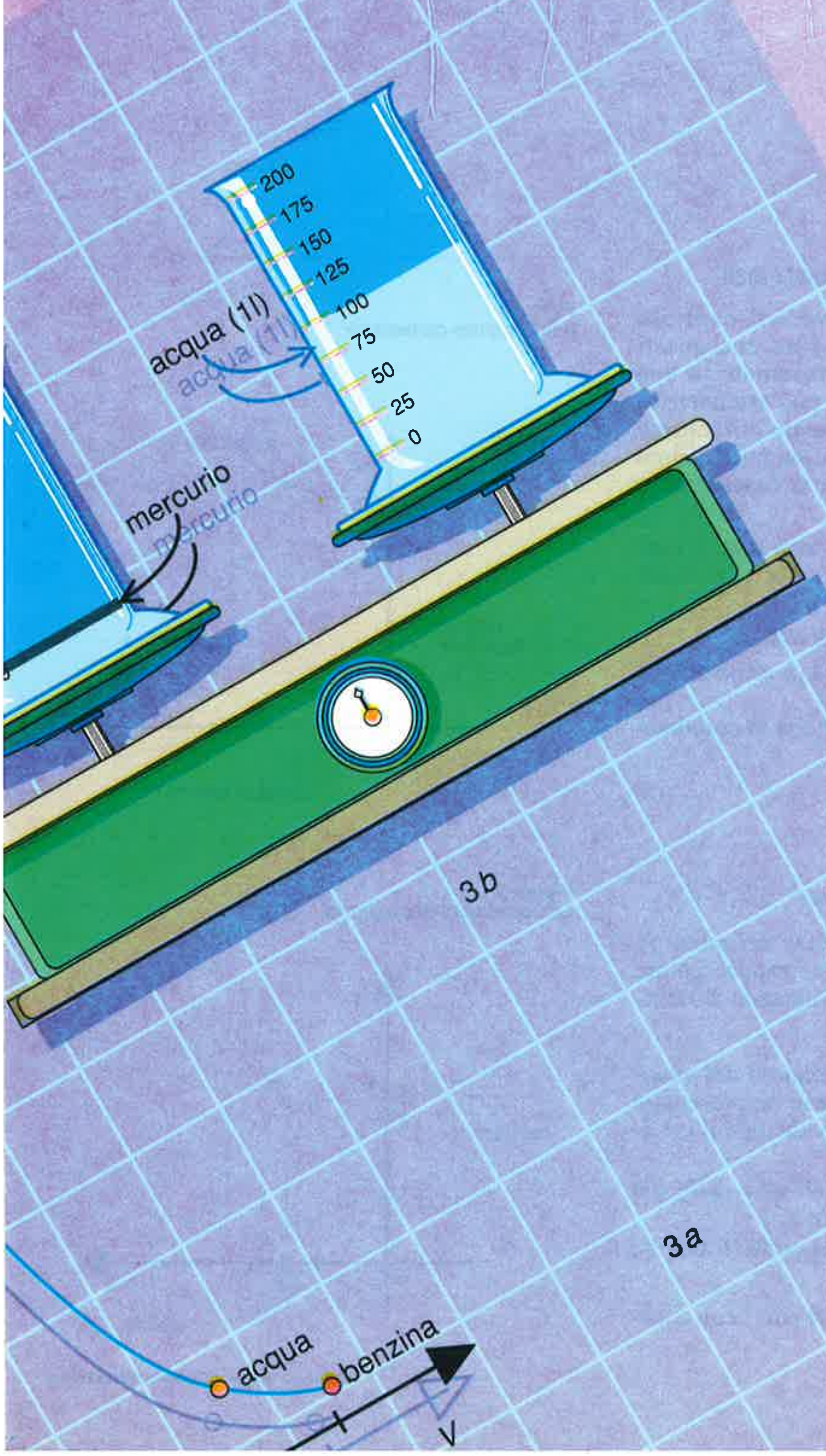
CAPITOLO QUINTO

GEOMETRIA ANALITICA



1

Le coordinate reali. L'equazione della circonferenza

Riferimento cartesiano e coordinate reali

Studiando i numeri reali (vedi il capitolo secondo, pp. 46-49) si è trovato che questi numeri possono essere rappresentati su una retta. Questo procedimento si può estendere al piano, riprendendo il *riferimento cartesiano* rappresentato in fig. 1 (vedi anche il primo volume, p. 330). Nella figura si osservano in particolare:

- gli *assi coordinati* (o *assi cartesiani*), cioè *l'asse delle ascisse* (o *asse delle* x) e *l'asse delle ordinate* (o *asse delle* y);
- il punto O, detto *origine degli assi*;
- il segmento OU, che è *l'unità di misura delle lunghezze.*

In fig. 2 è indicato un punto P con le coordinate irrazionali:

$$P(\sqrt{2};\ \sqrt{5})$$

La fig. 2 ricorda che:

- le *coordinate* sono i due numeri $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$;
- il *primo numero* $\sqrt{2}$ è *l'ascissa del punto P*, cioè è il numero che si deve rappresentare sull'asse delle ascisse, individuando il corrispondente punto A;
- il *secondo numero* $\sqrt{5}$ è *l'ordinata del punto P*, cioè è il numero che si deve rappresentare sull'asse delle ordinate, individuando il corrispondente punto B;
- da A si traccia la parallela all'asse delle *y* e da B la parallela all'asse delle *x*;
- le due rette si incontrano nel punto P che ha le due coordinate assegnate.

In fig. 3 sono rappresentati altri punti con coor-

Figura 1
Il riferimento cartesiano

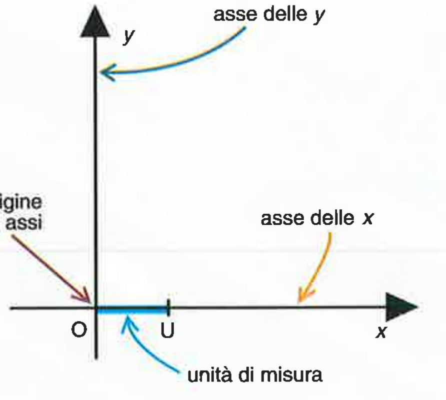
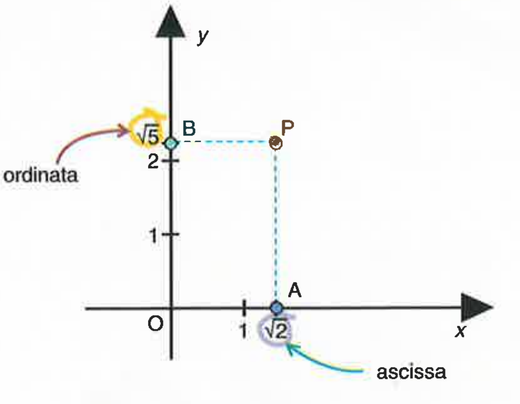


Figura 2
Le coordinate di un punto



dinate irrazionali, e cioè:

- Q($\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$), che ha le coordinate scritte in ordine diverso da quelle di P;
- R($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$), che ha le coordinate opposte a quelle di P.

Il riferimento cartesiano permette dunque di rappresentare non solo i punti con coordinate razionali (come si era visto nel primo volume), ma anche i punti con coordinate irrazionali. In conclusione, *si possono rappresentare nel piano cartesiano tutti i punti con coordinate reali.*

Equazione delle rette parallele agli assi

La figura 4 aiuta a ricordare il procedimento seguito per scrivere l'equazione di una retta parallela ad uno degli assi cartesiani.

Esaminando la retta r che passa per il punto Q($\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$) ed è parallela all'asse delle y, si trova che *tutti i punti allineati su* r *hanno la stessa ascissa che vale* $\sqrt{5}$; questa frase si riassume con la formula:

$$x = \sqrt{5}$$

Questa formula prende il nome di *equazione della retta* r.

La formula diventa più espressiva immaginando un punto P che si muove sul piano cartesiano; le coordinate di questo punto variano durante il movimento e vengono indicate con le lettere x, y. Si scrive dunque:

P(x; y)

Figura 3
Alcuni punti sul piano cartesiano

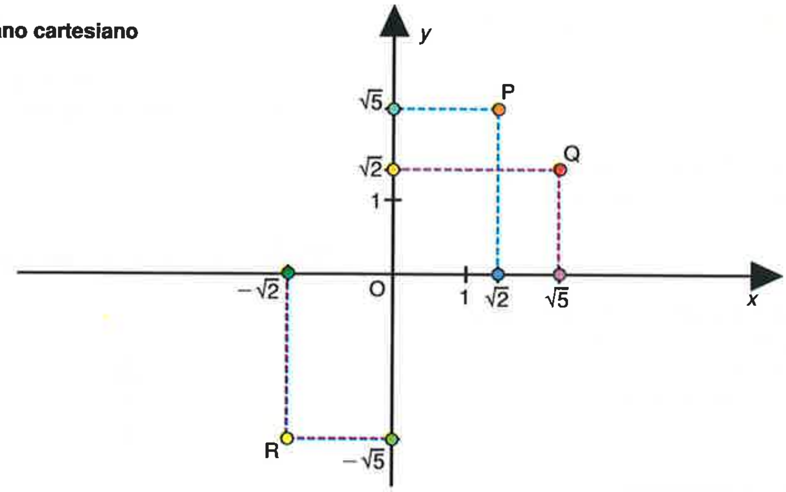
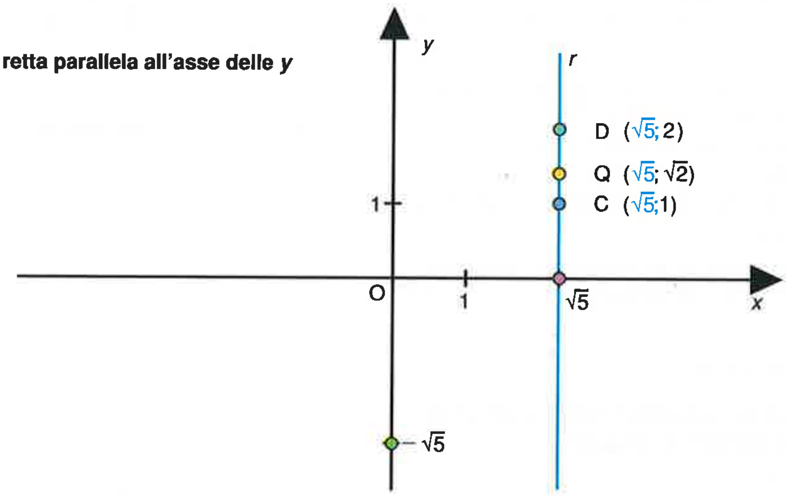


Figura 4
L'equazione di una retta parallela all'asse delle *y*



Ora, il punto P percorre proprio la retta r solo se la sua ascissa x mantiene sempre il valore $\sqrt{5}$; questo vuol dire che deve risultare:

$$x = \sqrt{5}$$

In generale, si ha che *una retta parallela all'asse delle* y *ha sempre l'equazione del tipo*:

$$x = a$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà: *un punto* P(x; y) *variabile sul piano cartesiano percorre la retta solo se la sua ascissa* x *vale sempre* a.

Si può ragionare in modo del tutto analogo a partire dalla retta s che passa sempre per il punto Q($\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$), ma è parallela all'asse delle x (fig. 5). In questo caso si trova che P(x; y) percorre proprio la retta s solo se la sua ordinata y mantiene sempre il valore $\sqrt{2}$; perciò l'equazione della retta s è:

$$y = \sqrt{2}$$

In generale si avrà allora che *una retta parallela all'asse delle* x *ha sempre l'equazione del tipo*:

$$y = b$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà: *un punto* P(x; y) *variabile sul piano cartesiano percorre la retta solo se la sua ordinata* y *vale sempre* b.

Equazione della circonferenza

Si può esaminare in modo analogo un'altra linea tracciata sul piano: la circonferenza di fig. 6*a*, che ha il centro nell'origine O e il raggio lungo 2.

Anche in questo caso si immagina un punto P(x; y) variabile sul piano (fig. 6*b*) e si osservano le sue coordinate mentre P percorre la circonferenza. Si nota che tutte e due le coordinate cambiano, mentre deve sempre valere 2 la distanza di P da O.

Ora, PO è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo OPH a cui si può applicare il teorema di Pitagora; si ha:

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

da cui si ottiene la seguente *equazione della circonferenza* di centro O e raggio 2:

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

Lo stesso ragionamento si può seguire per tutte le altre circonferenze che hanno il centro nell'origine O; si otterrà dunque un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

dove r indica la lunghezza del raggio.

Viceversa, ogni equazione del tipo (1) rappresenta una circonferenza che ha il centro nell'origine O e il raggio lungo r.

Per esempio, l'equazione :

$$x^2 + y^2 = 2$$

rappresenta la circonferenza per cui risulta:

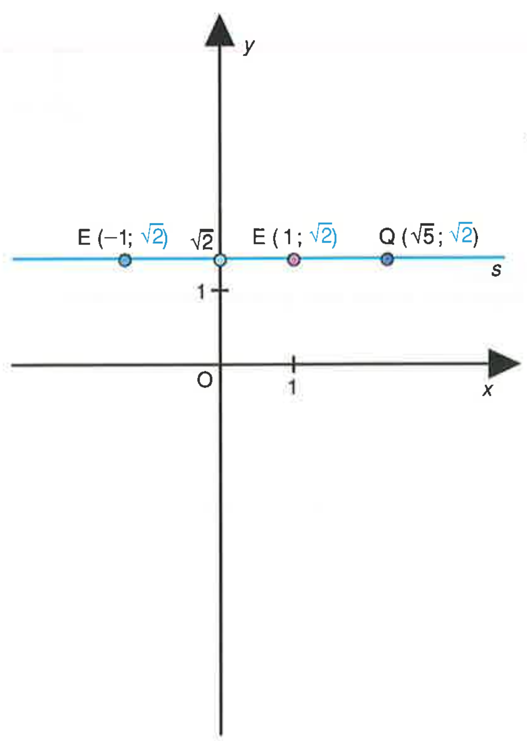
$$r^2 = 2 \qquad \text{e cioè} \qquad r = \sqrt{2}$$

Verifiche

Conoscenze

① Qual è l'equazione di una circonferenza che ha il centro nell'origine O e il raggio lungo r?

Figura 5
L'equazione di una retta parallela all'asse delle *x*



② In un riferimento cartesiano disegnare una circonferenza con centro in O e determinarne l'equazione.

Comprensione

① Spiegare in quale modo si trova l'equazione di una circonferenza che ha il centro nell'origine O.

② Sul piano cartesiano c'è un solo punto che dista 2 dall'origine?

Applicazioni

① Rappresentare sul piano cartesiano i punti che hanno le seguenti coordinate:

$$S(\sqrt{2};-\sqrt{5})\quad T(-\sqrt{2};\sqrt{5})\quad V(\sqrt{5};-\sqrt{2})$$

② Scrivere l'equazione delle due rette che passano per S e sono parallele agli assi cartesiani.

③ Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro nell'origine O e il raggio lungo $\sqrt{5}$.

④ Tracciare i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni:

$x^2 + y^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$ $\qquad$ $y = \sqrt{3}$

Collegamento con il primo volume

① Spiegare il significato dei termini «ascissa» e «ordinata».

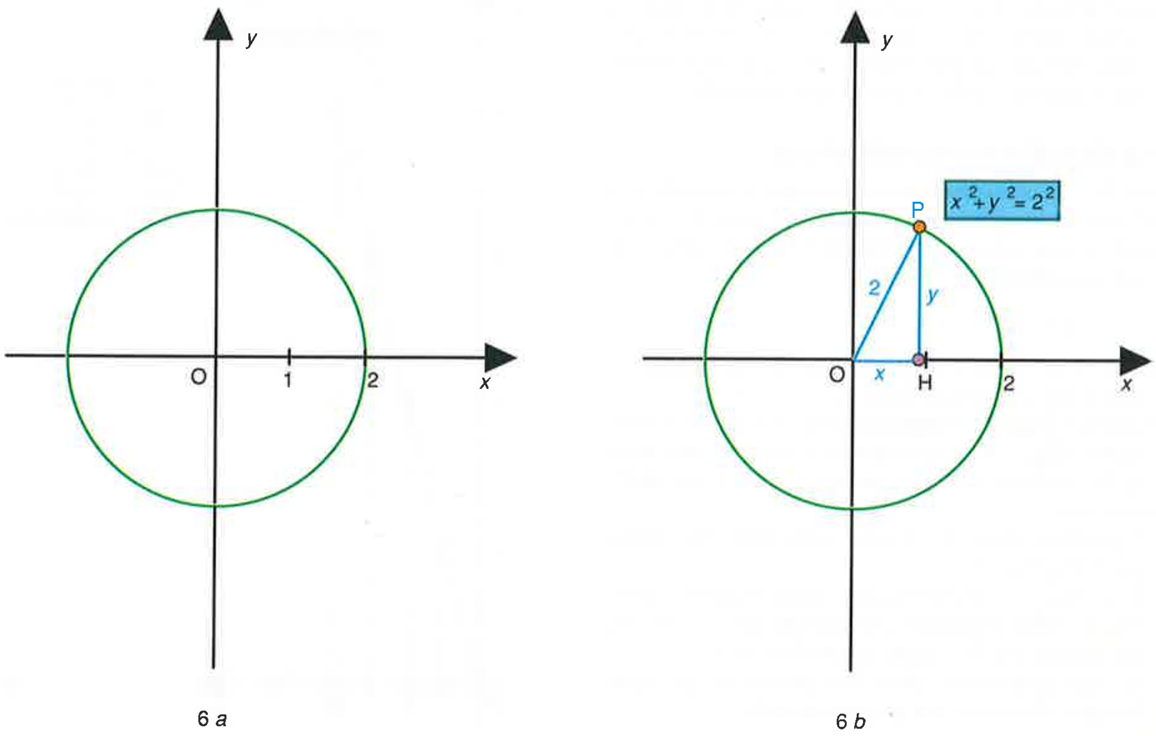
② Spiegare come si trova l'ascissa e l'ordinata di un punto.

③ Quali sono le coordinate dell'origine O? (Vedere il capitolo 8, paragrafo 1).

④ Tutte le frasi seguenti sono errate; correggere gli errori.
(Vedere il capitolo 8, paragrafo 1).
«Le ordinate di un punto sono due numeri»;
«Il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano ascissa e ordinata»;
«Il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano x e y».

⑤ Quali sono le equazioni degli assi cartesiani? (Vedere il capitolo 8, paragrafo 2).

