure soluzioni della disequazione:

$$2x^2 - 4x - 6 < 0 \quad \text{cioè} \quad 2(x^2 - 2x - 3) < 2{\cdot}0$$

Si conclude che le due disequazioni:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \qquad 2(x^2 - 2x - 3) < 2{\cdot}0$$

hanno le stesse soluzioni, cioè *sono equivalenti.*
Si ritrova così un altro noto risultato (vedi il primo volume, p. 428): *moltiplicando i due membri di una disequazione per uno stesso numero* ***positivo*** *si ottiene una disequazione equivalente.*

Moltiplicando i due membri di una disequazione per un numero negativo non si ottiene una disequazione equivalente

Nel caso delle disequazioni bisogna prestare particolare attenzione a quello che succede moltiplicando i due membri per un numero negativo. Sono ancora i grafici delle parabole che visualizzano la situazione; le due parabole:

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (1)$$
$$y = -x^2 + 2x + 3 \qquad (3)$$

sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle x (fig. 3), perciò, sostituendo nei due trinomi a x lo stesso numero, per esempio 0, si otterranno due valori di y opposti.

Figura 2
Due trinomi che hanno lo stesso segno

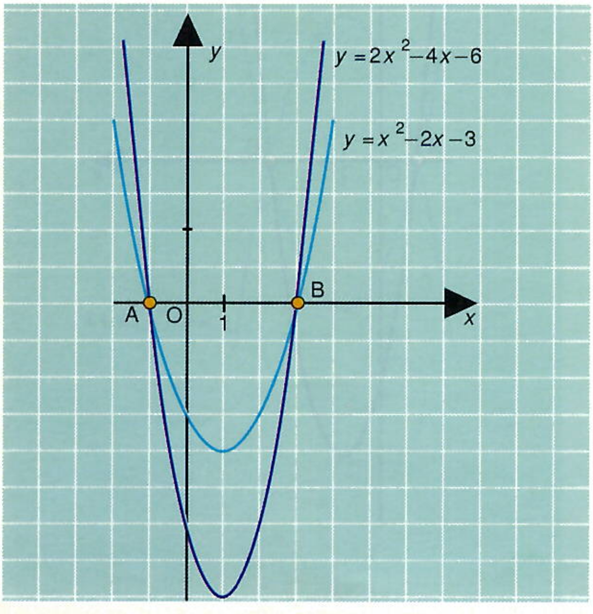
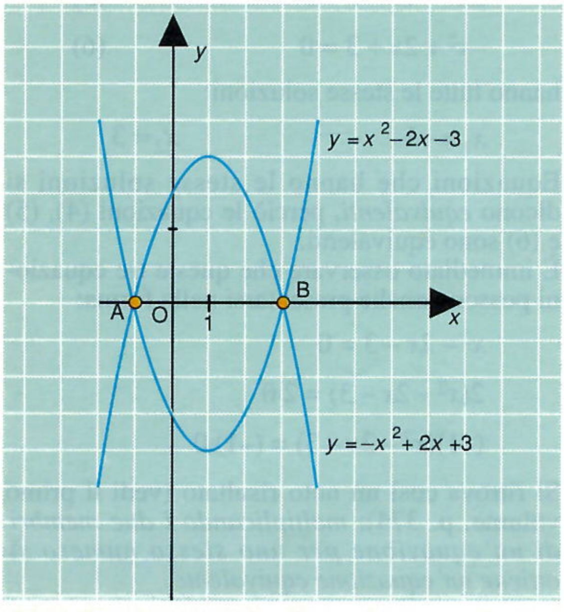


Figura 3
Due trinomi che hanno segno opposto



Si ha infatti:

$0^2 - 2{\cdot}0 - 3 = \mathbf{-3}$ dalla (1)

$-0^2 + 2{\cdot}0 + 3 = \mathbf{3}$ dalla (3)

Dunque, i valori che rendono vera la disequazione:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

rendono vera anche:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ cioè } (-1)(x^2 - 2x - 3) > (-1){\cdot}0$$

Sono dunque equivalenti le due disequazioni:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \qquad (-1)(x^2 - 2x - 3) > (-1){\cdot}0$$

Si ritrova così l'altro noto risultato relativo alle disequazioni equivalenti: *quando si moltiplicano i due membri di una disequazione per uno stesso numero* ***negativo****, si ottiene una disequazione equivalente solo* ***se si cambia il segno di disuguaglianza****.*

Sintesi dei risultati ottenuti

In questo paragrafo sono state visualizzate graficamente le seguenti proprietà relative a equazioni e disequazioni di 2° grado:

1. *si dicono* equivalenti *due equazioni o due disequazioni che hanno le stesse soluzioni;*
2. *moltiplicando i due membri di un'equazione per un qualunque numero diverso da 0 si ottiene un'equazione equivalente;*
3. *moltiplicando i due membri di una disequazione per un numero positivo si ottiene una disequazione equivalente;*
4. *quando si moltiplicano i due membri di una disequazione per un numero negativo, si ottiene una disequazione equivalente solo cambiando il segno di disuguaglianza.*

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato del termine «equazioni equivalenti» e dire come si può ottenere un'equazione equivalente a partire da un'equazione data.

② Spiegare il significato del termine «disequazioni equivalenti» e dire come si può ottenere una disequazione equivalente a partire da una disequazione data.

Comprensione

① Portare degli esempi di equazioni e di disequazioni di 2° grado equivalenti diversi da quelli dati nel testo.

Applicazioni

① Fra le seguenti equazioni indicare quelle equivalenti, motivando la scelta.

$$\frac{1}{4}x^2 = 0 \qquad x^2 = 0 \qquad x^2 = 4$$

② Fra le seguenti disequazioni indicare quelle equivalenti, motivando la scelta.

$$-\frac{1}{4}x^2 > 0 \qquad x^2 > 0 \qquad x^2 < 0 \qquad x^2 < 4$$

Collegamento con i paragrafi precedenti e con il primo volume

① Spiegare perché *è corretto* il seguente procedimento per risolvere l'equazione di 1° grado:

$$x - 1 = 0$$

- si aggiunge ai due membri 1 e si ricava:

$$x = 1$$

(*Vedere il primo volume, p. 374*)

② Spiegare perché *è corretto* il seguente procedimento per risolvere la disequazione di 1° grado:

$$x - 1 > 0$$

- si aggiunge ai due membri 1 e si ricava:

$$x > 1$$

(*Vedere il primo volume, p. 430*)

③ Spiegare perché *è corretto* il seguente procedimento per risolvere l'equazione di 2° grado:

$$x^2 - 1 = 0$$

- si aggiunge ai due membri 1 e si ricava:

$$x^2 = 1 \quad \text{da cui} \quad x = \pm 1$$

(*Vedere il paragrafo 1, pp. 298-301*)

④ Spiegare perché ***è sbagliato*** il seguente procedimento per risolvere la disequazione di 2° grado:

$$x^2 - 1 > 0$$

- si aggiunge ai due membri 1 e si ricava:

$$x^2 > 1 \quad \text{da cui} \quad x > \pm 1$$

(*Vedere il paragrafo 7, pp. 334-336*)

Studiare il segno di un trinomio e risolvere disequazioni di 2° grado

Attività 1

Studiare il segno del trinomio:

$$y = 2x^2 - x + 3 \qquad (1)$$

Completare il procedimento seguente:

1. *Si calcola il discriminante* Δ *dell'equazione*:

   $$2x^2 - x + 3 = 0$$

   e si ottiene:

   $$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots < 0$$

   Si conclude che il trinomio $2x^2 - x + 3$ *non ha* ....

2. *A questo punto si hanno le due alternative seguenti*:
   - A. *si traccia il grafico della parabola (1);*
   - B. *si ricordano a memoria le conclusioni indicate nel paragrafo 6.*

   A. *Per tracciare il grafico necessario a studiare il segno del trinomio* $2x^2 - x + 3$, *basta tenere presente che:*
   - *il coefficiente* a = ... > 0 *e perciò la parabola ha la concavità rivolta verso* ....
   - *risulta* $\Delta < 0$ *e perciò la parabola non* .... *l'asse delle* x.

   Fra le parabole di fig. 1 scegliere quella che può rappresentare il trinomio dato motivando la scelta.

   Si conclude che il trinomio ha sempre segno ....

   B. *Si ricorda che un trinomio senza radici reali ha il segno del* .... *e perciò il trinomio dato ha sempre segno* ....

3. *Il risultato ottenuto può essere schematizzato con il procedimento indicato nel paragrafo 8. Fra gli schemi di fig. 2 scegliere quello che visualizza questo risultato, motivando la scelta.*

Attività 2

Dopo aver svolto l'attività 1, risolvere le due disequazioni seguenti:

$$2x^2 - x + 3 > 0 \qquad\qquad 2x^2 - x + 3 < 0$$

Completare il procedimento seguente:

- *La disequazione:*

$$2x^2 - x + 3 > 0$$

ha per soluzioni tutti i ...., *dato che il trinomio*

$$y = 2x^2 - x + 3$$

mantiene sempre il segno ....

- *La disequazione:*

$$2x^2 - x + 3 < 0$$

non ha ...., *dato che* ....

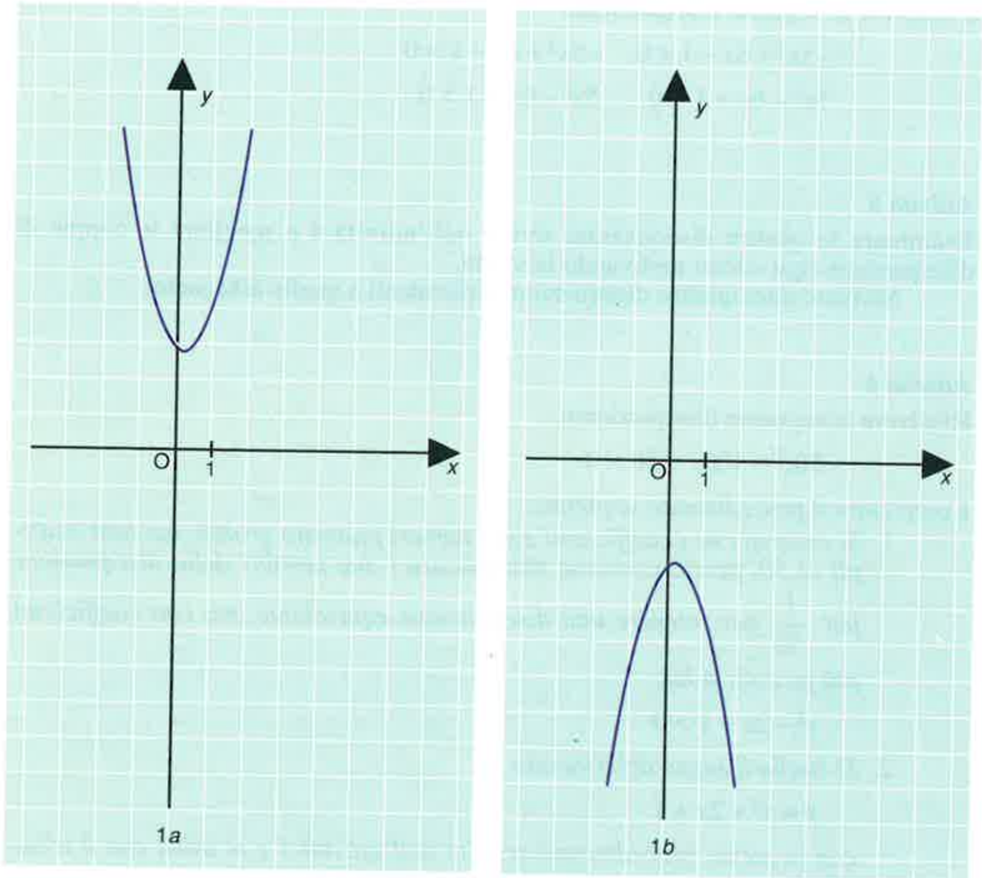


Figura 1
Scegliere la parabola che può rappresentare il trinomio $y = 2x^2 - x + 3$

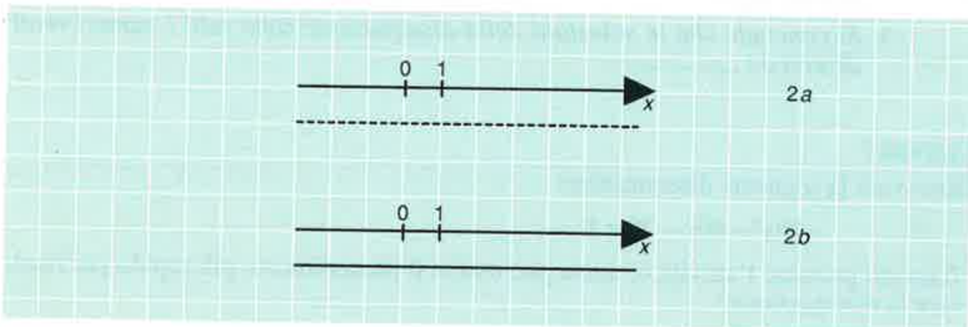


Figura 2
Scegliere lo schema che visualizza il segno del trinomio $y = 2x^2 - x + 3$

Attività 3

Studiare il segno del trinomio:

$$y = -2x^2 + x - 3 \qquad (2)$$

e risolvere le due disequazioni:

$$-2x^2 + x - 3 < 0 \qquad -2x^2 + x - 3 > 0$$

Attività 4

Studiare il segno dei due trinomi:

$$y = -5x^2 + 6x - 1 \qquad (3)$$

$$y = 5x^2 - 6x + 1 \qquad (4)$$

e risolvere le seguenti disequazioni:

$$-5x^2 + 6x - 1 < 0 \qquad -5x^2 + 6x - 1 > 0$$

$$5x^2 - 6x + 1 < 0 \qquad 5x^2 - 6x + 1 > 0$$

Attività 5

Esaminare le quattro disequazioni scritte nell'attività 4 e scegliere le coppie di disequazioni equivalenti motivando la scelta.

Scrivere altre quattro disequazioni equivalenti a quelle assegnate.

Attività 6

Risolvere la seguente disequazione:

$$50x^2 - 100x + 50 > 0$$

Completare il procedimento seguente:

1. *Si osserva che i coefficienti sono numeri piuttosto grandi, ma tutti multipli di 50, perciò conviene moltiplicare i due membri della disequazione per* $\frac{1}{50}$ *per ottenere una disequazione equivalente, ma con coefficienti più piccoli; si ha:*

   $$x^2 - 2x + 1 > 0$$

2. *Si studia il segno del trinomio:*

   $$y = x^2 + 2x + 1$$

   con lo stesso procedimento seguito nell'attività 1 e si trova che il trinomio ha segno .... per qualunque x ≠ ....
3. *Si conclude che le soluzioni della disequazione sono tutti i numeri reali diversi da* ....

Attività 7

Risolvere la seguente disequazione:

$$-20x^2 - 40x - 20 < 0$$

Tenendo presente l'attività 6, quale può essere il procedimento più rapido per risolvere la disequazione?

Equazioni e disequazioni di 2° grado nella fisica

Nella fisica spesso si ricorre alla risoluzione di equazioni e disequazioni di 2° grado per risolvere vari problemi. In questa scheda si trovano alcuni di questi problemi, legati in particolare al movimento ad accelerazione costante.

La caduta libera

Un sasso viene lasciato cadere dall'alto di una roccia (fig. 1); in tal caso, trascurando la resistenza dell'aria, la distanza s del corpo dal punto di caduta R varia al variare del tempo t secondo la legge:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad (1)$$

dove la lettera a indica l'accelerazione di gravità che, sulla Terra, vale 9,8 m/s^2.

Delle tre grandezze s, a e t che compaiono nella legge (1), soltanto il tempo t compare al 2° grado; perciò si ottiene un problema che conduce ad un'equazione di 2° grado nel modo seguente:

- sono date s e a;
- si deve ricavare t.

Ecco due problemi di questo tipo.

