L'insieme dei numeri reali

Gli esercizi dal n. **1** *al n.* **10** *richiedono di esaminare l'insieme dei numeri reali e gli altri insiemi numerici che lo compongono.*

1. Esaminare i seguenti numeri e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

$$\sqrt{0} \qquad \sqrt[3]{1} \qquad \sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{4} \qquad \sqrt[3]{27} \qquad \sqrt{27}$$

2. Calcolare i quadrati dei numeri assegnati nell'esercizio 1 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

3. Calcolare i cubi dei numeri assegnati nell'esercizio 1 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

4. Esaminare i seguenti numeri e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \qquad \sqrt{\frac{9}{4}} \qquad \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{100}} \qquad \sqrt{\frac{3}{4}}$$

5. Esaminare i quadrati dei numeri assegnati nell'esercizio 4 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

6. Esaminare i cubi dei numeri assegnati nell'esercizio 4 e collocarli in uno schema come quello rappresentato in fig. 1.

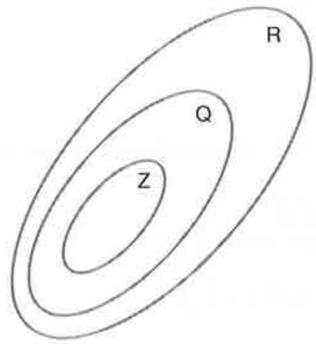
7. Collocare in uno schema come quello rappresentato in fig. 1 i seguenti numeri:
a. tre numeri interi;
b. tre numeri razionali, ma non interi;
c. tre numeri reali, ma non razionali.

8. Spiegare perché non è possibile trovare i seguenti numeri:
a. un numero intero, ma non razionale;
b. un numero intero, ma non reale;
c. un numero razionale, ma non reale.

9. Spiegare il significato dei seguenti termini:
a. numero razionale;
b. numero irrazionale;
c. numero reale.

10. Spiegare perché un numero irrazionale è certamente reale, mentre non è detto che un numero reale sia irrazionale.

Figura 1
Insiemi numerici



Rappresentare i numeri reali sulla retta

Rappresentare numeri razionali

Gli esercizi dal n. **11** *al n.* **18** *chiedono di rappresentare numeri razionali sulla retta, riprendendo anche alcune nozioni del primo volume (vedi pp. 85-87, esercizi pp. 524-530).*

11. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4$

Rispondere ai seguenti quesiti:
a. a quale insieme numerico appartengono tutti i numeri assegnati?
b. si può trovare un numero intero fra 3 e 4?
c. l'insieme degli interi è denso o discreto?

12. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2}$

$\frac{5}{2} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{8}{2} \quad \frac{9}{2}$

Rispondere ai seguenti quesiti:
a. a quale insieme numerico appartengono tutti i numeri assegnati?
b. indicare almeno due numeri razionali compresi fra 3 e 4;
c. l'insieme dei razionali è denso o discreto?

13. Disegnare sulla retta gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 12. Indicare almeno un numero razionale compreso fra –4 e –3.

14. Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri reali e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3}$

$\frac{5}{3} \quad \frac{6}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{9}{3}$

Indicare almeno due numeri razionali compresi fra 2 e 3.

15. Disegnare sulla retta gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 14. Indicare almeno due numeri razionali compresi fra –3 e –2.

16. Disegnare sulla retta tutti gli elementi necessari per rappresentare i numeri reali e rappresentarvi i seguenti numeri:

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{2}{3}$

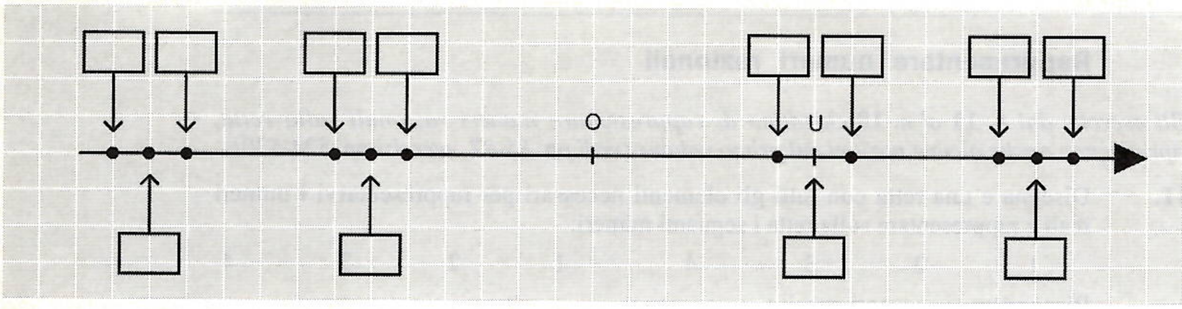
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché, per ottenere un disegno preciso, conviene scegliere OU lungo 6 quadretti;
b. come sarebbe il disegno scegliendo OU lungo 12 quadretti?
c. come sarebbe il disegno scegliendo OU lungo 2 quadretti?

17. Disegnare sulla retta tutti gli elementi necessari per rappresentare i numeri reali e rappresentarvi i seguenti numeri, scegliendo l'unità di misura più opportuna:

$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad 1 \quad -\frac{3}{8} \quad -\frac{5}{4} \quad -\frac{3}{2}$

Figura 2

18. Scrivere i numeri corrispondenti ai punti indicati in fig. 2.



Rappresentare radicali quadratici mediante una costruzione geometrica

19. Riprendere la costruzione per rappresentare sulla retta un radicale quadratico (p. 47) e rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\sqrt{7}$ $\quad -\sqrt{7}$

20. Dopo aver svolto l'esercizio 19, rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{4}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{6}$ $\quad \sqrt{8}$ $\quad \sqrt{9}$ $\quad \sqrt{10}$

21. Rappresentare sulla retta gli opposti dei numeri rappresentati nell'esercizio 20.

22. Rappresentare sulla retta i seguenti numeri, scegliendo un'unità di misura OU adatta:

$\sqrt{11}$ $\quad \sqrt{12}$ $\quad \sqrt{13}$ $\quad \sqrt{14}$ $\quad \sqrt{15}$ $\quad \sqrt{16}$ $\quad \sqrt{17}$ $\quad \sqrt{18}$