Figura 6
L'equazione di una circonferenza che ha centro in O



2 Rappresentare leggi matematiche sul piano cartesiano

Finora il riferimento cartesiano è stato utilizzato prevalentemente per uno scopo: scrivere le equazioni che descrivono alcune linee tracciate sul piano (rette o circonferenze); queste equazioni legano con una formula le variabili x e y, che sono le coordinate di un punto variabile sulla linea.
Ora, soprattutto nelle applicazioni, si incontra spesso il problema inverso: è data una legge matematica che lega due grandezze variabili e si vuole visualizzare questa legge con un grafico.
Questo paragrafo si occupa appunto di quest'ultimo problema, esaminando in particolare alcune leggi suggerite dalla matematica stessa; nella scheda applicativa (p. 181) si trovano invece alcuni esempi di leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali.

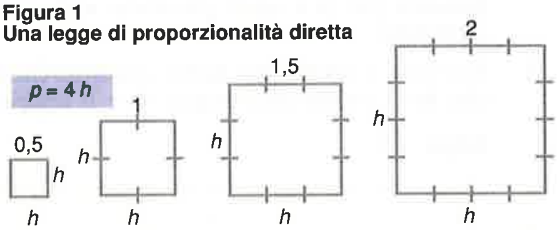
La legge di proporzionalità diretta

In fig. 1a sono rappresentati tanti quadrati con il lato di lunghezza h sempre più grande, insieme ad una tabella che fornisce il perimetro p di ogni quadrato; risulta:

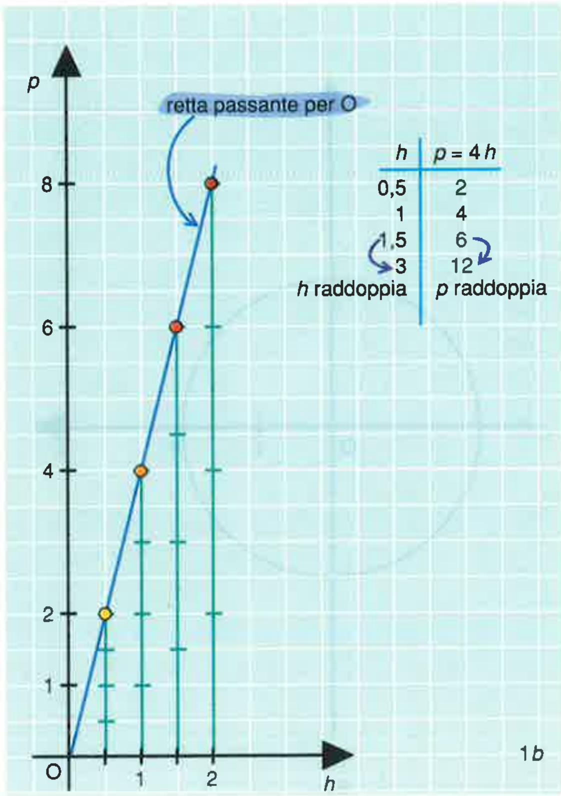
$$p = 4h$$

cioè il perimetro p si ottiene moltiplicando il lato h per il numero fisso 4.
Questa legge è rappresentata sul piano cartesiano (fig. 1b), riportando il lato h sull'asse delle ascisse e il perimetro p sull'asse delle ordinate.
Il grafico ottenuto è una semiretta che passa per l'origine O.
Il grafico è caratterizzato dalla seguente proprietà: raddoppiando una grandezza (il lato h), raddoppia anche l'altra (il perimetro p).
Le due grandezze (lato h e perimetro p) sono dunque *direttamente proporzionali*.

Figura 1
Una legge di proporzionalità diretta



1a



1b

Si ritrovano così *alcune caratteristiche fondamentali della* legge di proporzionalità diretta:

- *una grandezza si ottiene moltiplicando l'altra per un numero fisso;*
- *il grafico è una retta che passa per O;*
- *raddoppiando una grandezza raddoppia anche l'altra.*

La legge parabolica

In fig. 2*a* sono rappresentati gli stessi quadrati con il lato di lunghezza h sempre più grande, ma ora la tabella fornisce l'area S di ogni quadrato; risulta:

$$S = h^2$$

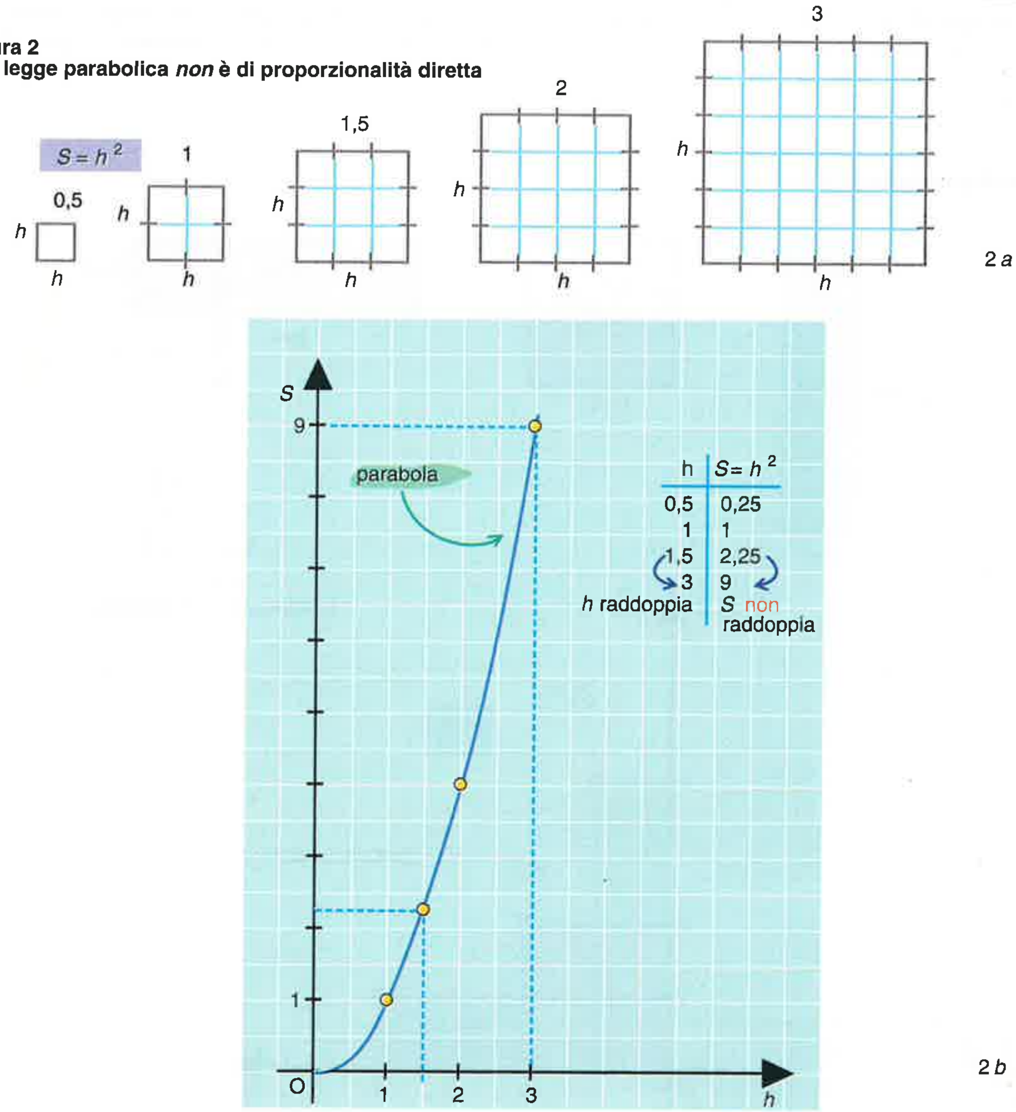
Cioè l'area S si ottiene elevando al quadrato il lato h.

La legge è rappresentata sul piano cartesiano (fig. 2*b*), riportando il lato h sull'asse delle ascisse e l'area S sull'asse delle ordinate.
La curva ottenuta si chiama *parabola* e, insieme alla corrispondente tabella, permette di verificare che S e h ***non*** sono direttamente proporzionali; infatti si trova che:

- il grafico *non* è una retta che passa per O;
- raddoppiando una grandezza, l'altra *non* raddoppia.

In particolare, si può fissare l'attenzione sui seguenti dati della tabella: quando il lato h raddoppia passando da 1,5 a 3, l'area S *non* raddoppia; passa invece da 2,25 a 9.
La legge che lega il lato e l'area di un quadrato prende il nome di *legge parabolica*, cioè *legge che ha come grafico un arco di parabola.*

Figura 2
Una legge parabolica *non* è di proporzionalità diretta



La legge di proporzionalità inversa

In fig. 3 sono rappresentati tanti rettangoli che hanno la stessa area di valore 4; gli stessi rettangoli sono stati disegnati anche in un riferimento cartesiano, riportando un lato (b) sull'asse delle ascisse e l'altro (h) sull'asse delle ordinate.

I vertici liberi di questi rettangoli sono dunque punti che hanno le coordinate legate dalla legge seguente:

$$bh = 4 \quad \text{ossia} \quad h = \frac{4}{b}$$

Questi punti si dispongono su un arco di curva chiamata *iperbole*, curva che è caratterizzata dalla seguente proprietà: raddoppiando una grandezza (il lato b), dimezza l'altra (il lato h). Si dice in questo caso che le due grandezze sono *inversamente proporzionali.*

Si ritrovano, così, *alcune caratteristiche fondamentali della* legge di proporzionalità inversa:

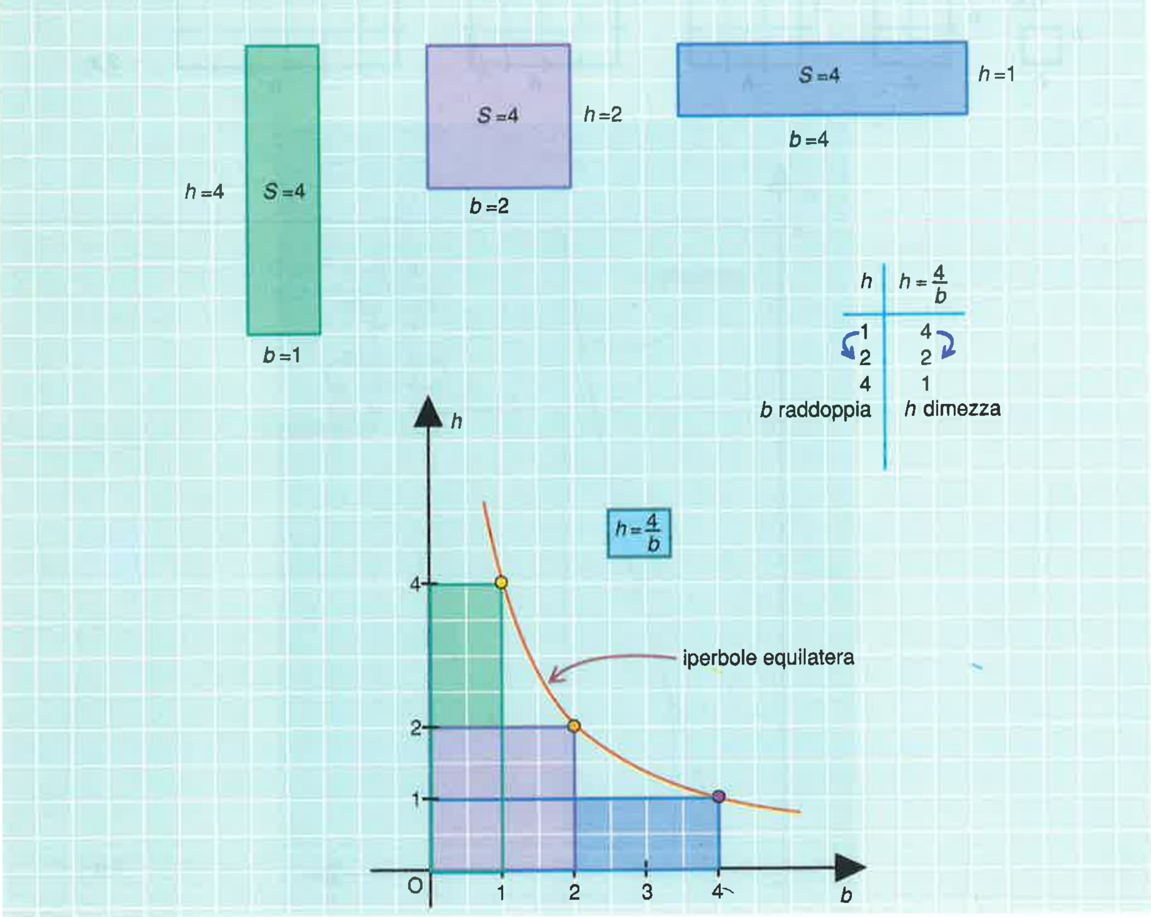
- *il prodotto delle due grandezze è costante;*
- *il grafico è un arco di iperbole;*
- *raddoppiando una grandezza l'altra si dimezza.*

La legge lineare

In fig. 4 sono rappresentati tanti rettangoli che hanno lo stesso perimetro p lungo 8. Gli stessi rettangoli sono stati disegnati anche in un riferimento cartesiano, riportando un lato (b) sull'asse delle ascisse e l'altro (h) sull'asse delle ordinate.

I vertici liberi di questi rettangoli sono ora punti che hanno le coordinate legate dalla

Figura 3
Una legge di proporzionalità inversa



legge seguente:

$$2b + 2h = 8 \qquad \text{ossia} \qquad h = -b + 4$$

Questi punti si dispongono sul tratto di retta rappresentato in fig. 4; il grafico e la corrispondente tabella permettono di verificare che b e h ***non*** sono inversamente proporzionali. Infatti si trova che:

- il grafico *non* è un arco di iperbole;
- raddoppiando una grandezza, l'altra *non* si dimezza.

In particolare, si può fissare l'attenzione sui seguenti dati: quando il lato b raddoppia, passando da 1 a 2, l'altro lato, h, *non* dimezza, passa invece da 3 a 2.

La legge che lega i due lati di un rettangolo di perimetro fisso prende anche il nome di *legge lineare*, cioè *legge che ha come grafico un tratto di linea retta.*

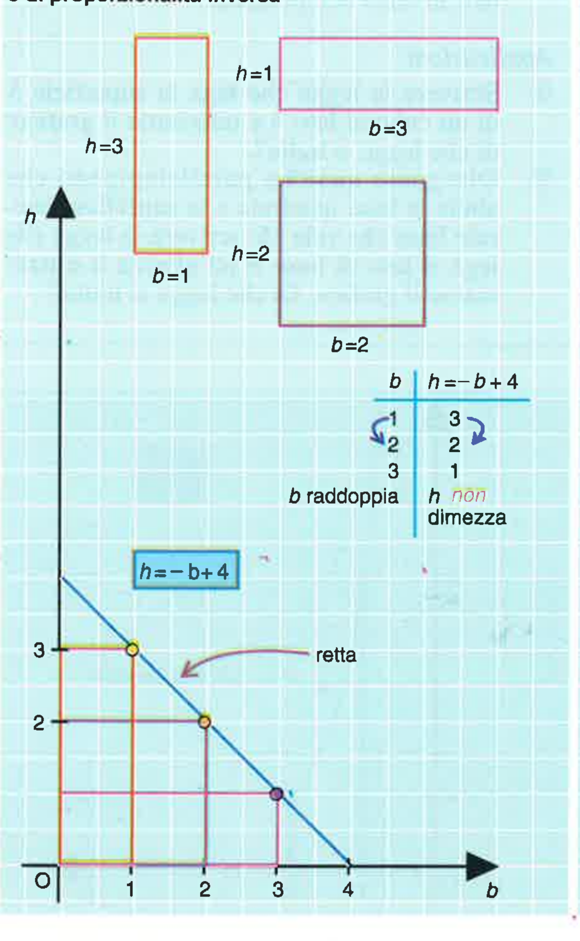
La legge cubica

Passando dalle figure piane alle figure solide, si possono trovare altre leggi matematiche. Per esempio, in fig. 5 sono rappresentati dei cubi con il lato di lunghezza h sempre più grande, mentre la tabella fornisce il volume V di ogni cubo; risulta:

$$V = h^3$$

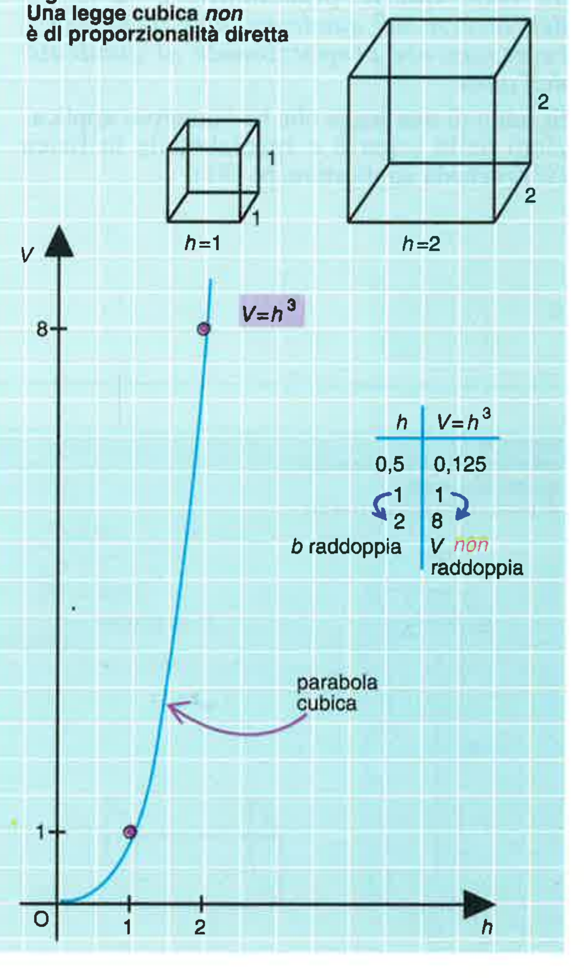
cioè il volume V si ottiene elevando al cubo il lato h.
La legge è rappresentata anche sul piano cartesiano, riportando h sull'asse delle ascisse e V sull'asse delle ordinate.
La curva ottenuta si chiama *parabola cubica* e, insieme alla corrispondente tabella, permette di verificare che V e h ***non*** sono direttamente proporzionali. La legge che lega il lato e il volume di un cubo prende il nome di *legge cubica*, cioè *legge che ha come grafico un arco di parabola cubica.*

Figura 4
Una legge lineare *non* è di proporzionalità inversa



b	h=−b+4
1	3
2	2
3	1
b raddoppia	h non dimezza

Figura 5
Una legge cubica *non* è di proporzionalità diretta



h	V=h³
0,5	0,125
1	1
2	8
b raddoppia	V non raddoppia

La legge dell'inverso del quadrato

Un'altra legge suggerita dai volumi delle figure solide può essere ottenuta nel modo seguente: si disegnano tanti parallelepipedi con la base quadrata e il volume che vale 4 (fig. 6). Può variare allora il lato di base b e l'altezza h, che però sono sempre legati dalla legge:

$$b^2 h = 4 \quad \text{ossia} \quad h = \frac{4}{b^2}$$

La legge è quindi rappresentata anche sul piano cartesiano (fig. 6), riportando sull'asse delle ascisse il lato di base b e sull'asse delle ordinate l'altezza h.