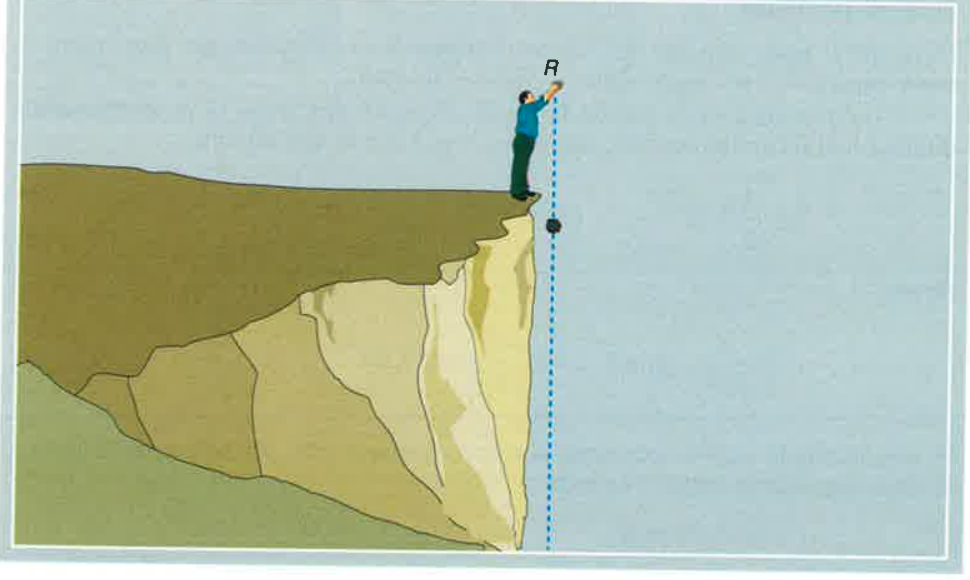


Figura 1
La caduta libera di un sasso

Primo problema

Quanto tempo impiega il sasso a percorrere una distanza lunga 1 metro?
Sono dati:

$$s = 1 \qquad a = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Perciò la (1) diventa:

$$1 = \frac{1}{2} 9{,}8t^2 \quad \text{ossia} \quad 4{,}9t^2 = 1$$

Si tratta di un'equazione di 2° grado incompleta, in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera t, invece che dalla lettera x.

Questo fatto non altera di certo il procedimento risolutivo, che può essere il seguente (vedi anche l'«Attività» di p. 310):

- si moltiplicano i due membri per $\frac{1}{4{,}9}$ e si ha:

$$t^2 = \frac{1}{4{,}9}$$

- si estrae la radice quadrata e si ottiene:

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{4{,}9}} \cong \pm 0{,}45$$

Delle due soluzioni solo quella positiva può essere la misura di un tempo trascorso, e quindi si conclude che, per percorrere 1 metro, il corpo impiega un tempo t dato approssimativamente da:

$$t \cong 0{,}45 \text{ secondi}$$

Secondo problema

Dato che il sasso impiega 0,45 secondi a percorrere 1 metro, per percorrere 2 metri impiegherà un tempo doppio, cioè 0,9 secondi?

La risposta è «no» perché la legge (1) non è una legge di proporzionalità diretta (vedi il capitolo quinto, paragrafo 2, p. 176); si trova infatti:

$$2 = \frac{1}{2} 9{,}8t^2 \qquad \text{ossia} \qquad 4{,}9t^2 = 2$$

da cui:

$$t^2 = \frac{2}{4{,}9} \quad \text{e quindi} \quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{4{,}9}} \cong \pm 0{,}64$$

E, considerando solo la soluzione positiva, si ricava che, per percorrere 2 metri, il sasso impiega un tempo t dato da:

$$t \cong 0{,}64 \text{ secondi}$$

Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto

A partire dallo stesso punto R (fig. 2) un sasso viene lanciato in direzione verticale verso l'alto con una velocità iniziale indicata con la lettera v_0 (che si legge «vu con zero»).

In tal caso, sempre trascurando la resistenza dell'aria, la distanza s del corpo dal punto R varia al variare del tempo t secondo la legge:

$$s = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t \qquad (2)$$

Fissiamo il valore dell'accelerazione di gravità, che sulla Terra vale 9,8 m/s^2, e fissiamo anche il valore della velocità iniziale, per esempio $v_0 = 10$ m/s.

La legge (2) diventa:

$$s = -4{,}9t^2 + 10t \qquad (3)$$

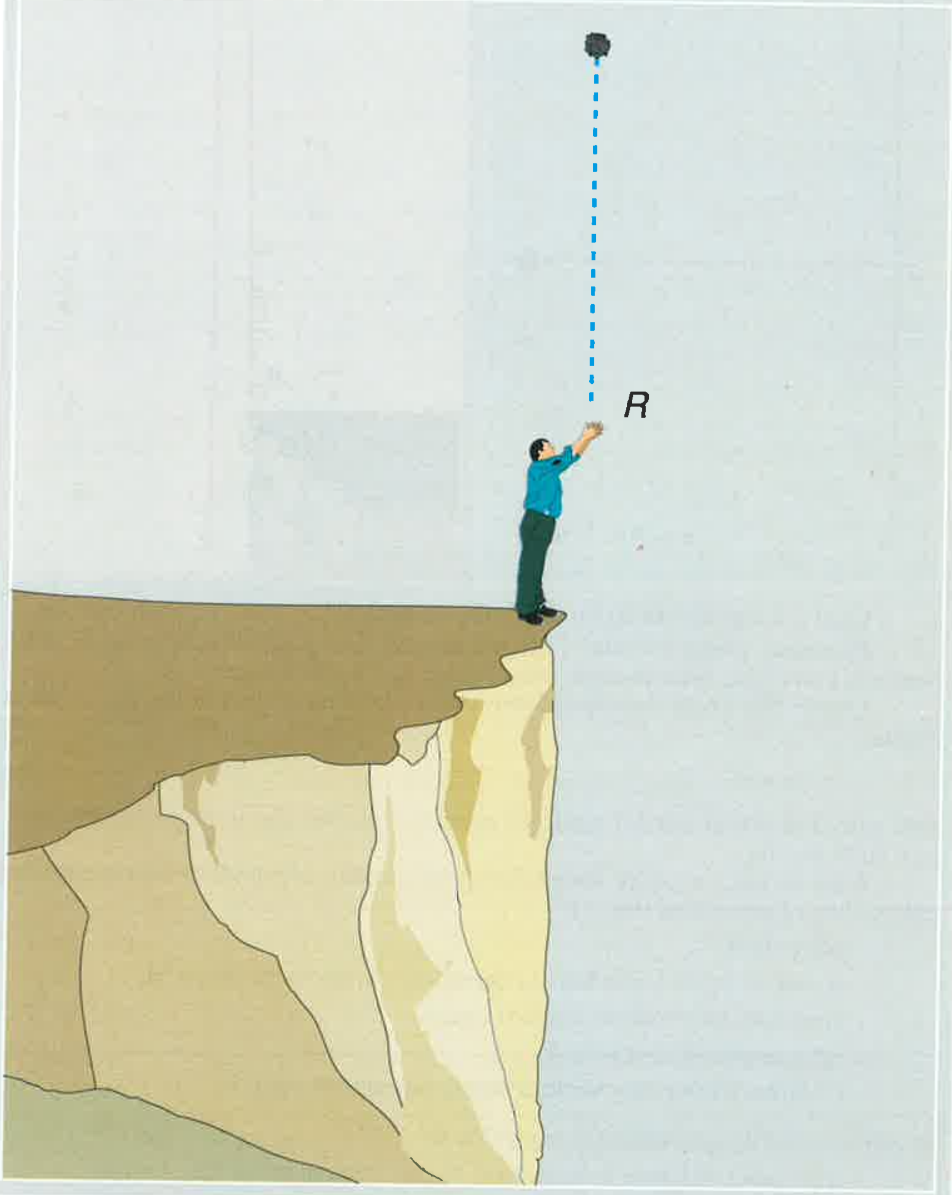
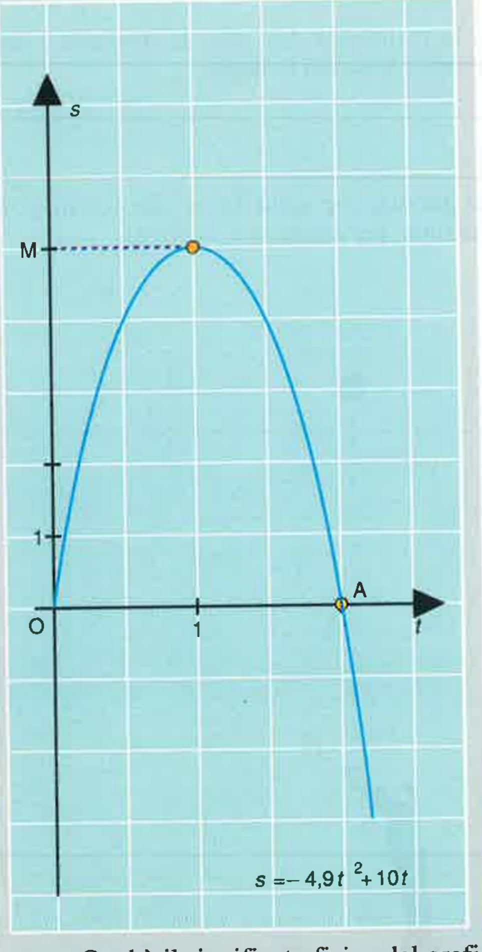


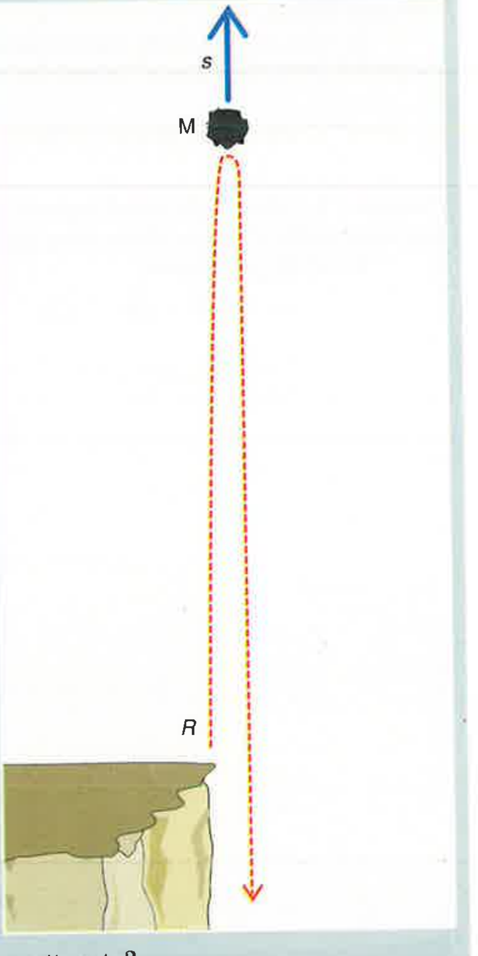
Figura 2
Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto

È interessante rappresentare questa legge sul piano cartesiano, tenendo presente che il tempo t può assumere solo valori positivi: si otterrà la parabola rappresentata in fig. 3.

Figura 3 (a sinistra)
La legge del movimento ad accelerazione costante

Figura 4 (a destra)
Il movimento ad accelerazione costante





Qual è il significato fisico del grafico ottenuto?

Fissiamo prima di tutto l'attenzione sui due punti d'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse: sono i punti O e A della figura.

Questi due punti corrispondono a una particolare situazione: per il sasso risulta:

$$s = 0$$

cioè vale 0 la distanza s dal punto R; questo vuol dire che il corpo si trova proprio sulla roccia.

Così si riesce a capire il significato del grafico, seguendo il movimento del sasso, che si muove così (fig. 4):

- *parte da R*;
- si muove verso l'alto fino a raggiungere la quota massima M;
- discende, muovendosi verso il basso;
- *ripassa per la posizione R*;
- continua a muoversi verso il basso, trovandosi sotto R.

Si capisce così il significato dei punti O e A:

- il punto O descrive la situazione di partenza, in cui si ha:

- $s = 0$, cioè il corpo si trova sulla roccia R;
- $t = 0$, cioè è appena scattato il cronometro.

- il punto A descrive la situazione in cui il corpo ripassa per la posizione R; in tal caso si ha:
  - $s = 0$, perché il corpo si trova a distanza 0 dalla roccia R;
  - non si conosce, tuttavia, il tempo trascorso.

Ecco allora alcuni problemi che si pongono su questa situazione.

Terzo problema

Quanto tempo impiega il sasso a ripassare per il punto di lancio?
Si tratta di risolvere l'equazione:

$$0 = -4{,}9t^2 + 10t$$

È ancora un'equazione di 2° grado incompleta, in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera t, invece che dalla lettera x.

Questo fatto non altera il procedimento risolutivo, che può essere il seguente (vedi anche l'«Attività» di p. 310):

- nel secondo membro si raccoglie il fattore comune t e si ha:

$$0 = t(-4{,}9t + 10)$$

- si tiene presente la legge di annullamento del prodotto e si ricava che deve essere:

$$t = 0 \qquad \text{oppure} \quad -4{,}9t + 10 = 0$$

- le due soluzioni sono dunque:

$$t_1 = 0$$

che caratterizza il punto O, cioè il momento del lancio;

$$t_2 = \frac{10}{4{,}9} \cong 2$$

che indica appunto il tempo trascorso quando il sasso ripassa per il punto di lancio.

Quarto problema

In quali istanti il sasso rimane al disopra del punto di lancio?
Si tratta ora di esaminare la situazione (figure 3 e 4), notando che:
$s > 0$ significa che il sasso si trova al disopra del punto di lancio;
$s < 0$ significa che il sasso si trova al disotto del punto di lancio.
Si è condotti perciò ad esaminare il segno del trinomio:

$$s = -4{,}9t^2 + 10t \qquad (3)$$

rappresentato graficamente in fig. 3.

Avendo appena trovato che il trinomio (3) ha le radici reali e distinte:

$$t_1 = 0 \qquad\qquad t_2 \cong 2$$

si può concludere che il sasso si trova al disopra del punto di lancio, cioè si ha:

$$s > 0$$

nell'intervallo di tempo:

$$0 < t < 2$$

Relazioni di equivalenza

Il termine «equivalente» ricorre spesso in questo volume e in quello precedente; si è detto che:

a. sono equivalenti due equazioni con le stesse soluzioni;
b. sono equivalenti due disequazioni con le stesse soluzioni;
c. sono equivalenti due frazioni che danno luogo allo stesso punto sulla retta;
d. sono equivalenti due poligoni somma o differenza di poligoni uguali.

Si trova dunque lo stesso termine «equivalente» in contesti molto diversi.

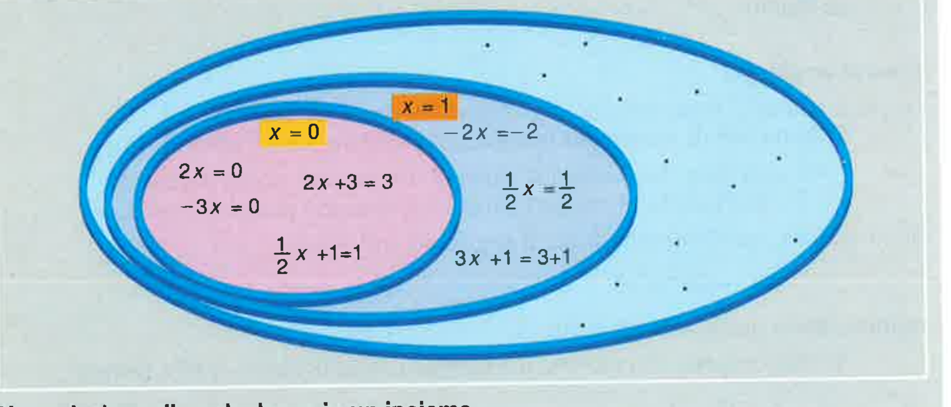
Tuttavia, dai vari contesti sembra emergere un analogo intento: classificare gli elementi di un insieme, in modo da poterli esaminare più facilmente.

Per esempio, sono moltissime le equazioni di 1° grado che si possono scrivere, ma ci si può orientare più facilmente in questo vasto insieme se le equazioni vengono classificate in base alla loro soluzione (fig. 1). Il procedimento di risoluzione consisterà poi nel cercare l'equazione che è equivalente a quella data, ma è scritta nella forma più semplice.

E così, classificando le frazioni in base alla loro rappresentazione sulla retta, è più facile orientarsi nel vasto insieme dei numeri razionali, e scegliere in ogni occasione la frazione più conveniente.

Cerchiamo ora di capire che cosa accomuna questi procedimenti di classificazione.

Figura 1
Una classificazione delle equazioni di 1° grado



Una relazione di equivalenza in un insieme

Cominciamo a riflettere sulla classificazione delle equazioni di 1° grado in base alla soluzione; questa classificazione si basa su un semplice procedimento: si esaminano due equazioni, fissando l'attenzione su una sola caratteristica e cioè la soluzione.

Si ignorano invece tutte le altre caratteristiche, come i coefficienti, la lettera che indica l'incognita, e così via.

Si trovano così due soli casi possibili: le due equazioni hanno la stessa soluzione oppure questo non si verifica; nel primo caso vengono accomunate nella stessa classe (fig.1), nel secondo caso vengono inserite in due classi diverse.

