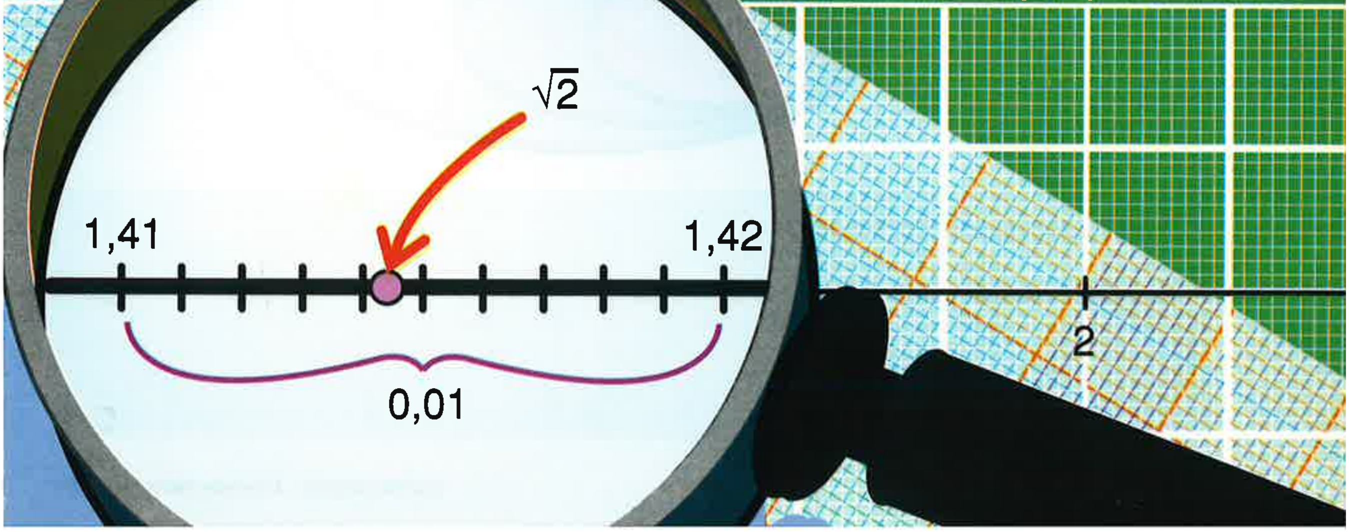
L'INSIEME DEI NUMERI REALI



1

L'insieme dei numeri reali

L'insieme dei numeri razionali

L'insieme Q dei numeri razionali è costituito da tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione; nell'insieme Q (fig. 1) si trovano:

- *numeri razionali positivi*, cioè numeri come:

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{2}{3}$$

- *numeri razionali negativi*, cioè numeri come:

$$-\frac{1}{4} \qquad -\frac{2}{7}$$

- *numeri interi*, cioè numeri come:

$$-1 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

- *numeri naturali* (o *interi positivi*), cioè numeri come:

$$0 \quad 1 \quad 4$$

I numeri razionali possono essere scritti in due forme:

- sotto forma di *frazione*, ad esempio:

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad -\frac{1}{4} \qquad -\frac{4}{3}$$

- in forma *decimale* e in tal caso si hanno due casi possibili:
  - *numero decimale finito*, per esempio:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

Figura 1
L'insieme Q dei numeri razionali

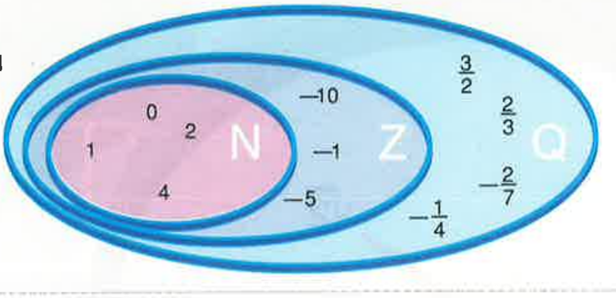
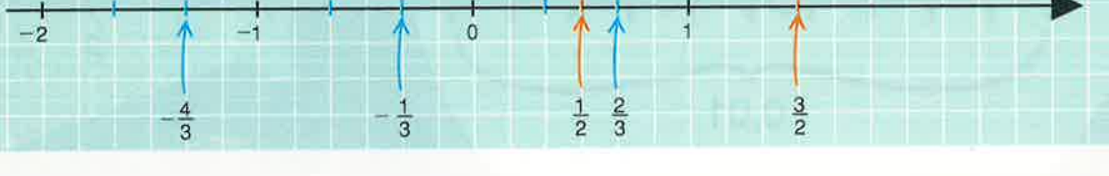


Figura 2
I numeri razionali rappresentati sulla retta



- *numero decimale infinito periodico*, per esempio:

$$\frac{2}{3} = 0,(6)$$

L'insieme dei razionali è caratterizzato da una proprietà fondamentale: fra due numeri razionali si possono eseguire addizione, moltiplicazione, sottrazione con la sicurezza di trovare sempre un risultato razionale. Anche la divisione fra due razionali ha sempre un risultato razionale con un'unica eccezione: non si può dividere per 0.

I numeri irrazionali non appartengono all'insieme dei razionali

La geometria e l'operazione di estrazione di radice hanno portato a scoprire dei numeri che non sono razionali e che perciò si chiamano numeri *irrazionali*.

I numeri irrazionali introdotti nel capitolo precedente possono essere scritti in due forme:

- sotto forma di *radicale*, per esempio

  $$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{4};$$

- in forma *decimale*; in tal caso si ha che *un numero irrazionale dà sempre luogo ad un decimale infinito non periodico.*

  Risulta, per esempio:

  $$\sqrt{2} \cong 1,4142\ldots \qquad \sqrt[3]{4} \cong 1,5874\ldots$$

I numeri irrazionali, ovviamente, si trovano al di fuori dell'insieme dei razionali.

L'insieme dei razionali sulla retta

I numeri razionali si possono rappresentare con un diagramma di Venn come quello di fig. 1; ma si rappresentano anche sulla retta (fig. 2).

È proprio la rappresentazione sulla retta che mette in rilievo un'altra notevole proprietà dei razionali: l'insieme dei razionali è *denso*, cioè fra due razionali si può sempre trovare un altro razionale.

Sembra dunque che non ci sia sulla retta alcun posto libero. Invece, basta eseguire delle semplici costruzioni geometriche per scoprire che sulla retta ci sono ancora dei «posti vuoti».

Sulla retta «c'è posto» per gli irrazionali

In fig. 3 si è applicato il secondo teorema di Euclide per costruire sulla retta il segmento OH che è lungo $\sqrt{2}$.

Ma $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale (vedi pp. 21-22) e perciò il punto H della retta non può corrispondere a un numero razionale; H è dunque «un posto lasciato libero dai razionali», posto che viene «riempito» dal numero irrazionale $\sqrt{2}$.

Inoltre, la stessa costruzione mostra il punto H', che si trova a sinistra di O e delimita un segmento OH' che è ancora lungo $\sqrt{2}$; a questo punto H' si farà corrispondere il numero negativo $-\sqrt{2}$.

Ora è facile ripetere la costruzione per rappresentare sulla retta altri numeri irrazionali come, per esempio (fig. 4) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$

Figura 3
I punti che corrispondono a $\sqrt{2}$ e a $-\sqrt{2}$

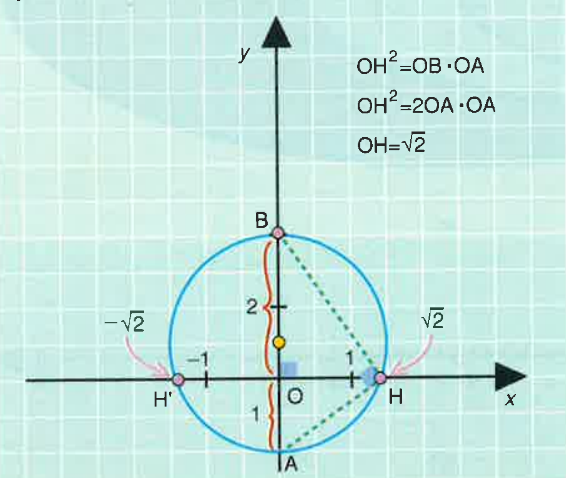
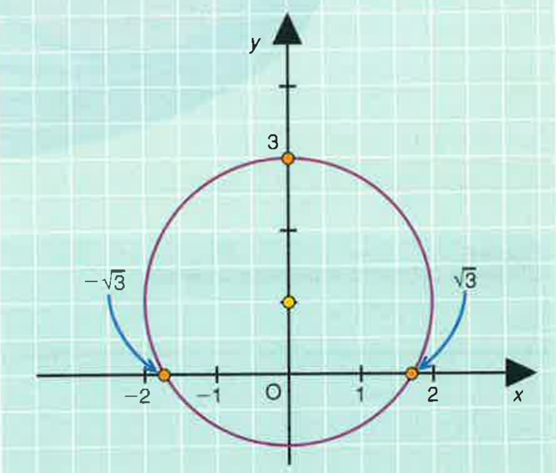


Figura 4
Altri numeri irrazionali rappresentati sulla retta



Numeri razionali e irrazionali costituiscono l'insieme dei numeri reali

Sulla retta si trovano così rappresentati sia i numeri razionali che i numeri irrazionali, senza distinguere gli uni dagli altri.
È per questo che numeri irrazionali e razionali sono stati riuniti in un unico insieme: *numeri razionali e irrazionali formano l'insieme **R** dei numeri reali.*
Il diagramma di fig. 5 conduce invece a distinguere i numeri razionali da quelli irrazionali, mettendo così in rilievo una distinzione che rimane nascosta dalla rappresentazione sulla retta.

L'insieme dei numeri reali è ordinato

I numeri reali disposti sulla retta conducono a ritrovare una notevole proprietà, già scoperta per i numeri razionali (vedi il primo volume, p. 88): *l'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato.*
Questo significa che *dati due qualunque numeri reali, si può sempre dire se uno precede l'altro.*
Ma non sempre è facile ordinare dei numeri reali disponendoli sulla retta; per esempio, i numeri

$$\frac{5}{3} \qquad \frac{8}{5} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt[4]{7}$$

rappresentati sulla retta, sono tutti assai vicini fra loro e solo un disegno molto accurato permette di ordinarli correttamente (vedi fig. 6).
Si è dunque condotti a cercare un altro metodo per confrontare due numeri reali; si ricorre, per esempio, alla rappresentazione decimale dei numeri reali. Ecco come si procede.

Confrontare due numeri reali basandosi sulla scrittura decimale

Esprimendo in forma decimale i numeri reali indicati prima, si ottiene:

$$\frac{5}{3} = 1,(6) \qquad \sqrt{3} \cong 1,73205\ldots$$

$$\frac{8}{5} = 1,6 \qquad \sqrt[4]{7} \cong 1,62657\ldots$$

Così arrotondando i numeri alla 2ª cifra decimale si trova che:

– il più piccolo è $\frac{8}{5} = 1,60$

– segue $\sqrt[4]{7} \cong 1,63 = 1,6 + 0,03$

– segue $\frac{5}{3} \cong 1,67 = 1,63 + 0,04$

– segue $\sqrt{3} \cong 1,73 = 1,67 + 0,06$

Figura 5
L'insieme R dei numeri reali

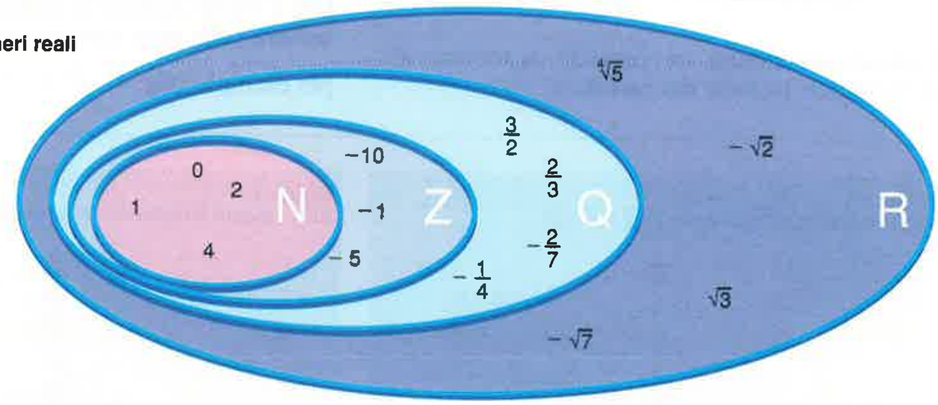


Figura 6
L'insieme dei reali è totalmente ordinato

Risulta dunque:

$$1,6 < 1,63 < 1,67 < 1,73$$

e quindi:

$$\frac{8}{5} < \sqrt[4]{7} < \frac{5}{3} < \sqrt{3}$$

I confronti appena svolti suggeriscono un'osservazione: si è riusciti a ordinare i numeri perché si è scritto un adeguato numero di cifre dopo la virgola (due); se però ci si fosse fermati, per esempio, solo alla prima cifra decimale, la situazione sarebbe stata meno chiara.
Infatti i numeri precedenti, arrotondati alla prima cifra decimale, danno i seguenti risultati:

$$\frac{8}{5} = 1,6 \qquad \sqrt[4]{7} \cong 1,6 \qquad \frac{5}{3} \cong 1,7 \qquad \sqrt{3} \cong 1,7$$

così non si riesce a stabilire se $\frac{8}{5}$ precede o segue $\sqrt[4]{7}$, né se $\frac{5}{3}$ precede o segue $\sqrt{3}$.