Si tratta di un arco di curva che somiglia all'iperbole di fig. 3, ma non è un'iperbole perché è più «ripida»; d'altra parte è facile verificare che le due grandezze *non* sono inversamente proporzionali: per esempio, quando b raddoppia, passando da 1 a 2, h *non* dimezza, passa invece da 4 a 1.

La curva rappresenta dunque una legge diversa da tutte quelle precedenti; è la *legge dell'inverso del quadrato: una grandezza è inversamente proporzionale al quadrato dell'altra.*

Si tratta di una legge che ha numerose applicazioni nelle scienze e specialmente in fisica (vedi scheda applicativa, p. 181).

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le proprietà che caratterizzano le leggi di proporzionalità diretta e inversa, portando degli esempi.

② Spiegare che cosa vuol dire che due grandezze sono legate da una legge parabolica o cubica, portando un esempio.

③ Spiegare che cosa vuol dire che due grandezze sono legate dalla legge dell'inverso del quadrato, portando un esempio.

Comprensione

① Spiegare come si può verificare se due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali, portando degli esempi diversi da quelli dati dal testo.

② Spiegare come si può verificare se due grandezze sono legate da una legge parabolica o cubica.

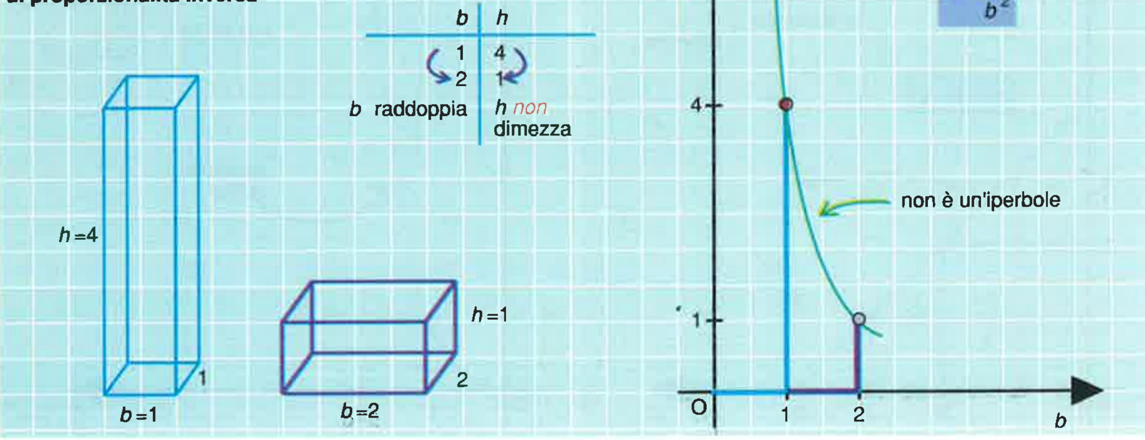
③ Spiegare come si può verificare se due grandezze sono legate dalla legge dell'inverso del quadrato.

Applicazioni

① Scrivere la legge che lega la superficie S di un cubo al lato h e tracciarne il grafico; di che legge si tratta?

② Disegnare qualche parallelepipedo che abbia la base quadrata e la superficie laterale fissa che vale 16; scrivere la legge che lega il lato di base b all'altezza h e tracciarne il grafico. Di che legge si tratta?

Figura 6
Una legge dell'inverso del quadrato *non* è di proporzionalità inversa



Alcune leggi matematiche suggerite dalle scienze sperimentali

Le leggi di proporzionalità diretta e di proporzionalità inversa

Spesso studiando la fisica si incontrano delle leggi che legano tre diverse grandezze e si trova che, fissando una delle tre grandezze, le altre due variano in modo proporzionale. Ecco un esempio.

Si studia la relazione che lega le tre grandezze seguenti:

- massa m di un liquido;
- densità d del liquido;
- volume V che occupa il liquido.

Per studiare questo legame si eseguono varie esperienze, fra le quali le seguenti:

A. Si considera sempre la stessa sostanza, per esempio l'acqua; così si tiene fissa la densità d, che è per l'acqua di 1 kg/dm^3.
Si riempie quindi con l'acqua un recipiente di un certo volume, per esempio V = 1 dm^3 (fig. 1*a*), poi un altro di volume doppio e si verifica sempre che anche la corrispondente massa raddoppia (fig. 1*b*).

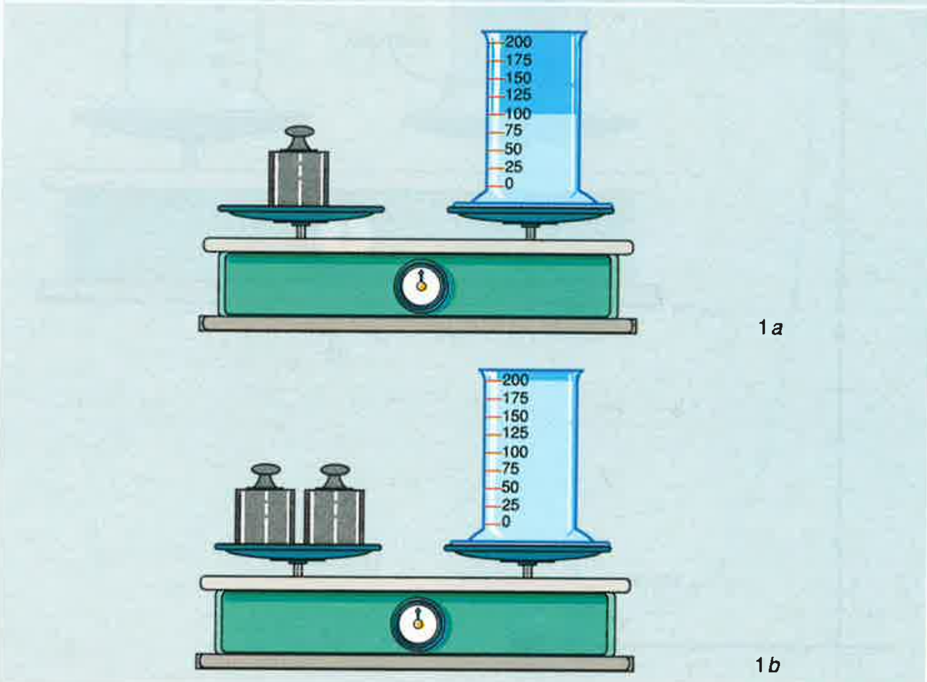
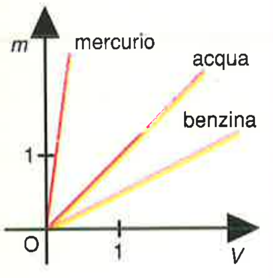


Figura 1
La massa e il volume occupato dall'acqua sono direttamente proporzionali

Figura 2
La massa m e il volume V occupato da una sostanza sono direttamente proporzionali



Si trova così che *massa e volume sono grandezze direttamente proporzionali*, legate dalla legge:

$$m = V$$

Questa legge vale nel caso particolare dell'acqua; se però si ripete l'esperienza con la benzina, si trova la legge seguente:

$$m = 0{,}7V$$

Se poi si ripete l'esperienza con il mercurio, si trova:

$$m = 13{,}6V$$

Si hanno dunque sempre leggi di proporzionalità diretta (rappresentate in fig. 2), ma, al variare della sostanza, varia la costante di proporzionalità, che è la densità d del liquido.
Si ha dunque:

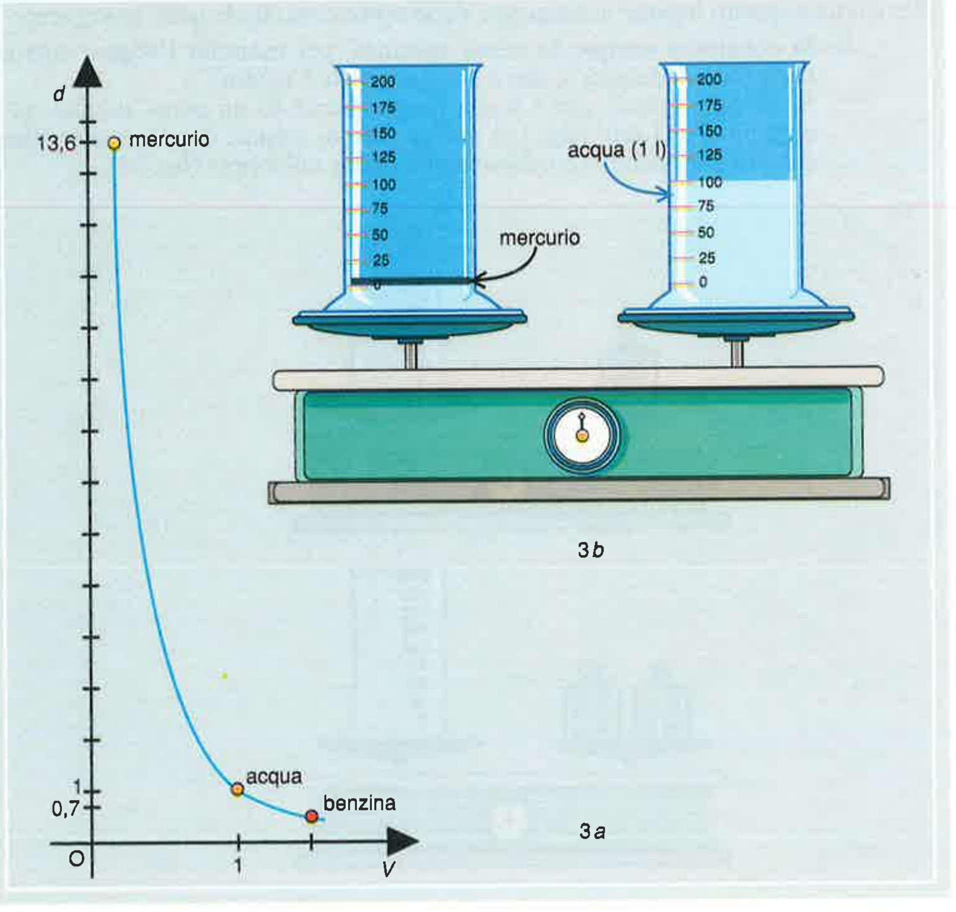
$$m = dV$$

B. Si prende la stessa massa m, per esempio 1 kg, di liquidi diversi e si misura il volume V occupato da ogni liquido (fig. 3); così si verifica che *volume* e *densità* sono *grandezze inversamente proporzionali*, legate dalla legge:

$$1 = dV$$

rappresentata in fig. 3*a*.

Figura 3
La massa è costante (1 kg); volume (V) e densità (d) sono inversamente proporzionali



Perciò si avrà bisogno di un volume $V = 1\ dm^3$ per contenere 1 kg d'acqua, ma basta una bottiglietta di volume $V \cong \frac{1}{13}\ dm^3$ per contenere 1 kg di mercurio (fig. 3*b*).

La legge parabolica

È una legge di grande importanza anche dal punto di vista storico, perché fu una delle prime a essere individuata. Ecco un documento a questo proposito.

Galileo Galilei, nella sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) descrive i suoi esperimenti sulla caduta di un corpo lungo un piano inclinato (fig. 4) ed enuncia così la sua scoperta:

«Per esperienze ben cento volte replicate sempre si incontrava gli spazi percorsi esser tra loro come i quadrati dei tempi, e questo per tutte le inclinazioni del piano».

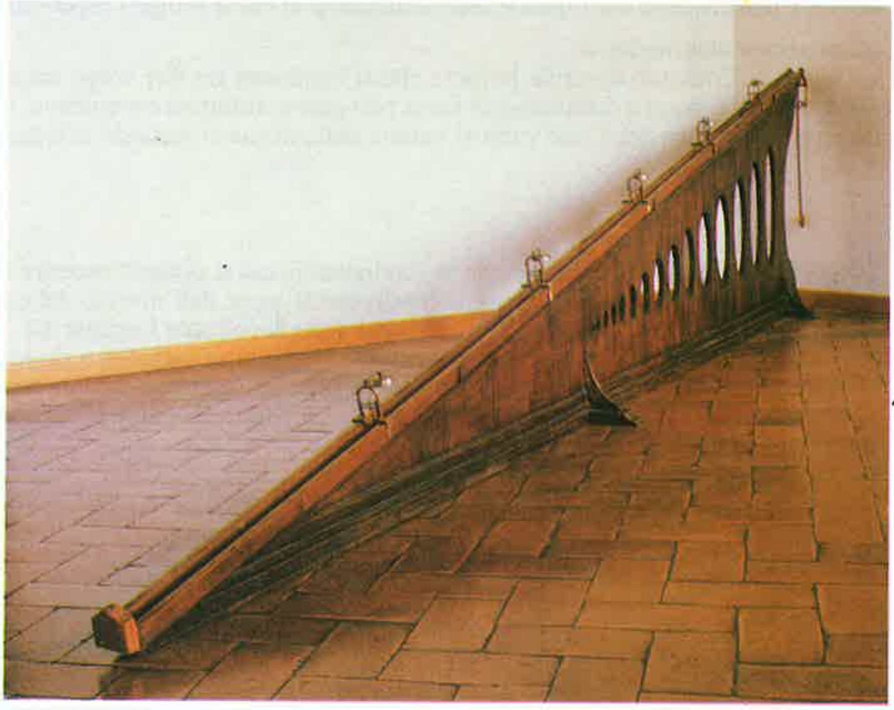


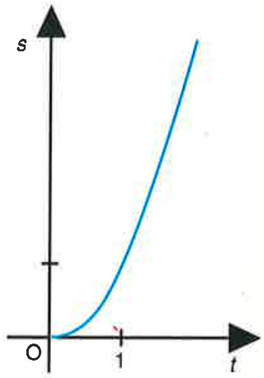
Figura 4
Il modello di Galileo per studiare la discesa di un corpo lungo un piano inclinato (Museo di Storia della Scienza di Firenze)

Eseguendo un esperimento analogo, si possono trovare, per esempio, i risultati elencati nella tabella di fig. 5, dove s indica la distanza percorsa e t il tempo impiegato a percorrerla.

La legge che lega le due grandezze s e t è in tal caso:

$$s = t^2$$

Figura 5
La legge che descrive la distanza percorsa da un corpo che cade



t	$s = t^2$
0,5	0,25
1	1
2	4

La legge dell'inverso del quadrato

Si tratta di una legge che descrive fenomeni molto diversi, fra i quali si segnalano i tre seguenti.

1. *La propagazione della luce*
   Quando ci si allontana da una sorgente di luce (ad esempio un lampione), si percepisce chiaramente che l'intensità luminosa varia al variare della distanza dalla sorgente. Eseguendo opportune esperienze, si trova che l'intensità I

varia al variare della distanza r dalla sorgente secondo la legge:

$$I = \frac{k}{r^2}$$

dove k è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

2. *L'attrazione gravitazionale*
La legge di gravitazione universale descrive la forza che si manifesta fra due corpi (per esempio la Terra e un satellite artificiale) posti a distanza r: la forza è sempre attrattiva e ha un'intensità F che varia al variare della distanza secondo la legge:

$$F = \frac{k}{r^2}$$

dove k è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

3. *L'attrazione elettrostatica*
La legge di Coulomb descrive la forza che si manifesta fra due corpi, carichi elettricamente, posti a distanza r: la forza può essere attrattiva o repulsiva, ma ha sempre un'intensità F che varia al variare della distanza secondo la legge:

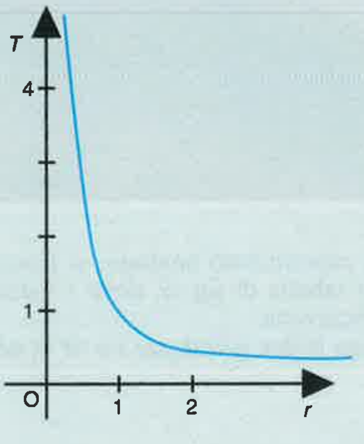
$$F = \frac{k}{r^2}$$

dove k è una costante che dipende dalle condizioni in cui si svolge l'esperienza.

Si trova così in tre fenomeni molto diversi la legge dell'inverso del quadrato, legge che è rappresentata in fig. 6 scegliendo la costante k uguale a 1.

La forza elettrica e la forza gravitazionale diminuiscono dunque all'aumentare della distanza e queste «forze invisibili» diminuiscono come diminuisce l'intensità della luce che colpisce un foglio di carta allontanato sempre più dalla sorgente.

Figura 6
La legge dell'inverso del quadrato



Curve crescenti e curve decrescenti

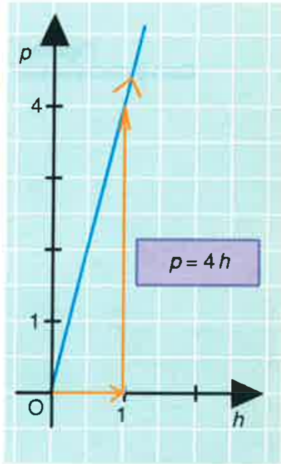
Curve crescenti

In fig. 1 sono rappresentate due delle leggi matematiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

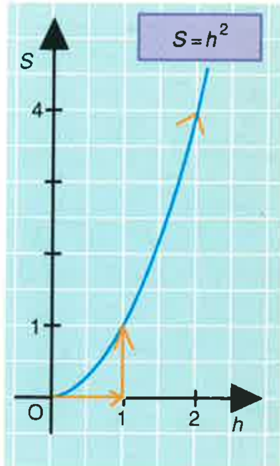
- in fig. 1*a* la legge $p = 4h$;
- in fig. 1*b* la legge $S = h^2$.

I due grafici mostrano un'importante caratteristica comune, che si scopre immaginando di percorrere una delle curve: quando ci si allontana da O verso destra, si è «costretti a salire». In questo caso si dice che *la curva è crescente, cioè al crescere dell'ascissa cresce anche l'ordinata.*

Figura 1
Curve crescenti



1*a*



1*b*

La proporzionalità diretta è una particolare legge crescente

Le considerazioni svolte prima si possono anche esprimere dicendo che la proporzionalità diretta e la legge parabolica sono leggi crescenti.