23. Rappresentare sulla retta gli opposti dei numeri rappresentati nell'esercizio 22.

24. Scrivere i numeri corrispondenti ai punti indicati in fig. 3.

25. Scrivere i numeri corrispondenti ai punti indicati in fig. 4.

Figura 3

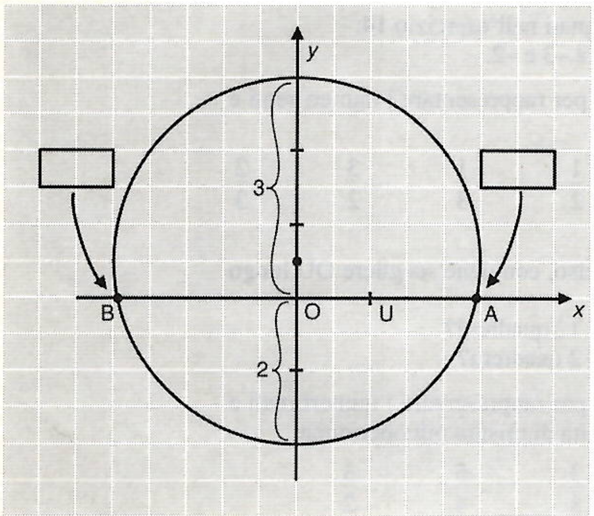
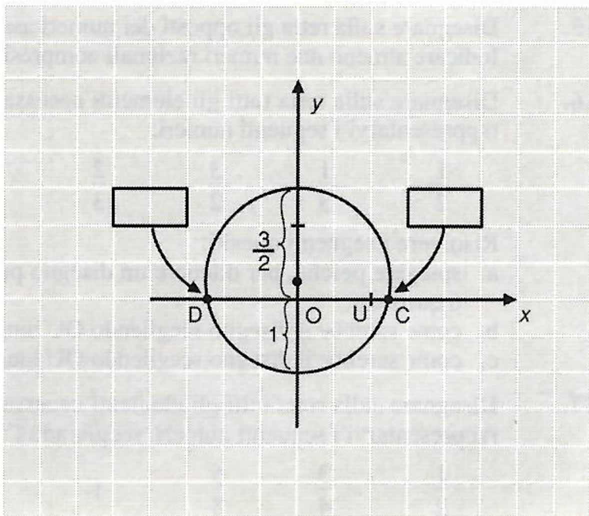


Figura 4



26. Rappresentare sulla retta i seguenti numeri, scegliendo un'unità di misura OU adatta:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt{\frac{5}{2}} \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}$$

27. Rappresentare sulla retta gli opposti dei numeri rappresentati nell'esercizio 26.

28. Rappresentare sulla retta i seguenti numeri, scegliendo un'unità di misura OU adatta:

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad \sqrt{\frac{5}{3}}$$

29. Rappresentare sulla retta gli opposti dei numeri rappresentati nell'esercizio 28.

30. Rappresentare sulla retta i seguenti numeri, scegliendo un'unità di misura OU adatta:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \sqrt{\frac{3}{4}} \qquad \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad \sqrt{\frac{7}{4}}$$

31. Rappresentare sulla retta gli opposti dei numeri rappresentati nell'esercizio 30.

Rappresentare numeri irrazionali basandosi sulla loro scrittura decimale

Gli esercizi dal n. **32** *al n.* **38** *chiedono di rappresentare sulla retta dei numeri irrazionali, basandosi sulla loro scrittura decimale.*

32. Esaminare i seguenti numeri:

$$\sqrt{37} \qquad \sqrt[3]{37} \qquad \sqrt[4]{37} \qquad -\sqrt{37} \qquad -\sqrt[3]{37} \qquad -\sqrt[4]{37}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scrivere ciascun numero in forma decimale con due cifre dopo la virgola, valendosi di un calcolatore tascabile o delle tavole numeriche;
b. rappresentare i numeri sulla retta.

33. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

$$\sqrt[3]{65} \qquad \sqrt[4]{65} \qquad \sqrt[5]{65} \qquad -\sqrt[3]{65} \qquad -\sqrt[4]{65} \qquad -\sqrt[5]{65}$$

34. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

$$\sqrt{\frac{5}{4}} \qquad \sqrt[4]{\frac{5}{4}} \qquad \sqrt[6]{\frac{5}{4}} \qquad -\sqrt{\frac{5}{4}} \qquad -\sqrt[4]{\frac{5}{4}} \qquad -\sqrt[6]{\frac{5}{4}}$$

35. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} \qquad \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \qquad \sqrt[6]{\frac{4}{5}} \qquad -\sqrt{\frac{4}{5}} \qquad -\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \qquad -\sqrt[6]{\frac{4}{5}}$$

36. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

$$\sqrt{\frac{17}{7}} \qquad \sqrt[3]{\frac{17}{7}} \qquad \sqrt[6]{\frac{17}{7}} \qquad -\sqrt{\frac{17}{7}} \qquad -\sqrt[3]{\frac{17}{7}} \qquad -\sqrt[6]{\frac{17}{7}}$$

37. Ripetere l'esercizio 32 a partire dai seguenti numeri:

37. $\sqrt{\frac{7}{17}}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{7}{17}}$ $\quad\sqrt[6]{\frac{7}{17}}$ $\quad-\sqrt{\frac{7}{17}}$ $\quad-\sqrt[3]{\frac{7}{17}}$ $\quad-\sqrt[6]{\frac{7}{17}}$

38. Scrivere in forma decimale 10 numeri irrazionali a piacere e rappresentarli sulla retta reale.

Ordinamento dei numeri reali

Le parole e i simboli dell'ordinamento

Gli esercizi dal n. **39** *al n.* **45** *conducono a rivedere le parole e i simboli dell'ordinamento esposti nel primo volume (vedi pp. 88-90, esercizi pp. 530-535)*

39. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{2}$ $\boxed{>0}$ si legge «$\sqrt{2}$ $\boxed{\text{maggiore di 0}}$» o «$\sqrt{2}$ $\boxed{\text{positiva}}$»;
b. $-\sqrt{2}$ $\boxed{<0}$ si legge «$-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{minore di 0}}$» o «$-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{negativa}}$»;
c. $\sqrt{3}$ $\boxed{>0}$ si legge «$\sqrt{3}$ $\boxed{}$» o «$\sqrt{3}$ $\boxed{}$»;
d. $-\sqrt{3}$ $\boxed{<0}$ si legge «$-\sqrt{3}$ $\boxed{}$» o «$-\sqrt{3}$ $\boxed{}$»;
e. $\sqrt{5}$ $\boxed{}$ si legge «$\sqrt{5}$ $\boxed{\text{maggiore di 0}}$» o «$\sqrt{5}$ $\boxed{\text{positiva}}$»;
f. $-\sqrt{5}$ $\boxed{}$ si legge «$-\sqrt{5}$ $\boxed{\text{minore di 0}}$» o «$-\sqrt{5}$ $\boxed{\text{negativa}}$».

40. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{3}<2$ è una disuguaglianza *vera* perché $\sqrt{3}$ precede 2;
b. $\sqrt{5}<2$ è una disuguaglianza *falsa* perché $\sqrt{5}$ *non* precede 2;
c. $\sqrt{10}<4$ è una disuguaglianza .... perché $\sqrt{10}$ 4;
d. $\sqrt{17}<4$ è una disuguaglianza .... perché $\sqrt{17}$ .... 4.

41. Completare le frasi seguenti come nei primi due esempi:

a. $\sqrt{5}>2$ è una disuguaglianza *vera* perché $\sqrt{5}$ segue 2;
b. $\sqrt{3}>2$ è una disuguaglianza *falsa* perché $\sqrt{3}$ *non* segue 2;
c. $\sqrt{10}>3$ è una disuguaglianza .... perché $\sqrt{10}$ 3;
d. $\sqrt{8}<3$ è una disuguaglianza .... perché $\sqrt{8}$ .... 3.

42. Rappresentare sulla retta reale i numeri seguenti:

$1 \qquad 2 \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{5}$

Completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$\sqrt{3}\ \boxed{}\ 1 \qquad \sqrt{3}\ \boxed{}\ 2 \qquad \sqrt{5}\ \boxed{}\ 3 \qquad \sqrt{5}\ \boxed{}\ 2$

43. Dopo aver risolto l'esercizio 42, rappresentare sulla retta reale anche gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 42.
Completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$-\sqrt{3}\ \boxed{}\ 1 \qquad -\sqrt{3}\ \boxed{}\ 2 \qquad -\sqrt{5}\ \boxed{}\ 3 \qquad -\sqrt{5}\ \boxed{}\ 2$

44. Dopo aver svolto l'esercizio 43, completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$\sqrt{3}\;\square\;-1 \qquad \sqrt{3}\;\square\;-2 \qquad \sqrt{5}\;\square\;-3 \qquad \sqrt{5}\;\square\;-2$$

45. Dopo aver svolto l'esercizio 43, completare le seguenti formule inserendo il corretto segno di disuguaglianza fra i numeri di ciascuna coppia:

$$-\sqrt{3}\;\square\;-1 \qquad -\sqrt{3}\;\square\;-2 \qquad -\sqrt{5}\;\square\;-3 \qquad -\sqrt{5}\;\square\;-2$$

Ordinare dei numeri reali

Gli esercizi dal n. **46** *al n.* **53** *conducono ad ordinare più numeri reali, basandosi sulla loro scrittura decimale.*

46. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$1 \qquad 2 \qquad \sqrt[3]{5} \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{7}{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale, con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
b. scrivere tutti i numeri in ordine crescente.

47. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 46 e disporli in ordine crescente.

48. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$2 \qquad 3 \qquad \sqrt[3]{11} \qquad \sqrt{5} \qquad \frac{20}{9}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale, con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
b. scrivere tutti i numeri in ordine crescente.

49. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 48 e disporli in ordine crescente.

50. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$3 \qquad 4 \qquad \sqrt[3]{29} \qquad \sqrt[4]{90} \qquad \frac{37}{12}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
b. scrivere tutti i numeri in ordine crescente.

51. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 50 e disporli in ordine crescente.

52. Esaminare i seguenti numeri reali:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \sqrt[5]{8} \qquad \sqrt[6]{13} \qquad \frac{26}{17}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scrivere gli ultimi tre numeri in forma decimale con un numero di cifre dopo la virgola adatto a distinguere i numeri uno dall'altro;
b. scrivere tutti i numeri in ordine crescente.

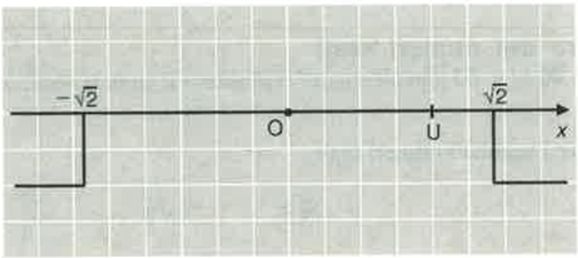
53. Scrivere gli opposti dei numeri assegnati nell'esercizio 52 e disporli in ordine crescente.

Le disuguaglianze per descrivere semirette o segmenti

Gli esercizi dal n. **54** *al n.* **65** *conducono a descrivere semirette o segmenti con disuguaglianze, riprendendo le nozioni esposte nel primo volume (vedi pp. 89-90, 533).*

54. Scrivere le disuguaglianze che caratterizzano le semirette indicate in fig. 5.

Figura 5



55. Scrivere quattro numeri reali maggiori di $\sqrt{2}$ ed altrettanti minori di $\sqrt{2}$.

56. Scrivere quattro numeri reali maggiori di $-\sqrt{2}$ ed altrettanti minori di $-\sqrt{2}$.

57. Rappresentare le semirette descritte dalle seguenti disuguaglianze:

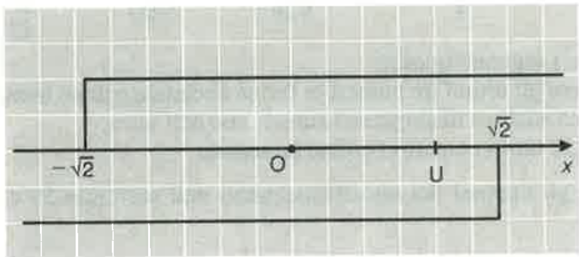
$x \leq \sqrt{5}$ $\quad$ $x \geq \sqrt{5}$ $\quad$ $x \leq -\sqrt{5}$ $\quad$ $x \geq -\sqrt{5}$