Dunque, *per confrontare due numeri reali rappresentati in forma decimale, bisogna avere a disposizione le cifre dopo la virgola necessarie per distinguere un numero dall'altro.*

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
- numero razionale;
- numero irrazionale;
- numero reale.

② Spiegare il significato della frase: «L'insieme dei reali è totalmente ordinato».

Comprensione

① Portare un esempio di numero razionale e un esempio di numero reale, ma non razionale; si può trovare un numero razionale che non è reale?

② Spiegare quali difficoltà si possono incontrare confrontando due numeri reali scritti in forma decimale.

Applicazioni

① Collocare i seguenti numeri in un diagramma come quello di fig. 5.

$$\sqrt{1} \quad \sqrt{8} \quad -\sqrt{8} \quad \sqrt{9} \quad -\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}$$

② Rappresentare sulla retta i numeri assegnati nell'esercizio precedente.

③ Disporre i seguenti numeri reali in ordine crescente:

$$1 \quad 2 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[4]{5} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{3}{2}$$

④ Disporre i seguenti numeri reali in ordine crescente:

$$-1 \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad -\sqrt[4]{5} \quad -\frac{7}{5} \quad -\frac{3}{2}$$

Collegamento con il capitolo precedente e con il primo volume

① Spiegare perché con il 2° teorema di Euclide si riesce a rappresentare esattamente sulla retta i numeri $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.
(vedi capitolo primo, paragrafo 4)

② Spiegare come si rappresentano sulla retta i numeri naturali.
(vedi primo volume, p. 85)

③ Spiegare come si rappresentano sulla retta i numeri interi.
(vedi primo volume, p. 86)

④ Spiegare come si rappresentano sulla retta le frazioni.
(vedi primo volume, p. 86)

Le frazioni continue

I numeri reali che danno luogo a decimali infiniti

Rappresentando i numeri reali in forma decimale si trovano infinite cifre dopo la virgola in due casi:

1. *Si scrivono in forma decimale particolari numeri razionali.*
È il caso delle frazioni che, ridotte ai minimi termini non hanno il denominatore composto solo da 2 e 5 (vedi il primo volume, p. 56); in tal caso si ottiene sempre un numero periodico, per esempio si ha:

$$\frac{5}{3}=1,(6) \qquad \frac{17}{11}=1,(54)$$

Questi esempi conducono anche a ricordare perché le infinite cifre dopo la virgola si ripetono sempre nello stesso ordine: il procedimento di divisione non ha mai termine; risulta infatti:

$$5:3=1{,}666666\ldots \qquad 17:11=1{,}545454\ldots$$

Tuttavia i resti della divisione debbono necessariamente ripetersi, dato che sono minori del numeratore, e, insieme ai resti, si ripetono anche le cifre del quoziente.

2. *Si scrivono in forma decimale i numeri irrazionali.*
In tal caso si ottengono dopo la virgola infinite cifre che non si ripetono.

Questa scheda è dedicata ad un procedimento che permette di scrivere in forma limitata i decimali periodici e in forma illimitata, ma con delle visibili regolarità, i radicali quadratici.

Il procedimento è quello delle *frazioni continue*, studiate da un matematico italiano del Seicento, Pietro Antonio Cataldi, ma già presenti in opere molto più antiche.

Lo sviluppo di un decimale periodico in frazione continua

Ecco un primo esempio che mostra come si organizza il procedimento delle frazioni continue.

Per rappresentare $\frac{5}{3}$ si procede così:

A. si esegue la divisione 5 : 3, ottenendo:

$$5:3=1 \quad \text{con resto} \quad 2$$

e quindi:

$$5=1\cdot 3+2$$

B. si scrive:

$$\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 3+2}{3}=1+\frac{2}{3}$$

C. si passa ad esaminare $\frac{2}{3}$, scrivendo:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$

A_1. si ripete il procedimento A, a partire da $\frac{3}{2}$ ottenendo:

$$3:2=1 \qquad \text{con resto } 1$$

e quindi $\quad 3 = 1 \cdot 2 + 1$

B_1. si scrive:

$$\frac{3}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

A questo punto il procedimento si ferma, dato che risulta:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{1}}$$

e la divisione 2:1 ha resto 0.

Riunendo tutti i calcoli eseguiti in un'unica formula, si ottiene:

$$\frac{5}{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$$

Procedendo analogamente per la frazione $\frac{17}{11}$, si trova invece:

$$\frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$$

È facile capire che un numero razionale dà sempre luogo ad una frazione continua limitata; basta ripetere il procedimento seguito prima valendosi delle lettere per indicare dei numeri interi positivi. Si considera dunque un qualunque numero razionale positivo espresso dalla frazione $\frac{n}{d}$ e si procede nel modo seguente:

A. si esegue la divisione $n : d$, ottenendo:

$$n : d = q_1 \qquad \text{con resto} \qquad r_1 < d$$

e quindi:

$$n = q_1 \cdot d + r_1$$

Ora i casi possibili sono due:

I. risulta $r_1 = 0$; il procedimento ha termine e si scrive:

$$\frac{n}{d} = q_1$$

II. risulta $r_1 \neq 0$; si continua il procedimento:

B. si scrive:

$$\frac{n}{d} = \frac{q_1 \cdot d + r_1}{d} = q_1 + \frac{r_1}{d}$$

C. si passa ad esaminare $\frac{r_1}{d}$, scrivendo:

$$\frac{r_1}{d} = \frac{1}{\frac{d}{r_1}}$$

A_1. si ripete il procedimento A, a partire da $\frac{d}{r_1}$ ottenendo:

$$d : r_1 = q_2 \quad \text{con resto} \quad r_2 < r_1$$

e quindi:

$$d = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

B_1. si scrive:

$$\frac{d}{r_1} = \frac{q_2 \cdot r_1 + r_2}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

Il procedimento si può ora ripetere a partire dalla frazione $\frac{r_2}{r_1}$ e così di seguito; ma i resti r_1, r_2 ... sono dei numeri interi positivi che decrescono sempre, perciò si arriverà certamente ad un resto $r = 0$ ed il procedimento avrà termine.

Si conclude dunque che *un numero razionale si può sempre esprimere con una frazione continua limitata.*

Lo sviluppo di un radicale quadratico in frazione continua

Cominciamo anche in questo caso con un esempio: il radicale $\sqrt{2}$, di cui si conoscono le seguenti due caratteristiche:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad (1)$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \qquad (2)$$

Le disuguaglianze (2) conducono a scrivere $\sqrt{2}$ nella forma seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + r \qquad \text{con} \qquad r < 1$$

Così la (1) conduce a scrivere:

$$(1 + r)^2 = 2$$

Sviluppando il quadrato del binomio, si ottiene poi:

$$1 + 2r + r^2 = 2 \qquad \text{cioè} \qquad 2r + r^2 = 1$$

Nell'ultima espressione ottenuta si può raccogliere il fattore comune r; si ha:

$$r\,(2 + r) = 1$$

da cui si può ottenere:

$$r = \frac{1}{2+r} \qquad (3)$$

Il secondo membro della (3) fornisce un'espressione che può essere sostituita al posto della lettera r ; si può dunque scrivere:

$$r = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+r}}$$

Ora, si può continuare a sostituire a r il secondo membro della (3), ottenendo:

$$r = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

E, dato che risultava:

$$\sqrt{2} = 1 + r$$

si avrà pure:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}} \qquad (4)$$

È chiaro che questo procedimento non può avere fine; si ottiene così lo sviluppo di $\sqrt{2}$ in *frazione continua illimitata.*

La formula (4) ora ottenuta lega $\sqrt{2}$ ai numeri interi in modo molto più espressivo dello sviluppo decimale, che non presenta alcuna regolarità nella successione delle sue cifre.

Procedendo in modo analogo, si può ottenere lo sviluppo di altri radicali quadratici. Per esempio, lo sviluppo di $\sqrt{5}$ con una frazione continua fornisce:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}$$

2 Valori approssimati di un numero reale

Approssimazioni per difetto e per eccesso

Rappresentando i numeri reali sulla retta, non si distinguono i numeri razionali da quelli irrazionali: un numero irrazionale è «circondato» da numeri razionali.

Per studiare i numeri razionali che «circondano» un irrazionale, consideriamo, per esempio, $\sqrt{2}$, numero per cui risulta:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Si può procedere allora nel modo seguente.

- Si esaminano i numeri interi e i loro quadrati e si trova:

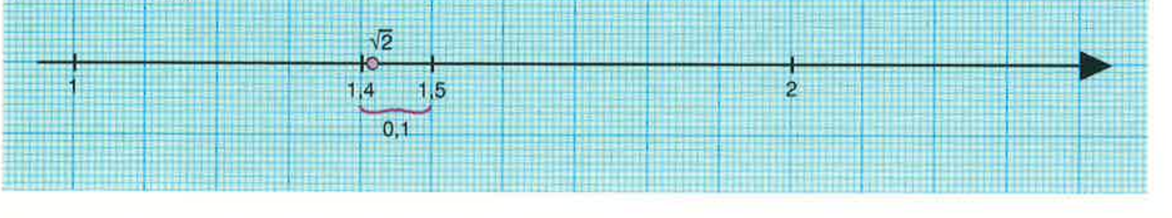
Numeri n	Quadrati n^2
1	1
$\sqrt{2}$	2
2	4

Così si individuano i due numeri interi che «circondano» $\sqrt{2}$:

- 1, che è più piccolo e perciò approssima $\sqrt{2}$ *per difetto*;
- 2, che è più grande e perciò approssima $\sqrt{2}$ *per eccesso*.

Figura 1
Gli interi che «approssimano» $\sqrt{2}$

Figura 2
I razionali che «approssimano» $\sqrt{2}$



Il numero $\sqrt{2}$ si trova dunque all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1 e 2, intervallo che è ampio 1 (fig. 1).

- Si suddivide l'intervallo delimitato da 1 e 2 in 10 parti per «stringere» $\sqrt{2}$ con decimali con una cifra dopo la virgola; considerando i quadrati di questi numeri, si trova:

Numeri n	**Quadrati** n^2
1,4	1,96
$\sqrt{2}$	2
1,5	2,25

Si conclude dunque che:

- 1,4 approssima $\sqrt{2}$ *per difetto*;
- 1,5 approssima $\sqrt{2}$ *per eccesso*.

Così il numero $\sqrt{2}$ si trova all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1,4 e 1,5, intervallo che è ampio 0,1 (fig. 2).

E ora si può continuare, dividendo l'intervallo delimitato da 1,4 e 1,5 in dieci parti uguali e così via (fig. 3); fermandosi, per esempio, alla quarta cifra dopo la virgola, si ottengono le approssimazioni di $\sqrt{2}$ elencate nella tabella A.

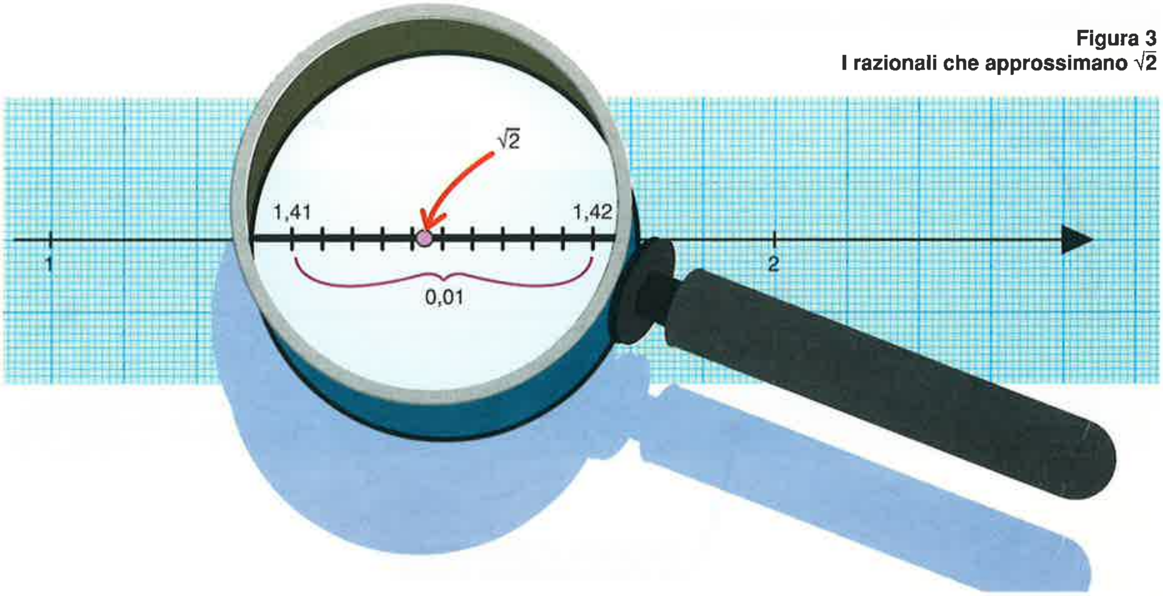
Due successioni di numeri razionali che approssimano un irrazionale

Si trovano così due successioni di numeri razionali che approssimano il numero irrazionale $\sqrt{2}$:

Tabella A
Le approssimazioni di √2

Per difetto	$\sqrt{2}$	Per eccesso	Intervallo
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	0,1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	0,01
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	0,001
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	0,0001

Figura 3
I razionali che approssimano √2



- una successione che approssima $\sqrt{2}$ per difetto (prima colonna della tabella A);
- una successione che approssima $\sqrt{2}$ per eccesso (terza colonna della tabella A).