Fra le leggi crescenti si trova dunque la legge di proporzionalità diretta, cioè *la proporzionalità diretta è una particolare legge crescente.*

La fig. 2 visualizza questa conclusione: nell'insieme C si trovano le leggi crescenti, mentre nell'insieme P si trovano le leggi di proporzionalità diretta. Così si vede bene che P è contenuto all'interno di C e perciò:

- scegliendo una legge di proporzionalità diretta (cioè in P), si è certi di trovarsi in C, cioè di scegliere una legge crescente;
- scegliendo invece una legge crescente (cioè in C), si può anche cadere al di fuori di P e scegliere una legge che non è di proporzionalità diretta.

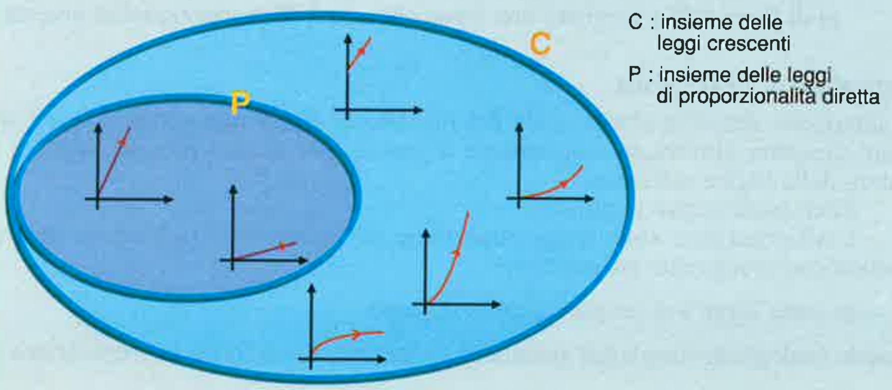


Figura 2
La proporzionalità diretta è una particolare legge crescente

Curve decrescenti

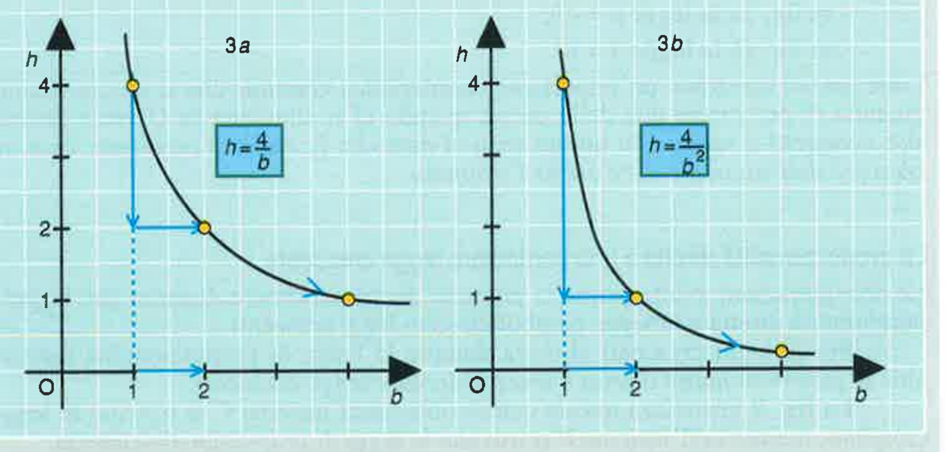
Considerazioni analoghe, ma con qualche modifica essenziale, si possono ripetere a partire dalla fig. 3, dove sono rappresentate altre due leggi matematiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

- in fig. 3*a* la legge $h = \frac{4}{b}$;
- in fig. 3*b* la legge $h = \frac{4}{b^2}$.

I due grafici mostrano ora la seguente caratteristica comune: quando ci si allontana da O verso destra, si è «costretti a scendere».

In questo caso si dice che *la curva è decrescente*, cioè *al crescere dell'ascissa decresce l'ordinata.*

Figura 3
Curve decrescenti



La proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente

Fra le leggi decrescenti si trova dunque la legge di proporzionalità inversa, cioè *la proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente.*

La fig. 4 visualizza questa conclusione: nell'insieme D si trovano le leggi decrescenti, mentre nell'insieme P si trovano le leggi di proporzionalità inversa.

Si vede bene che P è contenuto all'interno di D e perciò:

- scegliendo una legge di proporzionalità inversa (cioè in P), si è certi di trovarsi in D, cioè di scegliere una legge decrescente;
- scegliendo invece una legge decrescente (cioè in D), si può anche cadere al di fuori di P e scegliere una legge che non è di proporzionalità inversa.

Il connettivo di implicazione

La situazione descritta chiaramente dal disegno di fig. 4 non sempre riesce ad essere descritta altrettanto chiaramente a parole; per questo possono aiutare i simboli della logica matematica.

Ecco come si può ragionare.

L'affermazione «una legge appartiene all'insieme P» può anche essere espressa con la seguente proposizione:

p: «una legge è di proporzionalità inversa»

In modo analogo da «una legge appartiene all'insieme D» si forma la proposizione :

d: «una legge è decrescente»

E così, invece di dire «una legge dell'insieme P si trova sicuramente nell'insieme D», si dice:

«se è vera p, è vera anche d»

o, più brevemente:

«*p* ***implica*** *d*»

che si scrive:

$$p \Rightarrow d$$

La frase «p implica d» afferma dunque che «la verità della proposizione p contiene in sé la verità della proposizione d».

Ora, esaminando di nuovo le proposizioni p e d, ci si rende conto che, invece, la verità della proposizione d non racchiude in sé la verità della proposizione p.

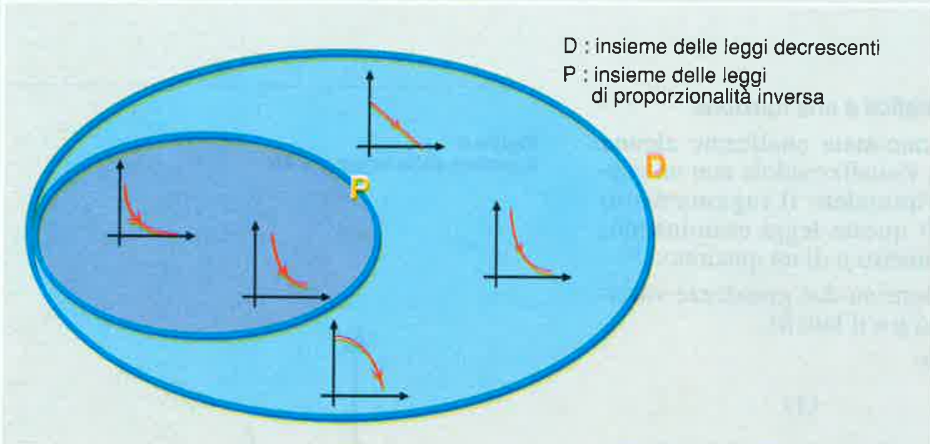


Figura 4
La proporzionalità inversa è una particolare legge decrescente

Si può così concludere dicendo che *la proporzionalità inversa implica la decrescenza, mentre il viceversa non è vero.*

E analogamente si può dire che *la proporzionalità diretta implica la crescenza, ma il viceversa non è vero.*

Spunti di discussione e di lavoro

① Come si riconosce se una curva è crescente o decrescente?

② Spiegare perché una legge di proporzionalità diretta è sempre crescente.

③ Spiegare perché una legge di proporzionalità inversa è sempre decrescente.

④ Fra le frasi seguenti scegliere quella sbagliata e correggere gli errori:

«L'area di un quadrato cresce al crescere del lato, perciò l'area è direttamente proporzionale al lato»;

«Il perimetro di un quadrato è direttamente proporzionale al lato, perciò il perimetro cresce al crescere del lato».

⑤ Esaminare la legge che lega il lato e il volume di un cubo e dire se si tratta di una legge crescente o decrescente.

⑥ Esaminare la legge che lega i due lati di un rettangolo che ha il perimetro lungo 8 e dire se si tratta di una legge crescente o decrescente.

3

Le funzioni in geometria analitica. La parabola e l'iperbole

Da una legge matematica a una funzione

Nel paragrafo 2 sono state analizzate alcune leggi matematiche, visualizzandole con un grafico. Si può ora riprendere il ragionamento condotto su una di queste leggi esaminando, per esempio, il perimetro p di un quadrato:

1. si fissa l'attenzione su due grandezze variabili (il perimetro p e il lato h);
2. si trova la legge:

   $$p = 4h \qquad (1)$$

   che fa corrispondere a un valore di una delle due variabili (h) un solo valore dell'altra (p);
3. si rappresenta sul piano cartesiano la legge trovata (fig. 1).

Ora, confrontando la legge (1) con il grafico di fig. 1, ci si rende conto che la formula da sola non esprime tutto quello che si sa sulle grandezze esaminate.

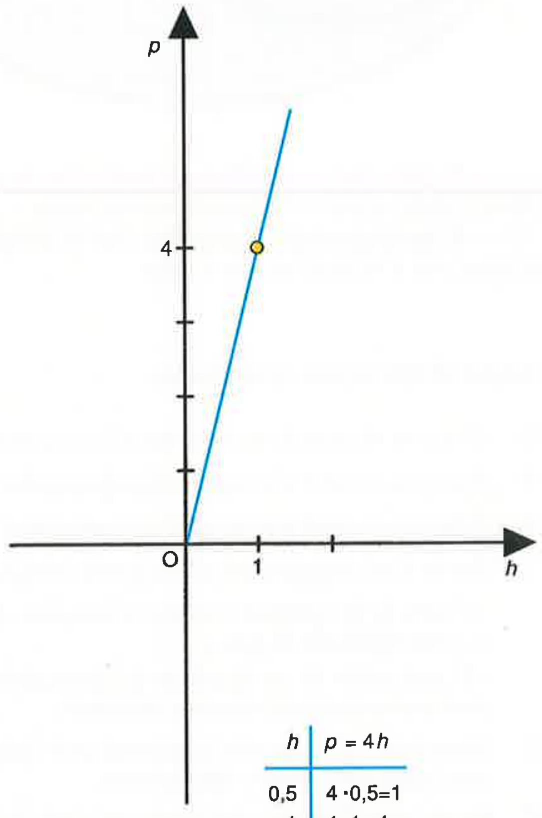
Infatti, sia il perimetro p che il lato h del quadrato possono assumere solo valori positivi e questo fatto è chiaramente espresso dal grafico, ma non dalla formula.

Basta quest'esempio per capire che una legge matematica deve essere completata indicando gli insiemi numerici in cui si scelgono i valori da assegnare alle variabili; si passa così da una legge matematica ad una *funzione*.

Si individua una funzione *quando sono dati:*

1. *un insieme* D, *detto* dominio;
2. *un insieme* C, *detto* codominio;
3. *una legge che associa ad ogni elemento* x *dell'insieme* D *un solo elemento* y *dell'insieme* C.

Figura 1
Il grafico della legge $p = 4h$



h	$p = 4h$
0,5	$4 \cdot 0{,}5 = 1$
1	$4 \cdot 1 = 4$
2	$4 \cdot 2 = 8$

Le funzioni in geometria analitica

Per descrivere come varia il perimetro di un quadrato al variare del lato, si considera dunque la funzione seguente:

1. il dominio D è l'insieme dei numeri reali positivi, spesso indicato con il simbolo R^+;
2. il codominio C è pure l'insieme R^+;
3. a ogni numero x, scelto in D, si fa corrispondere nel codominio C un numero y, dato da:

$$y = 4x \qquad (2)$$

La semiretta O*r* di fig. 2*a* rappresenta proprio questa funzione, perché sul grafico si trovano tutti i punti P(x; y) con le seguenti caratteristiche:

1. l'ascissa x appartiene all'insieme D, dominio della funzione;
2. l'ordinata y appartiene all'insieme C, codominio della funzione;
3. x e y sono legate dalla legge (2).

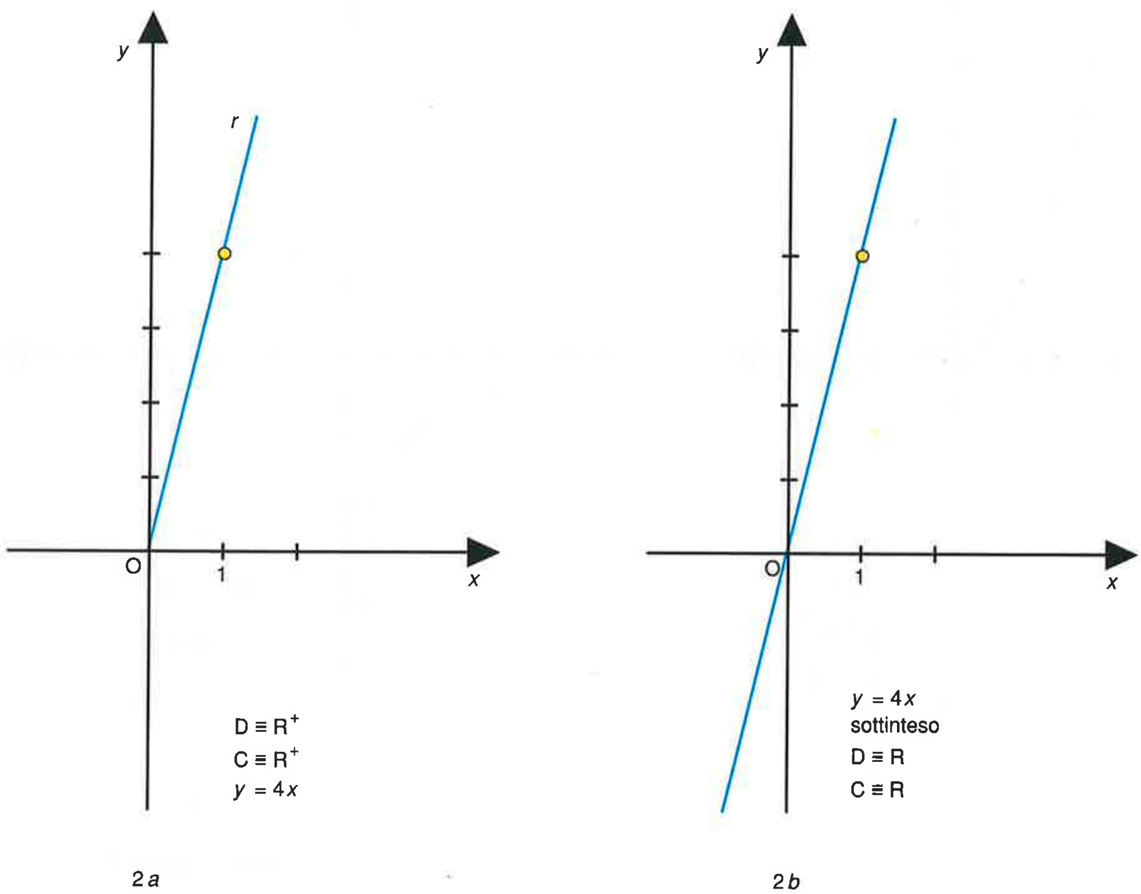
Il grafico di fig. 2*a* conduce a ricordare quello che si era detto a proposito dell'equazione e del grafico di una retta nel primo volume (vedi il capitolo ottavo, pp. 338-350): l'equazione

$$y = 4x$$

ha come grafico la retta rappresentata in fig. 2*b*, su cui si trovano tutti i punti P(x; y) che hanno le due coordinate reali.

Si trova così che *in geometria analitica si assegna una funzione indicando solo la formula che permette di ricavare* y *a partire da* x.
In questo caso *sono sottintese le seguenti indicazioni:*

Figura 2
Il grafico di una funzione in geometria analitica



- *il dominio* D *è l'insieme di tutti i numeri reali con i quali è possibile eseguire le operazioni indicate dalla formula;*
- *il codominio* C *è l'insieme dei numeri reali.*

La funzione $y = x^2$ e la parabola

La legge parabolica, ottenuta esaminando come varia l'area del quadrato al variare del lato (vedi la tabella di fig. 3), conduce ad introdurre la seguente funzione:

1. il dominio D è l'insieme R dei numeri reali;
2. il codominio C è pure l'insieme R;
3. a ogni numero x, scelto in D, si fa corrispondere nel codominio C un numero y, dato da:

$$y = x^2 \qquad (3)$$

Questa funzione viene spesso assegnata in geometria analitica indicando solo la formula (3) e ha come grafico la curva rappresentata in fig. 3, curva che prende il nome di *parabola.*

La parabola presenta molte proprietà caratteristiche, fra le quali si segnalano le seguenti, suggerite anche dalla tabella di fig. 3:

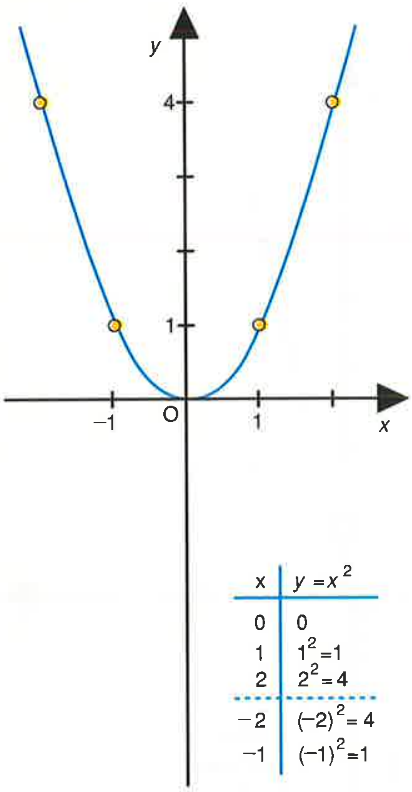
a. la curva si trova tutta al disopra dell'asse delle ascisse, cioè è formata da punti che hanno tutti l'ordinata y positiva, e questo perché il quadrato di un numero è sempre positivo;

b. la curva è tangente all'asse delle x nel punto O, che prende anche il nome di *vertice* della parabola.