In questo modo si stabilisce nell'insieme delle equazioni di 1°grado *una relazione*; più precisamente si tratta della relazione espressa dalla frase «avere la stessa soluzione».

Ed è proprio su questa relazione che è basata tutta la classificazione.
Il processo di classificazione viene reso più rapido dalle seguenti tre proprietà della relazione stabilita.

I. Ogni coppia di equazioni va esaminata una volta sola, perché il fatto che un'equazione è equivalente ad una seconda equazione, implica sempre che anche la seconda è equivalente alla prima.
Ecco un esempio: dire che $2x = 0$ è equivalente a $x = 0$ implica che $x = 0$ è equivalente a $2x = 0$ e viceversa, cioè:

$$2x = 0 \text{ equivalente } x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ equivalente } 2x = 0$$

Questa proprietà prende il nome di *proprietà simmetrica*.

II. L'esame delle equazioni diventa ancora più rapido valendosi della seguente proprietà: il fatto che un'equazione è equivalente ad una seconda **e** la seconda è equivalente ad una terza, implica sempre che anche prima e terza sono equivalenti. Ecco un esempio:

$$x = 0 \text{ equivalente a } 2x = 0 \textbf{ e } 2x = 0 \text{ equivalente a } 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \text{ equivalente a } 2x + 3 = 3$$

Questa proprietà prende il nome di *proprietà transitiva,* perché l'equivalenza sembra «transitare», cioè passare dalla prima alla terza equazione.

III. Infine si può classificare anche una sola equazione, perché ogni equazione ha la stessa soluzione di se stessa, cioè ogni equazione è equivalente a se stessa; si trova così anche *la proprietà riflessiva.*

Le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva caratterizzano una *relazione di equivalenza,* permettendo un processo di classificazione rapido ed efficiente.

Queste considerazioni possono essere generalizzate dicendo che: *si stabilisce in un insieme una relazione di equivalenza se valgono le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.*

È facile ora scoprire che le tre proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva) sono valide anche per le altre relazioni elencate all'inizio e si possono scoprire anche altre relazioni di equivalenza; per esempio l'uguaglianza fra le figure piane.

Relazioni che non sono di equivalenza

Ma non tutte le relazioni in un insieme sono relazioni di equivalenza. Ecco un primo «controesempio»: nell'insieme dei numeri reali si può stabilire la relazione «essere maggiore»; per questa relazione non si trova la proprietà riflessiva (un numero non è maggiore di se stesso).

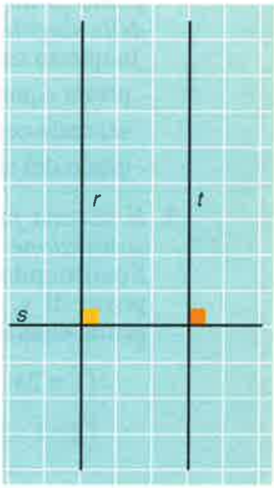
Inoltre, non si trova neanche la proprietà simmetrica; per esempio:

$$5 > 3 \text{ non implica } 3 > 5!$$

E ancora, nell'insieme delle rette del piano, per la relazione «essere perpendicolari» non si trova la proprietà riflessiva (una retta non è perpendicolare a se stessa) e **non** si trova neanche la proprietà transitiva (fig. 2):

r perpendicolare a s **e** s perpendicolare a t non implica r perpendicolare a t.
Si ha invece che r è parallela a t.

Figura 2
La relazione di perpendicolarità non è transitiva



9 I sistemi di 2° grado

L'intersezione fra due rette e un sistema di 1° grado

La fig. 1 ricorda i seguenti risultati ottenuti nel primo volume (pag. 395-397):

1. *Per calcolare le coordinate del punto d'intersezione A fra due rette si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due rette.*
   Le due rette di fig. 1 hanno le seguenti equazioni:

   $y = 2x \qquad\qquad y = -3x + 5$

   Il sistema formato dalle due equazioni si scrive nel modo seguente:

   $$\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

2. *Il sistema ottenuto è di 1° grado, perché il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.*
   In questo caso si ha infatti:
   - prima equazione di 1° grado;
   - seconda equazione di 1° grado;
   - grado del sistema = 1·1 = 1.

3. *Il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione.*
   Sostituendo nella seconda equazione, al posto di y, l'espressione $2x$ fornita dalla prima equazione, si ha:

   $$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -3x + 5 \end{cases}$$

   La seconda equazione diventa così un'equazione di 1° grado in un'incognita, equazione che si risolve facilmente ottenendo:

   $$\begin{cases} y = 2x \\ 5x = 5 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \end{cases}$$

   Per ottenere poi il valore di y, basta sostituire, nella prima equazione, il valore di x appena ottenuto; si trova dunque che la soluzione del sistema è:

   $$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (1;2)$$

4. *La soluzione del sistema di 1° grado è una coppia ordinata di numeri tali che, sostituendo il primo numero a* x *ed il secondo numero a* y, *le due equazioni diventano due uguaglianze vere.*
   Nel caso assegnato si ha infatti che:

   $$(\mathbf{1};\ \mathbf{2}) \text{ è la soluzione di } \begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

   $$\text{perché risulta } \begin{cases} \mathbf{2} = 2 \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{2} = -3 \cdot \mathbf{1} + 5 \end{cases}$$

Le intersezioni di una parabola con una retta e un sistema di 2° grado

In fig. 2 sono rappresentate la retta e la parabola che hanno le seguenti equazioni:

$y = 2x - 3 \qquad\qquad y = x^2 - 2x - 3$

La figura mostra che le curve si incontrano in due punti A e B; come si possono determinare le coordinate di questi due punti?
Anche in questo caso un punto di intersezione deve trovarsi su entrambe le curve e perciò deve avere le coordinate che soddisfano entrambe le equazioni; dunque si avrà ancora che:

1. *Le coordinate dei punti d'intersezione fra la retta e la parabola si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due curve.*
   Il sistema si scriverà nel modo seguente:
   $$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$
2. *Il sistema ottenuto è di 2° grado, dato che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.*
   In questo caso si ha infatti:
   - prima equazione di 1° grado;
   - seconda equazione di 2° grado;
   - grado del sistema = 1·2=2.
3. *Il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione.*
   Sostituendo nella seconda equazione, al posto di y, l'espressione $2x$–3 fornita dalla prima equazione, si ha:
   $$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$
   La seconda equazione diventa così un'equazione di 2° grado in un'incognita, equazione che si risolve facilmente, purché venga scritta nella forma:
   $$ax^2 + bx + c = 0$$
   Per questo basta sottrarre ai due membri dell'equazione l'espressione $2x$ –3; si ottiene:
   $$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$
   Risolvendo quindi l'equazione incompleta ottenuta (vedi p. 310), si ottengono le due ascisse dei punti d'intersezione; si ha:

Figura 1
Il punto di intersezione fra due rette

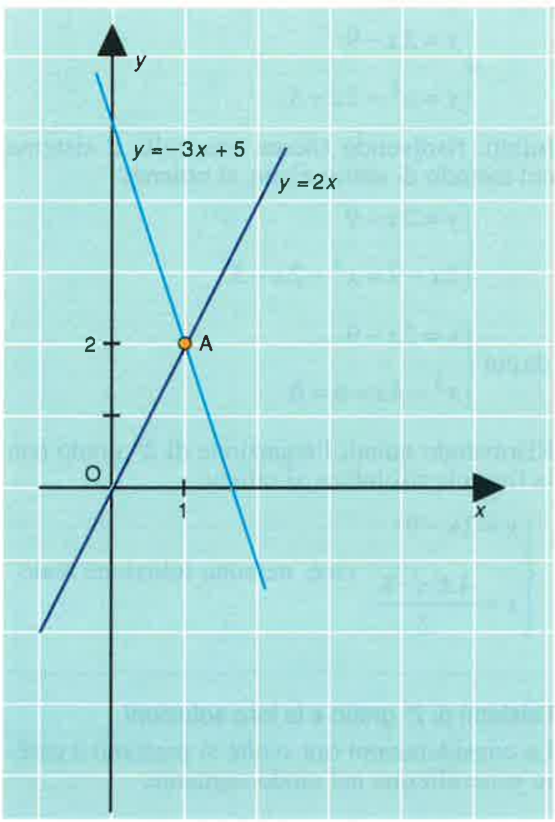
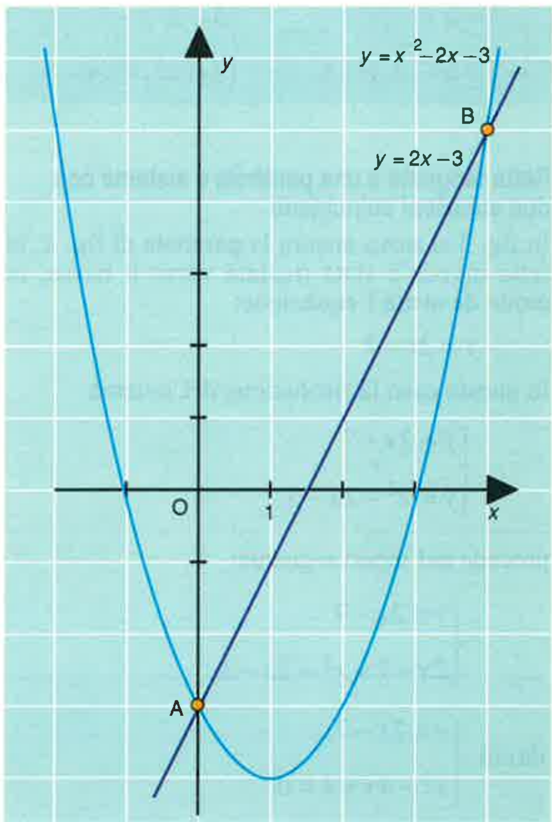


Figura 2
I punti di intersezione fra una retta e una parabola



$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x(x-4) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \end{cases}$$

Per ottenere poi il valore delle ordinate basta sostituire i valori di x appena ottenuti nella prima equazione; le soluzioni del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

ossia A(0; –3) B(4; 5)

4. *Le soluzioni del sistema di 2° grado sono due coppie ordinate di numeri tali che, sostituendo il primo numero a* x *e il secondo numero a* y, *le due equazioni diventano due uguaglianze vere.*
Nel caso assegnato si ha infatti che le due coppie di numeri sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

dato che risulta:

Per la coppia (0; –3)	Per la coppia (4; 5)
$\begin{cases} -3 = 2 \cdot 0 - 3 \\ -3 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 5 = 2 \cdot 4 - 3 \\ 5 = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 \end{cases}$

Retta tangente a una parabola e sistema con due soluzioni coincidenti

In fig. 3 si trova ancora la parabola di fig. 2; la retta invece è stata traslata verso il basso, in modo da avere l'equazione:

$$y = 2x - 7$$

In questo caso la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

procede nel modo seguente:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x - 7 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado con la formula risolutiva, si ha:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = \dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ x_1 = x_2 = 2 \end{cases}$$

In conclusione, le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = -3 \\ x_1 = x_2 = 2 \end{cases}$$

ossia T(2; –3) contato due volte

Questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica (fig. 3): la retta è tangente alla parabola nel punto T.

Retta esterna a una parabola e sistema senza soluzioni reali

In fig. 4 si ha sempre la stessa parabola, mentre la retta è stata ancora traslata verso il basso, non incontra più la parabola e ha l'equazione:

$$y = 2x - 9$$

Ci aspettiamo allora che non abbia soluzioni reali il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

Infatti, risolvendo ancora una volta il sistema col metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ 2x - 9 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} y = 2x - 9 \\ x^2 - 4x + 6 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo quindi l'equazione di 2° grado con la formula risolutiva, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \end{cases} \quad \text{cioè nessuna soluzione reale}$$

I sistemi di 2° grado e le loro soluzioni

Le considerazioni ora svolte si prestano a essere generalizzate nel modo seguente:

1. *Un sistema di 2° grado di due equazioni in due incognite, abitualmente indicate con* x *e* y*, è formato da un'equazione di 1° grado e una di 2° grado.*
2. *Il sistema si risolve col metodo di sostituzione.*
3. *Per risolvere il sistema si è condotti a risolvere un'equazione di 2° grado in una sola incognita, equazione che può avere:*
   - *due soluzioni reali e distinte;*
   - *due soluzioni reali e coincidenti;*
   - *nessuna soluzione reale.*

   In corrispondenza il sistema avrà come soluzioni:
   - *due coppie di numeri reali e distinte;*
   - *una coppia di numeri contata due volte;*
   - *nessuna coppia di numeri reali.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cosa si intende col termine «sistema di 2° grado»?

② Come si risolve un sistema di 2° grado?

③ Spiegare che cosa si intende col termine «soluzione di un sistema» e quali soluzioni può avere un sistema di 2° grado.

Comprensione

① Esaminare il sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. verificare che il sistema ha la soluzione (3; 3);

b. stabilire se il sistema ha due soluzioni coincidenti, motivando adeguatamente la conclusione.

Applicazioni

① Risolvere i seguenti sistemi, interpretando graficamente le soluzioni ottenute.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{4}x + 1 \end{cases}$$

Quale dei due sistemi ha una soluzione contata due volte?

Figura 3
Una retta tangente a una parabola

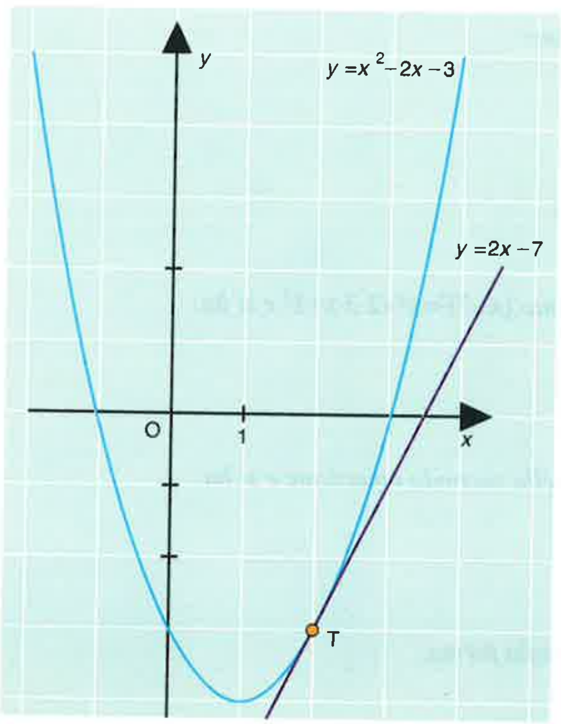
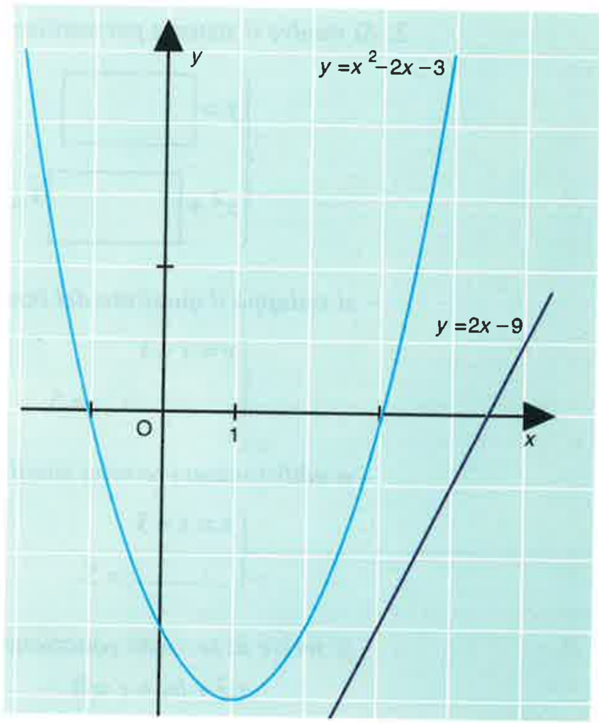


Figura 4
Una retta esterna a una parabola



Risolvere sistemi di 2° grado

Attività 1

Rappresentare su un riferimento cartesiano il cerchio e la retta che hanno le seguenti equazioni:

$x^2 + y^2 = 5 \qquad\qquad y = x + 3$

Determinare le coordinate dei loro punti di intersezione, completando il procedimento seguente.