58. Scrivere quattro numeri reali maggiori di $\sqrt{5}$ ed altrettanti minori di $\sqrt{5}$.

59. Scrivere quattro numeri reali maggiori di $-\sqrt{5}$ ed altrettanti minori di $-\sqrt{5}$.

60. Scrivere le disuguaglianze che caratterizzano le semirette indicate in fig. 6.

Figura 6



61. Rappresentare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$0 \leq x \leq \sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{5} \leq x \leq 3$ $\quad$ $-3 \leq x \leq -\sqrt{5}$ $\quad$ $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

62. Scrivere quattro numeri positivi e minori di $\sqrt{5}$ ed altrettanti negativi e maggiori di $-\sqrt{5}$.

63. Spiegare perché non si possono trovare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{5} \qquad \sqrt{5} \leq x \leq 0 \qquad -\sqrt{5} \leq x \leq -3 \qquad 0 \leq x \leq -\sqrt{5}$$

64. Rappresentare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{2}{3} \leq x \leq \sqrt{8} \qquad \sqrt{8} \leq x \leq \frac{7}{2} \qquad -\sqrt{8} \leq x \leq -\sqrt{2} \qquad -\frac{5}{3} \leq x \leq \sqrt{8}$$

65. Spiegare perché non si possono trovare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{8} \leq x \leq \frac{2}{3} \qquad \frac{7}{2} \leq x \leq \sqrt{8} \qquad -\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{8} \qquad -\sqrt{8} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

Sulle frazioni continue

66. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{19}{13}$.

67. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{31}{21}$.

68. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{13}{9}$.

69. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{23}{17}$.

70. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

71. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$$

72. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

73. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{10}$.

74. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{17}$.

75. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{26}$.

76. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{37}$.

77. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{50}$.

Sui valori approssimati di un numero irrazionale

78. Completare le tabelle seguenti:

Numeri n	Quadrati n^2
1	
$\sqrt{3}$	
2	
	5
3	
	12
	16
	20
5	

Numeri n	Cubi n^3
1	
$\sqrt[3]{6}$	
2	
	10
	15
	20
	25
3	
	30

79. Basandosi anche sui risultati ottenuti svolgendo l'esercizio 78, completare le frasi seguenti, come è mostrato nel primo esempio:

a. $\sqrt{3}$ è compreso fra 1 e 2;

b. $\sqrt{5}$ è compreso fra .... e ....;

c. $\sqrt{12}$ è compreso fra .... e ....;

d. $\sqrt{20}$ è compreso fra .... e ....

80. Basandosi anche sui risultati ottenuti svolgendo l'esercizio 78, completare le frasi seguenti, come è mostrato nel primo esempio:

a. $\sqrt[3]{6}$ è compreso fra 1 e 2;

b. $\sqrt[3]{15}$ è compreso fra .... e ....;

c. $\sqrt[3]{25}$ è compreso fra .... e ....;

d. $\sqrt[3]{30}$ è più grande di ....

81. Completare le tabelle seguenti:

Numeri n	Quadrati n^2
2,2	
$\sqrt{5}$	
2,3	

Numeri n	Quadrati n^2
2,23	
$\sqrt{5}$	
2,24	

82. Dopo aver svolto l'esercizio 81, scrivere due successioni di numeri razionali:

- la prima costituita da numeri che approssimano $\sqrt{5}$ per difetto;
- la seconda costituita da numeri che approssimano $\sqrt{5}$ per eccesso.

83. Completare le tabelle seguenti:

Numeri n	Cubi n^3
1,7	
$\sqrt[3]{5}$	
1,8	

Numeri n	Cubi n^3
1,71	
$\sqrt[3]{5}$	
1,72	

84. Dopo aver svolto l'esercizio 83, scrivere due successioni di numeri razionali:
- la prima costituita da numeri che approssimano $\sqrt[3]{5}$ per difetto;
- la seconda costituita da numeri che approssimano $\sqrt[3]{5}$ per eccesso.

85. Dopo aver svolto gli esercizi 81-84, scrivere due successioni di numeri razionali:
- la prima costituita da numeri che approssimano $\sqrt[4]{5}$ per difetto;
- la seconda costituita da numeri che approssimano $\sqrt[4]{5}$ per eccesso.

86. Esaminare la seguente tabella:

Numeri n	**Quadrati** n^2
2,3	5,29
2,4	5,76
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima $\sqrt{6}$ per difetto e quello che approssima $\sqrt{6}$ per eccesso;

b. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima $\sqrt{7}$ per difetto e quello che approssima $\sqrt{7}$ per eccesso;

c. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima $\sqrt{8}$ per difetto e quello che approssima $\sqrt{8}$ per eccesso.

87. Dopo aver svolto l'esercizio 86, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano $\sqrt{6}$ per difetto e per eccesso.

88. Esaminare la seguente tabella:

Numeri n	**Quadrati** n^2
3,1	9,61
3,2	10,24
3,3	10,89
3,4	11,56
3,5	12,25
3,6	12,96
3,7	13,69

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima $\sqrt{12}$ per difetto e quello che approssima $\sqrt{12}$ per eccesso;

b. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima un altro radicale quadratico a piacere per difetto e quello che approssima lo stesso radicale per eccesso.

89. Dopo aver svolto l'esercizio 88, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano $\sqrt{12}$ per difetto e per eccesso.

90. Esaminare la seguente tabella:

Numeri n	**Cubi n^3**
2,1	9,261
2,2	10,648
2,3	12,167
2,4	13,824
2,5	15,625
2,6	17,576
2,7	19,683

Basandosi sulla tabella, risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima $\sqrt[3]{10}$ per difetto e quello che approssima $\sqrt[3]{10}$ per eccesso;
b. scrivere il decimale con una cifra dopo la virgola che approssima un altro radicale cubico a piacere per difetto e quello che approssima lo stesso radicale per eccesso.

91. Dopo aver svolto l'esercizio 90, costruire una tabella per ottenere i decimali con due cifre dopo la virgola che approssimano $\sqrt[3]{10}$ per difetto e per eccesso.

92. Riprendere dal primo volume (pp. 55-56) la nozione di approssimazione per arrotondamento e per troncamento; rispondere ai seguenti quesiti:
a. in quali casi l'approssimazione per arrotondamento è per eccesso?
b. in quali casi l'approssimazione per arrotondamento è per difetto?
c. l'approssimazione per troncamento può essere per eccesso?