Queste due successioni presentano delle particolari proprietà, fra le quali si segnalano le seguenti (fig. 4):

1. i numeri che approssimano per difetto vanno aumentando, mentre i numeri che approssimano per eccesso vanno diminuendo;
2. aumentando il numero di cifre dopo la virgola, diventa sempre più piccolo l'intervallo fra un'approssimazione per eccesso e quella per difetto.

Il numero irrazionale $\sqrt{2}$ rimane quindi «stretto» fra due successioni di numeri razionali che possono avvicinarsi a $\sqrt{2}$ quanto si vuole, senza però riuscire a raggiungerlo.
E così non sarà certo la matita o l'occhio che potranno distinguere sulla retta il numero irrazionale $\sqrt{2}$ dai numeri razionali 1,4142135 e 1,4142136 che lo circondano: solo con il pensiero si può immaginare questo «foro invisibile» che rimane fra le due successioni di numeri razionali, «foro» che viene riempito con il numero irrazionale $\sqrt{2}$.
Le considerazioni ora svolte hanno carattere generale e possono essere ripetute a partire da altri numeri irrazionali come $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, suggerendo la seguente conclusione: *ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali.*

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato della frase seguente: «1,4 approssima $\sqrt{2}$ per difetto».

② Spiegare il significato della frase seguente: «1,5 approssima $\sqrt{2}$ per eccesso».

Comprensione

① Esporre il procedimento seguito nel testo per approssimare $\sqrt{2}$ con due successioni di numeri razionali.

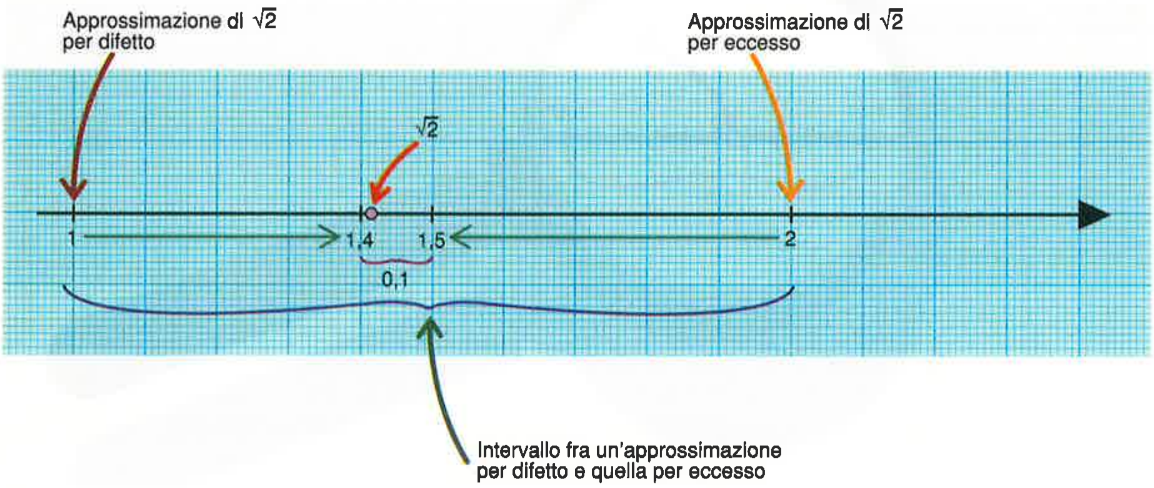
Applicazioni

① Approssimare $\sqrt{2}$ con i due numeri decimali con cinque cifre dopo la virgola.

② Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano $\sqrt{3}$ per difetto e per eccesso.

③ Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano $\sqrt[3]{4}$ per difetto e per eccesso.

Figura 4
Due successioni di razionali che approssimano $\sqrt{2}$



3

Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri reali

Proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri razionali

L'insieme dei numeri reali è formato dai numeri razionali e dai numeri irrazionali. I calcoli con i soli numeri razionali sono stati esaminati nel primo volume, trovando in particolare che:

1. per l'addizione e la moltiplicazione valgono le proprietà indicate nella tabella A;
2. per l'elevazione a potenza ad esponente intero positivo valgono le seguenti proprietà:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Insieme a queste proprietà possono essere considerate le definizioni di potenza ad esponente 0 o negativo scritte nella forma seguente:

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ per qualunque } a \neq 0$$

3. quando si eseguono più operazioni, i calcoli debbono essere svolti secondo un ordine fisso che stabilisce una precisa priorità delle operazioni;
4. si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.

Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

È l'operazione di estrazione di radice che «fa uscire» dall'insieme dei razionali e conduce ad

Tabella A
Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Proprietà delle operazioni	Addizione $a + b$	Moltiplicazione $a \cdot b$
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva		$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente		$a \cdot 0 = 0$
Opposto e inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (con $a \neq 0$)

ampliare l'insieme di numeri disponibili, introducendo i numeri irrazionali.
Ma un numero irrazionale – si è visto nel paragrafo precedente – si può sempre approssimare quanto si vuole con dei numeri razionali e perciò *le regole di calcolo valide per i razionali si estendono agli irrazionali e diventano valide per l'insieme dei reali.*
Ora, però, lavorando anche con i numeri irrazionali si potrà pure eseguire l'estrazione di radice, operazione che equivale ad un'elevazione a potenza con esponente frazionario.
Si aggiunge quindi all'operazione di elevazione a potenza il caso in cui l'esponente è frazionario, ricordando che:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ è il numero che, elevato ad esponente n, dà a^m

Perciò l'estrazione di radice ha la stessa priorità dell'elevazione a potenza.
Si conclude che:

I. *per eseguire i calcoli con i numeri reali si deve tener presente il seguente ordine*:
   1. *si esegue l'elevazione a potenza (o l'estrazione di radice)*;
   2. *si eseguono le moltiplicazioni (o le divisioni)*;
   3. *si eseguono le addizioni (o le sottrazioni)*;

II. *si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.*

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le proprietà delle operazioni valide nell'insieme dei reali.

② Elencare le proprietà dell'elevazione a potenza.

③ Completare la tabella B come è indicato nella prima riga.

Comprensione

① Portare qualche esempio di operazione fra numeri razionali che non ha risultato razionale.

② Portare qualche esempio di operazione fra numeri razionali che ha risultato reale, ma non razionale.

Tabella B

Esponente	Potenza	Esempio
n intero positivo	$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n numero dei fattori uguali a a)	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
0		
$-n$ intero negativo		
$\frac{m}{n}$ frazionario		$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

4 Calcoli con i numeri reali

Calcoli esatti e calcoli approssimati

Quando si eseguono i calcoli con numeri reali, si lavora con un insieme numerico molto ampio; si troveranno in particolare:
- numeri interi come $-3, -1, 0, 1, 2$;
- numeri razionali come $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$;
- numeri irrazionali come $\sqrt{3}, \sqrt[4]{2}$.

I numeri reali possono essere anche scritti in forma decimale; in tal caso però si otterranno molto spesso solo delle approssimazioni dei numeri assegnati. In particolare si ha che:
- danno luogo a numeri decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, *non* hanno il denominatore composto esclusivamente da 2 o da 5 o da entrambi;
- danno luogo a decimali non periodici con infinite cifre dopo la virgola tutti i numeri irrazionali.

Perciò, quando si eseguono i calcoli con i numeri reali, si hanno due alternative:

I. lavorare solo con i numeri decimali, sapendo che questo porta a lavorare in generale con valori approssimati e, quindi, ad ottenere risultati approssimati;

II. lavorare con le frazioni e i radicali (o le potenze ad esponente frazionario), sapendo che questo richiede di conoscere ed applicare le corrispondenti regole di calcolo.

Esempi di calcoli con i numeri reali

Per chiarire meglio le precedenti considerazioni conviene esaminare qualche esempio di calcolo con numeri reali.

1. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} \qquad 3\cdot\sqrt{2} \qquad (-3)\cdot\sqrt{2} \qquad (-1)\cdot\sqrt{8}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41 \qquad \sqrt{8} \cong 2{,}83$$

A partire da questi due valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} \cong 3{,}99$$
$$3\cdot\sqrt{2} \cong 4{,}23$$
$$(-3)\cdot\sqrt{2} \cong -4{,}23$$
$$(-1)\cdot\sqrt{8} \cong -2{,}83$$

- Lavorando con i radicali si ha invece:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$
$$3\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$(-3)\cdot\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$
$$(-1)\cdot\sqrt{8} = -\sqrt{8}$$

Particolare attenzione meritano le ultime tre formule, in cui i radicali vengono trattati con le stesse convenzioni usate nel calcolo letterale: in particolare, il prodotto viene indicato scrivendo il numero razionale ed il radicale affiancati.

2. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \frac{5}{7}\cdot\sqrt{3}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{3} \cong 1,73 \qquad \frac{5}{7} \cong 0,71$$

A partire da questi valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \cong 1,73 \qquad \frac{5}{7}\cdot\sqrt{3} \cong 1,23$$

- Lavorando con frazioni e radicali, si ha, nel primo caso:

$$3 = (\sqrt{3})^2$$

e perciò:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Si trova dunque:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Nel secondo caso si scriverà, con convenzioni analoghe a quelle indicate negli esempi precedenti:

$$\frac{5}{7}\cdot\sqrt{3} = \frac{5}{7}\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$$

3. Esaminare i seguenti calcoli:

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2} \qquad \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

- Lavorando con i decimali arrotondati, per esempio con due cifre dopo la virgola, si ha:

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \qquad \sqrt{3} \cong 1,73$$

A partire da questi due valori i calcoli proposti danno i seguenti risultati:

$$3\cdot\sqrt{2} \cong 4,23 \qquad 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \cong 5,64$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \cong 3,14$$

- Lavorando invece con le frazioni e i radicali, la prima espressione viene trattata nel seguente modo:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 1\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{2}$$

[1 elemento neutro]

$$1\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{2} = (1+3)\cdot\sqrt{2}$$

[proprietà distributiva]

$$(1+3)\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$$

[si esegue l'addizione]

In definitiva risulta:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Si osserva subito che nel procedimento è fondamentale la proprietà distributiva e, quindi, il fatto che è possibile raccogliere un fattore comune (che è $\sqrt{2}$).
Rimarrà invece inalterata l'espressione:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

dato che non si riesce ad applicare la proprietà distributiva, non essendoci alcun *fattore* comune.

4. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} \qquad \sqrt{4+9}$$

Il fatto che le due espressioni sono diverse si coglie meglio usando le potenze a esponente razionale; si ha infatti:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{4+9} = (4+9)^{\frac{1}{2}}$$

In questo modo, la presenza della parentesi chiarisce bene la differenza fra le due espressioni.

Nella *prima espressione* si debbono eseguire le operazioni nell'ordine seguente:

I. la potenza (cioè l'estrazione di radice);

II. l'addizione.

Si ha dunque:

$$4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} = 2 + 3 = 5$$

e quindi:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

Nella *seconda espressione* la presenza delle parentesi obbliga a cambiare l'ordine delle operazioni eseguendole così:

I. l'addizione;

II. la potenza (cioè l'estrazione di radice).

Si ha dunque:

$$(4+9)^{\frac{1}{2}} = 13^{\frac{1}{2}}$$

e quindi:

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3{,}61$$

5. Esaminare i seguenti calcoli:

$$\sqrt[3]{7-15} \qquad \sqrt{16-25}$$

Con considerazioni analoghe a quelle svolte prima si ottiene:

$$\sqrt[3]{7-15} = \sqrt[3]{-8} \qquad \sqrt{16-25} = \sqrt{-9}$$

Qual è il significato dei due risultati ottenuti?

È facile rispondere, nel primo caso: $\sqrt[3]{-8}$ è il numero che, elevato al cubo, dà –8. Risulta dunque:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{dato che} \quad (-2)^3 = -8$$

Analogamente, nel secondo caso, si dice: $\sqrt{-9}$ è il numero che, elevato al quadrato, dà –9. Ma si osserva subito che risulta:

$$3^2 = 9 \quad \text{e} \quad (-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Perciò, neanche nell'insieme dei reali, per quanto grande, si trova la radice quadrata del numero negativo –9.

Operazioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali

Con lo stesso ragionamento seguito prima è facile concludere che *non* si trova nell'insieme dei reali il risultato delle seguenti operazioni:

$$\sqrt{-4} \quad \text{dato che} \quad 2^2 = 4 \quad \text{e} \quad (-2)^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{-81} \quad \text{dato che} \quad 3^4 = 81 \quad \text{e} \quad (-3)^4 = 81$$

$$\sqrt[6]{-64} \quad \text{dato che} \quad 2^6 = 64 \quad \text{e} \quad (-2)^6 = 64$$

I casi elencati suggeriscono una regola generale: *non si trova il risultato di* $\sqrt[n]{a}$ *quando*:

- *il radicando* a *è un numero negativo e, contemporaneamente, l'indice* n *della radice è un numero pari*.