1. *Si scrive il sistema formato dalle equazioni delle due curve:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

2. *Si risolve il sistema per sostituzione:*

$$\begin{cases} y = \boxed{} \\ x^2 + \boxed{}^{\,2} = 5 \end{cases}$$

- *si sviluppa il quadrato del binomio* $(x+3)^2=x^2+2\cdot3\cdot x+3^2$ *e si ha:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ \text{....................}=5 \end{cases}$$

- *si addizionano i termini simili nella seconda equazione e si ha:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ \text{...............}=5 \end{cases}$$

- *si scrive la seconda equazione nella forma:*

$ax^2 + bx + c = 0$

- *si aggiunge ai due membri –5 e si ha:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

- *la seconda equazione ha tutti i coefficienti multipli di 2, perciò, moltiplicandone i membri per il reciproco di 2, si ottiene un'equazione equivalente, ma con i coefficienti più piccoli; si ha:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$$

- *si risolve la seconda equazione con la formula risolutiva e si ha:*

$$\begin{cases} y = x+3 \\ x = \dfrac{-\dots \pm \sqrt{\dots^2 - 4 \cdot \dots \cdot \dots}}{2 \cdot \dots} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y = x+3 \\ x = \dfrac{-\dots \pm \sqrt{\dots\dots}}{2 \cdot \dots} \end{cases}$$

- *si ottengono finalmente le soluzioni del sistema date da:*

$$\begin{cases} y_1 = \dots \\ x_1 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque le due coppie reali e distinte:

A(–2; 1) B(–1; 2)

Attività 2

Risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = x+5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

Attività 3

Risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = -x+4 \\ xy=3 \end{cases} \qquad (1)$$

Completare il procedimento seguente.

1. *È opportuno ricordare che l'equazione:*

$$xy = 3$$

è di 2° grado perché è di 2° grado il monomio xy, *prodotto di due monomi di 1° grado.*

2. *Si risolve il sistema per sostituzione:*

$$\begin{cases} y = \boxed{} \\ x\boxed{} = 3 \end{cases}$$

- *si esegue la moltiplicazione* x(–x+4)=x(–x)+x·4 *e si ottiene:*

$$\begin{cases} y = -x+4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3 \end{cases}$$

- *si scrive la seconda equazione nella forma:*

$ax^2+bx+c=0$

- *si aggiunge ai due membri* –3 *e si ha:*

$$\begin{cases} y = -x+4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

- *si risolve la seconda equazione con la formula risolutiva e si ha:*

$$\begin{cases} y = -x+4 \\ x = \dfrac{-\ldots\pm\sqrt{\ldots^2-4\cdot(-\ldots)\cdot(-\ldots)}}{2\cdot(-\ldots)} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y = -x+4 \\ x = \dfrac{-\ldots\pm\sqrt{\ldots\ldots}}{-2} \end{cases}$$

- *si ottengono finalmente le soluzioni del sistema date da:*

$$\begin{cases} y_1 = \ldots \\ x_1 = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque le due coppie reali e distinte:

A(1; 3) B(3; 1)

I sistemi simmetrici

Le soluzioni appena ottenute e cioè le coppie:

(1; 3) (3; 1)

presentano una caratteristica *simmetria*, che poteva essere prevista da due diversi punti di vista, sia grafico che algebrico.

I. Interpretando graficamente il sistema (1), e cioè rappresentando graficamente le due equazioni presenti nel sistema, si ha (fig. 1):

$y = -x + 4$ che è una retta

$xy = 3$ ossia $y = \dfrac{3}{x}$ che è un'iperbole.

Si osserva che entrambi i grafici sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$ (fig. 2) e questo vuol dire che, scambiando x con y, il disegno rimane inalterato; è chiaro allora che questa simmetria deve valere anche per le due coppie di soluzioni.

II. Alle stesse conclusioni si può arrivare da un punto di vista algebrico, riscrivendo il sistema (1) nella forma seguente:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \qquad (2)$$

Osservando le due equazioni si nota infatti che, scambiando x con y, il sistema rimane inalterato; perciò, se si trova la soluzione:

(1; 3)

l'altra soluzione deve essere ottenuta appunto scambiando x con y, e cioè:

(3; 1)

Proprio per questo motivo il sistema (1) si dice *simmetrico*.

In generale un *sistema di 2° grado simmetrico si presenta nella forma seguente:*

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

dove s e p sono due numeri reali qualunque.

Figura 1
Le due equazioni di un sistema simmetrico

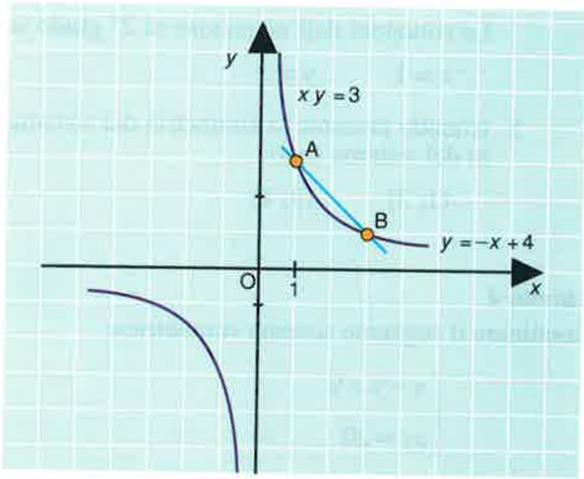
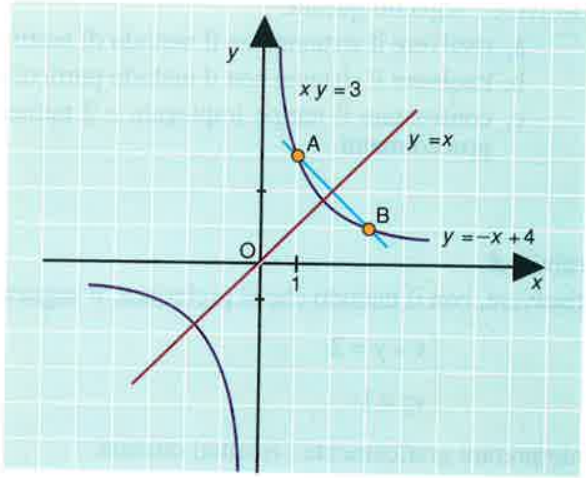


Figura 2
Le due curve sono simmetriche rispetto a $y = x$



Un metodo particolare per risolvere i sistemi simmetrici

Si può arrivare più rapidamente alle soluzioni di un sistema simmetrico con il seguente procedimento, mostrato sempre a partire dal sistema (2) e cioè

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$$

1. si considerano x e y come se fossero le due soluzioni di un'equazione di 2° grado, soluzioni di cui si conosce la somma (4) e il prodotto (3);
2. si indica l'incognita dell'equazione di 2° grado con un'altra lettera, per esempio t, dato che x è già presente nel procedimento per indicare una soluzione dell'equazione;
3. si scrive l'equazione di 2° grado di cui si conosce la somma e il prodotto delle soluzioni, tenendo presente il ragionamento seguito nel paragrafo 4, e si ha:

   $$t^2-4t+3=0$$

4. si risolve l'equazione ottenendo:

   $$t=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}$$

   Le soluzioni dell'equazione di 2° grado sono dunque:

   $x=1 \qquad y=3$

5. tenendo presente la simmetria del sistema, si conclude che le due soluzioni del sistema sono:

   $(1; 3) \qquad (3; 1)$

Attività 4

Esaminare il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. risolvere il sistema con il metodo di sostituzione;
b. risolvere il sistema con il metodo particolare appena descritto;
c. confrontare il tempo impiegato e il numero di calcoli necessari per i due procedimenti.

Attività 5

Risolvere, con il metodo che si preferisce, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

I sistemi di 2° grado nella fisica

Nella fisica si ricorre spesso alla risoluzione di sistemi di 2° grado per risolvere vari problemi. In questa scheda si trovano alcuni esempi di questi problemi legati al movimento ad accelerazione costante, già esaminato nella scheda applicativa di p. 343.

La caduta libera

In fisica si studia il movimento di un corpo che percorre una traiettoria rettilinea con accelerazione costante a. Il caso più comune di movimento ad accelerazione costante è quello di un sasso lasciato cadere da una roccia; in tal caso, trascurando la resistenza dell'aria, la distanza s del sasso dal punto di caduta R varia al variare del tempo t secondo la legge:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad (1)$$

dove a è l'accelerazione di gravità che, sulla Terra, vale 9,8 m/s^2.

Durante il movimento varia anche la velocità istantanea v del corpo secondo la legge:

$$v = at \qquad (2)$$

In queste leggi compaiono quattro lettere che indicano diverse grandezze fisiche e cioè:

- s indica la distanza del corpo dal punto R;
- v indica la velocità istantanea del corpo;
- a indica l'accelerazione costante;
- t indica il tempo che trascorre, e è l'unica lettera che compare al 2° grado.

Le due leggi (1) e (2) valgono sempre simultaneamente e permettono di risolvere vari problemi che conducono a sistemi di 2° grado, purché una delle incognite sia il tempo t. Ecco un esempio.

Primo problema

Un sasso viene lasciato cadere e percorre una distanza di 78,4 metri; *quanto è durata la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine della caduta ?*

Nel problema sono dati:

- l'accelerazione, che vale 9,8 m/s^2, cioè $a = 9{,}8$
- la distanza, che vale 78,4 metri, cioè $s = 78{,}4$

Sono invece incognite la durata della caduta e la velocità alla fine della caduta, incognite che vengono indicate con le lettere t e v.

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} 78{,}4 = \dfrac{1}{2} 9{,}8t^2 \\ v = 9{,}8t \end{cases}$$

Il sistema è già scritto in modo da presentare un'equazione di 2° grado in una sola incognita: è la prima equazione, che è incompleta.

Per risolvere il sistema si risolve la prima equazione e si sostituiscono le soluzioni ottenute nella seconda equazione; si ha:

$$\begin{cases} t^2 = \dfrac{2 \cdot 78{,}4}{9{,}8} = 16 \\ v = 9{,}8t \end{cases}$$

Il sistema ha dunque le seguenti due soluzioni:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ v_1 = 9{,}8 \cdot 4 = 39{,}2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 = -4 \\ v_2 = 9{,}8 \cdot (-4) = -39{,}2 \end{cases}$$

Delle due soluzioni si considera soltanto la prima, dato che il tempo assume solo valori positivi; si conclude che la caduta è durata 4 secondi e il corpo ha raggiunto la velocità di 39,2 metri al secondo.

Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto

Si può porre un problema analogo a quello precedente in condizioni un po' diverse: un sasso viene lanciato con una velocità iniziale verticale verso l'alto, velocità che viene abitualmente indicata con v_0.

In tal caso, sempre trascurando la resistenza dell'aria, la distanza s del sasso dal punto R varia al variare del tempo t secondo la legge:

$$s = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \qquad (3)$$

Durante il movimento varia anche la velocità istantanea v del corpo secondo la legge:

$$v = v_0 - gt \qquad (4)$$

In queste leggi compaiono le stesse quattro lettere viste prima, che indicano le stesse grandezze fisiche, con l'aggiunta questa volta di v_0, che indica la velocità iniziale impressa al sasso.

Le due leggi (3) e (4) valgono ancora una volta simultaneamente e permettono di risolvere vari problemi che conducono a sistemi di 2° grado, purché una delle incognite sia il tempo t, che è di nuovo l'unica lettera che compare al 2° grado. Ecco un esempio analogo a quello risolto prima.

Secondo problema

Un sasso che viene lanciato, con una fionda, a una velocità verticale verso l'alto di 49 m/s, *percorre una distanza di* 78,4 metri; *quanto è durata la caduta e quale velocità raggiunge il sasso alla fine della caduta?*

Nel problema sono dati:

- la velocità iniziale, che è di 49 m/s, cioè $v_0 = 49$
- l'accelerazione, che vale 9,8 m/s^2, cioè $a = 9{,}8$
- la distanza, che è di 78,4 metri, cioè $s = 78{,}4$

Sono invece incognite la durata della caduta e la velocità alla fine della caduta, incognite che vengono indicate con le lettere t e v.

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} 78{,}4 = 49t - \dfrac{1}{2}9{,}8t^2 \\ v = 49 - 9{,}8t \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} 4{,}9t^2 - 49t + 78{,}4 = 0 \\ v = 49 - 9{,}8t \end{cases}$$

Anche in questo caso il sistema è già scritto in modo da presentare un'equazione di 2° grado in una sola incognita: è la prima equazione, che ora non è incompleta e perciò deve essere risolta valendosi della formula risolutiva; si ha:

$$\begin{cases} t = \dfrac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot 78{,}4}}{2 \cdot 4{,}9} = \dfrac{49 \pm 29{,}4}{9{,}8} \\ v = 49 - 9{,}8t \end{cases}$$

Il sistema ha dunque le seguenti due soluzioni:

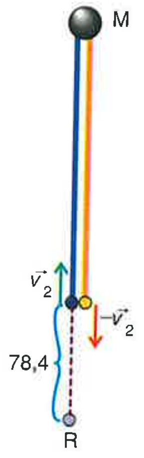
$$\begin{cases} t_1 = 8 \\ v_1 = 49 - 9{,}8 \cdot 8 = -29{,}4 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 = 2 \\ v_2 \cong 49 - 9{,}8 \cdot 2 = 29{,}4 \end{cases}$$

Si capisce il significato di queste due soluzioni esaminando il movimento del sasso (fig. 1): viene lanciato dal punto R, sale con la velocità rivolta verso l'alto e, dopo 2 secondi, ha percorso 78,4 metri e ha raggiunto la velocità $v_2 = 29{,}4$ m/s; successivamente il sasso continua a salire, raggiunge la quota massima M.

A partire dalla quota massima inizia a discendere e, dopo 8 secondi, ritorna alla distanza di 78,4 metri dal punto di lancio con la stessa velocità di 29,4 m/s, ma rivolta verso il basso. Questo spiega perché in un caso la velocità è positiva e nell'altro è negativa.

Questo problema conduce quindi a porsi una domanda: quando e dove il sasso raggiunge la quota massima? Ecco allora, espresso in termini più precisi, un terzo problema.

Figura 1
Il movimento di un corpo lanciato verso l'alto



Terzo problema

Un sasso viene lanciato, con una fionda, a una velocità verticale verso l'alto di 49 m/s; *dopo quanto tempo raggiunge la quota massima e a quale distanza dal punto di partenza si trova tale quota massima?*

Il problema si risolve facilmente tenendo presente una proprietà che caratterizza la quota massima: arrivato proprio alla quota massima il sasso si ferma, cioè ha la velocità istantanea che vale zero (fig. 2).

Ecco allora i dati di questo problema:

- la velocità iniziale, che è di 49 m/s, cioè $v_0 = 49$
- l'accelerazione, che vale 9,8 m/s^2, cioè $a = 9{,}8$
- la velocità istantanea, che vale 0, cioè $v = 0$

Sono invece incognite t e s.

Il problema conduce a scrivere il seguente sistema di 2° grado:

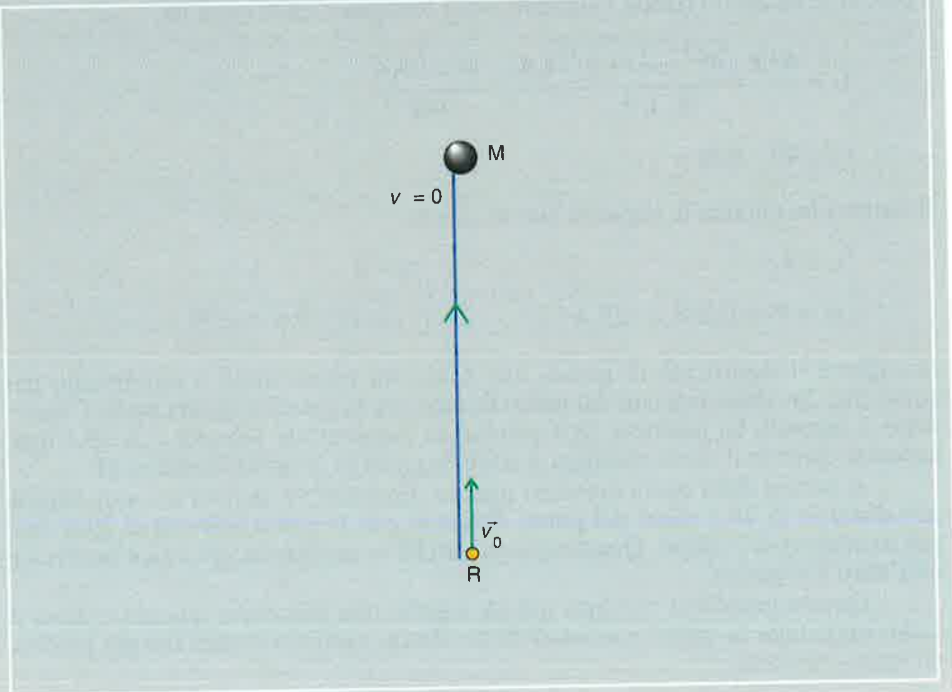
$$\begin{cases} s = 49t - \dfrac{1}{2}9{,}8t^2 \\ 0 = 49 - 9{,}8t \end{cases}$$

In questo caso l'equazione con una sola incognita è la seconda, che fornisce subito il valore di t da sostituire nella prima; si ha:

$$\begin{cases} s = 49 \cdot 5 - \dfrac{1}{2}9{,}8 \cdot 5^2 = 122{,}5 \\ t = \dfrac{49}{9{,}8} = 5 \end{cases}$$

Si conclude dunque che il sasso raggiunge la quota massima dopo 5 secondi, a una distanza di 122,5 metri dal punto di partenza R.