La funzione $y = \dfrac{1}{x}$ e l'iperbole

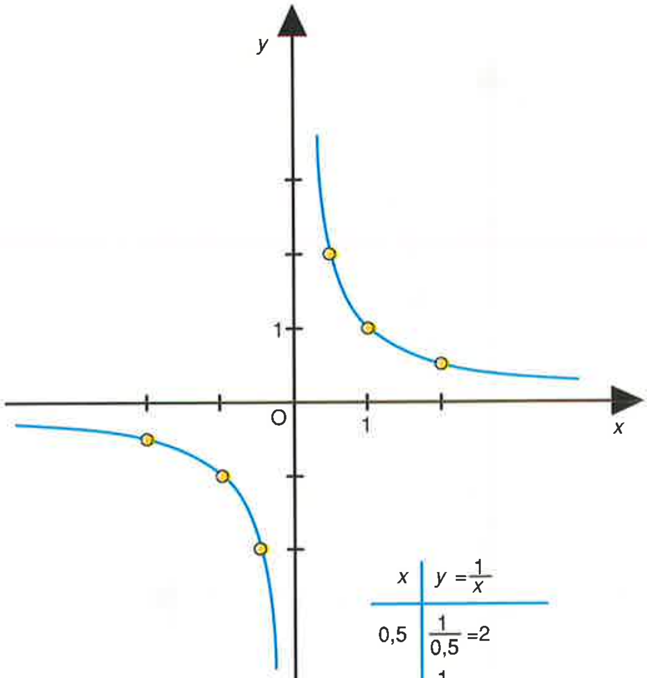
La legge di proporzionalità inversa (vedi la tabella di fig. 4) conduce invece a introdurre il

Figura 3
La parabola



x	$y = x^2$
0	0
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
−2	$(-2)^2 = 4$
−1	$(-1)^2 = 1$

Figura 4
L'iperbole



x	$y = \frac{1}{x}$
0,5	$\frac{1}{0,5} = 2$
1	$\frac{1}{1} = 1$
2	$\frac{1}{2} = 0,5$
−2	$-\frac{1}{2} = -0,5$
−1	−1
−0,5	$-\frac{1}{0,5} = -2$

geometria analitica la funzione:

$$y=\frac{1}{x}$$

Qual è ora il dominio sottinteso?
Per rispondere si debbono indicare i numeri con i quali è possibile eseguire le operazioni indicate dalla formula; in questo caso la formula richiede di eseguire solo una divisione, operazione che non si può eseguire sempre, visto che:

la divisione $\frac{1}{0}$ non ha risultato

Si conclude dunque che *il dominio D è l'insieme dei reali escluso 0*, insieme spesso indicato con il simbolo R_0.
La funzione assegnata ha come grafico la curva rappresentata in fig. 4, curva che prende il nome di *iperbole*.
L'iperbole presenta molte proprietà caratteristiche, fra le quali si segnalano le seguenti, suggerite anche dalla tabella di fig. 4:

a. la curva occupa solo il I e il III quadrante, cioè è formata da punti che hanno ascissa e ordinata dello stesso segno (positivo nel I quadrante e negativo nel III);
b. la curva è formata da due rami separati, che si avvicinano sempre di più agli assi cartesiani.

Quest'ultimo andamento della curva merita qualche riflessione più approfondita.
Il grafico e la tabella di fig. 4 suggeriscono la seguente osservazione: assegnando a x un valore positivo grande, per esempio 100, si ottiene un valore positivo piccolo di y, dato da:

$$y=\frac{1}{100}=0{,}01$$

E il punto P(100; 0,01), così vicino all'asse delle x, conduce a chiedersi se l'iperbole arriverà mai ad incontrare l'asse delle x.
Non è certo il grafico che può rispondere a questa domanda: anche una matita molto appuntita non riesce a disegnare in fig. 4 il punto P separato dall'asse delle x. È con il calcolo che si riesce a rispondere: anche assegnando a x numeri molto grandi come 100 o 1000 si otterranno ordinate come 0,01 o 0,001 che sono vicinissime a 0, ma non valgono 0.
Dunque *l'ordinata non vale mai esattamente* 0 *e perciò l'iperbole non può incontrare l'asse delle* x.

Analogamente, si possono assegnare a x valori positivi molto vicini a 0, come per esempio 0,01, e ottenere grandi valori positivi di y, come per esempio:

$$y=\frac{1}{0{,}01}=100$$

Ma *non si può sostituire 0 a* x *e perciò la curva non può incontrare l'asse delle* y.
Proprio questa suggestiva idea dell'avvicinamento indefinito senza possibilità di incontro è sintetizzata dalla parola di origine greca *asintoto*, che significa appunto «non-incontro».
Si dice quindi che *gli assi cartesiani sono gli asintoti dell'iperbole*.

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le informazioni da dare per assegnare una funzione.

② Descrivere il dominio e tracciare il grafico della funzione assegnata con la sola formula:

$$y=x^2$$

③ Descrivere il dominio e tracciare il grafico della funzione assegnata con la sola formula:

$$y=\frac{1}{x}$$

Comprensione

① Spiegare che cosa distingue una legge matematica da una funzione.

② Spiegare perché l'iperbole non incontra gli assi cartesiani.

Applicazioni

① Riprendere la legge lineare, ottenuta esaminando i lati dei rettangoli con il perimetro che vale 8, descrivere la corrispondente funzione e tracciarne il grafico.

② Riprendere l'equazione della retta

$$y=-x+4$$

studiata in geometria analitica, descrivere la corrispondente funzione e tracciarne il grafico.

③ Confrontare le funzioni esaminate nei due esercizi precedenti; in che cosa differiscono?

4

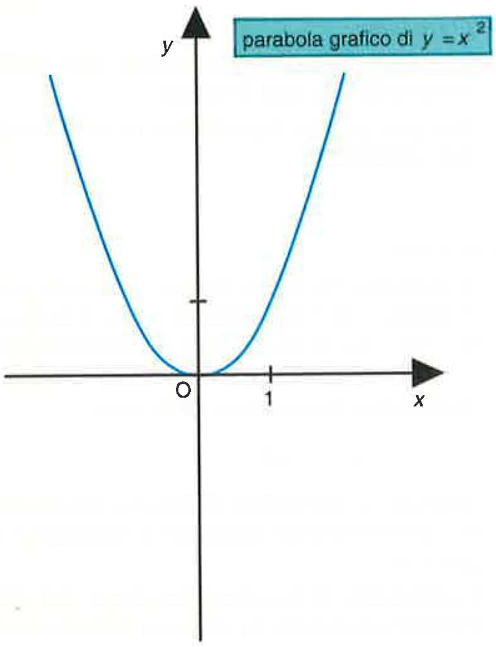
Curve, funzioni e relazioni

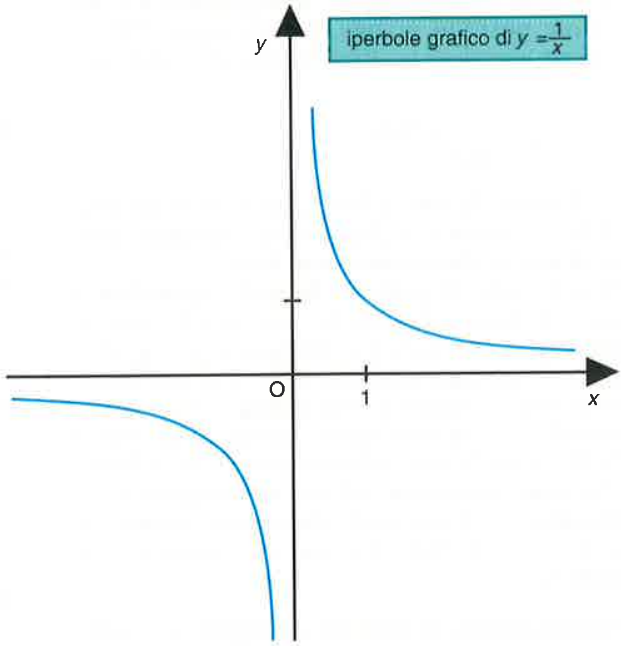
La parabola e l'iperbole introdotte nel paragrafo precedente sono due curve ottenute rappresentando sul piano cartesiano due particolari funzioni (fig. 1).
Viceversa, ci si chiede, una qualunque curva tracciata sul piano è sempre il grafico di una funzione?

La circonferenza non è il grafico di una funzione

Ecco un esempio che conduce a rispondere alla domanda precedente: in fig. 2 è rappresentata la circonferenza che ha centro nell'origine O e il raggio lungo 5.
È immediato rendersi conto che *la circonferenza non è il grafico di una funzione.*
Infatti, una delle caratteristiche fondamentali di una funzione è quella di far corrispondere a un valore di x un solo valore di y; invece, nel caso della circonferenza, fissato un valore di x si possono trovare due corrispondenti valori di y.

Figura 1
Due curve che sono il grafico di una funzione





Per descrivere una circonferenza occorrono due funzioni

La fig. 2 suggerisce però un'osservazione: i due valori di y che corrispondono a una stessa x sono opposti, dato che l'asse delle x divide la circonferenza in due parti fra loro simmetriche. Così si trova, per esempio, che ci sono due punti di ascissa 3:

- P che ha l'ordinata $y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$;
- P' che ha l'ordinata opposta –4.

E, analogamente, ci saranno due punti di ascissa 4 e cioè:

- Q che ha l'ordinata $y = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$;
- Q' che ha l'ordinata opposta –3.

Più in generale, a una data ascissa x corrispondono le due ordinate seguenti:

$$y = \sqrt{5^2 - x^2} \qquad y = -\sqrt{5^2 - x^2}$$

È ancora il grafico a suggerire un'avvertenza: x non può essere scelta come si vuole, perché i punti della circonferenza hanno l'ascissa compresa fra –5 e 5.

Si arriva così a capire che, per descrivere la circonferenza occorrono due funzioni (fig. 3):

- la prima che descrive la semicirconferenza al disopra dell'asse delle x (fig. 3*a*) e quindi è:

$$y = \sqrt{5^2 - x^2}$$

- la seconda che descrive la semicirconferenza al disotto dell'asse delle x (fig. 3*b*) e quindi è:

$$y = \sqrt{5^2 - x^2}$$

Entrambe le funzioni avranno come dominio l'insieme dei numeri reali compresi fra –5 e 5.

Funzioni e relazioni

I risultati finora raggiunti danno un'idea di quanto lunghi e complicati possono essere gli studi sulle funzioni:

- da un lato una funzione semplice come:

$$y = \frac{1}{x}$$

ha come grafico una curva complicata e insidiosa, spezzata in due archi separati;

- dall'altro per descrivere un'unica curva regolare come la circonferenza si arriva a due funzioni complicate come:

$$y = \sqrt{25 - x^2} \qquad y = -\sqrt{25 - x^2}$$

E infatti gli studi sulle funzioni hanno da sempre accompagnato lo sviluppo della matemati-

Figura 2
La circonferenza non è il grafico di una funzione

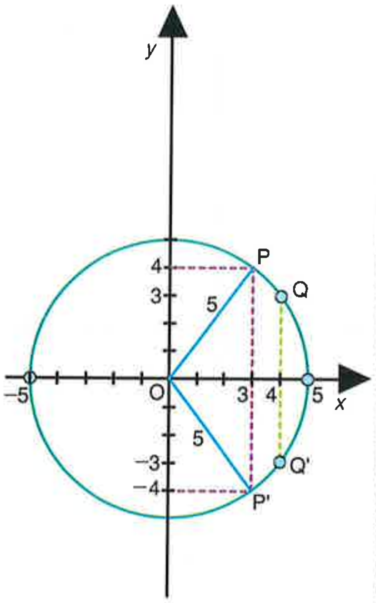
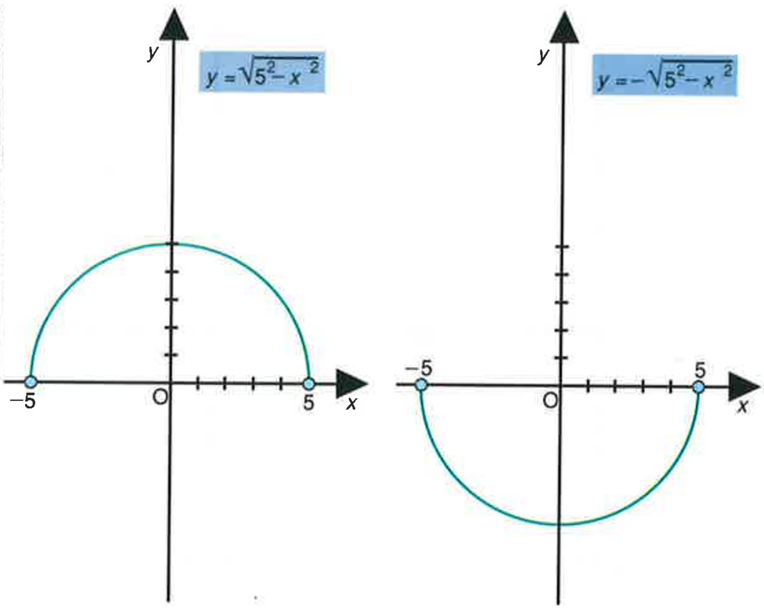


Figura 3
Per descrivere una circonferenza occorrono due funzioni



3*a*

3*b*

ca; per questo in epoche diverse o in contesti diversi si trovano sull'argomento «funzioni» tanti risultati che si intrecciano fra loro (vedi anche la scheda storica, p. 196).
In particolare, il termine «funzione», nato con un significato largo e intuitivo per descrivere sia i fenomeni fisici che le curve del piano, è stato modificato durante il nostro secolo da un rigoroso lavoro di risistemazione dei concetti.
Si è arrivati così alla definizione di funzione data nel paragrafo precedente, e cioè:

Si individua una funzione *quando sono dati:*

1. *un insieme* D, *detto* dominio;
2. *un insieme* C, *detto* codominio;
3. *una legge che associa a ogni elemento* x *dell'insieme* D *un solo elemento* y *dell'insieme* C.

In questa definizione sono importanti due fatti che per secoli erano passati inosservati:

- che bisogna sempre precisare dominio e codominio di una funzione;
- che a una x deve corrispondere una sola y.

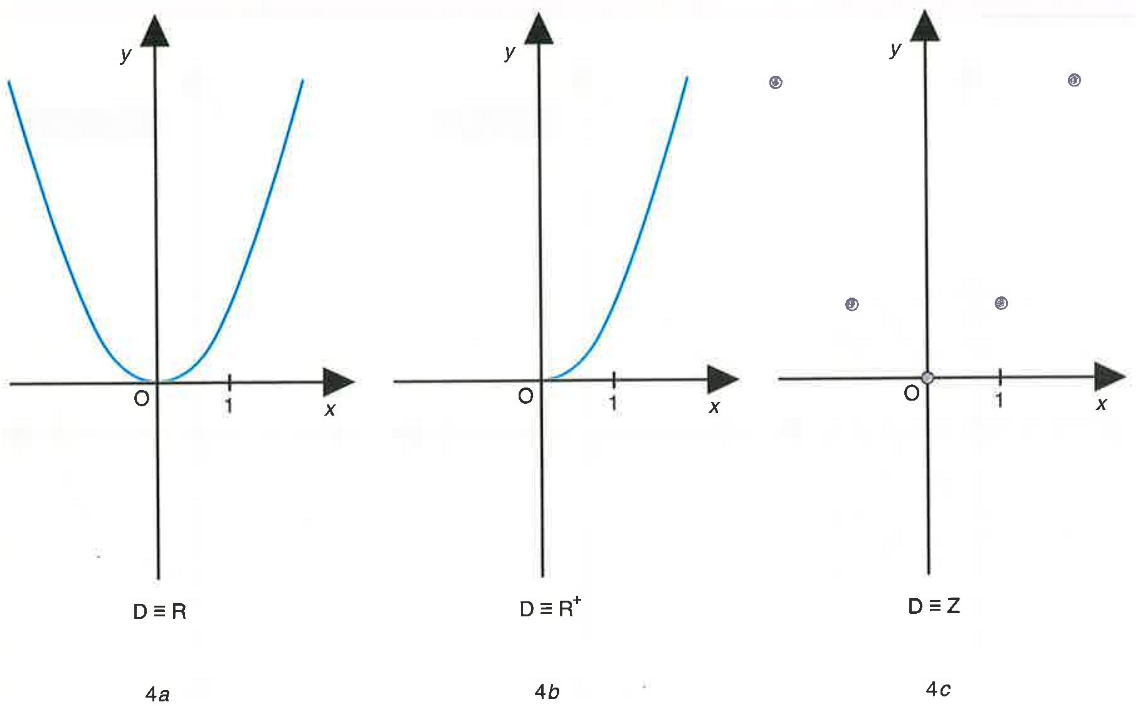
Questo porta molte conseguenze, fra le quali si segnalano le due seguenti.

1. Per modificare una funzione, basta modificarne il dominio; così, per esempio, in fig. 4 sono rappresentate tre funzioni diverse costruite con la formula $y = x^2$:
   - la prima ha come dominio i reali (fig. 4*a*);
   - la seconda ha come dominio i reali positivi (fig. 4*b*);
   - la terza ha come dominio gli interi (fig. 4*c*).
2. Rimangono molti casi in cui le variabili x e y sono legate in modo che a una x non corrisponde una sola y; un esempio è proprio il grafico della circonferenza (fig. 2) che ha l'equazione cartesiana trovata nel paragrafo 1 e cioè:

   $$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

   In questi casi si preferisce adottare il termine *relazione*, dicendo quindi che l'equazione (1) stabilisce una relazione fra le coordinate $(x; y)$ di un punto P che percorre la circonferenza.

Figura 4
Funzioni diverse costruite con la formula $y = x^2$



Come riconoscere se una curva è il grafico di una funzione

Le precedenti considerazioni conducono ad individuare un criterio per decidere se una linea tracciata sul piano cartesiano è il grafico di una funzione (fig. 5): *una retta parallela all'asse delle* y *deve incontrare la curva al massimo in un punto.*
Così la curva di fig. 5*a* è il grafico di una funzione, mentre la curva di fig. 5*b* non è il grafico di una funzione.

Verifiche

Conoscenze

① L'iperbole è il grafico di una funzione?

② La circonferenza è il grafico di una funzione?

③ Qual è il criterio per riconoscere se una curva è il grafico di una funzione?

Comprensione

① Spiegare perché l'iperbole è il grafico di una funzione mentre la circonferenza non lo è.

② Spiegare perché si distinguono le relazioni dalle funzioni.

Applicazioni

① Tracciare il grafico delle seguenti tre funzioni costruite con la formula:

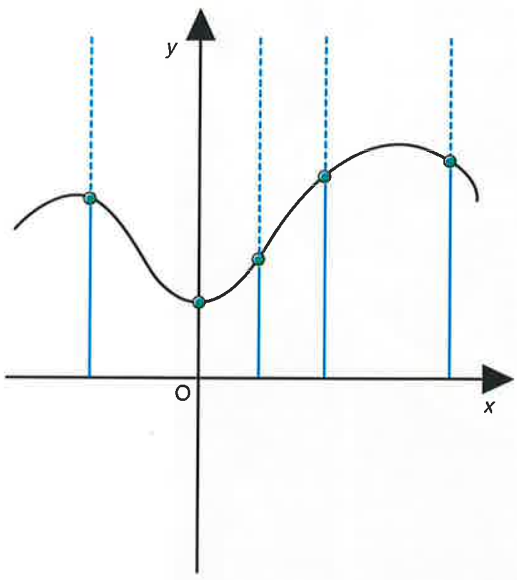
$y = 4x$

Il dominio delle tre funzioni é il seguente
- la prima ha come dominio i reali;
- la seconda ha come dominio i reali positivi;
- la terza ha come dominio gli interi.