Questi calcoli che non hanno risultato si aggiungono a quelli che non avevano risultato nell'insieme dei razionali e che non trovano risultato neanche nel più vasto insieme dei reali.

Si conclude dicendo che *non hanno risultato nell'insieme dei numeri reali le seguenti operazioni*:

$$a:0 = \frac{a}{0} \qquad 0^0 \qquad 0^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{con} \quad a<0 \quad \text{e} \quad n \quad \text{pari}$$

Verifiche

Conoscenze

① Elencare i casi in cui si ottengono risultati approssimati eseguendo i calcoli con i numeri reali scritti in forma decimale.

② Elencare le operazioni fra numeri reali che non hanno risultato reale.

Comprensione

① Scrivere le seguenti espressioni sostituendo alle radici le potenze a esponente frazionario.

$$\sqrt{4} \qquad -\sqrt{4} \qquad \sqrt{-4} \qquad \sqrt[3]{-27}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare l'espressione che non ha risultato nell'insieme dei reali;
b. indicare il risultato delle altre espressioni;
c. spiegare qual è la differenza fra la seconda e la terza espressione.

Applicazioni

① Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{64-100} \qquad \sqrt{64} - \sqrt{100}$$

$$\frac{8-2\cdot 4}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{8-2\cdot 4}$$

$$(6-2\cdot 3)^0 \qquad 6^0 - 2\cdot 3^0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare i calcoli che non hanno risultato nell'insieme dei numeri reali, motivando la scelta;
b. determinare il risultato delle restanti espressioni.

Calcoli con frazioni, radicali e potenze a esponente frazionario

A. Calcoli con frazioni e radicali

Attività 1

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga, elencando le proprietà da applicare.

Espressione data	Espressione scritta in forma più breve
$\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$
$\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}$	
$\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$	
	$4\sqrt{5}$

Attività 2

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga, elencando le proprietà da applicare.

a	b	$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$	Risultato finale
$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2+2\sqrt{2}\sqrt{5}$	$(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}$		
1	$\sqrt{3}$		
$\sqrt{3}$	-2		

Attività 3

Completare la seguente tabella come indicato nella prima riga.

a	b	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	Risultato finale
$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$	$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=4$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$		
$\sqrt{10}$	$\sqrt{8}$		

Trarre dalla tabella una regola generale per il risultato di espressioni del tipo:

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)$$

dove c e d sono due interi positivi.

Espressioni del tipo indicato possono avere risultato irrazionale?

Rendere razionale il denominatore delle frazioni

Espressioni frazionarie che presentano dei radicali al denominatore vengono spesso trasformate in espressioni equivalenti, ma che presentano il denominatore razionale.

Il procedimento seguito è sempre lo stesso: *si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione per un'opportuna espressione.*

Ecco due esempi.

1. $$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$$

In definitiva risulta:

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$$

2. $$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}=\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}$$

In definitiva risulta:

$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

Attività 4

Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni, basandosi sui procedimenti indicati prima.

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{2-\sqrt{2}} \qquad ; \qquad \frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$$

B. Calcoli con potenze a esponente frazionario

Espressioni in cui si trovano tutte le operazioni finora introdotte possono essere svolte valendosi di due simbolismi:

- frazioni e radicali;
- potenze ad esponente negativo e frazionario.

Per valersi correttamente dei due tipi di simboli bisogna ricordare che risulta:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

dove a, m, n indicano dei numeri interi positivi.

Attività 5

Completare la tabella seguente come è mostrato nella prima riga.

Frazioni e radicali	**Esponenti negativi e frazionari**
$\sqrt{\frac{3+1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$	$\left[(3+1)\,4^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(4 \cdot 4^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1}$
	$(3+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1} =$ $= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1} = 4^{\frac{1}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = \mathbf{2^{-1}}$
$\frac{\sqrt{3}+1}{4} =$	
	$3^{\frac{1}{2}} + 4^{-1} =$
$\frac{\sqrt{3}}{4} + 1 =$	

Attività 6

Sviluppare le seguenti espressioni, valendosi:

- di frazioni e radicali;
- di potenze ad esponente negativo e frazionario.

$$\sqrt[3]{\frac{35-8}{8}} \qquad \frac{\sqrt[3]{35-8}}{8} \qquad \frac{35-\sqrt[3]{8}}{8} \qquad 35-\frac{\sqrt[3]{8}}{8}$$

Calcoli con il calcolatore tascabile

Attività 1

Riprendere le indicazioni fornite nell'«Attività» di p. 30 a proposito dell'uso del tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$; valersi di un calcolatore tascabile per completare la seguente tabella come indicato dalla prima riga.

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Visualizzatore
$\sqrt{\dfrac{3+1}{9}}$	$[(3+1):9]^{\frac{1}{2}}$	$\boxed{(}\boxed{(}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{9}\boxed{)}\boxed{\sqrt{\ }}$	0.6666667
$\dfrac{\sqrt{3+1}}{9}$			
$\dfrac{\sqrt{3}+1}{9}$			
$\sqrt{3}+\dfrac{1}{9}$			
$\dfrac{\sqrt{3}}{9}+1$			

Attività 2

Spiegare perché la sequenza di tasti:

$$\boxed{3}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{9}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{=}$$

calcola l'espressione seguente:

$$3+\frac{1}{\sqrt{9}}$$

Attività 3

Riprendere le indicazioni fornite nell'«Attività» di p. 30 a proposito dell'uso del tasto $\boxed{y^x}$; valersi di un calcolatore tascabile per completare la seguente tabella come indicato dalla prima riga.

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti
$\sqrt[3]{\dfrac{9-1}{27}}$	$[(9-1):27]^{\frac{1}{3}}$	$\boxed{\langle}\boxed{\langle}\boxed{9}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\rangle}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{\rangle}\boxed{y^x}\boxed{\langle}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{\rangle}\boxed{=}$
$\dfrac{\sqrt[3]{9-1}}{27}$		
$\dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{27}$		
$\sqrt[3]{9}-\dfrac{1}{27}$		
$\dfrac{\sqrt[3]{9}}{27}-1$		

Attività 4

Scrivere l'espressione che si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$\boxed{9}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{y^x}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}$$

Attività 5

Svolgere con il calcolatore tascabile le seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{64-8}{200+43}} \qquad \frac{\sqrt[3]{64-8}}{200+43} \qquad \frac{\sqrt[3]{64-8}}{200}+43 \qquad 64-\frac{8}{200}+\sqrt[3]{43}$$

Indicare quale espressione si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$\boxed{6}\boxed{4}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{y^x}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}$$

Attività 6

Svolgere con il calcolatore tascabile le seguenti espressioni:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{64-8}{27\cdot 9}\right)^3} \qquad \frac{\sqrt[5]{(64-8)^3}}{27\cdot 9} \qquad \frac{\sqrt[5]{64-8^3}}{27}\cdot 9 \qquad 64-\frac{8}{27}\cdot\sqrt[5]{9^3}$$

Indicare quale espressione si calcola con la sequenza di tasti indicata qui sotto:

$$\boxed{6}\boxed{4}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{\times}\boxed{9}\boxed{y^x}\boxed{3}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{=}$$

Le approssimazioni e la propagazione degli errori

I numeri irrazionali, scritti in forma decimale, danno luogo ad infinite cifre dopo la virgola, cifre che non si ripetono periodicamente. Tuttavia, ogni numero irrazionale può essere approssimato quanto si vuole ai numeri razionali e è proprio con questi valori approssimati che si eseguono i calcoli nella pratica.

Questa scheda è destinata a precisare la nozione di valore approssimato, per vedere quanto può diventare complicato valutare l'approssimazione del risultato di calcoli eseguiti con valori approssimati.

Valori approssimati e intervallo d'errore

Fissiamo l'attenzione su qualche numero irrazionale, per esempio:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt{8} \qquad \sqrt{40} \qquad \sqrt{250}$$

Ciascuno di questi numeri può essere «stretto» fra due numeri razionali:

- uno che approssima per difetto;
- l'altro che approssima per eccesso.

Per esempio si trova che:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \qquad 2,8 < \sqrt{8} < 2,9$$

$$6,3 < \sqrt{40} < 6,4 \qquad 15,8 < \sqrt{250} < 15,9$$

In questo modo gli irrazionali assegnati sono tutti compresi fra due razionali che delimitano un intervallo ampio 0,1 (fig. 1). L'ampiezza dell'intervallo è stata determinata calcolando la differenza fra il numero più grande (che approssima per eccesso) e quello più piccolo (che approssima per difetto); si ottiene:

$$1,5 - 1,4 = 0,1 \qquad 2,9 - 2,8 = 0,1$$

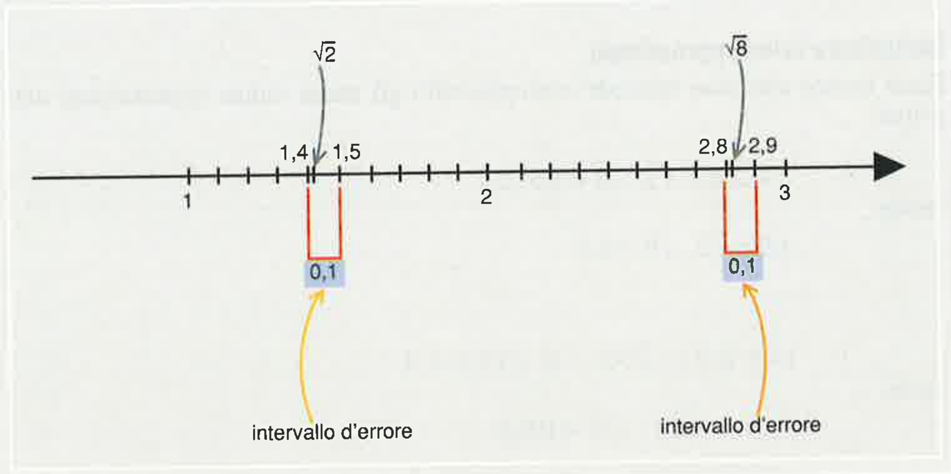


Figura 1
L'intervallo d'errore di $\sqrt{2}$ e di $\sqrt{8}$

L'ampiezza 0,1 dell'intervallo ha un significato molto concreto, che si afferra subito con un esempio: sostituendo il numero irrazionale $\sqrt{2}$ con 1,4 (il numero razionale che lo approssima per difetto) si commette un errore che certamente non supera 0,1. Per questo l'intervallo delimitato dalle due approssimazioni per eccesso e per difetto prende anche il nome di *intervallo d'errore*.

Addizionare valori approssimati

Vediamo ora che cosa succede addizionando due valori approssimati, per esempio i valori approssimati dei numeri irrazionali esaminati prima. Ecco che cosa si ottiene:

$$1{,}4+2{,}8<\sqrt{2}+\sqrt{8}<1{,}5+2{,}9$$

ossia:

$$4{,}2<\sqrt{2}+\sqrt{8}<4{,}4$$

$$15{,}8+6{,}3<\sqrt{250}+\sqrt{40}<15{,}9+6{,}4$$

ossia:

$$22{,}1<\sqrt{250}+\sqrt{40}<22{,}3$$

Si osserva subito che entrambe le somme sono contenute in un intervallo che è ampio 0,2, dato che risulta:

$$4{,}4-4{,}2=0{,}2 \qquad \text{e} \qquad 22{,}3-22{,}1=0{,}2$$

Per arrivare a un risultato di carattere generale, occorre valersi del calcolo letterale: si indicano con α e β i due numeri irrazionali, con a e b i razionali che li approssimano per difetto, con h l'ampiezza dell'intervallo. Così risulta:

$$a<\alpha<a+h \qquad b<\beta<b+h$$

e quindi:

$$a+b<\alpha+\beta<a+b+\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}$$

Si trova così che, *addizionando due valori approssimati, si ha una somma che è ancora approssimata, ma con un errore che è la somma degli errori dei singoli addendi*.

È chiaro che questo risultato si estende immediatamente alla somma di più di due addendi.

Moltiplicare valori approssimati

Ecco invece che cosa succede moltiplicando gli stessi valori approssimati dati prima:

$$1{,}4\cdot 2{,}8<\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}<1{,}5\cdot 2{,}9$$

ossia:

$$3{,}9<\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}<4{,}3$$

$$15{,}8\cdot 6{,}3<\sqrt{250}\cdot\sqrt{40}<15{,}9\cdot 6{,}4$$

ossia:

$$99{,}5<\sqrt{250}\cdot\sqrt{40}<101{,}8$$

Si osserva subito che l'ampiezza dell'intervallo non è la stessa nei due casi; si ha:

$$4{,}3 - 3{,}9 = 0{,}4 \qquad \text{e} \qquad 101{,}8 - 99{,}5 = 2{,}3$$

Qual è ora il risultato generale?