Figura 2
La velocità del corpo alla quota massima vale zero



10

Le equazioni di 2° grado a coefficienti letterali

Un problema che conduce a un'equazione di 2° grado letterale

In fig. 1 è rappresentata (in rosso) la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1$$

Insieme a questa parabola sono state rappresentate altre curve che si ottengono effettuando una traslazione lungo l'asse delle y.

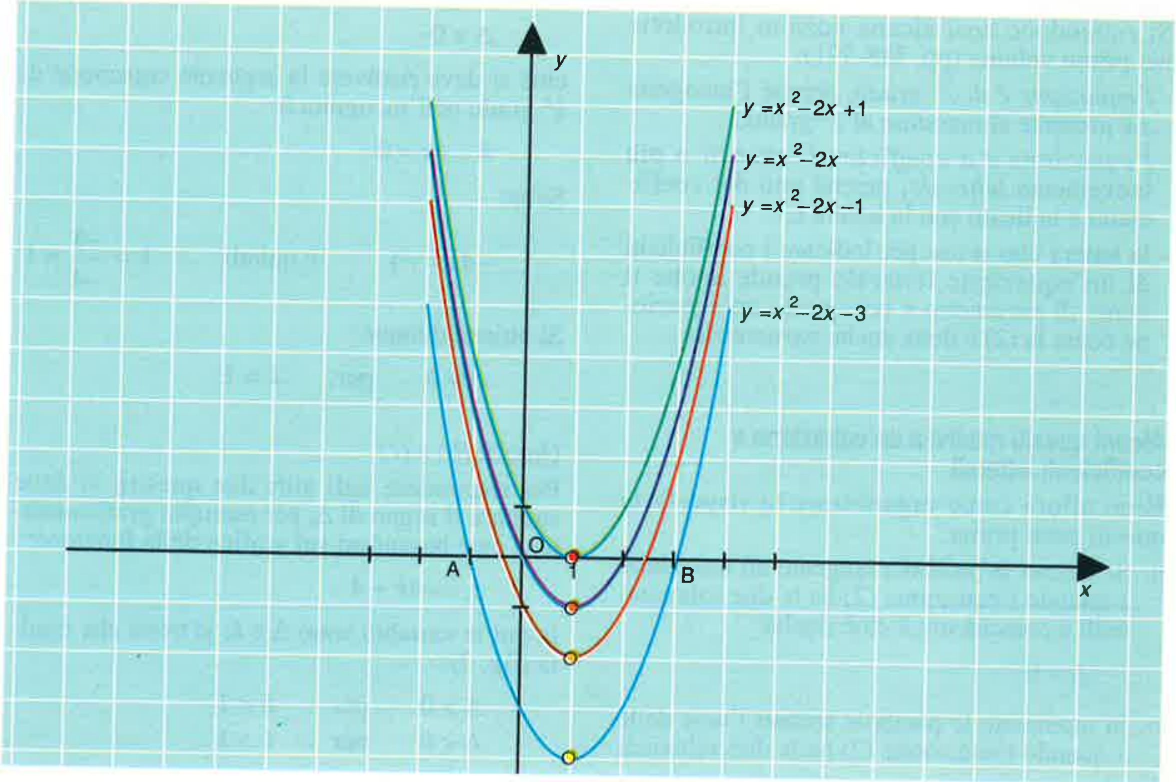
A proposito di questo insieme di parabole si possono porre vari quesiti, fra i quali, i seguenti:

a. qual è la parabola tangente all'asse delle x?

b. quali sono le parabole secanti l'asse delle x?

c. quali sono le parabole esterne all'asse delle x?

Figura 1
Un insieme di parabole



Per rispondere a queste domande si può tradurre il disegno in formule:

- con la traslazione di 1 verso l'alto si ottiene (vedi il capitolo 6, paragrafo 9) la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 + \mathbf{1} \qquad \text{cioè} \qquad y = x^2 - 2x + \mathbf{0}$$

- con la traslazione di 2 verso l'alto si ottiene la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 + \mathbf{2} \qquad \text{cioè} \qquad y = x^2 - 2x + \mathbf{1}$$

- con la traslazione di 2 verso il basso si ottiene la parabola:

$$y = x^2 - 2x - 1 - \mathbf{2} \qquad \text{cioè} \qquad y = x^2 - 2x + \mathbf{(-3)}$$

Si osserva che le parabole sono descritte da formule analoghe in cui varia solo l'ultimo coefficiente, perciò possono essere tutte riunite in un'unica formula, scrivendo al posto dell'ultimo coefficiente una lettera (che non sia y né x); si scrive per esempio:

$$y = x^2 - 2x + k \qquad (1)$$

Le ascisse dei punti d'intersezione di tutte le parabole (1) con l'asse delle x sono date allora dalla seguente equazione:

$$\mathbf{x^2 - 2x + k = 0} \qquad (2)$$

Si ottiene dunque *un'equazione di 2° grado a coefficienti letterali*, detta anche *equazione parametrica*.
Si riprendono così alcune nozioni introdotte nel primo volume (pp. 388-391):

- *l'equazione è di 2° grado*, perché l'incognita x è presente al massimo al 2° grado;
- *l'equazione è a coefficienti letterali* o più brevemente *letterale*, perché uno dei coefficienti è indicato con la lettera k;
- la lettera che si usa per indicare i coefficienti di un'equazione letterale prende anche il nome di *parametro* e per questo un'equazione come la (2) è detta anche *parametrica*.

Alcuni quesiti relativi a un'equazione a coefficienti letterali

Ecco allora come organizzare la risposta ai quesiti posti prima.

a. Si ottiene la parabola tangente all'asse delle x quando l'equazione (2) ha le due soluzioni reali e coincidenti, e cioè risulta:

$$\Delta = 0$$

b. Si ottengono le parabole secanti l'asse delle x quando l'equazione (2) ha le due soluzioni reali e distinte, e cioè risulta:

$$\Delta > 0$$

c. Si ottengono le parabole esterne all'asse delle x quando l'equazione (2) non ha soluzioni reali, e cioè risulta:

$$\Delta < 0$$

Per rispondere ai tre quesiti bisogna dunque calcolare il discriminante Δ dell'equazione:

$$x^2 - 2x + k = 0 \qquad (2)$$

in cui risulta:

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = k$$

Perciò il calcolo di

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

fornisce:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k$$

ossia:

$$\Delta = 4 - 4k$$

Ecco allora le risposte ai tre quesiti indicati prima.

Quesito (a)

Per rispondere al primo quesito, si deve determinare il valore di k per cui risulta:

$$\Delta = 0$$

cioè si deve risolvere la seguente equazione di 1° grado nell'incognita k:

$$4 - 4k = 0$$

Si ha:

$$-4k = -4 \qquad \text{e quindi} \qquad k = \frac{-4}{-4} = 1$$

Si ottiene dunque:

$$\Delta = 0 \qquad \text{per} \qquad k = 1$$

Quesiti (b) e (c)

Per rispondere agli altri due quesiti, si deve studiare il segno di Δ, per esempio graficamente, e cioè basandosi sul grafico della funzione:

$$\Delta = -4k + 4$$

in cui le variabili sono Δ e k; si trova che risulta (fig. 2):

$$\Delta > 0 \qquad \text{per} \qquad k < 1$$
$$\Delta < 0 \qquad \text{per} \qquad k > 1$$

Si può dunque concludere che *l'equazione*:

$$x^2 - 2x + k = 0$$

a. *ha due soluzioni reali e coincidenti per* k=1;
b. *ha due soluzioni reali e distinte per* k<1;
c. *non ha soluzioni reali per* k>1.

Queste conclusioni si interpretano graficamente nel modo seguente. *Fra le parabole:*

$$y = x^2 - 2x + k$$

si trova (fig. 3):
- *la parabola tangente l'asse delle* x *per* k = 1;
- *le parabole secanti l'asse delle* x *per* k < 1;
- *le parabole esterne all'asse delle* x *per* k > 1.

Un altro esempio di equazione di 2° grado letterale

Ecco un'altra equazione di 2° grado letterale:

$$mx^2 - 2mx + 3 = 0 \qquad (3)$$

Quest'equazione offre qualche difficoltà in più rispetto a quella esaminata prima, visto che il parametro è presente anche nel 1° coefficiente; si tratta infatti di un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

in cui è dato:

$$a = m \qquad b = -2m \qquad c = 3$$

Si pone dunque prima di tutto il seguente quesito:

a. In quale caso l'equazione non è più di 2° grado?
La risposta è immediata: *l'equazione non è di 2° grado se risulta*:

$$m = 0$$

In tal caso si ottiene la seguente equazione:

$$0x^2 - 2{\cdot}0{\cdot}x + 3 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad 3 = 0$$

che è *un'equazione impossibile*.

Se risulta $m \neq 0$, si possono risolvere quesiti analoghi a quelli studiati nel caso della precedente equazione letterale, e cioè:

b. per quali valori di m l'equazione ha le soluzioni coincidenti?

Figura 2
Il segno del discriminante per $\Delta = 4 - 4k$

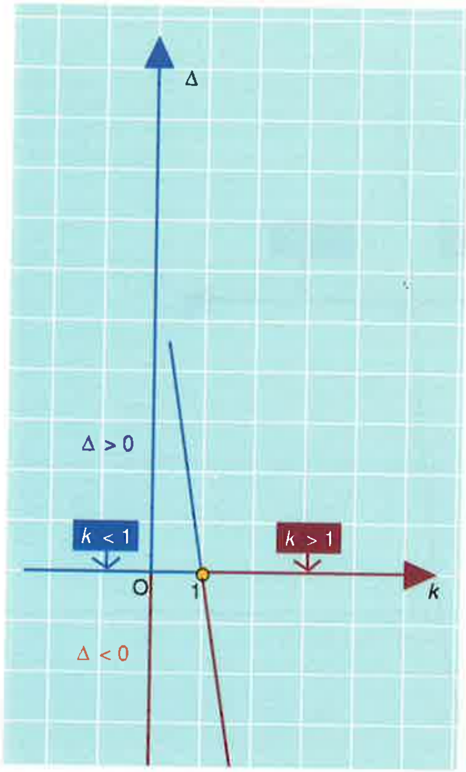
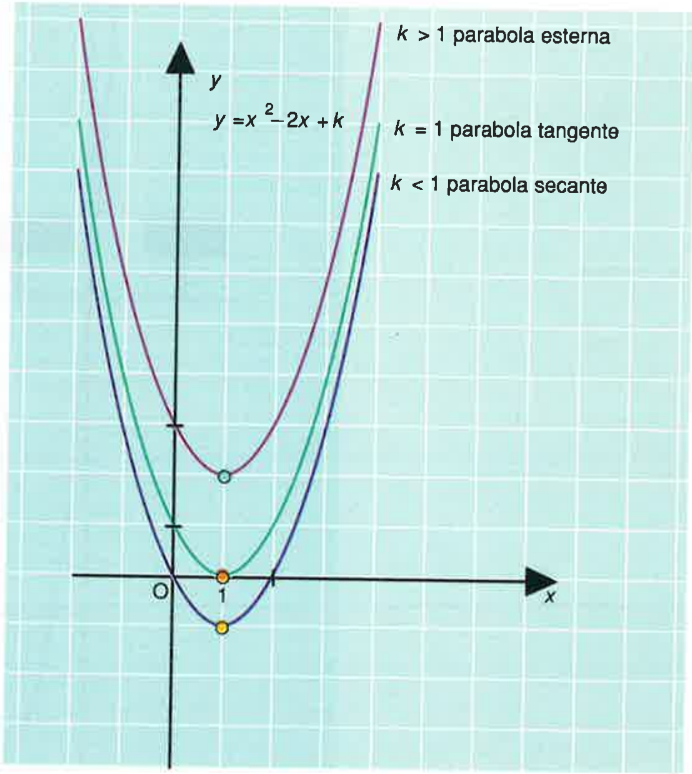


Figura 3
La posizione delle parabole rispetto all'asse delle x



c. per quali valori di m l'equazione ha soluzioni reali?
d. per quali valori di m l'equazione non ha soluzioni reali?

Per rispondere a queste domande bisogna esaminare il discriminante Δ, che è dato da:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = 4m^2 - 12m$$

Ecco le risposte ai tre quesiti.

Quesito (b)

Per rispondere al quesito (b) si debbono individuare i valori di m per cui risulta:

$$\Delta = 0$$

perciò si deve risolvere la seguente equazione di 2° grado nell'incognita m:

$$4m^2 - 12m = 0$$

Si tratta di un'equazione incompleta le cui soluzioni si possono ottenere raccogliendo il fattore comune $4m$; si ha:

$$4m(m-3) = 0 \quad \begin{cases} 4m = 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene dunque:

$$\Delta = 0 \quad \text{per} \quad m_1 = 0 \quad \text{o} \quad m_2 = 3$$

Ma, sostituendo 0 al posto di m nella (3), si ottiene un'equazione che non è più di 2° grado; perciò, solo sostituendo 3 a m si individua un'equazione di 2° grado con le soluzioni coincidenti. Si tratta dell'equazione seguente:

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

Quesiti (c) e (d)

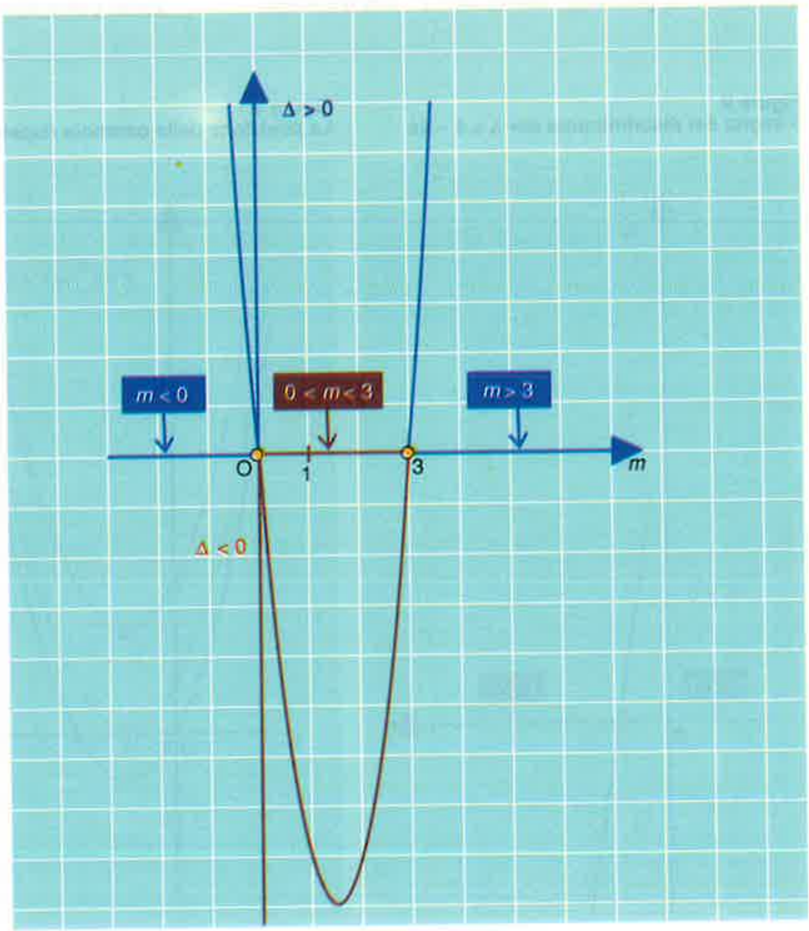
Per rispondere alle altre due domande, bisogna invece individuare i casi in cui risulta:

$$\Delta > 0 \quad \text{oppure} \quad \Delta < 0$$

Si è dunque condotti a studiare, per esempio graficamente, il segno del trinomio:

$$\Delta = 4m^2 - 12m$$

Figura 4
Il segno del discriminante
$\Delta = 4m^2 - 12m$



in cui le variabili sono Δ e m; si ha (fig. 4):

$\Delta > 0$ per $m < 0$ oppure $m > 3$
$\Delta < 0$ per $0 < m < 3$

Si arriva dunque alle seguenti conclusioni, valide per l'equazione:

$$mx^2 - 2mx + 3 = 0$$

a. *l'equazione non è più di 2° grado per* $m_1 = 0$;
b. *l'equazione è di 2° grado con le soluzioni coincidenti per* $m_2 = 3$;
c. *l'equazione è di 2° grado con due soluzioni reali per* $m < 0$ *oppure* $m > 3$;
d. *l'equazione è di 2° grado senza soluzioni reali per* $0 < m < 3$.