② Disegnare la retta che è parallela all'asse delle y e passa per il punto A(3; 1); scrivere l'equazione della retta e dire se è una funzione o una relazione.

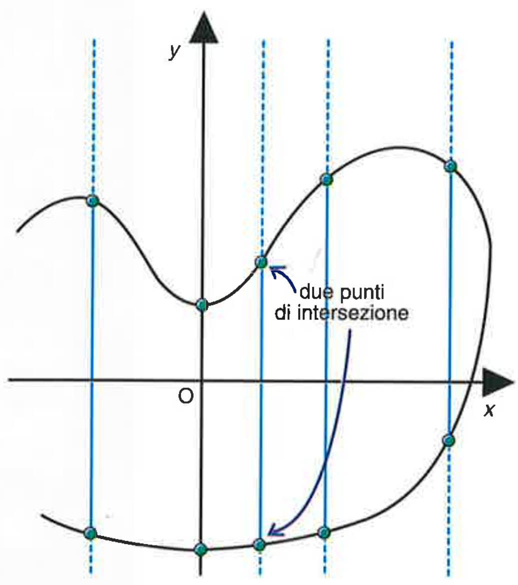
③ Disegnare la retta che è parallela all'asse delle x e passa per il punto A(3; 1); scrivere l'equazione della retta e dire se è una funzione o una relazione.

Figura 5
Criterio per decidere se una curva è il grafico di una funzione



la curva rappresenta una funzione

5*a*



La curva *non* rappresenta una funzione

5*b*

Il concetto di funzione nella storia

Le origini del concetto di funzione

Il concetto di funzione non è antico quanto la geometria o il calcolo letterale, ma si forma gradualmente a partire da studi di fisica e di geometria. Ecco qualche situazione in cui si trovano le radici del concetto di funzione.

Gli studi di Tycho Brahe

Alla fine del XVI secolo l'astronomo danese Tycho Brahe (fig. 1) ideò un modello del sistema solare da contrapporre a quello proposto da Copernico. Per verificare la validità del suo modello, Brahe condusse per anni delle osservazioni astronomiche così precise da essere, in molti casi, ancora oggi valide.

Figura 1
L'osservatorio di Tycho Brahe in un dipinto del Seicento

Fra questi lavori i più famosi sono quelli relativi ai pianeti del sistema solare: l'astronomo riuscì a valutare il raggio R dell'orbita dei pianeti allora conosciuti e il relativo periodo di rotazione T, e riunì le misure trovate in una tabella come quella qui sotto. Questa tabella fornisce dunque la legge per trovare, per ogni valore di R, il corrispondente valore di T.

Pianeta	R	T
Mercurio	0,389	87,77
Venere	0,724	224,70
Terra	1	365,25
Marte	1,524	686,98
Giove	5,200	4332,62
Saturno	9,510	10759,20

R è dato dal rapporto fra il raggio dell'orbita del pianeta e quello della Terra; *T* è misurato in giorni

Il lavoro di Fermat

Il matematico francese Pierre de Fermat (1601-1665) è ritenuto, insieme al contemporaneo René Descartes, il fondatore della geometria analitica, che studia le proprietà delle curve con i metodi dell'algebra.

Ecco che cosa scrive Fermat in un suo lavoro completato nel 1629, ma pubblicato postumo solo nel 1679:

«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un'equazione, si ha una linea che può essere retta o curva».

In particolare, Fermat scriveva l'equazione di una retta passante per l'origine nella forma seguente:

«D in A aequetur B in E»

In questa oscura frase latina si ha che:

- A ed E indicano le coordinate di un punto;
- «D in A» significa «D volte l'ascissa»;
- «B in E» significa «B volte l'ordinata»;
- il verbo latino «aequetur» viene oggi espresso col simbolo «=».

Quindi la frase corrisponde alla formula:

$$\mathrm{D}x = \mathrm{B}y \quad \text{ossia} \quad y = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}x$$

Si tratta in definitiva della formula:

$$y = mx$$

espressa però con un linguaggio molto lontano da quello di oggi.

Gli studi sulle traiettorie di un corpo

Nella prima metà del Seicento vengono pubblicati vari studi sul lancio dei proiettili. In fig. 2 un'incisione dell'epoca mostra le traiettorie seguite da una palla di cannone; la fig. 3 mostra le due grandezze variabili che caratterizzano la traiettoria del proiettile:

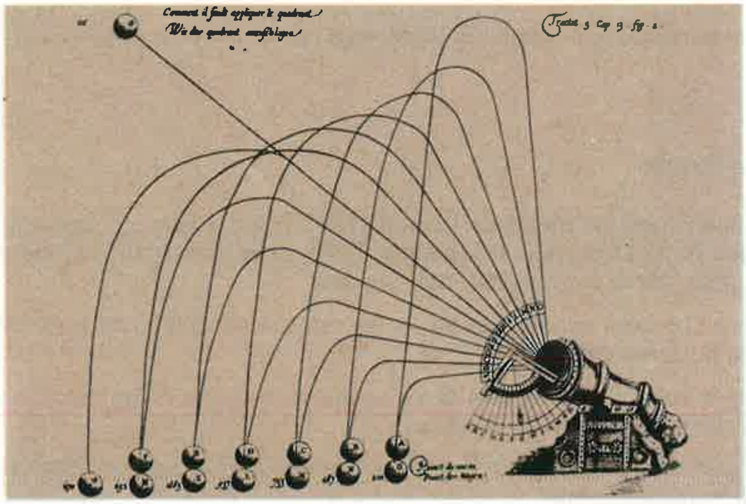
- lo spostamento x in direzione orizzontale;
- lo spostamento y in direzione verticale.

È quindi una curva che fornisce la legge per ricavare, per ogni valore di x, il corrispondente valore di y.

E così il grande fisico inglese Isaac Newton (1642-1727) considerava le curve sempre come traiettorie, cioè come «scie» lasciate da un corpo che si muove; ecco infatti che cosa scrive Newton nel 1676:

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal movimento continuo di punti. ... Questa genesi avviene naturalmente e viene osservata tutti i giorni nel movimento dei corpi.»

Figura 2
Lo studio della traiettoria dei proiettili in un trattato di artiglieria del 1621



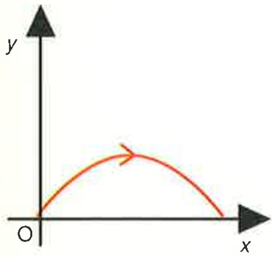
Il concetto di funzione dal XVIII secolo alla fine del XIX

Il termine «funzione» compare per la prima volta nel 1673 in un manoscritto del filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz per indicare una quantità variabile da un punto ad un altro di una curva.

Si trattava dunque di un concetto vago e suggestivo, sul quale molti matematici di valore hanno lavorato per secoli, modificandolo gradualmente.

Ecco una breve selezione delle definizioni di funzione che si trovano nei testi degli autori più noti dal Settecento alla fine dell'Ottocento.

Figura 3
La traiettoria di un proiettile è una curva



Leonhard Euler [Eulero] (1755)
«Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste.

Questa denominazione ha un'estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre.

Se dunque x rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da x in un modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate funzioni di essa».

Augustin-Louis Cauchy (1857)
«Due variabili reali o, in altri termini, due quantità algebriche variabili diconsi funzioni una dell'altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell'una determini il valore dell'altra».

Karl Weierstrass (1878)
«Se una quantità variabile reale ..., che diremo y, è legata ad un'altra quantità variabile reale ... x, in guisa che ad un valore di x corrispondano, entro certi limiti, uno o più valori determinati per y, si dirà che y è funzione di x nel senso più generale del vocabolo e si scriverà $y = f(x)$».

Il concetto di funzione dopo il 1939

Nel 1935 sette giovani matematici francesi crearono un gruppo di lavoro al quale dettero il «nome di battaglia» di Bourbaki. Inizialmente il gruppo aveva un obiettivo circoscritto: riscrivere un famoso trattato di matematica in cui avevano individuato delle parti poco rigorose.

Ben presto però il progetto iniziale si trasformò nel ben più ambizioso programma di risistemare tutta la matematica, basandola su un unico fondamento: lo studio degli insiemi.

A partire dal 1939 cominciarono a uscire i lavori del gruppo Bourbaki, che riesaminavano i vari rami della matematica allora conosciuti alla luce di questo nuovo punto di vista; e così le tradizionali suddivisioni della matematica in aritmetica, geometria, algebra, etc. diventavano sorpassate e si imponevano nuovi criteri di classificazione.

Ecco che cosa ha scritto a questo proposito Jean Dieudonné, uno dei più famosi membri del gruppo Bourbaki:

«Io paragono le vecchie suddivisioni della matematica alle suddivisioni degli antichi zoologi i quali, vedendo che il delfino, lo squalo e il tonno sono animali simili, dicevano: sono pesci, perché tutti vivono nel mare ed hanno forme simili. Bisognava aspettare un bel pezzo prima che essi realizzassero che le strutture di questi animali non erano del tutto simili e che dovevano essere classificati in modi diversi».

Dal 1939 è stata enorme l'influenza esercitata da Bourbaki sul linguaggio e sul modo di concepire e di trattare gli argomenti centrali della matematica. E fra gli argomenti centrali affrontati in «stile bourbakista» non poteva mancare il concetto di funzione.

Ecco appunto la definizione bourbakista di funzione, come si trova in un testo di Dieudonné del 1969:

«Siano E e F due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di funzione all'operazione che così associa ad ogni elemento x di E l'elemento y di F che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata».

Però, mentre il gruppo Bourbaki si dedicava a questo paziente lavoro di rigorosa sistemazione dei concetti, altri grandi matematici lavoravano in settori più orientati verso le applicazioni, e non tutti concordavano sull'impostazione bourbakista; ecco la voce di uno di questi matematici.

René Thom (1964)
«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki ... non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza».

Le funzioni nella realtà

La nozione di funzione data nei paragrafi 3 e 4 è molto generale: una funzione è una legge che fa corrispondere a un elemento del dominio D un solo elemento del codominio C.

E così non è detto che gli insiemi D e C siano insiemi numerici né che gli elementi siano numeri e nemmeno che la legge di corrispondenza sia espressa con una formula.

Ecco allora qualche esempio di funzione che nasce in un contesto non strettamente matematico.

Funzioni date con un grafico

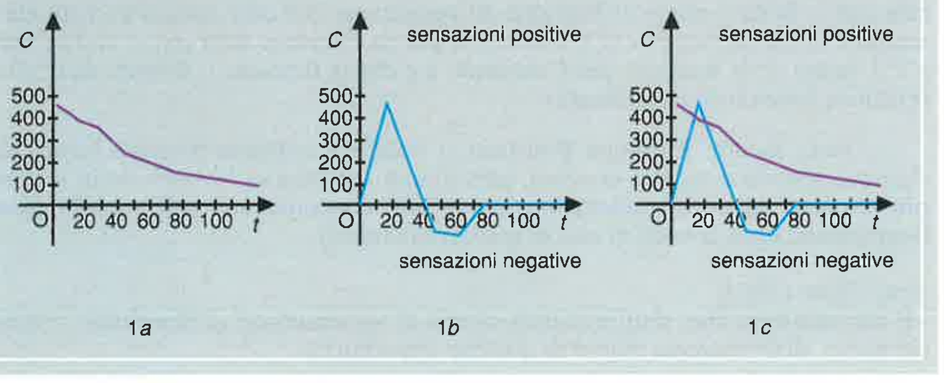
In fig. 1 sono riportati dei grafici ottenuti nel 1982 da due sperimentatori americani che si occupavano degli effetti della cocaina, una droga di antica origine.

Una delle esperienze condotte è stata la seguente: far assumere della cocaina a un tossicodipendente e misurare la concentrazione c della droga nel sangue al passare del tempo t che trascorre a partire dall'assunzione della cocaina. Si sono quindi tradotti i risultati dell'esperimento in un grafico, riportando t sull'asse delle ascisse e c sull'asse delle ordinate. Si è così ottenuto il grafico di fig. 1*a*.

Il grafico di fig. 1*b* è stato invece ottenuto riportando sull'asse delle ascisse ancora il tempo t, ma sull'asse delle ordinate le «sensazioni riferite dal soggetto», considerando, per esempio, come sensazione positiva l'euforia e come sensazioni negative la depressione, l'angoscia e il desiderio di un'altra dose di droga.

Infine la fig. 1*c* riporta i due grafici delle figure 1*a* e 1*b* sovrapposti; quest'ultimo grafico mostra che le sensazioni negative hanno inizio quando la concentrazione di droga nel sangue è ancora relativamente elevata.

Figura 1
Tre grafici per studiare l'effetto della cocaina



Basta sfogliare un quotidiano o un settimanale d'informazione per trovare altre funzioni espresse con un grafico; per esempio in fig. 2 si trovano due grafici che danno due diverse previsioni, fatte all'inizio del 1988, per il tasso d'inflazione della lira italiana nel periodo dal 1988 al 1992.

Funzioni date con una tabella

Ancora più varie e comuni sono le funzioni date per mezzo di una tabella.

La tabella A, per esempio, si occupa della temperatura massima di alcune città in un dato giorno: a ogni città è associata la sua temperatura massima.

Questa funzione può essere visualizzata con un grafico come quello di fig. 3. Un grafico analogo potrebbe visualizzare anche la tabella B, che fa parte di uno studio sulla sopravvivenza di differenti microrganismi sottoposti ad alta temperatura.

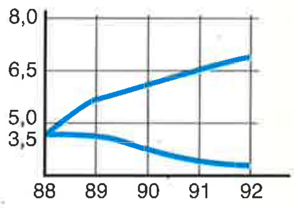


Figura 2
Due grafici di previsione del tasso d'inflazione

TABELLA A

Amsterdam	12	Lisbona	18
Atene	14	Londra	10
Belgrado	6	Los Angeles	25
Berlino	7	Madrid	16
Bruxelles	11	Miami	17
Chicago	11	Mosca	6
Copenaghen	5	New York	9
Dublino	7	Oslo	4
Francoforte	9	Parigi	12
Ginevra	7	Rio de Janeiro	36
Helsinki	4	S. Francisco	22
Honolulu	26	Stoccolma	3
Istanbul	14	Vienna	8
Kiev	2	Varsavia	5

TABELLA B

Organismi	Tempo di sopravvivenza in minuti
Protozoi	0
Batteri	0
Bacillus subtilis	14
Clostridium perfringens	20
Clostridium botulinum	360

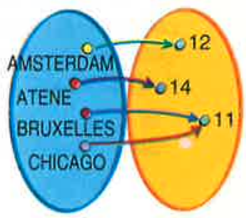


Figura 3
La temperatura in alcune città del mondo

Altre funzioni

Ma non si trovano solo tabelle e grafici nella vita di tutti i giorni: ci si vale di funzioni, forse senza rendersene conto, tutte le volte che si usa un tariffario per calcolare il costo di una telefonata, di un viaggio in treno o l'ammontare delle tasse da pagare ogni anno. Ecco un esempio. Per sapere quanto verrà a costare una telefonata interurbana in Italia ad una distanza superiore a 120 km, si hanno delle indicazioni di questo tipo: il costo è valutato a partire da unità indivisibili di tempo composte di tre minuti; la prima unità costa 1235 lire, le successive 735 lire.

Per valutare il costo di una telefonata seguendo queste indicazioni, si potrebbe allora procedere così:

- si indica con x il tempo (in minuti);
- si indica con y il costo (in lire);
- si applicano le seguenti formule:

per $0 \leq x < 3$ $\quad y = 1235$

per $3 \leq x < 2\cdot3$ $\quad y = 1235 + 735$

per $2\cdot3 \leq x < 3\cdot3$ $\quad y = 1235 + 2\cdot735$

e così via.

Si trovano dunque, nei settori scientifici più vari e nella vita di tutti i giorni, la necessità e l'abitudine di basarsi su formule, tabelle o grafici per esplorare o descrivere la realtà. Sono proprio questi strumenti di indagine, apparentemente tanto diversi, a essere sintetizzati in un unico concetto: il concetto di funzione.

5

Le funzioni $y=x^n$ e il loro grafico

Le funzioni $y = x^2$ e $y = x^3$

Dalla legge parabolica si è stati condotti a studiare la funzione

$$y = x^2$$

scegliendo come dominio tutto l'insieme dei reali (fig. 1).
E così la legge cubica può condurre a studiare la funzione

$$y = x^3$$

scegliendo ancora come dominio l'insieme R dei reali; si ottengono la tabella e il grafico di fig. 2, che prende anche il nome di *parabola cubica* o *parabola del terzo ordine*.
Queste due curve visualizzano alcune proprietà delle potenze a esponente intero; in particolare:

- le due curve passano per il punto O(0; 0), dato che risulta:

$$0^2 = 0 \qquad 0^3 = 0$$

- le due curve passano per il punto A(1; 1), visto che si ha:

$$1^2 = 1 \qquad 1^3 = 1$$

- la parabola d'equazione $y = x^2$ è costituita da tutti punti di ordinata y positiva e questo perché *qualunque numero elevato al quadrato dà una potenza positiva*; risulta, per esempio:

$$2^2 = 2{\cdot}2 = 4 \qquad (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

- la parabola d'equazione $y = x^3$ è costituita tutta da punti di ordinata y con lo stesso segno dell'ascissa x e questo perché *qualunque numero elevato al cubo dà una potenza che ha lo stesso segno della base* e cioè risulta, per esempio:

$$2^3 = 2{\cdot}2^2 = 2{\cdot}4 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)^2 = -2{\cdot}4 = -8$$

Le funzioni $y = x^n$ con esponente n intero positivo

Le due funzioni ora ottenute conducono a continuare lo studio, tracciando il grafico di altre funzioni del tipo

$$y = x^n$$

con esponente intero positivo.
Così, per esempio, in fig. 3 si trova la tabella e il grafico della funzione:

$$y = x^4$$

In fig. 4 si trova la tabella e il grafico della funzione:

$$y = x^5$$

Ora, confrontando le figure 1 e 3, si osserva che le due curve hanno un andamento analogo, andamento che si può ritrovare anche in funzioni come $y = x^6$ o $y = x^8$, cioè in funzioni del tipo $y = x^n$ con esponente n pari. E così si trova un andamento analogo nelle due curve delle funzioni $y = x^3$ e $y = x^5$ (figure 2 e 4), che sono pure del tipo $y = x^n$, ma con esponente n dispari.
Le considerazioni finora svolte possono essere riassunte nel modo seguente.