Proprietà delle operazioni nell'insieme dei reali

Espressioni che non hanno risultato reale

Gli esercizi dal n. **93** *al n.* **100** *conducono a riflettere sulle operazioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali.*

93. Esaminare le seguenti espressioni:

$[2(-2)]^0$ $\qquad [2-2]^0 \qquad \left(\sqrt[3]{-8}+2\right)^0 \qquad \left(\sqrt{3}+3\right)^0$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare le espressioni che non hanno risultato nell'insieme dei reali, motivando la scelta;
b. determinare il risultato delle altre espressioni.

94. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{3-3} \qquad \frac{1}{3}-3 \qquad \frac{1}{3(-3)} \qquad \frac{1}{-3+3}$$

95. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{6-6}{8(-8)} \qquad \frac{6(-6)}{8-8} \qquad \frac{6-6}{8-8} \qquad \frac{6(-6)}{8(-8)}$$

96. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

4. $\sqrt[3]{-27}$ $\sqrt{0}$ $\sqrt{-25}$ $\sqrt[5]{-1}$

97. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[5]{4-32}$ $\sqrt{5-30}$ $\sqrt{30-5}$ $\sqrt[4]{4-4}$

98. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$\dfrac{4}{\sqrt{7-7}}$ $\dfrac{\sqrt{3-7}}{5(-5)}$ $\dfrac{\sqrt{7-3}}{5-5}$ $\dfrac{\sqrt{7-3}}{5(-5)}$

99. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$\dfrac{4}{\sqrt[3]{8-8}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{3-11}}{6(-6)}$ $\dfrac{\sqrt[3]{3-11}}{6-6}$ $\dfrac{\sqrt[3]{3-11}}{6(-6)}$

100. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti espressioni:

$(-1)\cdot\sqrt{4}$ $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}$ $(-1)\cdot\sqrt{-4}$ $(-1)\cdot\sqrt[3]{-8}$

Sulle proprietà delle operazioni

Gli esercizi dal n. **101** *al n.* **109** *conducono a riflettere sulle proprietà delle operazioni, riprendendo le nozioni esposte nel primo volume (vedi pp. 13-14, esercizi pp. 488-504).*

101. Completare la tabella, seguendo l'esempio della prima riga:

Numero a	**Opposto** $-a=(-1)\cdot a$	**Reciproco** $\frac{1}{a}=a^{-1}$
3	$-3=(-1)\cdot 3$	$\frac{1}{3}=3^{-1}$
-5		
		4
$\sqrt{2}$		
		$\sqrt[3]{7}$
	$\sqrt{5}$	

102. Esaminare le identità che esprimono la proprietà commutativa, e cioè:

$ab=ba$ $a+b=b+a$

Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $\sqrt{2}$, al posto di b sostituire 3;

II. al posto di a sostituire -2, al posto di b sostituire $\sqrt{11}$.

103. Ripetere l'esercizio 102 effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $\sqrt{2}$, al posto di b sostituire $\frac{1}{4}$;

II. al posto di a sostituire $-\frac{2}{3}$, al posto di b sostituire $\sqrt{17}$.

104. Esaminare le seguenti identità:

$a \cdot 1 = a$ $\qquad$ $1 \cdot a = a$

Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $\sqrt{3}$;

II. al posto di a sostituire $\sqrt[3]{10}$.

105. Ripetere l'esercizio 104 effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $-\sqrt{3}$;

II. al posto di a sostituire $-\sqrt[3]{10}$.

106. Esaminare la seguente identità:

$a \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $0 \cdot a = 0$

Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $\sqrt{6}$;

II. al posto di a sostituire $\sqrt[3]{10}$.

107. Ripetere l'esercizio 106 effettuando le seguenti sostituzioni:

I. al posto di a sostituire $-\sqrt{3}$;

II. al posto di a sostituire $-\sqrt[3]{10}$.

108. Esaminare l'identità che esprime la proprietà distributiva, e cioè:

$(a+b)c = ac+bc$

Scrivere le uguaglianze che si ottengono effettuando le seguenti sostituzioni:

I. sostituire $\sqrt{2}$ al posto di c, 1 al posto di a e 3 al posto di b;

II. sostituire $\sqrt{3}$ al posto di c, 5 al posto di a e -1 al posto di b.

109. Ripetere l'esercizio 108 effettuando le seguenti sostituzioni:

I. sostituire $\frac{1}{2}$ al posto di c, 1 al posto di a e $\sqrt{15}$ al posto di b;

II. sostituire $-\frac{1}{3}$ al posto di c, $\sqrt{5}$ al posto di a e 1 al posto di b.

Calcoli con i numeri reali

Moltiplicare numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. **110** *al n.* **117** *conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti di numeri interi e radicali.*

110. Completare la seguente tabella come è mostrato nelle prime righe:

Espressione scritta con radicali	**Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario**	**Risultato**
$(-1)\cdot\sqrt{4}$	$(-1)4^{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{4}=-2$
$\sqrt{(-1)\cdot 4}$	$[(-1)\cdot 4]^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{-4}$ non ha risultato reale
$(-2)\cdot\sqrt{8}$		$-2\sqrt{8}$
$\sqrt{(-2)\cdot 8}$		
$(-3)\cdot\sqrt{12}$		
$\sqrt{(-3)\cdot 12}$		
$2\cdot\sqrt[4]{8}$		
$\sqrt[4]{2\cdot 8}$		

111. Completare la seguente tabella come è mostrato nelle prime righe:

Espressione scritta con radicali	**Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario**	**Risultato**
$(-1)\cdot\sqrt[3]{8}$	$(-1)8^{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt[3]{8}=-2$
$\sqrt[3]{(-1)\cdot 8}$	$[(-1)\cdot 8]^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{-8}=-2$
$(-2)\cdot\sqrt[3]{4}$		$-2\sqrt[3]{4}$
$\sqrt[3]{(-2)\cdot 4}$		
$3\cdot\sqrt[3]{9}$		
$\sqrt[3]{3\cdot 9}$		
$(-4)\cdot\sqrt[5]{8}$		
$\sqrt[5]{(-4)\cdot 8}$		

112. Esaminare le seguenti espressioni:

$(-5)\cdot\sqrt{20}$ $\quad\sqrt{(-5)\cdot 20}$ $\quad\sqrt{(-5)\cdot(-20)}$ $\quad(-5)\cdot\sqrt{-20}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile;
b. segnalare le espressioni che non hanno risultato reale;
c. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
d. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

113. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

18. $\sqrt[3]{(-2)\cdot 32}$ $\qquad \sqrt{(-2)\cdot 32}$ $\qquad \sqrt{(-2)\cdot(-32)}$ $\qquad \sqrt[3]{(-2)\cdot(-32)}$

114. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

19. $(-3)\cdot\sqrt[3]{9}$ $\qquad \sqrt[3]{(-3)\cdot 9}$ $\qquad \sqrt[4]{(-3)\cdot 27}$ $\qquad \sqrt[5]{(-9)\cdot 27}$

115. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

20. $\sqrt{8}\cdot 2$ $\qquad \sqrt{8\cdot 2}$ $\qquad \sqrt[3]{8}\cdot 27$ $\qquad \sqrt[3]{8\cdot 27}$

116. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

21. $-\sqrt{12}\cdot 3$ $\qquad -\sqrt{12\cdot 3}$ $\qquad \sqrt{3\cdot(-12)}$ $\qquad \sqrt{3}\cdot(-12)$

117. Ripetere l'esercizio 112 a partire dalle seguenti espressioni:

$-5\cdot\sqrt{12}\cdot(-\sqrt{3})$ $\qquad \sqrt{-5\cdot 12\cdot(-3)}$ $\qquad \sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{-9}\cdot(-5)$ $\qquad \sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{-9\cdot(-5)}$

Moltiplicare ed elevare a potenza numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. **118** *al n.* **123** *conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti e potenze di numeri interi e radicali.*

118. Esaminare le seguenti espressioni:

$\sqrt{[(-1)\cdot 3]^2}$ $\qquad \sqrt{(-1)\cdot 3^2}$ $\qquad \sqrt{(-1)^2\cdot 3}$ $\qquad (-1)\cdot\sqrt{3^2}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
b. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
c. calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile.

119. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[3]{[(-2)\cdot 4]^2}$ $\qquad \sqrt[3]{(-2)\cdot 4^2}$ $\qquad \sqrt[3]{(-2)^2\cdot 4}$ $\qquad \sqrt[3]{(-2)^2}\cdot 4$

120. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[4]{8^2\cdot(-2)}$ $\qquad \sqrt[4]{[8\cdot(-2)]^2}$ $\qquad \sqrt[4]{8\cdot(-2)^2}$ $\qquad \sqrt[4]{8}\cdot(-2)^2$

121. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt{\sqrt{2\cdot 8}}$ $\qquad \sqrt{2\cdot\sqrt{8}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8}$

122. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[3]{-\sqrt{4\cdot 16}}$ $\qquad \sqrt[3]{-4\cdot\sqrt{16}}$ $\qquad \sqrt[3]{\sqrt{-4}\cdot\sqrt{16}}$ $\qquad -\sqrt[3]{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{16}$

123. Ripetere l'esercizio 118 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt{-\sqrt[3]{(2\cdot 4)^2}}$ $\qquad \sqrt{\left(-\sqrt[3]{2\cdot 4}\right)^2}$ $\qquad \sqrt{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^2\cdot 4}$ $\qquad \sqrt{-\sqrt[3]{2}\cdot 4^2}$

Addizionare numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. **124** *al n.* **129** *conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo somme di numeri interi e radicali.*

124. Esaminare le seguenti espressioni:

$\sqrt{16}+9 \qquad \sqrt{16+9} \qquad \sqrt{16}+\sqrt{9} \qquad 16+\sqrt{9}$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
b. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
c. calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile.

125. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt{25}-9 \qquad \sqrt{25-9} \qquad \sqrt{25}-\sqrt{9} \qquad 25-\sqrt{9}$

126. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \qquad \sqrt{2+3} \qquad \sqrt{2}+3\sqrt{2} \qquad 2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

127. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt{7}-\sqrt{3} \qquad \sqrt{7-3} \qquad \sqrt{7}-3\sqrt{7} \qquad 7\sqrt{3}-\sqrt{3}$

128. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3} \qquad \sqrt[3]{5+3} \qquad \sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5} \qquad 5\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}$

129. Ripetere l'esercizio 124 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[3]{37}-\sqrt[3]{10} \qquad \sqrt[3]{37-10} \qquad 10\sqrt[3]{37}-\sqrt[3]{37} \qquad \sqrt[3]{10}-37\sqrt[3]{10}$

Espressioni con numeri interi e radicali

Gli esercizi dal n. **130** *al n.* **149** *conducono ad esaminare espressioni in cui compaiono numeri interi e radicali su cui si operano addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza.*

130. Esaminare le seguenti espressioni:

$\sqrt{11\cdot(-2)} \qquad \sqrt{11}\cdot(-2) \qquad \sqrt{11}-2 \qquad \sqrt{11-2}$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
b. calcolare il risultato delle espressioni, quando ciò è possibile;
c. riscrivere ciascuna espressione ed il corrispondente risultato valendosi delle potenze ad esponente frazionario.

131. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$\sqrt[3]{9\cdot(-3)} \qquad \sqrt[3]{9}\cdot(-3) \qquad \sqrt[3]{9}-3 \qquad \sqrt[3]{9-3}$

132. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{2} \qquad 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ $\qquad [5\sqrt{3}-2\sqrt{2};\ 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}]$

133. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) \qquad \sqrt{5}-2\sqrt{5}+2$ $\qquad [1;\ 2-\sqrt{5}]$

134. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $\quad 2\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ $\quad$ [7; $2\sqrt{3}+2\sqrt{15}-\sqrt{5}$]

135. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$ $\quad 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ $\quad$ [6; $3\sqrt{2}-6\sqrt{6}+2\sqrt{3}$]

136. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$(2+\sqrt{3})^2$ $\quad (2-\sqrt{3})^2$ $\quad (3+\sqrt{2})^2$ $\quad (3-\sqrt{2})^2$ $\quad$ [$7\pm2\sqrt{3}$; $11\pm6\sqrt{2}$]

137. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$(\sqrt{5}+\sqrt{20})^2$ $\quad (\sqrt{5}-\sqrt{20})^2$ $\quad (5+\sqrt{20})^2$ $\quad (\sqrt{5}-20)^2$

[45; 5; $35+10\sqrt{20}$; $405-40\sqrt{5}$]

138. Ripetere l'esercizio 130 a partire dalle seguenti espressioni:

$(\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2+4\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})$ $\quad (\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2+4\sqrt{3}\cdot 3-2\sqrt{3}$