Considerazioni valide per tutte le equazioni letterali

Le considerazioni svolte a partire da quest'ultimo esempio possono essere ripetute a partire da qualunque altra equazione letterale e si ha dunque che:

1. *un'equazione di 2° grado letterale è un'equazione del tipo:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con i coefficienti letterali;

2. *i quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale sono i seguenti:*
   - *descrivere i casi in cui l'equazione non è di 2° grado, e cioè risulta* $a = 0$;
   - *descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni coincidenti, cioè risulta* $a \neq 0$ *e* $\Delta = 0$;
   - *descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con le soluzioni reali, cioè risulta* $a \neq 0$ *e* $\Delta > 0$.

Incognita e coefficienti in un'equazione letterale

Nel primo volume (p. 391), a proposito delle equazioni letterali si erano date due alternative:

- indicare l'incognita con x e i coefficienti con altre lettere dell'alfabeto;
- usare liberamente le lettere, ma dire esplicitamente quale lettera indica l'incognita.

Queste considerazioni sono ancora valide, tenendo presente però un'osservazione: *un'equazione letterale è di 2° grado solo se l'incognita è elevata a esponente 2.*
Così, per esempio, l'equazione seguente:

$$m^2p - 3m + 2 = 0$$

è:

- di 1° grado nell'incognita p;
- di 2° grado nell'incognita m, e in tal caso dovrebbe essere scritta nella forma seguente:

$$pm^2 - 3m + 2 = 0$$

Verifiche

Conoscenze

① Come si riconosce un'equazione di 2° grado letterale?

② Quali sono i quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale?

Comprensione

① Fra le seguenti equazioni indicare quella che *non* è a coefficienti letterali, motivando la scelta.

$$2x^2 - bx = 0 \qquad k^2 - 2k + 5 = 0 \qquad nx^2 + n = 0$$

② Fra le seguenti equazioni a coefficienti letterali indicare quali sono di 2° grado, motivando la scelta.

$$m^2x - 1 = 0 \qquad mx^2 - 1 = 0 \qquad m^2x^2 - x = 0$$

③ Scrivere qualche equazione di 2° grado letterale, indicando i coefficienti con lettere a piacere.

Applicazioni

① Esaminare la seguente equazione letterale:

$$bx^2 + bx - 1 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere il caso in cui l'equazione diventa di 1° grado;
b. descrivere i casi in cui l'equazione ha le soluzioni coincidenti;
c. descrivere i casi in cui l'equazione ha le soluzioni reali.

I sistemi di 2° grado a coefficienti letterali

Un problema che conduce ad un sistema di 2° grado letterale

Consideriamo di nuovo l'insieme di parabole:

$$y = x^2 - 2x + k$$

esaminato nel paragrafo 10 per studiare la posizione delle curve rispetto ad un'altra retta, per esempio la retta r di fig. 1, e cioè:

$$y = 2x - 1$$

Ci si chiede:

a. qual è la parabola tangente alla retta r?
b. quali sono le parabole secanti la retta r?
c. quali sono le parabole esterne alla retta r?

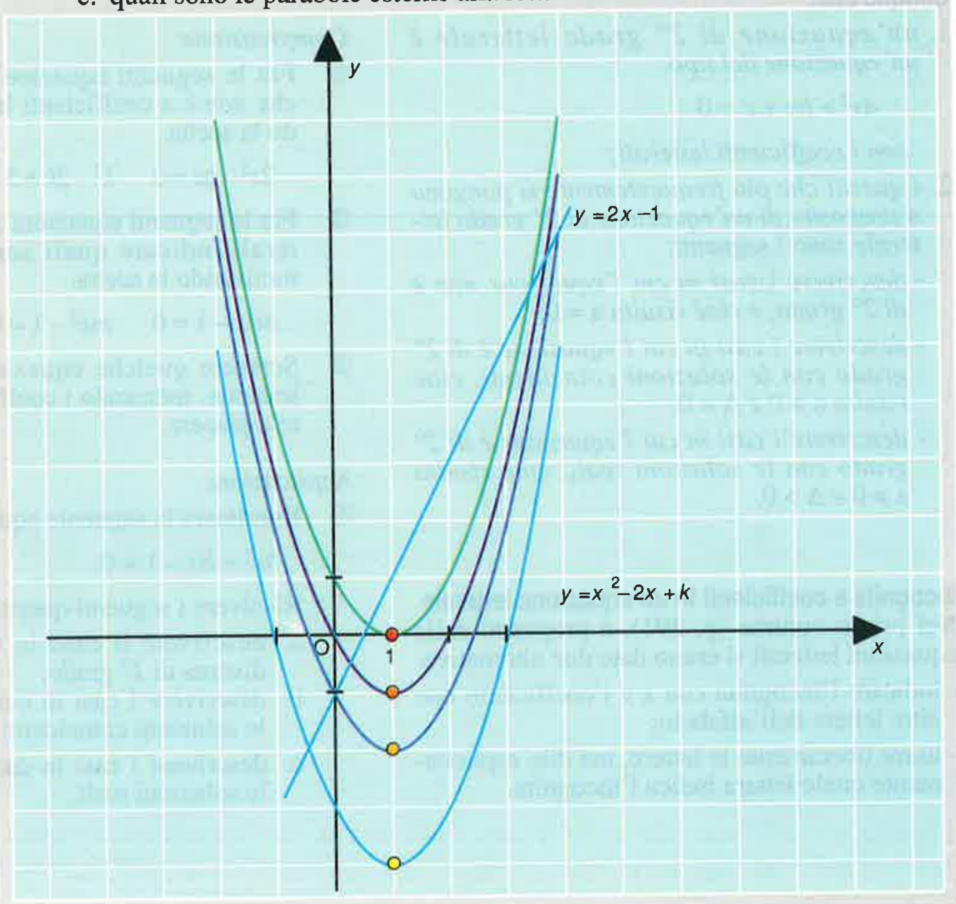


Figura 1
La posizione di un insieme di parabole rispetto ad una retta

Gli stessi quesiti possono anche essere posti nella forma seguente:

a. qual è la parabola che ha due intersezioni coincidenti con la retta r?
b. quali sono le parabole che hanno due intersezioni distinte con la retta r?
c. quali sono le parabole che non hanno intersezioni con la retta r?

Si è così condotti a ricordare che, per determinare le intersezioni fra due curve, bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve; nel caso assegnato bisogna esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + k \end{cases}$$

Si tratta di un *sistema letterale*, detto anche *sistema parametrico*.

Risolvendo per sostituzione un sistema letterale si arriva a un'equazione di 2° grado letterale

Risolvendo il sistema per sostituzione, si ha:

$$\begin{cases} y = \boxed{2x - 1} \\ \boxed{2x - 1} = x^2 - 2x + k \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 4x + 1 + k = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ottenuta, cioè quella che fornisce le ascisse dei punti d'intersezione, è:

$$x^2 - 4x + 1 + k = 0 \qquad (1)$$

cioè è un'equazione di 2° grado letterale. Perciò si può dire che:

- se l'equazione (1) ha due soluzioni coincidenti, anche il sistema avrà due soluzioni coincidenti;
- se l'equazione (1) ha due soluzioni reali e distinte, anche il sistema avrà due soluzioni reali e distinte;
- se l'equazione (1) non ha soluzioni reali, anche il sistema non avrà soluzioni reali.

Si è così condotti a ripetere il procedimento seguito nel paragrafo 10 per esaminare l'equazione (1), in cui risulta:

$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 1 + k$$

e quindi:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + k) = 16 - 4 - 4k$$

ossia:

$$\Delta = 12 - 4k \qquad (2)$$

Si ha quindi:

$$\Delta = 0 \qquad \text{per} \qquad k = 3$$

Esaminando poi il segno di Δ al variare di k si trova (fig. 2):

$$\Delta > 0 \quad \text{per } k < 3$$
$$\Delta < 0 \quad \text{per } k > 3$$

Si può dunque concludere che il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + k \end{cases}$$

- *ha due soluzioni reali e coincidenti per* k = 3;
- *ha due soluzioni reali e distinte per* k < 3;
- *non ha soluzioni reali per* k > 3.

Queste conclusioni si interpretano graficamente nel modo seguente (fig. 3): *fra le parabole:*

$$y = x^2 - 2x + k$$

si trova:

- *la parabola tangente alla retta* r *per* k = 3;
- *le parabole secanti la retta* r *per* k < 3;
- *le parabole esterne alla retta* r *per* k > 3.

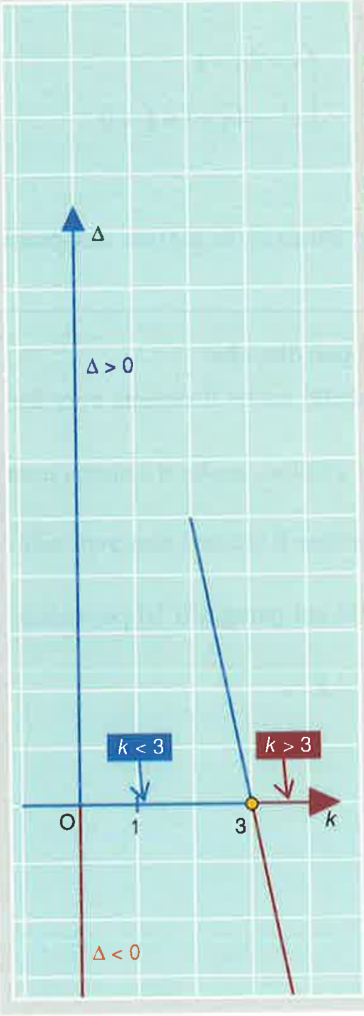


Figura 2 (a sinistra)
Il segno del discriminante
$\Delta = 12 - 4k$

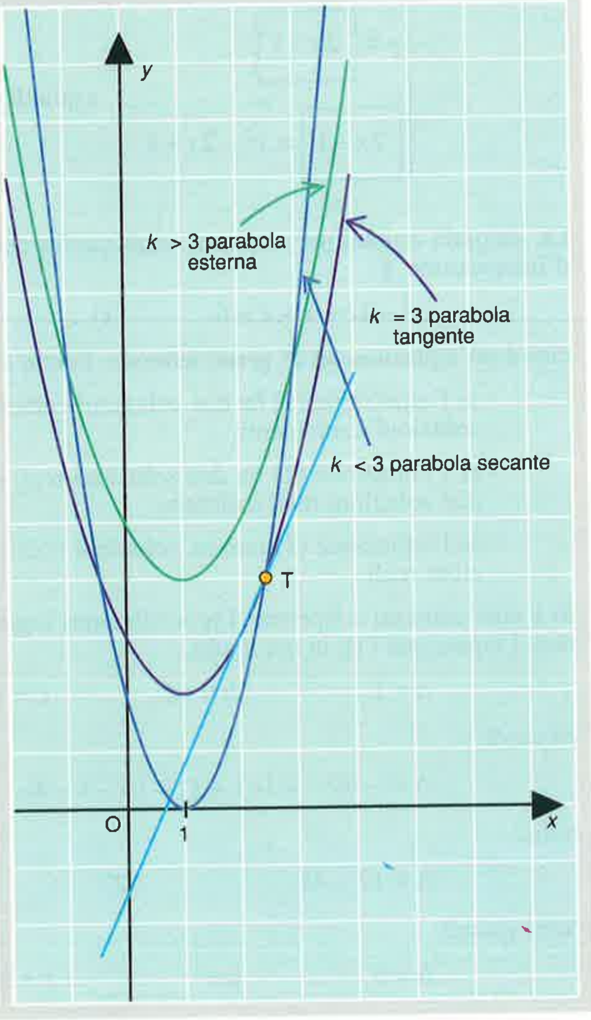


Figura 3 (a destra)
La posizione delle parabole rispetto alla retta

Un altro esempio di sistema letterale

Ecco un altro esempio di sistema a coefficienti letterali da esaminare:

$$\begin{cases} x+y=k \\ xy=1 \end{cases}$$

A proposito di questo sistema si possono porre quesiti analoghi a quelli precedenti, e cioè:

a. per quali valori di k il sistema ha due soluzioni coincidenti?
b. per quali valori di k il sistema ha due soluzioni distinte?
c. per quali valori di k il sistema non ha soluzioni reali?

Per rispondere ai quesiti si comincia col risolvere il sistema per sostituzione e per questo occorre ricavare un'incognita, per esempio y, dalla prima equazione e sostituire l'espressione ottenuta nella seconda; si ha:

$$\begin{cases} y=\boxed{-x+k} \\ x\boxed{(-x+k)}=1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y=-x+k \\ -x^2+kx-1=0 \end{cases}$$

La seconda equazione ottenuta, cioè quella che fornisce le ascisse dei punti d'intersezione, è:

$$-x^2+kx-1=0 \qquad (3)$$

Si tratta dunque di un'equazione di 2° grado letterale nell'incognita x.
Si è così condotti a ripetere il procedimento seguito nel pragrafo 10 per esaminare l'equazione (3), in cui risulta:

$$a=-1 \qquad b=k \qquad c=-1$$

e quindi:

$$\Delta = k^2-4\cdot(-1)\,(-1)$$

ossia:

$$\Delta = k^2-4 \qquad (4)$$

Si ha quindi:

$$\Delta=0 \qquad \text{per} \quad k^2=4 \quad \text{ossia} \quad k=\pm 2$$

Esaminando poi il segno di Δ al variare di k si trova:

$$\Delta>0 \qquad \text{per } k<-2 \quad \text{o} \quad k>2$$
$$\Delta<0 \qquad \text{per } -2<k<2$$

Si può dunque concludere che il sistema:

$$\begin{cases} x+y=k \\ xy=1 \end{cases}$$

- *ha due soluzioni reali e coincidenti per* $k=-2$ *o* $k=2$;
- *ha due soluzioni reali e distinte per* $k<-2$ *o* $k>2$;
- *non ha soluzioni reali per* $-2<k<2$.

L'interpretazione grafica del sistema letterale

Per interpretare graficamente le conclusioni ottenute bisogna rappresentare sul piano cartesiano le equazioni in due variabili che formano il sistema; si ha che (fig. 4):

- l'equazione:

$$xy = 1 \qquad \text{ossia} \qquad y = \frac{1}{x}$$

ha come grafico un'iperbole(fig. 4*a*);

- l'equazione:

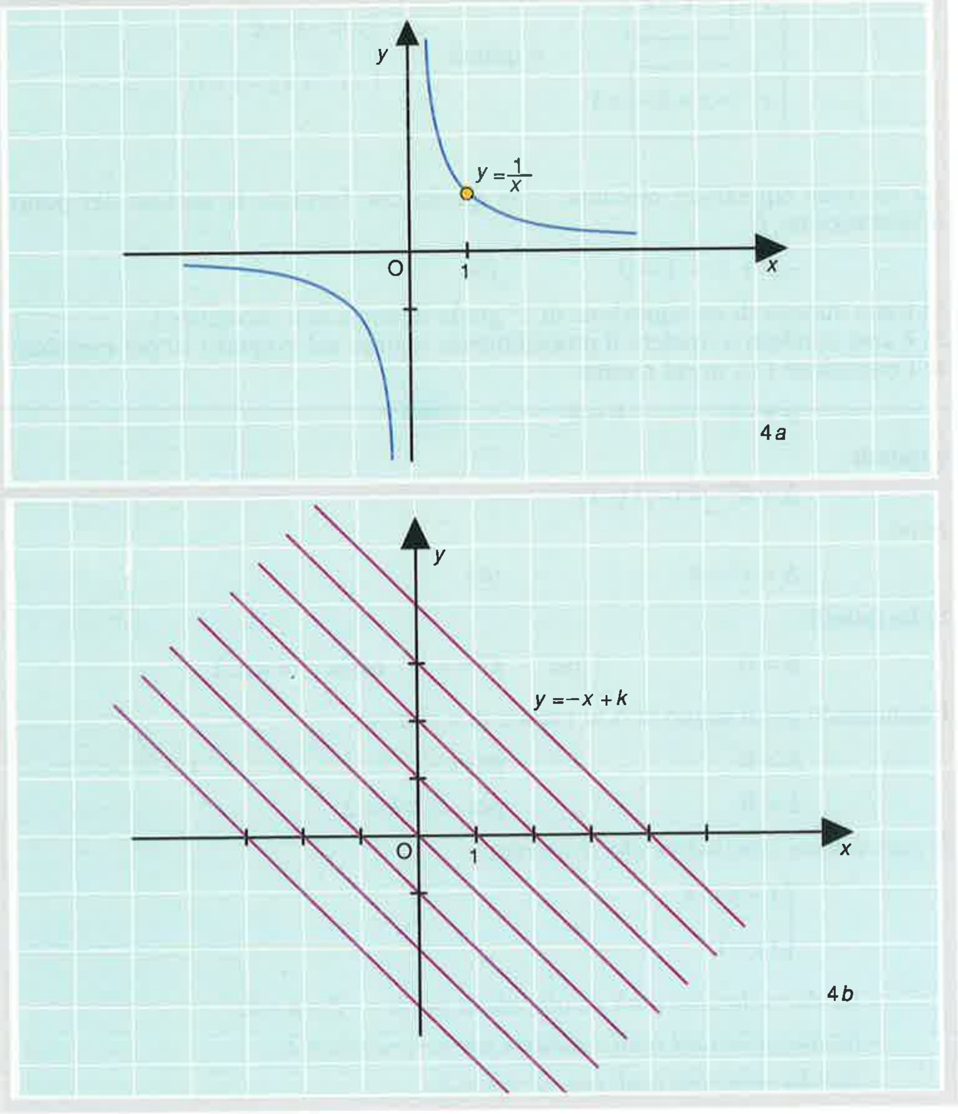
$$x + y = k \qquad \text{ossia} \qquad y = -x + k$$

ha come grafico un insieme di rette che hanno tutte la stessa pendenza (−1) e intersecano l'asse delle y in punti di ordinata k (fig. 4*b*).