1. Tutte le funzioni del tipo $y = x^n$ con esponente intero positivo presentano due caratteristiche comuni:
   - passano per O(0; 0) perché $0^n = 0$ per qualunque n intero positivo;
   - passano per A(1; 1) perché $1^n = 1$ per qualunque n intero positivo.

2. Tutte le funzioni del tipo $y = x^n$ con esponente pari hanno un grafico analogo a quello della funzione $y = x^2$; in particolare, la curva è costituita tutta da punti di ordinata y positiva, perché *qualunque numero elevato a un esponente pari dà una potenza positiva.*
Per esempio risulta:

$$(-2)^4 = [(-2)^2]^2 = 16$$

$$(-2)^6 = [(-2)^2]^3 = 64$$

3. Tutte le funzioni del tipo $y = x^n$ con esponente dispari hanno un grafico analogo a quello della funzione $y = x^3$; in particolare, la curva è costituita tutta da punti che hanno l'ordinata y con lo stesso segno dell'ascissa x, perché *qualunque numero elevato a un esponente dispari dà una potenza che ha lo stesso segno della base.*
Per esempio risulta:

$$(-2)^5 = (-2)(-2)^4 = -32$$

$$(-2)^7 = (-2)(-2)^6 = -128$$

Verifiche

Conoscenze

① Tracciare il grafico delle funzioni $y = x^2$ e $y = x^4$ illustrandone le caratteristiche comuni.

② Tracciare il grafico delle funzioni $y = x^3$ e $y = x^5$ illustrandone le caratteristiche comuni.

Comprensione

① Esporre le proprietà che caratterizzano tutte le funzioni $y = x^n$.

② Esporre le proprietà che distinguono le funzioni $y = x^n$ con n pari da quelle con n dispari.

Applicazioni

① Tracciare il grafico della funzione $y = x^6$ e illustrarne le caratteristiche.

② Tracciare il grafico della funzione $y = x^7$ e illustrarne le caratteristiche.

Figura 1
La parabola $y = x^2$

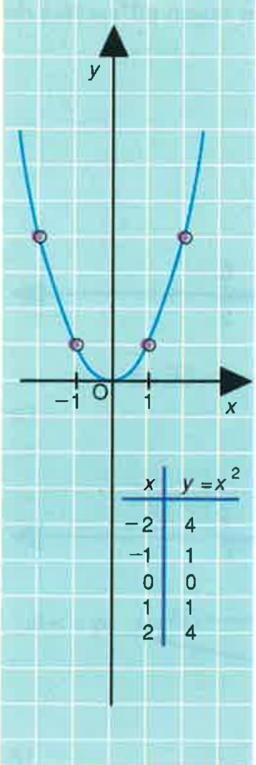


Figura 2
La parabola cubica $y = x^3$

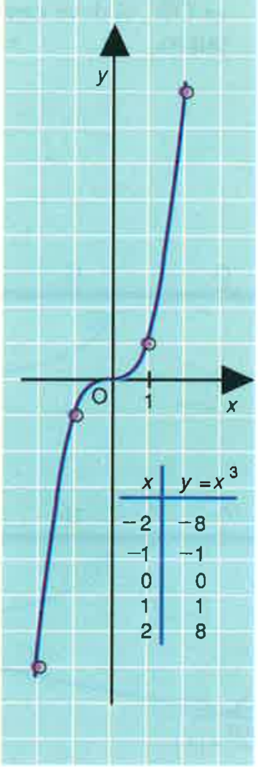


Figura 3
Il grafico della funzione $y = x^4$

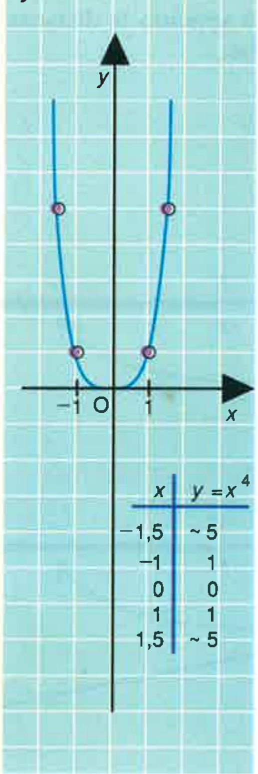
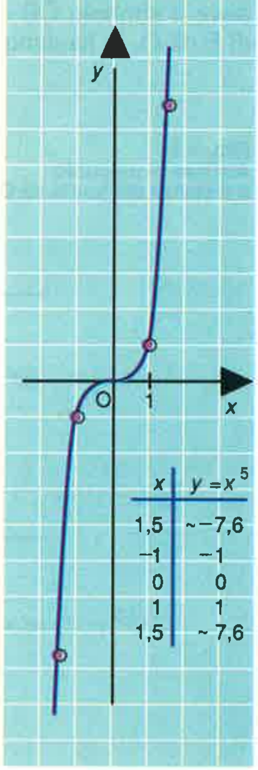


Figura 4
Il grafico della funzione $y = x^5$



6 La funzione $y=|x|$ e il suo grafico

Il valore assoluto (o modulo) di un numero

In fig. 1*a* si trova l'asse delle x di un riferimento cartesiano e una coppia di punti corrispondenti a numeri reali opposti:

- B che rappresenta 2, e B', che rappresenta –2.

Così si osserva subito che l'unità di misura OU è contenuta 2 volte in OB e perciò la distanza di B da O vale 2. Questa situazione si sintetizza con la formula

$$\overline{OB} = 2$$

dove il simbolo $\overline{OB}$ indica appunto la distanza di B da O. Si ha dunque che:

• l'ascissa di B è 2 e

$$\overline{OB} = 2$$

cioè la distanza $\overline{OB}$ coincide con l'ascissa del punto.

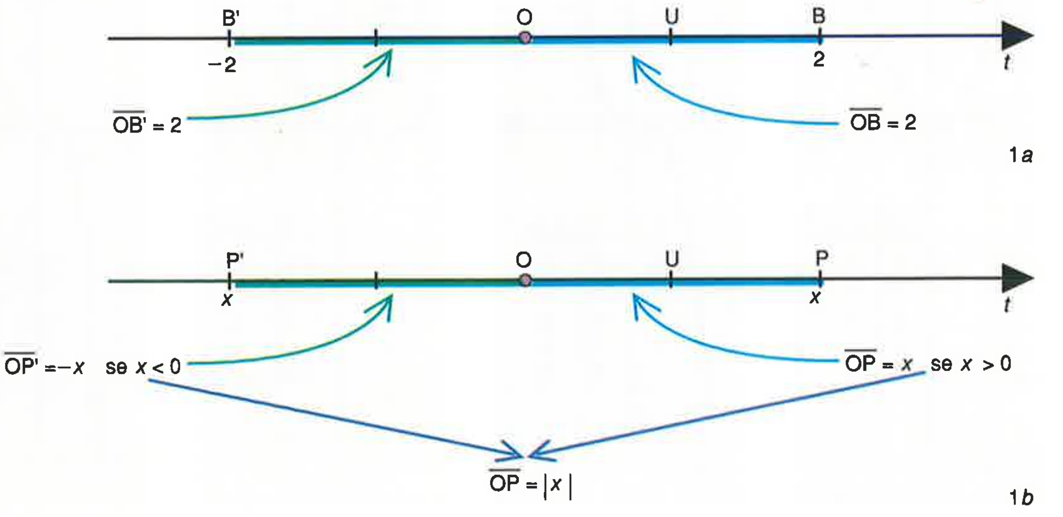
Passando ora a esaminare il punto B' (fig. 1*a*), si trova che:

• l'ascissa di B' è –2 e

$$\overline{OB'} = 2$$

In questo caso dunque per ottenere la distanza $\overline{OB'}$, si deve cambiare segno all'ascissa del punto.

Figura 1
Ascissa di un punto e distanza del punto da O



Il fatto che si deve cambiare segno all'ascissa −2 per ottenere la distanza positiva 2 si può anche esprimere scrivendo:

$$\overline{OB'} = -(-2)$$

Analoghe considerazioni si possono ripetere ovviamente a partire da una qualunque altra coppia di punti P e P' che rappresentano numeri reali opposti.
Si può dunque concludere dicendo che (fig. 1*b*):
- se P ha l'ascissa x positiva, $\overline{OP} = x$;
- se P ha l'ascissa x negativa, $\overline{OP} = -x$.

Il procedimento ora descritto si riassume scrivendo:

$$\overline{OP} = |x|$$

Il simbolo $|x|$ si legge «valore assoluto di x» o «modulo di x».

La funzione $y = |x|$

Il procedimento per ottenere il valore assoluto di un numero può essere efficacemente visualizzato considerando la funzione:

$$y = |x|$$

che è dunque definita così:
- il dominio D è l'insieme R dei numeri reali;
- il codominio C è l'insieme R^+ dei reali positivi;
- ad ogni numero reale x si associa un numero reale positivo y con la legge seguente:
  • se $x \geq 0$, $y = x$;
  • se $x < 0$, $y = -x$.

In fig. 2 si trova il grafico di questa funzione: il grafico è costituito da due semirette:
- la semiretta d'equazione $y = x$, in corrispondenza dei valori positivi di x;
- la semiretta d'equazione $y = -x$, in corrispondenza dei valori negativi di x.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cosa indica il simbolo $|x|$?
② Dire come è definita la funzione $y = |x|$ e tracciarne il grafico.

Comprensione

① Esaminare le formule seguenti:

$$\overline{OP} = x \qquad \overline{OP} = -x \qquad \overline{OP} = |x|$$

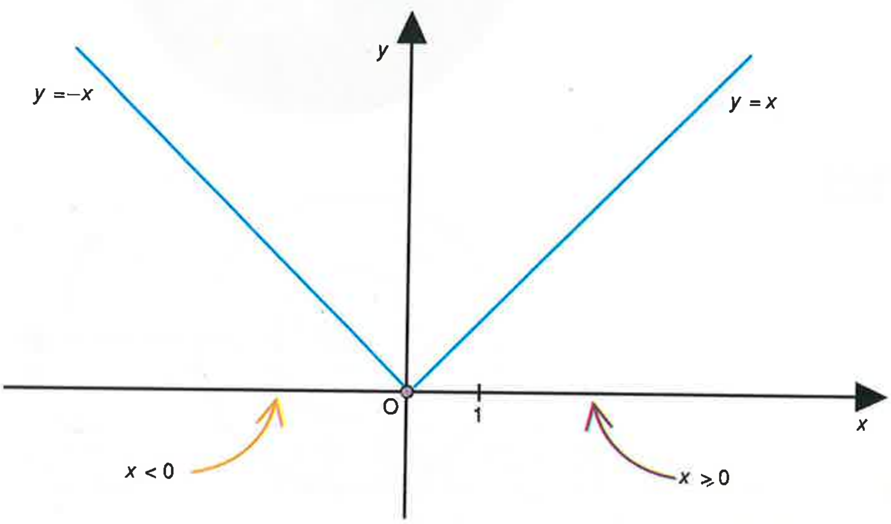
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare la differenza fra le tre formule;
b. spiegare perché una sola delle formule è valida per qualunque valore dell'ascissa x.

Applicazioni

① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = x \qquad y = -x \qquad y = |x|$$

Figura 2
La funzione $y = |x|$ e il suo grafico



Il riferimento polare

Un riferimento polare nella tecnica

In fig. 1 è riportata la fotografia di uno schermo radar, che fa parte degli strumenti di bordo delle navi e degli aerei e dei sistemi di controllo di porti e aeroporti. Quando il radar è in funzione, si nota una semiretta luminosa che gira in verso antiorario intorno al centro dello schermo; la presenza di un qualsiasi ostacolo nella direzione della semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

La posizione di un ostacolo A rispetto all'osservatore O è quindi individuata da due numeri che si leggono sullo schermo (fig. 2):

- la distanza $\overline{OA}$ lunga r;
- l'ampiezza α dell'angolo descritto dalla semiretta luminosa per passare dalla posizione di partenza Op alla posizione OA.

Questi due numeri r e α individuano dunque la posizione di un punto A rispetto al punto O e alla semiretta Op; si dice allora che si è stabilito sullo schermo un *riferimento polare*.

Figura 1
Lo schermo radar per il controllo del traffico navale in un porto olandese

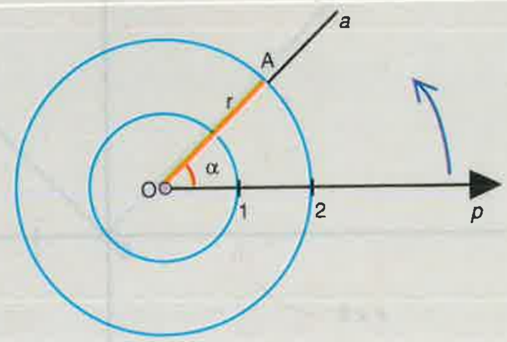


Figura 2
Il riferimento polare

Le coordinate polari

Sul piano si stabilisce dunque un *riferimento polare* fissando (fig. 2):

- un punto O, detto *polo*;
- una semiretta Op, detta *asse polare*, su cui è fissata un'unità di misura delle lunghezze;
- un verso di rotazione della semiretta, di solito quello antiorario.

Fissato un riferimento polare, la posizione di un punto A è individuata da due numeri:

- *il raggio r*, che indica la distanza $\overline{OA}$;
- *l'anomalia* α, che indica l'ampiezza dell'angolo $p\hat{O}A$.

Raggio e anomalia sono le coordinate polari del punto A, e si scrive:

$$A(r;\ \alpha)$$

In fig. 3 si trova indicato qualche punto con le sue coordinate polari.

Le coordinate polari in matematica sono utilizzate soprattutto per descrivere in modo facile delle linee in cui c'è un punto con un ruolo particolare; ecco tre esempi.

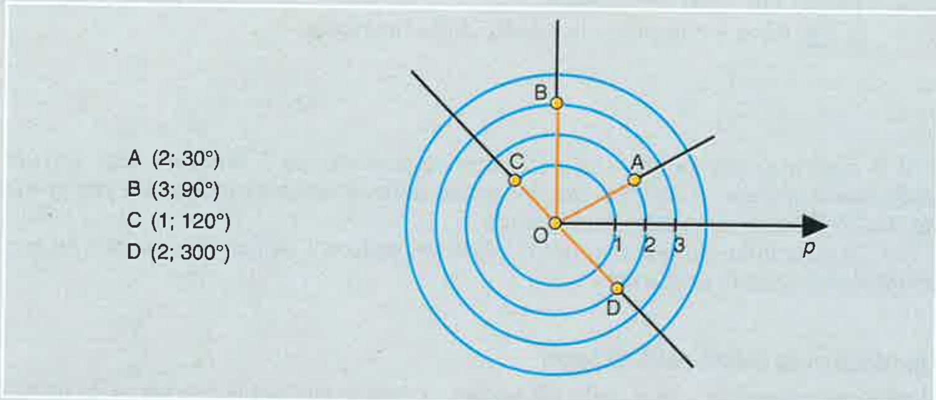


Figura 3
Qualche punto con le sue coordinate polari

Equazione di semirette che passano per O

In fig. 4 è disegnata la semiretta Ob che forma con l'asse polare un angolo di 45°. Tutti i punti della semiretta hanno dunque una proprietà comune: l'anomalia α vale 45°; perciò l'equazione della semiretta Ob è:

$$\alpha = 45°$$

E viceversa le equazioni:

$$\alpha = 90° \quad \text{e} \quad \alpha = 135°$$

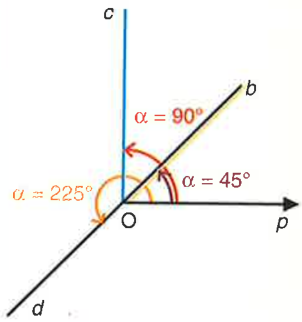
hanno per grafico le due semirette Oc e Od pure rappresentate in fig. 4.

In conclusione, *una semiretta di origine O ha equazione*:

$$\alpha = k$$

dove k *indica l'anomalia fissa di tutti i punti che si trovano sulla semiretta.*

Figura 4
Semirette nel riferimento polare



Equazione di circonferenze di centro O

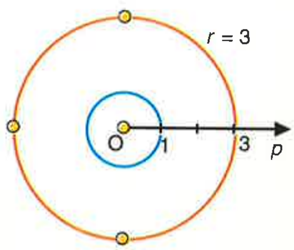
Un punto A che ha il raggio r fisso mantiene sempre la stessa distanza da O e perciò percorre una circonferenza di centro O.

Per esempio (fig. 5), le equazioni:

$$r = 1 \qquad r = 3$$

descrivono due circonferenze di centro O, una con il raggio lungo 1 e l'altra con il raggio lungo 3.

Figura 5
Circonferenze di centro nel riferimento polare



In conclusione, *una circonferenza che ha il centro nell'origine O ha equazione*:

$$r = h$$

dove h *indica il raggio di tutti i punti che si trovano sulla circonferenza.*

La spirale uniforme

Finora si è visto come delle linee note – semirette passanti per O e circonferenze di centro O – assumano equazioni particolarmente semplici quando si stabilisce sul piano un riferimento polare.

Vediamo ora il viceversa: quale aspetto assume il grafico di una funzione nota in questo nuovo riferimento. Ecco un esempio.

La funzione:

$$y = \frac{1}{20} x$$

che nel riferimento cartesiano ha come grafico una retta (fig. 6*a*), ha nel riferimento polare tutt'altro andamento.

In fig. 6*b* si è compilata la tabella della funzione:

$$r = \frac{1}{20} \alpha$$

e si è costruito per punti il grafico corrispondente; si è ottenuta *una spirale uniforme* o *spirale di Archimede*, dal nome dello scienziato greco che per primo ne studiò il comportamento matematico.

Si conclude dunque che *nel riferimento polare l'equazione* $r = m\alpha$ *ha per grafico una spirale uniforme.*

Un riferimento polare nella biologia

Il riferimento polare – si è detto all'inizio – trova la sua applicazione nella tecnologia; ma questo riferimento si applica anche in un campo del tutto diverso e precisamente nell'*etologia*, che è lo studio del comportamento degli animali.

In particolare, si è scoperto che un'ape comunica alle compagne il luogo dove ha trovato del cibo basandosi proprio su un riferimento polare: l'ape percorre un breve tratto indicando la direzione del cibo; quindi esegue la cosiddetta «danza dell'addome», cioè fa vibrare il suo corpo più o meno rapidamente a seconda della distanza a cui si trova il cibo.

La posizione del cibo è così individuata da due informazioni: *direzione* e *distanza*.