Valendosi degli stessi simboli introdotti prima, si trova:

$$a \cdot b < \alpha \cdot \beta < (a + h) \cdot (b + h)$$

ossia:

$$a \cdot b < \alpha \cdot \beta < ab + ah + bh + h^2$$

Ora l'ampiezza dell'intervallo è data da:

$$ab + ah + bh + h^2 - ab = ah + bh + h^2$$

Abitualmente in questo risultato si trascura h^2, che è molto piccolo rispetto agli altri addendi, e si considera come ampiezza dell'intervallo il valore:

$$ah + bh = h\,(a + b)$$

Si arriva dunque alla seguente conclusione: *moltiplicando due valori approssimati si ha un prodotto approssimato, con un errore che è dato dall'errore dei singoli fattori moltiplicato per la somma dei fattori.*

Questa conclusione generale spiega i risultati ottenuti prima; per esempio si è ottenuto:

$$3{,}9 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} < 4{,}3$$

risultato contenuto in un intervallo ampio 0,4, dato che risulta:

$$0{,}4 \cong 4{,}2 \cdot 0{,}1$$

e 4,2 era appunto la somma dei fattori.

La propagazione degli errori

Le considerazioni finora svolte fanno capire come, eseguendo i calcoli con valori approssimati contenuti in un certo intervallo d'errore, si ottengono generalmente dei risultati che sono contenuti in un intervallo d'errore più ampio.

Questo vuol dire che l'errore massimo che si commette considerando il valore approssimato per difetto del risultato dei calcoli è generalmente più grande dell'analogo errore massimo per i singoli numeri calcolati.

Si dice in questo caso che *gli errori si propagano*, come una specie di insetti molesti che si moltiplica a partire da pochi individui.

Si capisce dunque che la propagazione degli errori può diventare un fenomeno complicato da seguire quando le operazioni sono numerose e varie; tuttavia l'idea fondamentale rimane la stessa: *eseguendo dei calcoli con valori approssimati, l'errore che si commette considerando il valore approssimato per difetto del risultato è generalmente più grande dell'analogo errore relativo ai singoli numeri da cui si era partiti.*

5

I numeri reali in geometria: il rapporto fra due segmenti

Rapporto intero fra due segmenti

In fig. 1 è raffigurata la retta sulla quale sono rappresentati i numeri interi: il segmento OU è l'unità di misura e perciò U rappresenta 1; il punto A rappresenta 2 perché il segmento OA è costruito riportando 2 volte OU.
Questa situazione si può descrivere dicendo che *OA contiene 2 parti uguali a OU*; si scrive:

$$OA=2OU$$

Ma si può anche dire che *OU è contenuto 2 volte in OA*; in tal caso si scrive:

$$\frac{OA}{OU}=2$$

Il simbolo $\frac{OA}{OU}$ è chiamato *rapporto fra i due segmenti OA e OU* e indica il numero di segmenti uguali a OU contenuti in OA. In generale, *si scrive*:

$$\frac{OA}{OU}=m, \text{ con } m \text{ numero intero positivo}$$

per dire che in OA *è contenuto* m *volte* OU.

Rapporto razionale fra due segmenti

Fissiamo ora l'attenzione sul punto B di fig. 2: B rappresenta il numero razionale $\frac{1}{3}$ perché è stato ottenuto nel modo seguente:
- si è diviso OU in tre segmenti uguali;
- si è indicato il punto B all'estremo del primo segmento.

Figura 1
Rapporto intero fra due segmenti

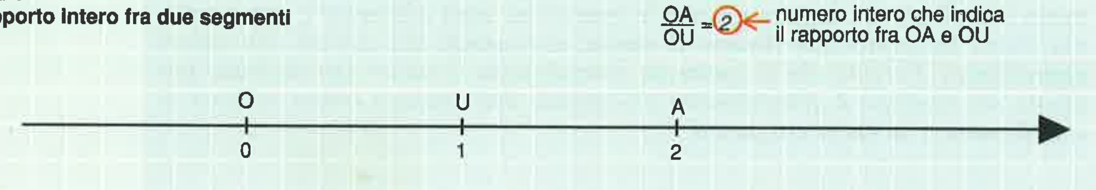
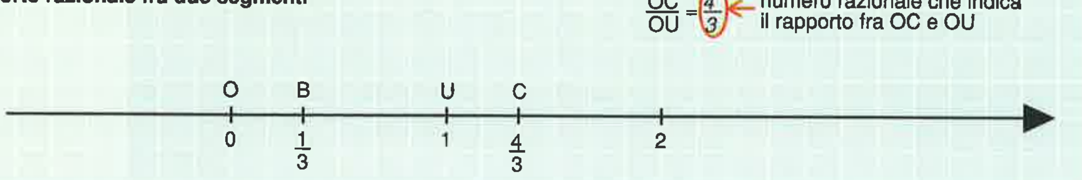


Figura 2
Rapporto razionale fra due segmenti



In questo caso si scrive dunque:

$$OB = \frac{1}{3} OU \quad \text{o anche} \quad \frac{OB}{OU} = \frac{1}{3}$$

E così il punto C di fig. 2 rappresenta $\frac{4}{3}$ perché è stato ottenuto nel modo seguente:

- si è diviso OU in tre segmenti uguali;
- si è indicato il punto C riportando 4 volte il segmento $\frac{1}{3}$ OU.

In questo caso si scrive allora:

$$OC = 4 \cdot \frac{1}{3} OU \quad \text{o anche} \quad OC = \frac{4}{3} OU$$

oppure:

$$\frac{OC}{OU} = \frac{4}{3}$$

In generale, *si scrive*:

$$\frac{OC}{OU} = \frac{p}{q}$$

per dire che in OC *è contenuto* p *volte il segmento* $\frac{1}{q}$ OU.

Quando il rapporto fra due segmenti è un numero razionale si dice che *i segmenti sono commensurabili.*

Rapporto irrazionale fra due segmenti

Il punto D di fig. 3 rappresenta $\sqrt{2}$, che è un numero irrazionale, cioè un numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. In questo caso che cosa può si può dire del rapporto $\frac{OD}{OU}$?

Visto che $\sqrt{2}$ non può essere scritto sotto forma di frazione, non si potrà mai scrivere

$$\frac{OD}{OU} = \frac{p}{q}$$

Questo vuol dire che non si può esaurire il segmento OD con p segmenti del tipo $\frac{1}{q}$ OU.

In questo caso si dice che OU e OD sono incommensurabili.

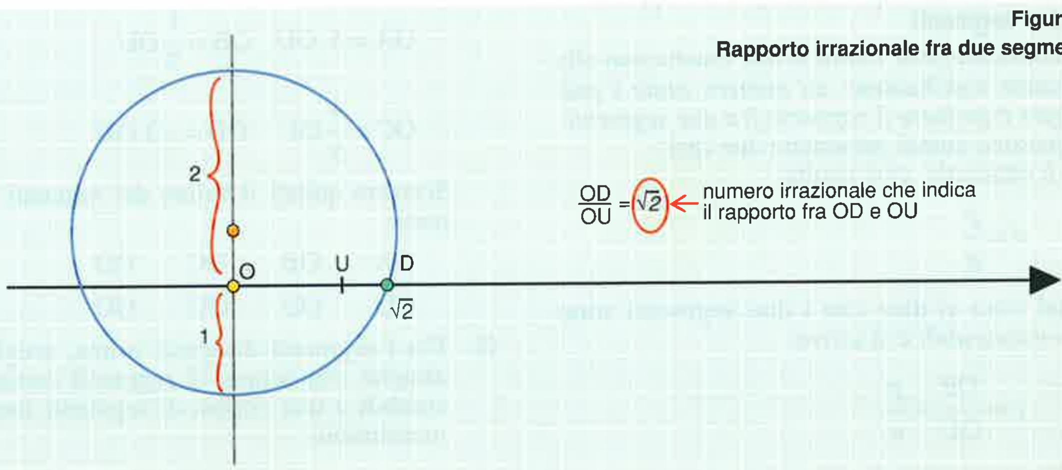
In generale, *si dicono incommensurabili due segmenti che non hanno rapporto razionale.*

Resta da interpretare geometricamente la proprietà esaminata nel paragrafo 2 (pp. 55-56): ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali, una che approssima per difetto e l'altra che approssima per eccesso.

Ecco un esempio: si è detto (p. 55) che $\sqrt{2}$ è approssimato dalle seguenti successioni di razionali:

Per difetto	Per eccesso
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415

Figura 3
Rapporto irrazionale fra due segmenti



Questi stessi razionali possono essere scritti in forma di frazione, ottenendo:

Per difetto	Per eccesso
1	2
$\frac{14}{10}$	$\frac{15}{10}$
$\frac{141}{100}$	$\frac{142}{100}$
$\frac{1414}{1000}$	$\frac{1415}{1000}$

Si capisce allora che:

- OU è contenuto in OD più di 1 volta e meno di 2;
- $\frac{1}{10}$ OU è contenuto in OD più di 14 volte e meno di 15;
- $\frac{1}{100}$ OU è contenuto in OD più di 141 volte e meno di 142.

Si può continuare a suddividere OU in parti sempre più piccole, ma si ha la certezza che non si riuscirà mai ad esaurire il segmento OD (anche se la parte che si tralascia diventa, agli effetti pratici, trascurabile).
Considerazioni analoghe possono essere ripetute a partire da altri punti P della retta che raffigura i numeri reali, nel caso in cui P rappresenta un numero irrazionale.

Un numero reale esprime sempre un rapporto fra due segmenti

Le considerazioni finora svolte conducono alla seguente conclusione: *un numero reale* r *può sempre esprimere il rapporto fra due segmenti.*
Si possono quindi presentare due casi:
1. r è *razionale*, cioè risulta:

$$r = \frac{p}{q}$$

in tal caso si dice che i due segmenti sono *commensurabili* e si scrive:

$$r = \frac{OP}{OU} = \frac{p}{q}$$

2. r è *irrazionale*
In questo caso si scrive sempre:

$$r = \frac{OP}{OU}$$

ma si dice che i due segmenti sono *incommensurabili.*

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato delle seguenti uguaglianze:

$$\frac{OP}{OU} = 4 \qquad \frac{OP}{OU} = \frac{1}{4} \qquad \frac{OP}{OU} = \frac{3}{4}$$

② Spiegare il significato delle seguenti frasi:
a. «Due segmenti sono commensurabili»;
b. «Due segmenti sono incommensurabili».

Comprensione

① Spiegare perché le seguenti affermazioni sono errate e correggere gli errori:
a. «$OP = 4 \cdot OU$ vuol dire che OP è contenuto quattro volte in OU»;
b. «Il rapporto $\frac{OP}{OU}$ indica sempre quante volte il segmento OP è contenuto in OU».

② Disegnare una coppia di segmenti commensurabili ed una coppia di segmenti incommensurabili.

Applicazioni

① Disegnare prima un segmento OU e poi i segmenti seguenti:

$$OA = 5 \cdot OU \qquad OB = \frac{1}{5} OU$$

$$OC = \frac{4}{5} OU \qquad OD = \sqrt{3}\, OU$$

Scrivere quindi il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OA}{OU} \qquad \frac{OB}{OU} \qquad \frac{OC}{OU} \qquad \frac{OD}{OU}$$

② Fra i segmenti disegnati prima, scegliere almeno una coppia di segmenti commensurabili e una coppia di segmenti incommensurabili.

6 Il teorema di Talete

Il rapporto fra due segmenti e il rapporto fra un oggetto e la sua ombra

Il rapporto fra due segmenti si può osservare tutti i giorni: un'asticella forata è illuminata dai raggi del sole a mezzogiorno (fig. 1*a*) e poi in un altro momento della giornata (fig. 1*b*). Le distanze tra i fori sono diverse nell'asticella e nell'ombra ma, osservando meglio, si trova qualcosa che rimane immutato:

- i segmenti AB e BC, che sono uguali sull'asticella, diventano nell'ombra i due segmenti A'B' e B'C' ancora uguali fra loro, cioè risulta:

$$AB = BC \quad \text{e} \quad A'B' = B'C'$$

- i segmenti AC e AB, che sono uno doppio dell'altro sull'asticella, diventano nell'ombra i due segmenti A'C' e A'B' che sono ancora uno doppio dell'altro; si trova dunque:

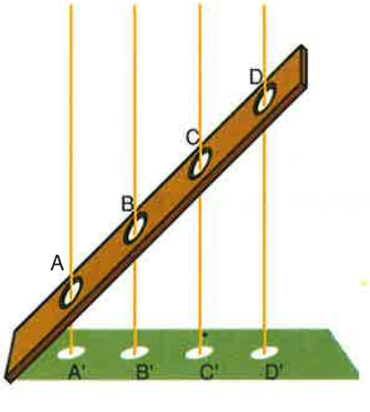
$$AC = 2AB \quad \text{e} \quad A'C' = 2A'B'$$

ossia:

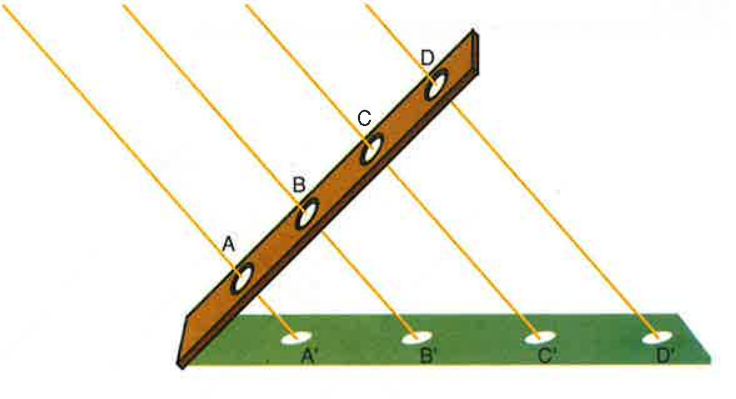
$$\frac{AC}{AB} = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{A'C'}{A'B'} = 2$$

Sembra che osservazioni di questo tipo abbiano condotto Talete, matematico greco vissuto intorno al 600 a.C., a scoprire un famoso teorema che porta il suo nome.