Così si può dire che (figure 5 e 6): *fra le rette:*

$$y = -x + k$$

Figura 4
Un'iperbole e un insieme di rette



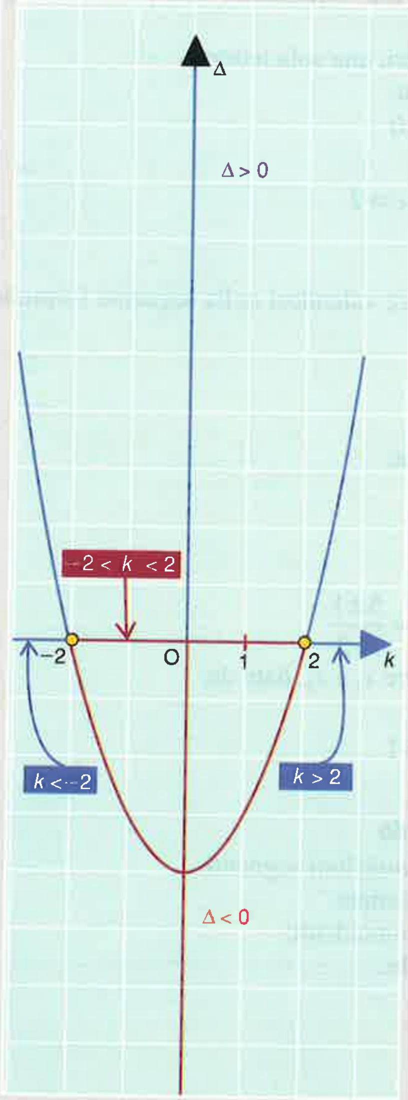
si trovano:

- *le rette tangenti all'iperbole per* k = –2 *o* k = 2;
- *le rette secanti l'iperbole per* k < –2 *o* k > 2;
- *le rette esterne all'iperbole per* –2 < k < 2.

Considerazioni valide per i sistemi letterali

L'interpretazione grafica visualizza efficacemente i risultati algebrici ottenuti studiando un sistema di 2° grado letterale, ma non è indispensabile; sono invece sempre valide le considerazioni seguenti:

1. *un sistema di 2° grado letterale o parametrico è un sistema di 2° grado con i coefficienti letterali;*
2. *risolvendo il sistema con il metodo di sostituzione si arriva a un'equazione di 2° grado letterale;*
3. *i casi in cui l'equazione ottenuta ha soluzioni reali e coincidenti, reali e distinte o non ha soluzioni reali diventano casi in cui il sistema ha soluzioni reali e coincidenti, reali e distinte o non ha soluzioni reali.*



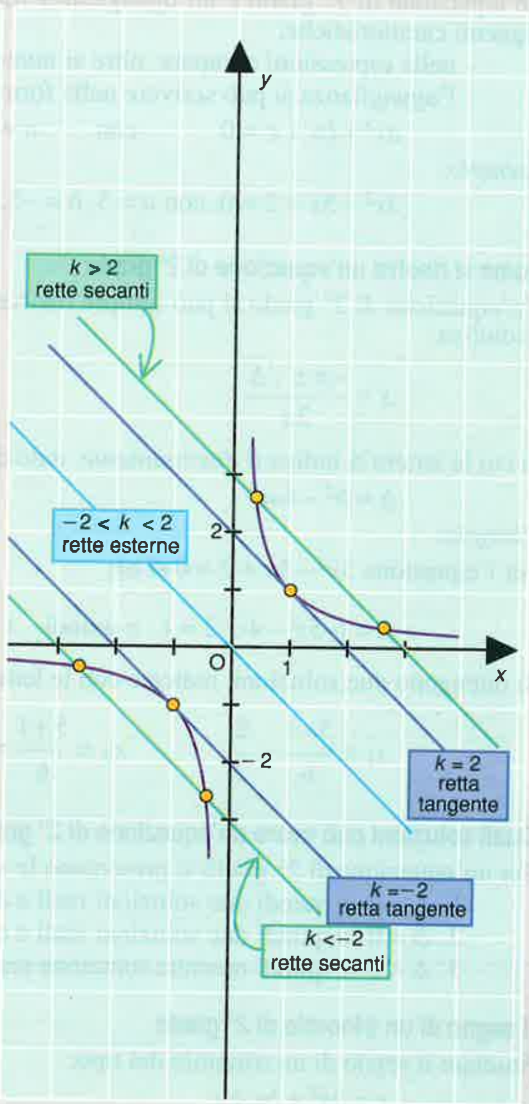


Figura 5 (a sinistra)
Il segno del discriminante per $\Delta = k^2 - 4$

Figura 6 (a destra)
La posizione delle rette rispetto all'iperbole

Che cosa bisogna sapere

Come si riconosce un'equazione di 2° grado in un'incognita

Un'equazione di 2° grado è un'uguaglianza fra due espressioni, che presentano le seguenti caratteristiche:

- nelle espressioni compare, oltre ai numeri, una sola lettera;
- l'uguaglianza si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con} \qquad a \neq 0$$

Esempio:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ con } a = 3,\ b = -5,\ c = 2$$

Come si risolve un'equazione di 2° grado

Un'equazione di 2° grado si può sempre risolvere valendosi della seguente formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

in cui la lettera Δ indica *il discriminante*, dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Esempio:

Per l'equazione $3x^2 - 5x + 2 = 0$ si ha:

$$\Delta = (-5)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}2 = 1 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 3}$$

Si ottengono due soluzioni, indicate con le lettere x_1 e x_2, date da:

$$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad\qquad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

Quali soluzioni può avere un'equazione di 2° grado

Per un'equazione di 2° grado si presentano le situazioni seguenti:

1. $\Delta > 0$ e quindi due soluzioni reali e distinte;
2. $\Delta = 0$ e quindi due soluzioni reali e coincidenti;
3. $\Delta < 0$ e quindi nessuna soluzione reale.

Il segno di un trinomio di 2° grado

Studiare il segno di un trinomio del tipo:

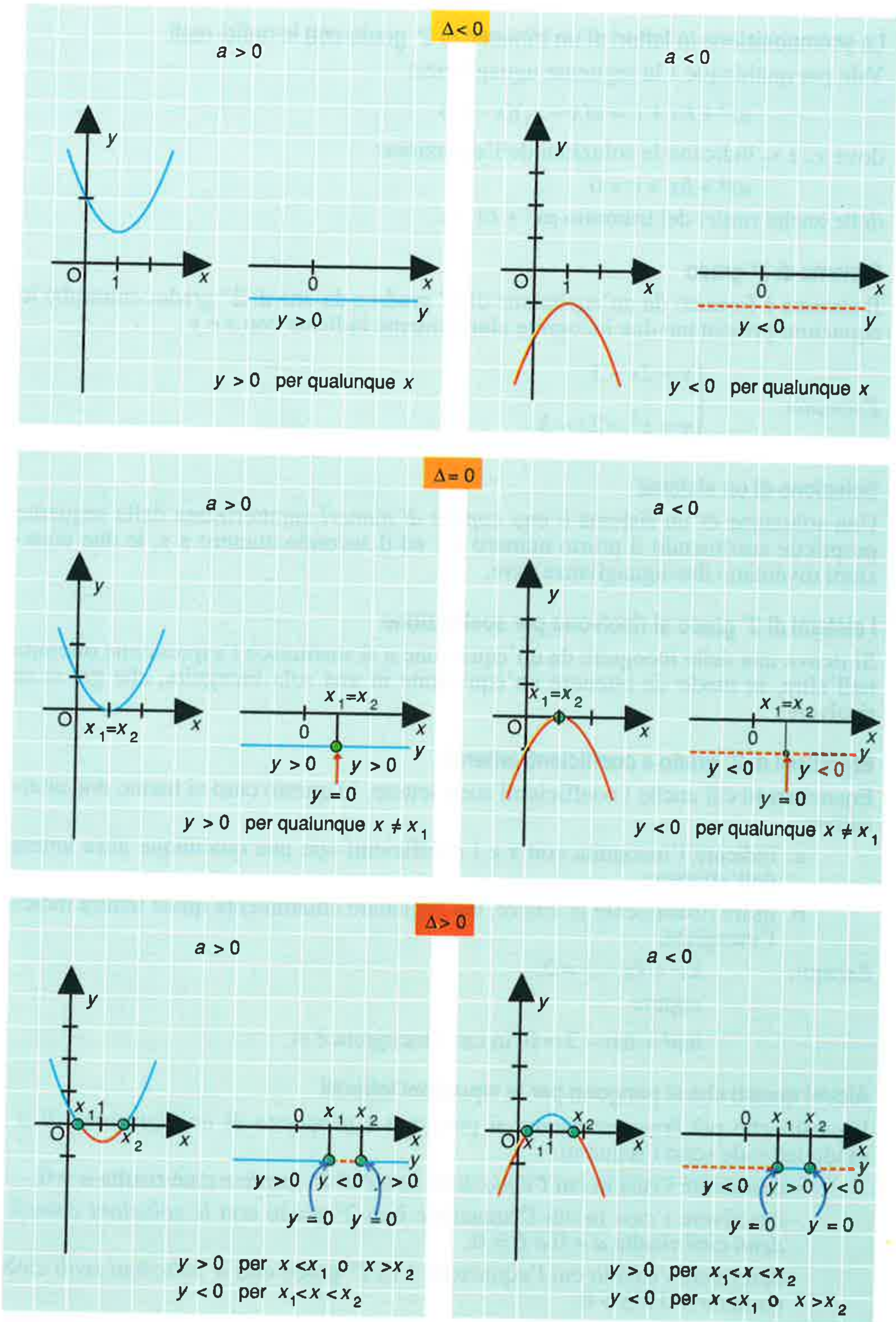
$$y = ax^2 + bx + c$$

vuol dire determinare per quali valori di x risulta:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

Indicando con y il valore che assume il trinomio, il problema può essere risolto con l'aiuto della geometria analitica, come è mostrato qui sotto.

Il segno di $\boldsymbol{y = ax + bx + c}$



Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di 2° grado

Le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di 2° grado sono legate ai coefficienti a, b, c dalle relazioni seguenti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

La scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado con le radici reali

Vale per qualunque x la seguente uguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove x_1 e x_2 indicano le soluzioni dell'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dette anche *radici* del trinomio $ax^2 + bx + c$.

Sistema di 2° grado

Il sistema è formato da un'equazione di 1° grado e da una di 2° grado; entrambe le equazioni presentano due incognite abitualmente indicate con x e y.

Esempio:
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

Soluzione di un sistema

Una soluzione di un sistema è *una coppia di numeri* caratterizzata dalla seguente proprietà: sostituendo il primo numero a x ed il secondo numero a y, le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

I sistemi di 2° grado si risolvono per sostituzione

Si ricava una delle incognite da un'equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nell'altra, in modo da ottenere un'equazione in una sola incognita, che già si sa risolvere.

Equazioni di 2° grado a coefficienti letterali

Equazioni in cui anche i coefficienti sono lettere; in questo caso si hanno due alternative:

a. indicare l'incognita con x e i coefficienti con una qualunque altra lettera dell'alfabeto;
b. usare liberamente le lettere, ma segnalare chiaramente quale lettera indica l'incognita.

Esempi: $kx^2 + kx - 3 = 0$,
oppure
$bm^2 + bm - 3 = 0$, in cui l'incognita è m

Alcuni quesiti che si pongono per le equazioni letterali

I quesiti che più frequentemente si pongono a proposito di un'equazione di 2° grado letterale sono i seguenti:

- descrivere i casi in cui *l'equazione non è di 2° grado* e cioè risulta $a = 0$;
- descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con *le soluzioni coincidenti* cioè risulta $a \neq 0$ e $\Delta = 0$;
- descrivere i casi in cui l'equazione è di 2° grado con *le soluzioni reali* cioè risulta $a \neq 0$ e $\Delta > 0$.

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo propone le nozioni fondamentali per risolvere equazioni, disequazioni e sistemi di 2° grado, completando il capitolo nono del primo volume; vi si ritrovano dunque caratteristiche analoghe: non basta conoscere le varie nozioni, bisogna anche saperle applicare, scegliendo il procedimento adatto al caso che si presenta.

Gli esercizi si possono dividere anche ora in tre categorie:

I. esercizi sulle equazioni;
II. esercizi sulle disequazioni;
III. esercizi sui sistemi.

All'interno di queste categorie si trovano poi esercizi di due tipi:

A. esercizi di calcolo (per esempio risoluzione di un'equazione);
B. risoluzione di problemi che richiedono di applicare i calcoli.

I. Esercizi sulle equazioni

A. Esercizi di calcolo

Attività 1

Esaminare la seguente equazione:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. stabilire se l'equazione è di 2° grado e indicarne i coefficienti;
b. stabilire se l'equazione ha soluzioni reali;
c. calcolare le eventuali soluzioni;
d. verificare che le soluzioni ottenute siano esatte.

a. *L'equazione è di 2° grado perché è del tipo:*

a ...... $+ b$ ...... $+ c = 0$

con:

$a =$ ...... $b =$ ...... $c =$ ......

b. *Si calcola il discriminante* Δ *dato da:*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In questo caso si ottiene:

$$\Delta = \text{.................} = 25$$

L'equazione ha dunque ....

c. *Le soluzioni sono date dalla formula risolutiva:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

In questo caso si ottiene:

$$x = \frac{-\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots}}{2 \cdot \ldots} = \frac{-\ldots\ldots \pm \ldots\ldots}{\ldots}$$

Si ottengono dunque le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

d. *Verifica che la soluzione* x_1 *è esatta:*

I membro = $2(\ldots\ldots)^2 + 7(\ldots\ldots) + 3 = 0$ II membro = ...

Verifica che la soluzione x_2 *è esatta:*

I membro = $2(\ldots\ldots)^2 + 7(\ldots\ldots) + 3 = 0$ II membro = ...

Perciò le soluzioni sono ....

Attività 2

Esaminare la seguente equazione a coefficienti letterali:

$$(k-1)x^2 - x - k = 0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. stabilire in quale caso l'equazione non è di 2° grado;
b. stabilire in quali casi l'equazione ha le soluzioni coincidenti;
c. stabilire in quali casi l'equazione ha le soluzioni reali.

a. *L'equazione è del tipo:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con:

$a = \ldots\ldots$ $b = \ldots\ldots$ $c = \ldots\ldots$

Perciò l'equazione non è più di 2° grado se risulta:

.... = 0 ossia $k = 1$

In tal caso l'equazione diventa:

.... = 0 con la soluzione $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. *Si calcola il discriminante* Δ *dato da:*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In questo caso si ottiene:

$$\Delta = \text{...................} = (2k-1)^2$$

L'equazione ha due soluzioni coincidenti se risulta:

.... = 0 ossia $k = \frac{1}{2}$

In tal caso l'equazione diventa:

.... = 0 con la soluzione $x_1 = x_2 =$ ....

c. *L'equazione ha le soluzioni reali per qualunque valore di* k ≠ ...., *perché risulta:*

.... > 0 per ....