[0; $24-3\sqrt{6}+10\sqrt{3}$]

139. Scrivere nella forma più breve il risultato della seguente espressione, estraendo dei fattori dal segno di radice, quando ciò è possibile:

$2\sqrt[4]{243}-3\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{1875}+3\sqrt[4]{48}$ $\quad$ [$4\sqrt[4]{3}$]

140. Ripetere l'esercizio 139 a partire dalla seguente espressione:

$5\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{250}$ $\quad$ [$\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{4}$]

141. Ripetere l'esercizio 139 a partire dalla seguente espressione:

$5\sqrt[4]{162}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[4]{32}-\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{16}$ $\quad$ [$12\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}$]

142. Calcolare il risultato della seguente espressione scrivendolo nella forma più breve:

$(\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2+2\sqrt{10}\,(2+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$ $\quad$ [$20+10\sqrt{2}$)]

143. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+3\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+8\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ $\quad$ [$10\sqrt{2}-20$]

144. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$\sqrt[4]{\sqrt{26}+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{26}-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$ $\quad$ [$\sqrt[4]{18}+\sqrt[3]{2}$]

145. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$\sqrt[3]{4\sqrt{6}-2\sqrt{8}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{6}+2\sqrt{8}}+\sqrt[4]{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$ $\quad$ [6]

146. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$\sqrt[3]{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+2\sqrt{12}}+\sqrt{5\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{5\sqrt{2}+1}$ $\quad$ [10]

147. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$\sqrt[4]{2\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt{5}+2}+\sqrt{6-\sqrt{20}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{20}}$$ [6]

148. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$(\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{2})(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$ [3]

149. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalla seguente espressione:

$$(\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$$ $[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}]$

Espressioni con potenze ad esponente frazionario

Gli esercizi dal n. **150** *al n.* **159** *conducono a esaminare espressioni in cui compaiono potenze a esponente frazionario su cui si operano addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza.*

150. Esaminare le seguenti espressioni:

$$[4(-8)]^{\frac{1}{3}} \qquad [4-8]^{\frac{1}{3}} \qquad 4(-8)^{\frac{1}{3}} \qquad 4-8^{\frac{1}{3}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra;
b. calcolare il risultato di ogni espressione;
c. riscrivere ogni espressione ed il corrispondente risultato valendosi dei radicali.

151. Ripetere l'esercizio 150 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(16+9)^{\frac{1}{2}}(16-9)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{2}}\right)\left(16^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}\right)$$

152. Ripetere l'esercizio 150 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left[(36+64)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad \left(36^{\frac{1}{2}}+64^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

153. Esaminare la seguente espressione:

$$5^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{12}}+\left[(5^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{8}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare il risultato dell'espressione;
b. riscrivere l'espressione ed il corrispondente risultato valendosi dei radicali.

$[(a)\ 5^{\frac{13}{12}}]$

154. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(7^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$$ [4]

155. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(5+24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}\left(5-24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}$$ [1]

156. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(5^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}+1\right) \qquad [6]$$

157. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(7^{\frac{4}{5}}-7^{\frac{3}{5}}+7^{\frac{2}{5}}-7^{\frac{1}{5}}+1\right)\left(7^{\frac{1}{5}}+1\right) \qquad [8]$$

158. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(2^{\frac{7}{2}}-2^{3}+2^{\frac{5}{2}}-2^{2}+2^{\frac{3}{2}}-2+2^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right) \qquad [15]$$

159. Ripetere l'esercizio 153 a partire dalla seguente espressione, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedere il primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left(4^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(4^{\frac{3}{2}}+4^{\frac{1}{2}}-1\right)+2\left(4^{\frac{1}{2}}-1\right)^{2}-\left(4^{\frac{3}{2}}+1\right)^{2} \qquad [-16]$$

Espressioni con potenze ad esponente frazionario anche negativo

Gli esercizi dal n. **160** *al n.* **170** *richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono potenze ad esponente frazionario anche negativo su cui si operano addizioni, moltiplicazioni ed elevazioni a potenza.*

160. Esaminare la seguente espressione:

$$\left(10^{\frac{1}{2}}+10^{-\frac{1}{2}}\right)\left(10^{\frac{1}{2}}-10^{-\frac{1}{2}}\right)+10^{-1}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare il risultato dell'espressione;
b. riscrivere l'espressione ed il corrispondente risultato valendosi di radicali.

[(a) 10]

161. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(1+5^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1-5^{-\frac{1}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}\right)-5^{-\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}} \qquad [1]$$

162. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(7^{-\frac{1}{4}}+7^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{-\frac{1}{4}}-7^{\frac{1}{4}}\right)\left(7^{-\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{2}}\right)+7^{\frac{3}{2}}\cdot 7^{-\frac{1}{2}} \qquad [7^{-1}]$$

163. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(18^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{-\frac{1}{2}}+\left(10^{\frac{1}{2}}+20^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 5^{-\frac{1}{2}}-\left(12^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 2^{-\frac{1}{2}} \qquad [2-2^{\frac{1}{2}}]$$

164. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$6^{-1}(2^{-1}+3^{-1})(2+3)^{-\frac{1}{2}}(9-4)^{\frac{1}{2}}(4^{-1}-3^{-2})^{-1} \qquad [1]$$

165. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(3^{\frac{3}{2}}+2\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left[\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3\cdot 3^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad [0]$$

166. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269):

$$\left(3^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (3\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad [2\cdot 15^{\frac{1}{2}}]$$

167. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269):

$$\left(1+7^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(1-7^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2\left(7^{\frac{1}{2}}-7^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad [16]$$

168. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)^3+3\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)+2^{-1} \qquad [2]$$

169. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppa il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left[\left(11^{-\frac{1}{9}}-11^{\frac{1}{9}}\right)\left(11^{-\frac{2}{9}}+1+11^{\frac{2}{9}}\right)+11^{\frac{1}{3}}\right]^3 \qquad [11^{-1}]$$

170. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalla seguente espressione, ricordando come si sviluppano il quadrato e il cubo del binomio (vedere primo volume, pp. 270-273):

$$\left[\left(8^{\frac{1}{6}}-8^{-\frac{1}{6}}\right)^3-\left(8^{-\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}\right)\left(8^{-\frac{1}{4}}+8^{\frac{1}{4}}\right)\right]^2 \qquad [9\cdot 2^{-1}]$$