Figura 1
Il rapporto fra due segmenti nella realtà



1*a*



1*b*

Il teorema di Talete

Si arriva alla proprietà scoperta da Talete basandosi su di un disegno che idealizza l'esperienza descritta prima (fig. 2):

- i raggi del sole diventano più rette parallele (per esempio *a*, *b*, *c*, *d*);
- l'asticella e la sua ombra diventano due rette (*t* e *t'*), dette *trasversali*, che tagliano le parallele;
- i segmenti sull'asticella e le corrispondenti ombre diventano i segmenti tagliati da *t* e da *t'* su due stesse rette e sono detti *segmenti corrispondenti*; per esempio sono coppie di segmenti corrispondenti AB e A'B', BC e B'C', CD e C'D';
- si è quindi condotti a confrontare il rapporto fra due segmenti su una trasversale (per esempio CD e BC su *t*) con il rapporto fra i segmenti corrispondenti sull'altra trasversale (C'D' e B'C' su *t'*), ottenendo:

$$\frac{CD}{BC} \quad e \quad \frac{C'D'}{B'C'}$$

Il teorema di Talete afferma che si verifica sempre:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{C'D'}{B'C'}$$

come si era visto in qualche caso particolare, osservando l'ombra dell'asticella. Il teorema di Talete può dunque essere enunciato nel modo seguente: *se più rette parallele sono intersecate da due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti.*

L'idea fondamentale per dimostrare il teorema di Talete

Tutta la dimostrazione è basata sul risultato che si ottiene esaminando il caso più semplice (fig. 3): due segmenti AB e BC su una trasver-

Figura 2
Il teorema di Talete

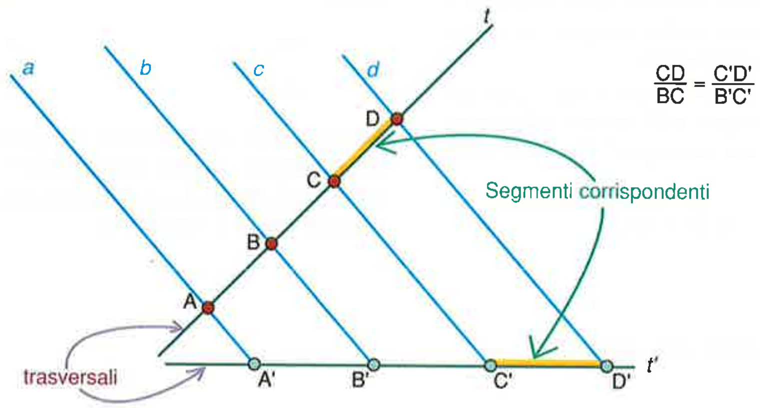
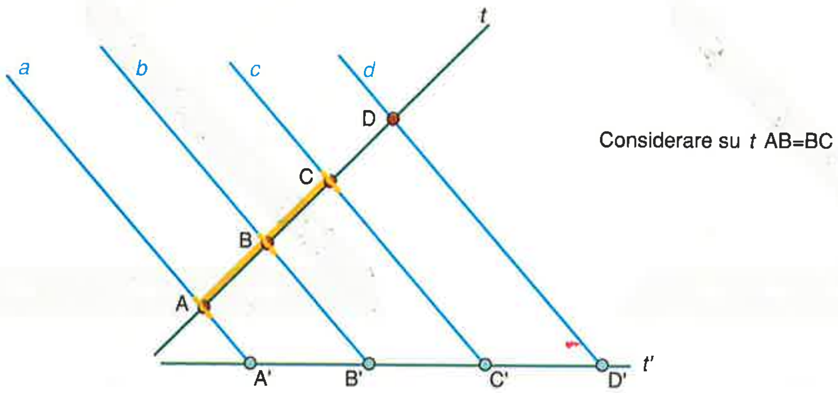


Figura 3
L'idea fondamentale per dimostrare il teorema di Talete



sale hanno il rapporto che vale 1, cioè sono uguali; si ha dunque:

$$\frac{AB}{BC} = 1 \qquad \text{ossia} \qquad AB = BC$$

I segmenti corrispondenti sull'altra trasversale (A'B' e C'D') sono certamente diversi da AB e CD, ma sembrano ancora uguali fra loro. Ecco il ragionamento da seguire per convincersi che A'B' e C'D' sono uguali fra loro (fig. 4).

- Si tracciano a partire da A' e da B' le rette *r* e *s* entrambe parallele a *t*, ottenendo i parallelogrammi AA'HB e BB'KC (fig. 4*a*).
- Si ricorda che i lati opposti di un parallelogramma sono uguali fra loro e perciò risulta:

$$A'H = AB \quad \text{e} \quad B'K = BC$$

e quindi anche:

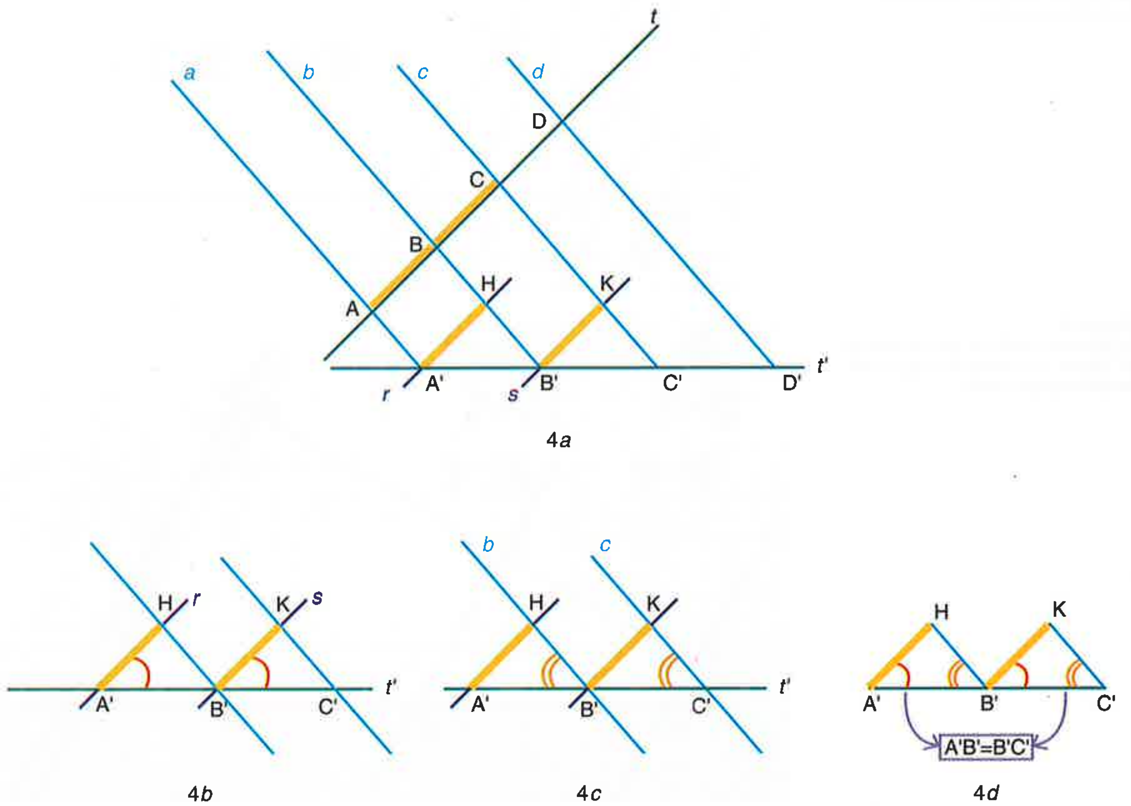
$$A'H = B'K$$

- Si considerano i triangoli A'HB' e B'KC' che sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli, dato che hanno:
  - i lati A'H e B'K uguali;
  - gli angoli $H\hat{A}'B'$ e $K\hat{B}'C'$ uguali perché corrispondenti rispetto alle parallele *r* e *s* intersecate da *t'* (fig. 4*b*).
  - gli angoli $A'\hat{B}'H$ e $B'\hat{C}'K$ uguali perché corrispondenti rispetto alle parallele *b* e *c* intersecate da *t'* (fig. 4*c*);
- Si conclude che, essendo i triangoli uguali, risulta (fig. 4*d*):

$$A'B' = B'C'$$

Questa prima conclusione può essere sintetizzata nel modo seguente: *se più rette parallele tagliano due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono sull'altra trasversale segmenti che sono ancora uguali fra loro.*

Figura 4
Le costruzioni per dimostrare che risulta anche A'B'=B'C'



La dimostrazione del teorema di Talete

Si può ora esaminare un caso più generale in cui due segmenti sulla trasversale t non sono uguali (fig. 5): si considerano, per esempio, BC e CD che hanno rapporto $\frac{3}{2}$. Risulta dunque:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{3}{2} \quad \text{ossia} \quad CD = \frac{3}{2} BC$$

Si ottiene CD nel modo seguente:

- si divide BC in *2* segmenti uguali (BF, FC);
- si riportano *3* di questi segmenti (CG, GH e HD) a partire da C.

Con questa costruzione si ottengono sulla retta t tanti segmenti tutti uguali fra loro; si possono allora tracciare dai punti F, G, H le parallele alle rette b, c, d, ottenendo le rette f, g, h, che tagliano sulla retta t' dei segmenti certamente uguali fra loro.
Si è perciò ricondotti al caso precedente: anche C'D' si ottiene dividendo B'C' in *due* parti uguali e riportandone *tre* a partire da C'; questo vuol dire che risulta:

$$C'D' = \frac{3}{2} B'C' \quad \text{ossia} \quad \frac{C'D'}{B'C'} = \frac{3}{2}$$

Questo stesso ragionamento si può sempre ripetere quando sono assegnati su una trasversale due segmenti BC e CD commensurabili, cioè due segmenti il cui rapporto è espresso da un numero razionale dato da $\frac{p}{q}$; si otterrà dunque che:

$$\text{dato } \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{BC}} = \frac{p}{q} \text{ risulta sempre } \frac{\mathbf{C'D'}}{\mathbf{B'C'}} = \frac{p}{q}$$

Rimane ora un'ultima situazione da esaminare: sono dati su una trasversale due segmenti incommensurabili, cioè due segmenti BC e CP che hanno il rapporto espresso da un numero irrazionale r. Anche in questo caso si trova che:

$$\text{dato } \frac{\mathbf{CP}}{\mathbf{BC}} = r \text{ risulta sempre } \frac{\mathbf{C'P'}}{\mathbf{B'C'}} = r$$

Figura 5
La dimostrazione del teorema di Talete nel caso di segmenti commensurabili

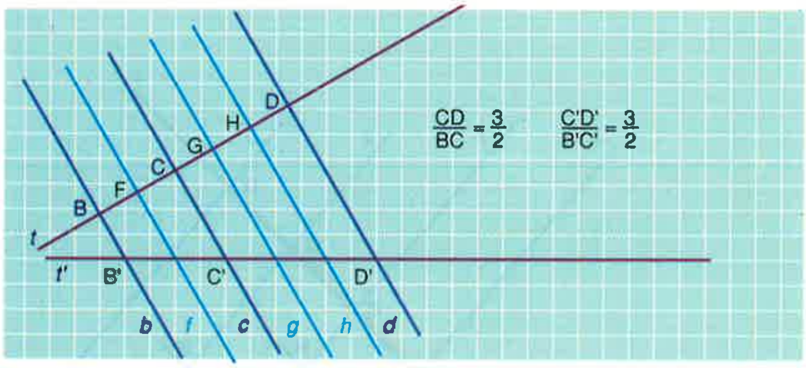
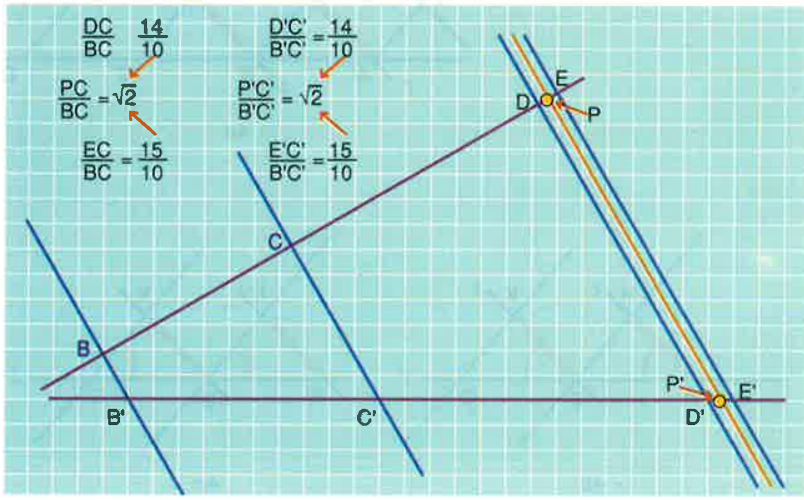


Figura 6
La dimostrazione del teorema di Talete nel caso di segmenti incommensurabili



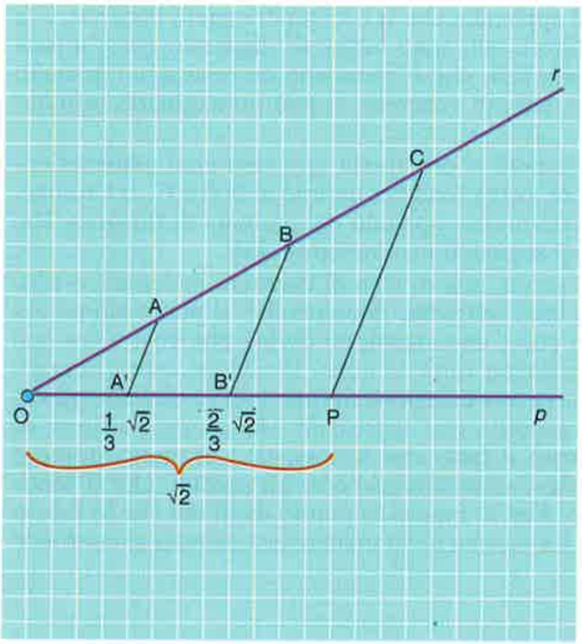
Per convincersi del risultato, basta ricondursi al caso in cui il rapporto fra i due segmenti è razionale, considerando i valori approssimati per difetto e per eccesso del numero irrazionale *r* (fig. 6).