B. Problemi che conducono a equazioni di 2° grado

Attività 3. Un problema di geometria

È dato un triangolo rettangolo isoscele con i cateti AB e AC lunghi 6 cm. Da un punto P variabile su AB si conduce la parallela all'ipotenusa BC, fino a incontrare l'altro cateto in Q; da P e da Q si conducono le perpendicolari all'ipotenusa, fino a incontrare l'ipotenusa stessa in R e T.

Determinare la posizione di P per cui il rettangolo PQRT ha l'area S=8 cm^2.

Il problema si può risolvere procedendo ordinatamente per passi successivi nel modo seguente.

1. Si visualizza il problema con dei disegni

   Si comincia con qualche disegno che visualizzi il problema (fig. 1):

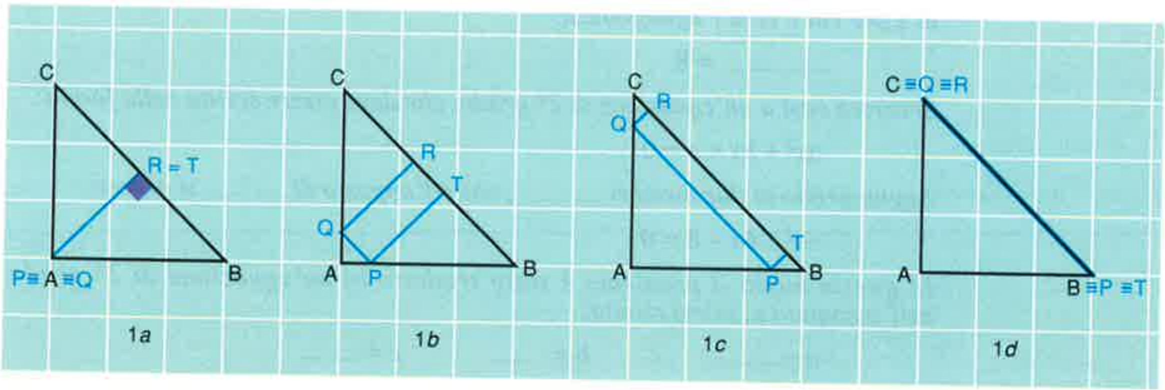
   - *il punto P inizialmente è sovrapposto ad A* (fig. 1*a*); *in tal caso il rettangolo si riduce a un segmento (PR) e perciò l'area* S *vale:*

     S=.............

   - *il punto P «scorre» sul cateto AB* (figure 1*b*, 1*c*);
   - *il punto P arriva a sovrapporsi su B* (fig. 1*d*); *così il rettangolo si riduce di nuovo ad un segmento (BC) e l'area* S *vale:*

     S=............

Figura 1
Visualizzare un problema con dei disegni



2. Si sceglie l'incognita

Le figure fanno capire che si può «fermare» il punto P mentre scorre su AB, fissando la distanza AP; perciò si sceglie (fig. 2):

$$x = \overline{AP}$$

La fig. 2 *mostra inoltre che* x *può assumere solo valori positivi e più piccoli di 6; sarà dunque:*

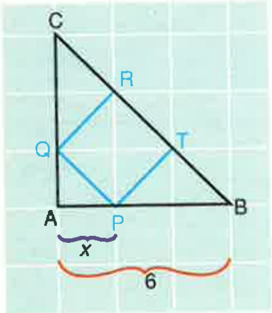
$$0 \leq x \leq 6$$

e, in particolare:

$x = 0$ *quando P coincide con A;*

$x = 6$ *quando P coincide con B.*

Figura 2
La scelta dell'incognita



3. Si traduce il problema in un'equazione

Avendo indicato con x *la lunghezza di AP, si può esprimere per mezzo di* x *l'area* S *del rettangolo, data da* (fig. 2):

$$S = \overline{PQ} \cdot \overline{QR}$$

Per questo bisogna esprimere i due lati del rettangolo in funzione di x; *si ha che* (fig. 3):

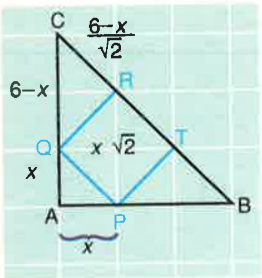
- *PQ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele APQ, che ha i due cateti lunghi* x, *perciò, applicando il teorema di Pitagora, si trova:*

$\overline{PQ}^2 =$ .... ossia $\overline{PQ}^2 = 2$...........

da cui si ricava:

$$\overline{PQ} = x\sqrt{2}$$

Figura 3
Esprimere l'area del rettangolo in funzione dell'incognita



- *QR è un cateto del triangolo rettangolo isoscele CRQ, che ha l'ipotenusa lunga* 6–x, *perciò, applicando il teorema di Pitagora, si trova:*

$(6-x)^2 =$ .... ossia $(6-x)^2 = 2$..........

da cui si ricava:

$$\overline{QR} = \frac{(6-x)}{\sqrt{2}}$$

L'area S *è dunque data da:*

$S =$ .... $= 6x - x^2$

Ora la frase «Determinare la posizione di P per cui il rettangolo PQRT ha l'area S = *8 cm²» può essere espressa nel modo seguente: determinare il valore di* x *per cui è vera l'uguaglianza:*

.... $= 8$

Si arriva così a un'equazione di 2° grado, che deve essere scritta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aggiungendo ai due membri ...., *che è l'opposto di* ...., *si ottiene:*

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

In questo modo il problema è stato tradotto in un'equazione di 2° grado nell'incognita x, *in cui risulta:*

$a =$ .... $b =$ .... $c =$ ....

4. Si risolve l'equazione
Valendosi della formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{con} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

si ottiene:

$$\Delta = (.........)^2 - .... = 4$$

e quindi:

$$x = \frac{......\pm......}{2(-1)} = ...$$

Si ottengono dunque le soluzioni seguenti:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 4$$

5. Si controlla che le soluzioni ottenute siano esatte
Si sono così trovate due posizioni di P richieste dal problema: P può trovarsi a distanza 2 oppure a distanza 4 da A. È immediato verificare che, in entrambi i casi, si ottiene un rettangolo di area 8 (fig. 4).

Il procedimento per risolvere un problema di geometria

I problemi di geometria possono essere risolti seguendo un procedimento analogo a quello precedente; si tratta di percorrere ordinatamente le seguenti tappe:

1. visualizzare il problema con opportuni disegni;
2. scegliere l'incognita x, precisando le limitazioni che deve rispettare;
3. tradurre il problema in un'equazione che leghi i dati all'incognita;
4. risolvere l'equazione;
5. controllare che le soluzioni ottenute siano esatte.

Attività 4

Risolvere di nuovo il problema dell'attività 3, considerando però i cateti del triangolo lunghi 12 e l'area del rettangolo $S = 16$.

Confrontare questo problema con il precedente e spiegare perché i dati sono raddoppiati, ma le soluzioni non sono raddoppiate. (*Vedi il capitolo 6, paragrafo 3*)

Modificare solo il valore dell'area S in modo da ottenere un problema che abbia le soluzioni doppie di quelle date nel problema precedente.

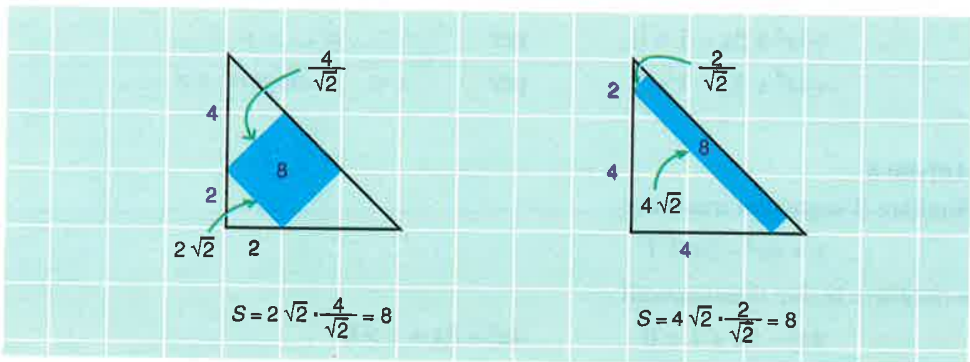


Figura 4
Le soluzioni del problema

II. Esercitazioni sulle disequazioni

A. Esercizi di calcolo

Attività 5

Studiare il segno del trinomio:

$$y = -4x^2 + 5x - 1 \qquad (1)$$

e risolvere le due disequazioni:

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \qquad -4x^2 + 5x - 1 > 0$$

1. *Si calcola il discriminante Δ dell'equazione:*

$$-4x^2 + 5x - 1 = 0$$

e si ottiene:

$$\Delta = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots > 0$$

Si conclude che il trinomio $-4x^2 + 5x - 1$ *ha* .... *date da:*

$$x = \dots\dots\dots$$

Il trinomio ha dunque le due radici date da:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{4}$$

2. *A questo punto si hanno le due alternative seguenti*
   A. *Si traccia il grafico della parabola (1);*
   B. *Si ricordano a memoria le conclusioni indicate nel paragrafo 6.*

A. *Per tracciare il grafico necessario a studiare il segno del trinomio* $-4x^2 + 5x - 1$ *basta tenere presente che:*
   - *il coefficiente* a = ... < 0 *e perciò la parabola ha la concavità rivolta verso* .... ;
   - *la parabola incontra l'asse delle* x *nei punti* ....

   Si conclude che il trinomio ha segno positivo quando x *varia nell'intervallo* ...., *ha segno negativo quando* x *varia al di fuori dell'intervallo* ....

B. *Si ricorda che un trinomio con le radici reali e distinte ha il segno del coefficiente* .... *quando* x *varia nell'intervallo* .... *e segno opposto a quello del coefficiente* ....*quando* x *varia al di fuori dell'intervallo* ....*; perciò il trinomio assegnato ha segno positivo quando* x *varia nell'intervallo* ...., *ha segno negativo quando* x *varia al di fuori dell'intervallo* ....

3. *Schematizzare i risultati ottenuti con il procedimento indicato nel paragrafo 8 e scrivere le soluzioni delle due disequazioni, completando le formule seguenti:*

$$-4x^2 + 5x - 1 > 0 \quad \text{per} \quad \dots\dots < \dots\dots < \dots\dots$$

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \quad \text{per} \quad x < \dots\dots \text{ oppure } x > \dots\dots$$

Attività 6

Studiare il segno del trinomio:

$$y = 4x^2 - 5x + 1$$

e risolvere le due disequazioni:

$$4x^2 - 5x + 1 < 0 \qquad 4x^2 - 5x + 1 > 0$$

Attività 7

Le attività 5 e 6 portano a risolvere le seguenti disequazioni:

$$-4x^2 + 5x - 1 < 0 \qquad -4x^2 + 5x - 1 > 0$$

$$4x^2 - 5x + 1 < 0 \qquad 4x^2 - 5x + 1 > 0$$

Fra di esse scegliere quelle equivalenti motivando la scelta.

B. Problemi che conducono a studiare il segno di un trinomio di 2° grado

Attività 8

Una fabbrica artigianale che produce biciclette offre degli sconti ai negozianti che comprano all'ingrosso più biciclette dello stesso tipo: il prezzo base di una bicicletta è di 240 000 lire, ma questo prezzo viene ridotto di 1000 lire per ogni bicicletta acquistata. Per esempio, un cliente che acquista 10 biciclette paga ogni bicicletta:

$$240000 - 10 \cdot 1000 = 230000$$

La ditta si chiede: qual è il numero di biciclette che conviene vendere ad ogni cliente con questo sconto?

Per questo valuta anche le spese di produzione, che sono:
- 20 000 lire per ogni bicicletta per le materie prime;
- 2 100 000 lire per spese fisse.

Per esaminare il problema occorre stabilire come variano il ricavo R *e le spese* S *al variare del numero di biciclette vendute. Indicando con* x *il numero di biciclette vendute, si ha (in migliaia di lire):*

$$R = (\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots x)x \qquad S = \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots$$

Il profitto y *della fabbrica varia al variare di* x *secondo la legge:*

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

ossia:

$$y = -x^2 + 220x - 2100 \qquad (2)$$

Si ha che lo sconto è conveniente per la fabbrica solo se risulta:

$$y > 0$$

Per rispondere al quesito occorre dunque studiare il segno del trinomio (2).

- Si determinano le radici del trinomio risolvendo l'equazione:

$$-x^2 + 220x - 2100 = 0$$

Valendosi della formula ridotta (vedi pp. 312-313) si ha:

$$x = \frac{-\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{\ldots\ldots} = \frac{-\ldots\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

Le radici sono dunque:

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots \qquad x_2 = \ldots\ldots\ldots$$

Esaminando anche il grafico (fig. 5) *della parabola:*

$$y = -x^2 + 220x - 2100$$

si trova che risulta:

$y > 0$ per .... $< x <$..........

Si conclude che alla fabbrica conviene praticare lo sconto solo se un cliente acquista più di 10 *e meno di* 210 *biciclette.*

La stessa fig. 5 suggerisce anche un altro risultato: si ha il profitto massimo quando y raggiunge la «massima quota», e cioè in corrispondenza del vertice V *della parabola.*

Il vertice V *ha l'ascissa* p *data da:*

$p =$ .... $= 110$

e l'ordinata q *data da:*

$q =$ .... $= 10000$

Si trova così che la fabbrica raggiunge il profitto massimo di 10 000 000 di lire *vendendo allo stesso negoziante* 110 *biciclette.*

III. Esercizi sui sistemi

A. Esercizi di calcolo

Attività 9

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 4x^2 - x - 2 \end{cases}$$

Verificare che le soluzioni ottenute sono corrette.

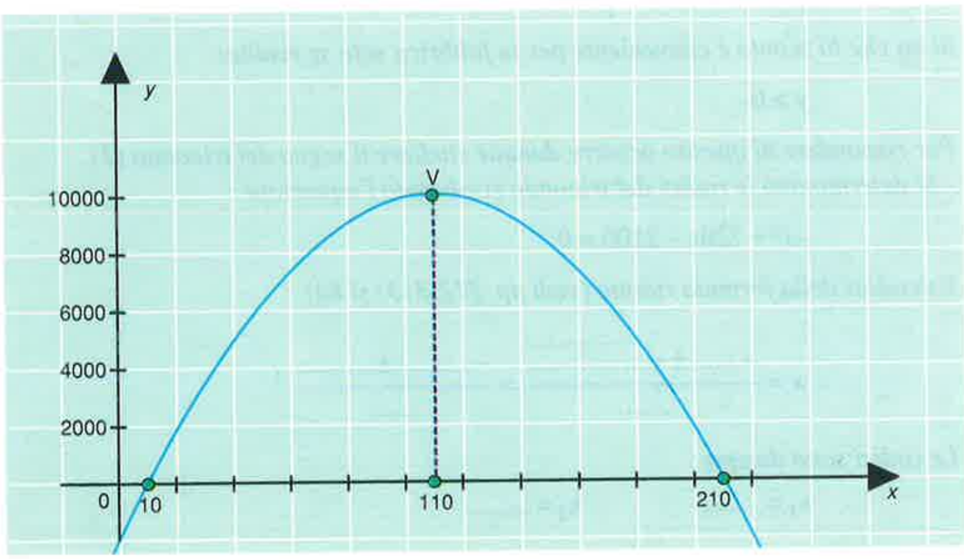


Figura 5
Il profitto *y* al variare del numero *x* di biciclette vendute

Procedendo col metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ \ldots\ldots = 4x^2 - x - 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 4x^2 - \ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

e infine:

$$\begin{cases} y_1 = \ldots\ldots \\ x_1 = \ldots\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \ldots\ldots \\ x_2 = \ldots\ldots \end{cases}$$

Si ottengono dunque le soluzioni (0; –2) *e* (1; 1).

Per verificare se le soluzioni sono corrette, completare la seguente tabella:

Per la coppia (0; –2)	**Per la coppia (1; 1)**
$\begin{cases} \mathbf{-2} = 3\cdot\ldots-2 \\ \mathbf{-2} = 4\cdot\ldots-\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{1} = 3\cdot\ldots-2 \\ \mathbf{1} = 4\cdot\ldots-\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases}$

B. Problemi che conducono a sistemi di 1° grado

Attività 10

Date le due curve che hanno le seguenti equazioni:

$$y = 2x + 1 \qquad y = x^2 + 2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare i loro punti d'intersezione;
b. stabilire se le curve sono secanti, tangenti o esterne;
c. visualizzare i risultati ottenuti, tracciando il grafico delle due curve.