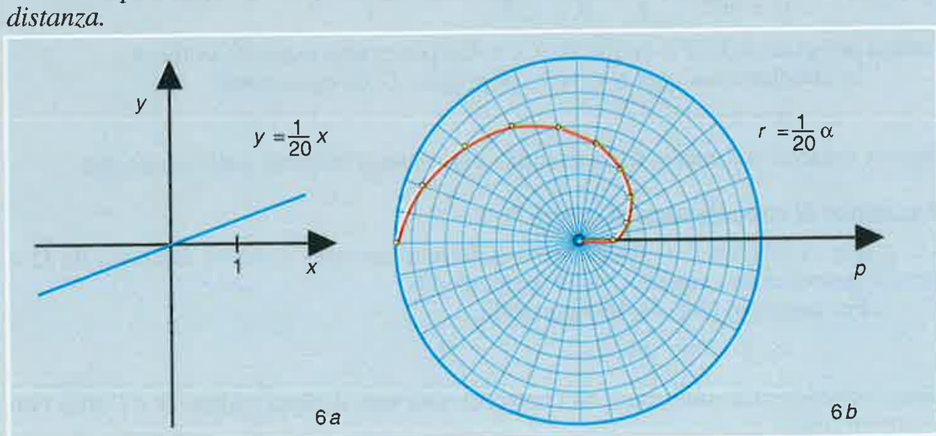


Figura 6
Un grafico cartesiano e un grafico polare

Che cosa bisogna sapere

Il riferimento cartesiano nel piano

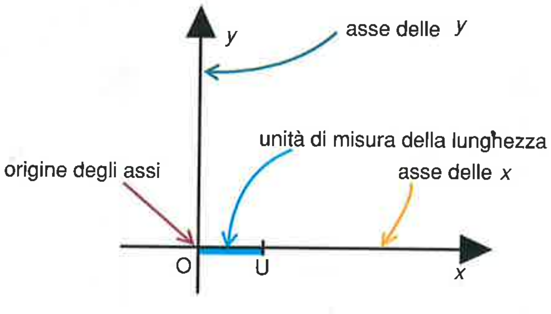
Il riferimento è formato da due rette perpendicolari, dette *assi coordinati*, che si incontrano in un punto O, detto *origine*.

Su ogni retta è fissato:

- un verso di percorrenza indicato da una freccia;
- un segmento OU, unità di misura delle lunghezze.

La retta orizzontale prende il nome di *asse delle ascisse* o *asse delle x*.

La retta verticale prende il nome di *asse delle ordinate* o *asse delle y*.

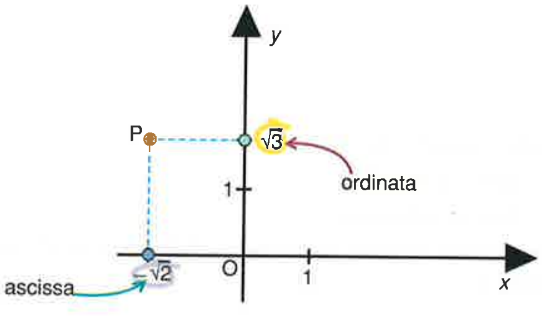


Le coordinate di un punto

Le coordinate di un punto sono due numeri reali:

- l'*ascissa*, che si legge sull'asse delle ascisse;
- l'*ordinata*, che si legge sull'asse delle ordinate.

Esempio: P($-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$) ha l'ascissa che vale $-\sqrt{2}$ e l'ordinata che vale $\sqrt{3}$

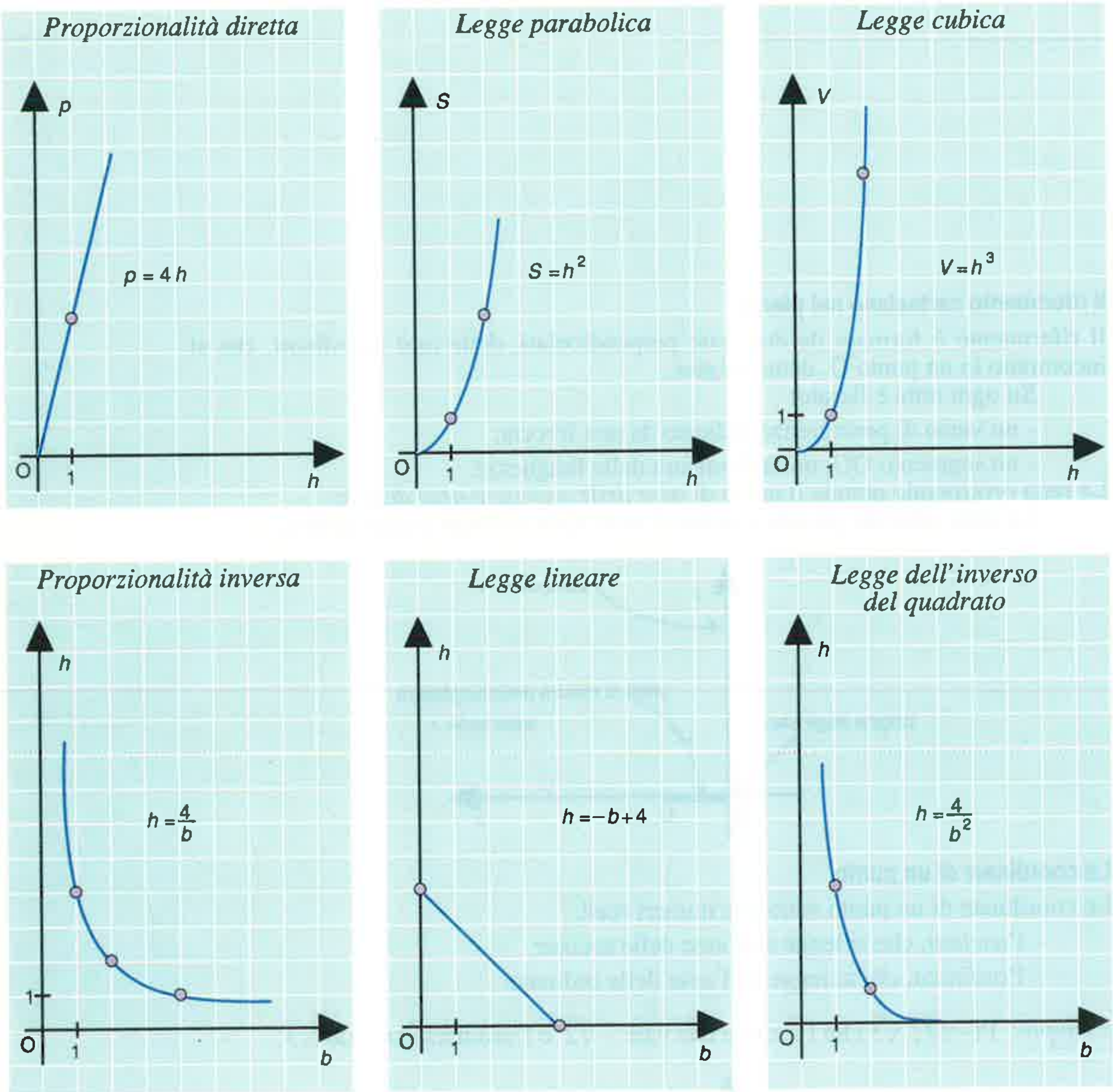


Equazione di una circonferenza di centro O

Un punto P(x; y) che percorre la circonferenza di centro O e raggio r ha le due coordinate variabili e legate dall'equazione:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Leggi matematiche rappresentate sul piano cartesiano

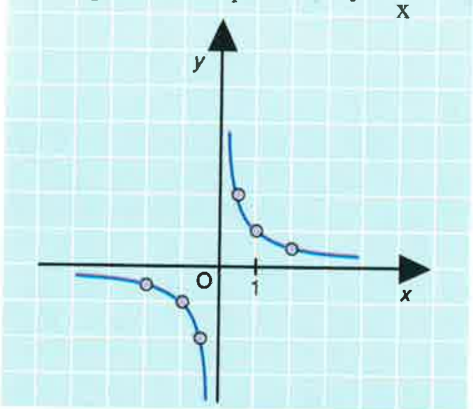


Il concetto di funzione

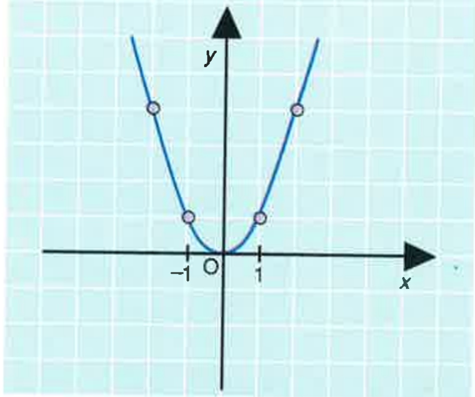
Si individua una funzione quando sono dati:

1. un insieme D, detto *dominio*;
2. un insieme C, detto *codominio*;
3. una *legge* che associa ad ogni elemento x dell'insieme D un solo elemento y dell'insieme C.

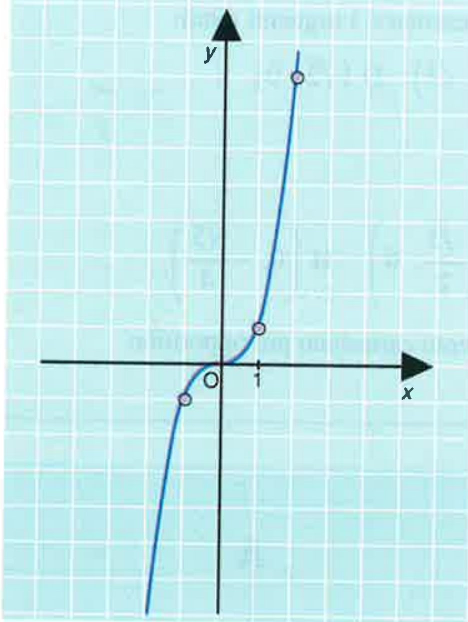
Grafici di funzioni



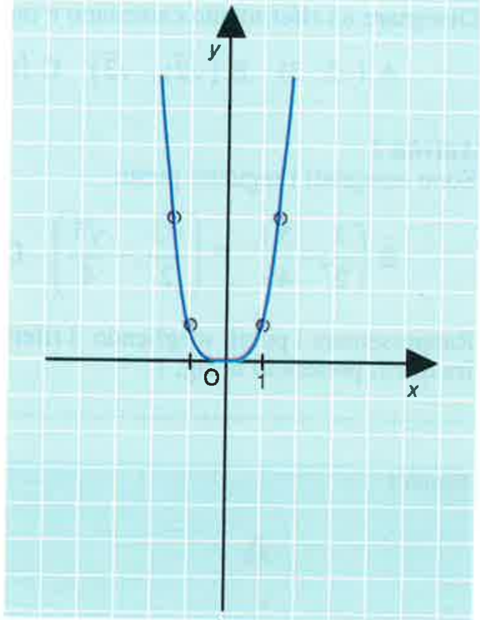
L'iperbole d'equazione $y = \frac{1}{x}$



La parabola d'equazione $y = x^2$



La funzione $y = x^3$



La funzione $y = x^4$

Il valore assoluto o modulo di un numero x, cioè $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

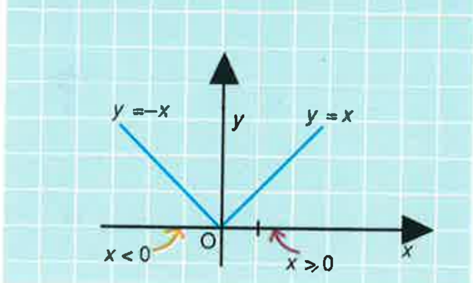


Grafico della funzione $y = |x|$

Che cosa bisogna saper fare

Rappresentare punti sul piano cartesiano

Attività 1

Disegnare un riferimento cartesiano e rappresentarvi i seguenti punti:

$$A\ (-2;\ 3)\quad B\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)\quad C\left(0;-\sqrt{3}\right)\quad D\left(\sqrt{2};\ 0\right)$$

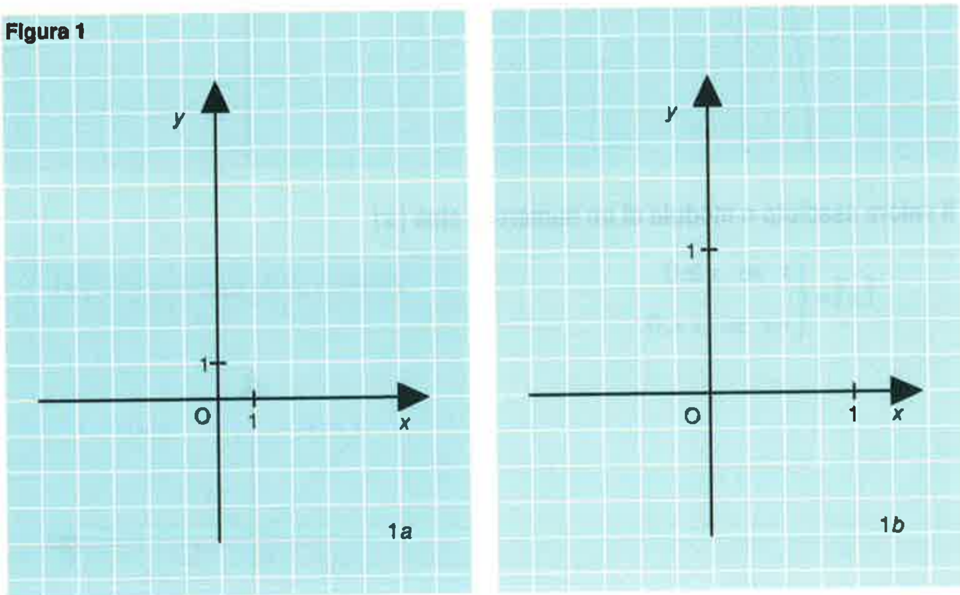
Attività 2

Sono assegnati i seguenti punti:

$$E\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)\quad F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\quad G\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)\quad H\left(0;\ -\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

Rappresentare i punti, scegliendo il riferimento cartesiano più opportuno fra quelli presentati in fig. 1.

Figura 1



Riconoscere funzioni

Attività 3

Esaminare i grafici disegnati in fig. 2 e dire quali di essi sono il grafico di una funzione, motivando la scelta.

Attività 4

Completare la fig. 3, scrivendo accanto a ogni grafico e tabella la corrispondente funzione.

Figura 2

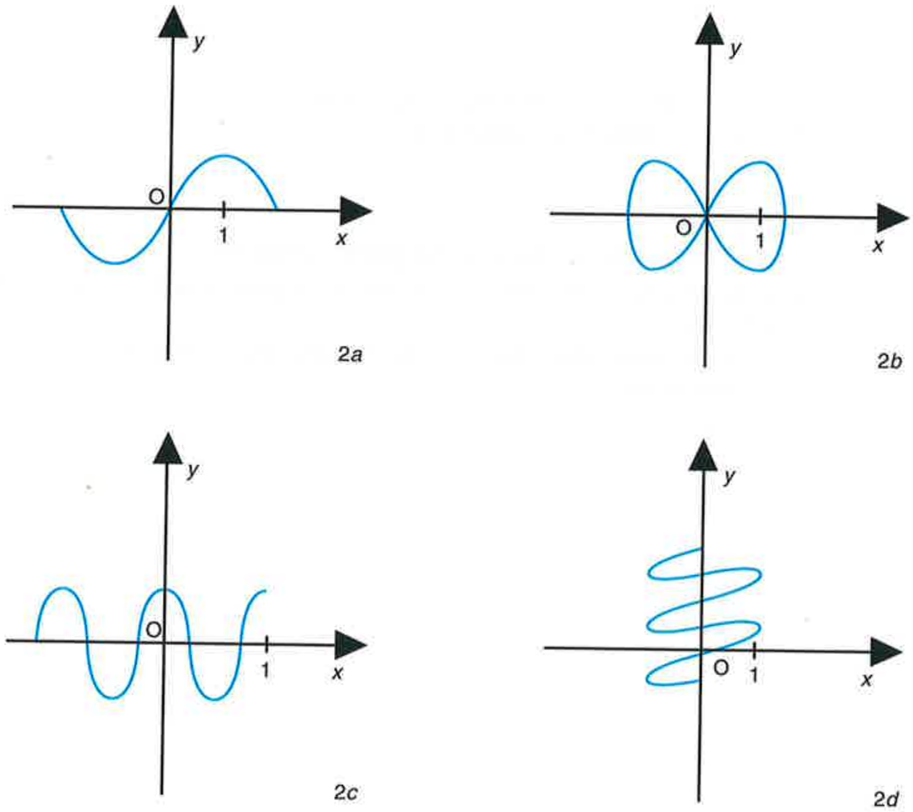
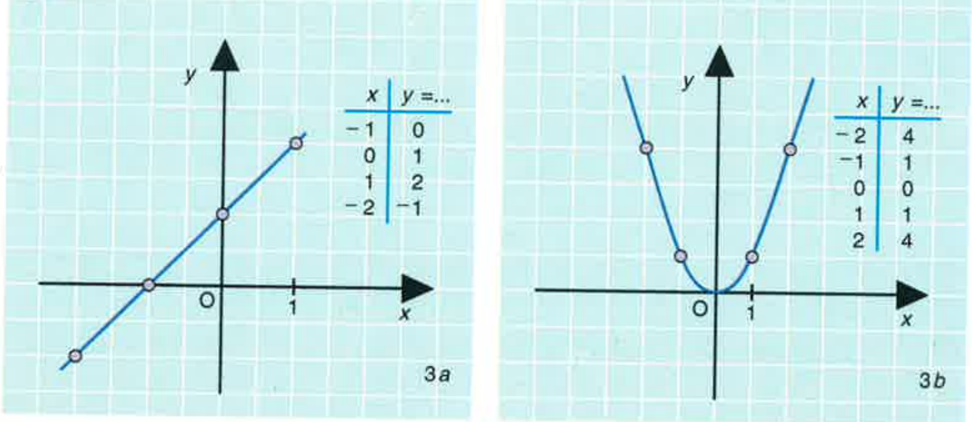


Figura 3



Tracciare il grafico di una funzione assegnata

Attività 5

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

1. $\begin{cases} \text{il dominio D è l'insieme R dei reali} \\ \text{il codominio C è l'insieme R} \\ y = x^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{il dominio D è l'insieme } R^+ \text{ dei reali positivi} \\ \text{il codominio C è l'insieme } R^+ \\ y = x^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{il dominio D è l'insieme Z degli interi} \\ \text{il codominio C è l'insieme Z} \\ y = x^3 \end{cases}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché si ottengono tre grafici differenti;
b. indicare almeno un punto che si trova sul primo grafico e non sugli altri due;
c. indicare quale delle tre precedenti funzioni si intende assegnare scrivendo solo:

$y = x^3$