Un'applicazione immediata del teorema di Talete

Il teorema di Talete è, insieme al teorema di Pitagora, uno dei teoremi fondamentali della geometria: lo studio della similitudine, che è sviluppato nel capitolo terzo, è basato sul teorema di Talete.
Ma il teorema di Talete ha anche applicazioni immediate per risolvere problemi di tipo grafico-costruttivo come il seguente: suddividere un dato segmento in parti uguali. In fig. 7 si trova un esempio di questo problema: si vuole dividere in tre parti uguali il segmento OP, che è lungo $\sqrt{2}$.
Ecco come si procede:

- si disegna una semiretta qualunque O*r*;
- su O*r*, a partire da O, si riportano tre segmenti uguali OA, AB, BC;

Figura 7
Un'applicazione del teorema di Talete



- si congiunge P con C;
- da B e da A si tracciano le parallele a PC, fino ad incontrare OP in A' e in B'.

Il teorema di Talete garantisce che, in questo modo, il segmento OP è diviso in tre parti uguali; così si ottengono, in particolare, i segmenti:

– OA', che è lungo $\frac{1}{3}\sqrt{2}$;

– OB', che è lungo $\frac{2}{3}\sqrt{2}$;

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Costruire almeno quattro rette parallele tagliate da due trasversali e indicare almeno due coppie di segmenti corrispondenti.

② Enunciare il teorema di Talete, basandosi anche sul disegno tracciato per rispondere al quesito precedente.

Comprensione

① Spiegare come si organizza la dimostrazione del teorema di Talete; dicendo in particolare:
- qual è l'idea fondamentale su cui si basa tutta la dimostrazione;
- perché il caso dei segmenti commensurabili può essere ricondotto al caso dei segmenti uguali;
- perché il caso dei segmenti incommensurabili può essere ricondotto al caso dei segmenti commensurabili.

Applicazioni

① Basarsi sul teorema di Talete per suddividere un segmento lungo $\sqrt{3}$ in quattro parti uguali e indicare sul disegno i segmenti che hanno le seguenti lunghezze:

$\frac{1}{4}\sqrt{3}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

I numeri reali nella storia

I segmenti incommensurabili e la nascita della matematica astratta

La scoperta dei segmenti incommensurabili ha segnato una crisi nella storia della matematica; una crisi che ha significato un avanzamento nella scienza.

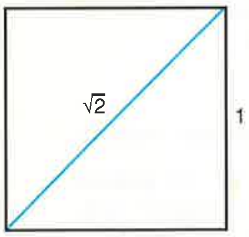
Riflettiamo: che cosa vuol dire, per esempio, che la diagonale ed il lato del quadrato sono due segmenti fra loro incommensurabili (fig. 1)?

Vuol dire che non si riesce a trovare una parte del lato, anche piccolissima, che, riportata più volte, riesca ad esaurire la diagonale.

Questo fatto porta ad una conseguenza: il lato e la diagonale del quadrato non sono formati con gli stessi punti «messi in fila», perché altrimenti sarebbe il punto la parte piccolissima necessaria per esaurire la diagonale. Perciò non esiste il «punto-granello», il «punto-atomo» con cui si può pensare di formare tutte le figure geometriche: il punto in matematica è qualcosa senza dimensioni.

È proprio questa conclusione che segna un distacco fra due concezioni della matematica: la matematica applicata, che si occupa di oggetti concreti, e la matematica astratta, per cui le figure non sono materiali. Secondo quest'ultima concezione, il punto non ha dimensioni, non è nemmeno un minuscolo granello di sabbia; e, non rappresentando nulla di concreto, si può immaginarlo infinitamente piccolo.

Figura 1
Diagonale e lato del quadrato sono fra loro incommensurabili



Proprio su queste considerazioni si era aperta una vera crisi matematico-filosofica nella scuola che Pitagora aveva fondato, intorno al 500 a.C., a Crotone, antica colonia greca. Una crisi determinata appunto dal teorema di Pitagora, che aveva fatto scoprire l'esistenza dei segmenti incommensurabili.

E la polemica, nel mondo greco, non fu solo di carattere matematico-filosofico, ma segnò addirittura una crisi religiosa. Ecco perché: il punto-atomo era considerato l'essenza di tutte le cose, una creazione divina che costituiva non solo le figure geometriche, ma anche tutte le cose. Il vedere «sbriciolarsi» l'atomo significava che non esisteva una creazione divina, voleva dire che gli dei non esistevano. La leggenda racconta che Ippaso di Metaponto, allievo di Pitagora, non seppe tener nascosto il fatto che non esisteva il punto-atomo e divulgò questa «verità scandalosa», sconvolgendo così gli uomini, che si sentirono privati dell'appoggio divino. Perciò Ippaso fu punito dagli dei che lo fecero naufragare nel mare di Crotone. La nascita della matematica astratta si confonde dunque con la leggenda.

I numeri irrazionali come «casi eccezionali»

Con la scoperta di $\sqrt{2}$ nasce dunque la matematica astratta e quel «rapporto infamante» non viene certamente considerato un numero, ma un modo di descrivere una particolare situazione geometrica. E così per Euclide (IV-III secolo a.C.) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ sono interpretati come rapporti di segmenti, come «simboli» che si possono costruire con riga e compasso.

I secoli scorrono e quei pochi simboli come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ non sono mai considerati come numeri. Ancora nel 1544 il matematico tedesco Stifel scrive: «Da una parte saremmo portati ad asserire che sono dei numeri perché, quando non bastano i numeri razionali, questi "simboli" li sostituiscono; d'altra parte, però, ci sembra che non siano dei numeri perché non si possono scrivere con precisione in forma decimale, e sembrano nascondersi nelle nuvole dell'infinito».

Con queste vedute incerte e titubanti – gli irrazionali sono o non sono numeri? – si arriva a epoche relativamente recenti.

È solo nel secolo scorso che viene data chiarezza ai numeri irrazionali, vedendoli inseriti fra due successioni di numeri razionali.

Si rimane però con l'idea che i numeri irrazionali siano ben pochi, in confronto alla vastità dei numeri razionali. È proprio così? Gli irrazionali costituiscono davvero delle eccezioni?

I numeri irrazionali costituiscono la maggior parte dell'insieme dei reali

Per capire la situazione ci si può basare sul teorema di Talete e realizzare il disegno di fig. 2:

- sulla semiretta Or sono rappresentati solo i razionali; per esempio, a 1 corrisponde il punto U, a 2 corrisponde A, a $\frac{5}{2}$ corrisponde B e così via;
- sulla semiretta Os sono invece rappresentati solo i numeri irrazionali, in particolare è indicato il punto P, che corrisponde a $\sqrt{2}$;
- si congiunge il punto P con il punto U, ottenendo la retta a;
- si tracciano le rette parallele ad a, a partire dai punti come A e B, determinando su Os i corrispondenti punti A' e B'.

In base al teorema di Talete, si trova che i punti A' e B' rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

$$2\sqrt{2} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

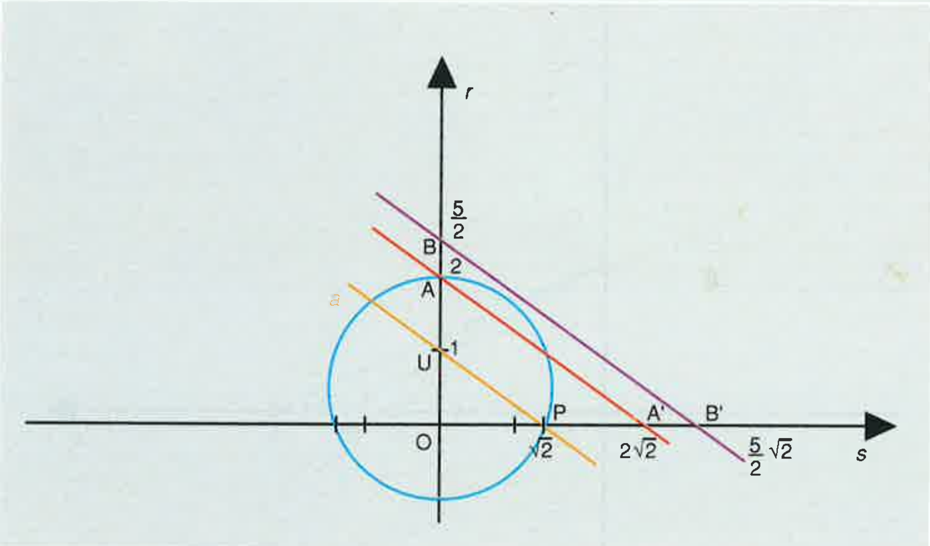


Figura 2
Una costruzione geometrica per indagare sul rapporto fra i razionali e gli irrazionali

Possiamo ripetere la costruzione a partire dal punto Q che, su Os, rappresenta $\sqrt{3}$ (fig. 3); sulla semiretta Os si trovano allora i punti A'' e B'' che rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

$$2\sqrt{3} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Così, continuando, ci si rende conto che ad ognuno dei punti della semiretta r, punti che rappresentavano i razionali, corrisponde, sulla semiretta Os, un'infinità di numeri irrazionali (fig. 4).

Si capisce allora che sono i numeri razionali a costituire un insieme «povero» e che ancora più «povero» è l'insieme degli interi. La maggior parte dei numeri reali è invece costituita da numeri irrazionali.

Si arriva così ad una conclusione sorprendente: per secoli i numeri irrazionali non riuscirono ad imporsi perché non erano considerati numeri; poi diventarono dei numeri, ma casi eccezionali; infine, si è scoperto che sono proprio loro, gli irrazionali, che costituiscono il caso più frequente fra i numeri reali.

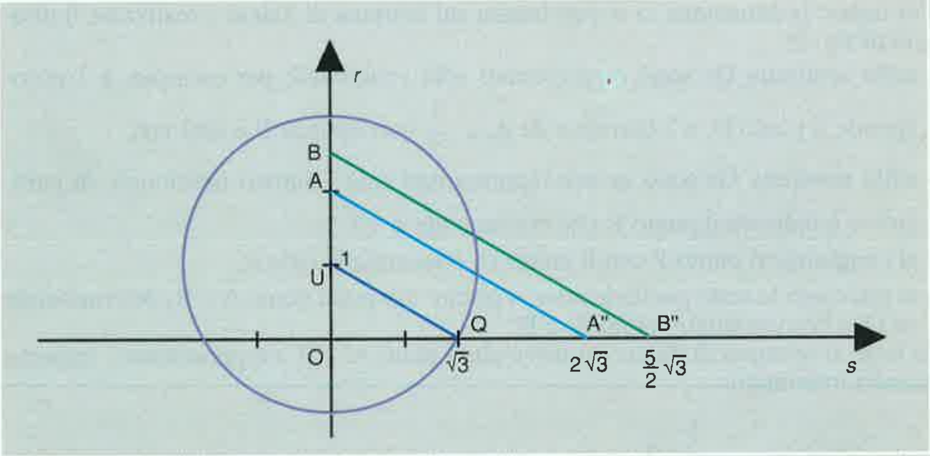


Figura 3
La costruzione ripetuta: agli stessi punti A e B corrispondono ora due irrazionali diversi

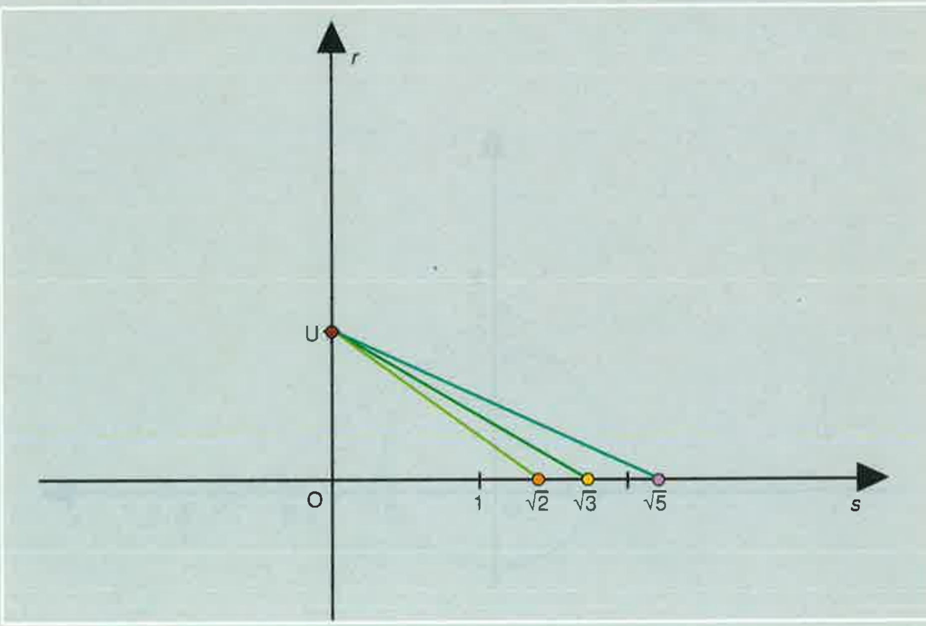


Figura 4
A ogni razionale corrispondono infiniti irrazionali

Che cosa bisogna sapere

L'insieme dei numeri reali

L'insieme dei numeri reali (R) è costituito da (fig. 1):

- numeri *irrazionali*, cioè numeri come $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$;
- numeri *razionali*, cioè numeri come $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, 0, 2, -3.

I numeri reali possono essere rappresentati sulla retta

In fig. 2 si trovano rappresentati, per esempio, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}$, 2, -2.

L'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato

Dati due qualunque numeri reali si può sempre dire se uno precede l'altro (fig. 2).

Esempi: $\sqrt{2} < 2$ $\quad -\sqrt{2} > -2$ $\quad \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Figura 1
L'insieme dei numeri reali

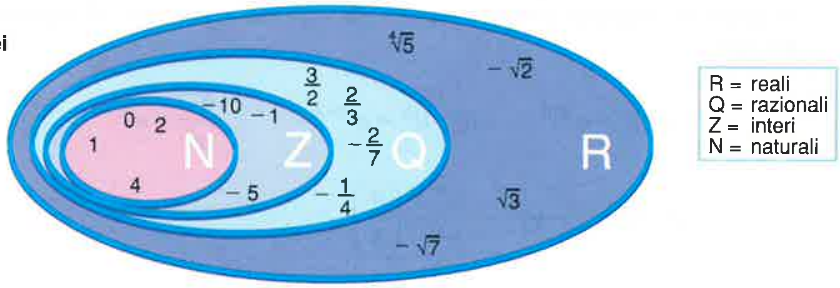
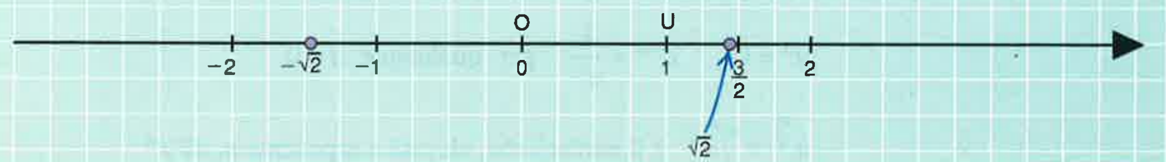


Figura 2
I numeri reali sulla retta



Approssimare un numero irrazionale con numeri razionali

Ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali:

- approssimanti per difetto (cioè minori del numero irrazionale);
- approssimanti per eccesso (cioè maggiori del numero irrazionale).

Esempio:

Per difetto	$\sqrt{2}$	Per eccesso	Intervallo
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	0,1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	0,01
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	0,001

Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

1. Valgono le seguenti proprietà per l'addizione e la moltiplicazione:

Proprietà delle operazioni	Addizione $a + b$	Moltiplicazione $a \cdot b$
Commutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva		$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente		$a \cdot 0 = 0$
Opposto e inverso	$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (con $a \neq 0$)

2. Valgono le seguenti proprietà per l'elevazione a potenza ad esponente intero positivo:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3. Definizione di potenza ad esponente 0, negativo, frazionario:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{per qualunque } a \neq 0$$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ è il numero che, elevato a esponente n, dà a^m

Calcoli con i numeri reali

Per eseguire i calcoli con i numeri reali si deve tener presente il seguente ordine:

1. si esegue *l'elevazione a potenza* (o *l'estrazione di radice*);
2. si eseguono *le moltiplicazioni* (o *le divisioni*);
3. si eseguono *le addizioni* (o *le sottrazioni*).

Si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.

Rapporto fra due segmenti

Un numero reale r può sempre esprimere il rapporto fra due segmenti OA e OU e si scrive:

$$r = \frac{OA}{OU}$$

Si possono presentare due casi:

1. r è *irrazionale*; in tal caso i due segmenti si dicono *incommensurabili*.
2. r è *razionale*, cioè risulta:

$$r = \frac{p}{q}$$

I due segmenti si dicono in tal caso *commensurabili* e si scrive (fig. 3):

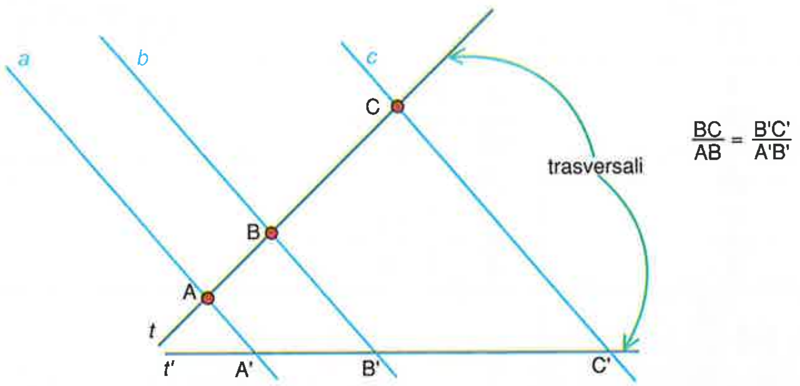
$$\frac{OA}{OU} = \frac{p}{q}$$

che significa: in OA è contenuto p volte un segmento lungo $\frac{1}{q}$ OU.

Teorema di Talete

Se più rette parallele tagliano due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti (fig. 3).

Figura 3
Teorema di Talete



Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due argomenti collegati fra loro:

- l'insieme dei numeri reali ed i calcoli con i numeri reali;
- il rapporto fra due segmenti ed il teorema di Talete.

Le applicazioni di questi argomenti, molto numerose e relative a vari campi scientifici, sono qui riunite in due gruppi:

A. calcoli con i numeri reali;
B. risoluzione di problemi che richiedono di svolgere i calcoli con numeri reali.

A. Calcoli con i numeri reali

Attività 1

Completare la tabella come è indicato nella prima riga per determinare il risultato delle operazioni indicate.

Calcolo dato	Calcoli eseguiti	Risultato
$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{\frac{3}{4}\cdot 5^2}$		$\sqrt{\frac{3}{4}\cdot 5^2}=5\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\ldots\ldots$	
$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	
$\frac{5\cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$		

B. Risoluzione di problemi

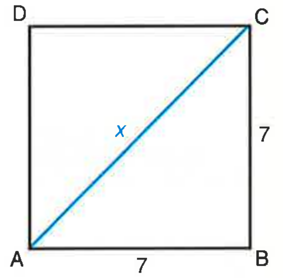
Attività 2

Determinare la lunghezza della diagonale del quadrato che ha il lato lungo 7.

Indicando con x *la lunghezza della diagonale e applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC di fig. 1, si ha:*

$$x^2 = \dots\dots\dots \quad \text{ossia} \quad x^2 = 2 \cdot 7^2 \qquad \text{da cui} \quad x = 7\sqrt{2}$$

Figura 1
La diagonale del quadrato



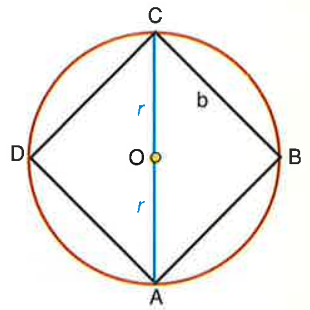
Attività 3

Ripetere il procedimento seguito prima, indicando con b la lunghezza del lato del quadrato e con d la lunghezza della diagonale.

Si ottiene:

$$d = b\,\sqrt{2}$$

Figura 2
Il quadrato inscritto in un cerchio



Attività 4

Determinare il lato del quadrato inscritto in un cerchio di raggio r.

Nel quadrato ABCD di fig. 2 la diagonale AC è lunga $2r$*; si ha quindi:*

$$2r = b\sqrt{2} \quad \text{da cui} \quad b = \dots\dots \qquad \text{e quindi} \quad b = r\,\sqrt{2}$$

Attività 5

Determinare l'altezza del triangolo equilatero che ha il lato lungo 5.
Calcolare l'area S del triangolo.

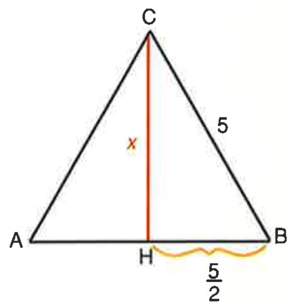
Indicando con x *la lunghezza dell'altezza e applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHB di fig. 3, si ha:*

$$5^2 = \dots\dots \quad \text{da cui} \quad x^2 = \frac{3}{4} \cdot 5^2 \qquad \text{e quindi} \quad x = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'area S *è data da:*

$$S = \frac{5x}{2} \quad \text{e quindi} \quad S = \dots\dots\dots\dots = 5^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Figura 3
L'altezza del triangolo equilatero



Attività 6

Ripetere i procedimenti seguiti per eseguire l'«*Attività 5*», indicando con b la lunghezza del lato del triangolo equilatero e con h la lunghezza dell'altezza.

Si ottiene:

$$h = b\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad S = b^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

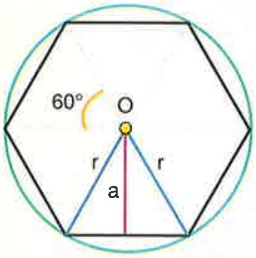
Attività 7

Determinare l'apotema a e l'area S dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r.

Esaminare la fig. 4: l'esagono si compone di 6 triangoli equilateri uguali con il lato che è .... Si ha quindi:

$$a = r\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad S = 6r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Figura 4
L'esagono regolare inscritto in un cerchio



Attività 8

Determinare il lato b e l'area S del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r.

Esaminare la fig. 5: l'angolo alla circonferenza CAH è ampio 30°, il corrispondente angolo al centro è ampio .... (vedi il primo volume, p. 145). Si trova quindi che (fig. 5*a*):

AĈH è ampio .... *CH è lungo ....* *AH è lungo ....*

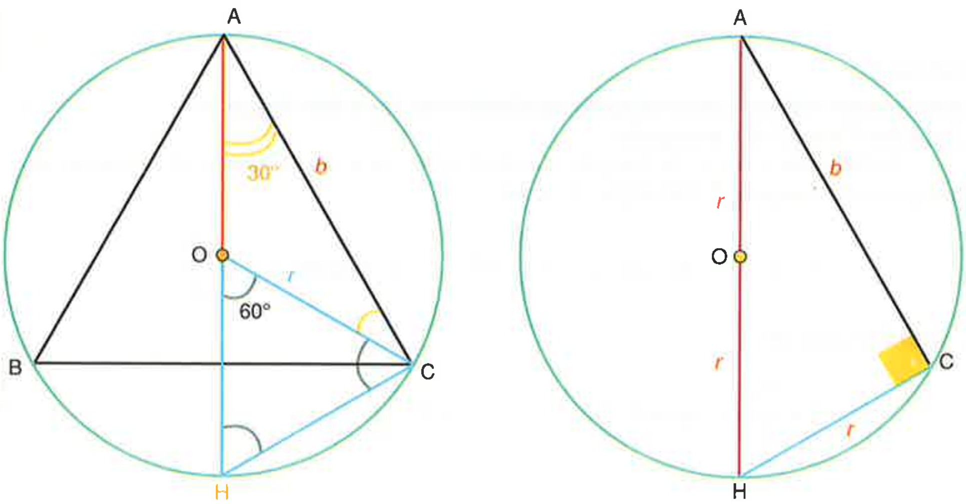
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC, si trova (fig. 5*b*):

$$b = r\sqrt{3}$$

L'area S *è data da:*

$$S = (..........)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ e quindi } S = 3r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Figura 5
Il triangolo equilatero inscritto in un cerchio



5*a* 5*b*