Moltiplicare frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. **171** *al n.* **178** *conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti di frazioni e radicali.*

171. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario	Risultato
$\frac{\sqrt{4}}{3}$	$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\sqrt{\frac{4}{3}}$		
$\frac{4}{\sqrt{3}}$		

172. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	**Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario**	**Risultato**
$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5}$	$\frac{1}{3}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 5}$		$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{\frac{1}{5}\cdot 3}$		$\frac{3}{\sqrt{5}}$
$3\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$		

173. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{9}\cdot\sqrt{7} \qquad \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 7} \qquad \sqrt{\frac{1}{9}}\cdot 7$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il risultato delle espressioni;
b. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
c. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

174. Ripetere l'esercizio 173 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{16}}{5} \qquad \sqrt{\frac{16}{5}} \qquad \frac{16}{\sqrt{5}}$$

175. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Espressione scritta con radicali	**Espressione scritta con potenze ad esponente frazionario**	**Risultato**
$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}$	3
$\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 4}$		
$\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 4$		
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4$		
$\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{2}$		
$3\cdot\sqrt{\frac{4}{2}}$		

176. Esaminare le seguenti espressioni:

42. $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{7} \qquad \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}} \qquad \frac{\sqrt{2\cdot5}}{3\cdot7}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il risultato delle espressioni;
b. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
c. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

177. Ripetere l'esercizio 176 a partire dalle seguenti espressioni:

43. $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{5}{7} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}} \qquad \frac{2\cdot5}{\sqrt{3\cdot7}}$

178. Ripetere l'esercizio 176 a partire dalle seguenti espressioni:

44. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{7}} \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{7} \qquad \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{5}{7}$

Moltiplicare ed elevare a potenza frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. **179** *al n.* **183** *conducono a calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo prodotti e potenze di frazioni e radicali.*

179. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{7}{5}} \qquad \frac{3^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il risultato delle espressioni;
b. riscrivere ogni espressione valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
c. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

180. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2 \qquad \frac{\left(3\cdot\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot5} \qquad \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{5^2}$$

181. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\cdot\frac{7^3}{2} \qquad \left(\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\cdot\frac{7}{2}\right)^3 \qquad \frac{\sqrt[3]{5\cdot7}}{(6\cdot2)^3}$$

182. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}}}\cdot\frac{8}{7} \qquad \sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{8}{7}} \qquad \sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{7}}}$$

183. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}} \qquad \sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}} \qquad \sqrt{\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}}}$$

Addizionare frazioni e radicali

Gli esercizi dal n. **184** *al n.* **189** *richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono solo somme di frazioni e radicali.*

184. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{9}{4}+4} \qquad \sqrt{\frac{9}{4}}+4 \qquad \sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{4} \qquad \frac{9}{4}+\sqrt{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare il risultato delle espressioni;
b. riscrivere ogni espressione ed il corrispondente risultato valendosi delle potenze ad esponente frazionario;
c. spiegare perché le espressioni sono diverse una dall'altra.

185. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{25}} \qquad \sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{4}{25}} \qquad \sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{4}{25} \qquad \frac{1}{4}-\sqrt{\frac{4}{25}}$$

186. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{3}{2}+3} \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}+3 \qquad \frac{3}{\sqrt{2}}+3$$

187. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{5}-\frac{\sqrt[3]{5}}{3} \qquad \sqrt[3]{5-\frac{5}{3}} \qquad 5-\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \qquad 5-\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$$

188. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \frac{\sqrt{5+7}}{4} \qquad \sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{7}{4}} \qquad \sqrt{\frac{5}{4}+\frac{7}{4}}$$

189. Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{16}-\frac{\sqrt[4]{3}}{16} \qquad \frac{\sqrt[4]{15-3}}{16} \qquad \sqrt[4]{\frac{15}{16}}-\sqrt[4]{\frac{3}{16}} \qquad \sqrt[4]{\frac{15}{16}-\frac{3}{16}}$$

Espressioni con radicali e frazioni

Gli esercizi dal n. **190** *al n.* **203** *richiedono di calcolare il risultato di espressioni in cui compaiono frazioni e radicali su cui si operano addizioni, moltiplicazioni ed elevazioni a potenza.*

190. Spiegare perché le seguenti espressioni sono diverse e calcolarne il risultato.

$$\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{13}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{13}{4}\sqrt{3}\right)\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad \left[\frac{3}{4}\sqrt{3};\ -\frac{27}{8}\right]$$

191. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{\frac{3}{5}}-7\sqrt{\frac{3}{5}}+5\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad 2\sqrt{\frac{3}{5}}-7\,\frac{\sqrt{3}}{5}+5\,\frac{\sqrt{3}}{5} \qquad \left[0;\ 2\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{2}{5}\sqrt{3}\right]$$

192. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad [0;\ \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}]$$

193. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \qquad \sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad [5;\ 2+\sqrt{\frac{3}{2}}]$$

194. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{12}\left(\sqrt{\frac{25}{3}}-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \qquad \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{25}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \qquad [7;\ \frac{5}{3}\sqrt{12}-\frac{3}{2}]$$

195. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$[\frac{5}{6};\ \frac{7}{\sqrt{6}}-1]$$

196. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right) \qquad \left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}+1\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}-1\right)$$

$$[\frac{1}{2};-\frac{1}{2}]$$

197. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, p. 269 e 273):

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \qquad \left(\sqrt{3+\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$[\frac{11}{3}+2\sqrt{2};\ \frac{11}{3}]$$

198. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2 \qquad \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{4}}{5}\right)^2$$

$$[\frac{33}{10}-2\sqrt{2};\ \frac{141}{100}-\frac{2}{5}\sqrt{5}]$$

199. Ripetere l'esercizio 190 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}\right)^2\left(\frac{4}{\sqrt[3]{4+2\sqrt{5}}}\right)^3 \qquad \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)^2}{\sqrt{8}}\cdot\frac{4}{\left(\sqrt[3]{4+2\sqrt{5}}\right)^3}$$

$$[4;\ \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

200. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\left(\sqrt{6}+\frac{6}{2-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}-\frac{6}{2+\sqrt{6}}\right) \qquad [-12]$$

201. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+5 \qquad [2]$$

202. Calcolare il risultato della seguente espressione, tenendo anche presente il quadrato del binomio (vedi primo volume, pp. 269 e 273):

$$\left[\left(\sqrt[4]{5}-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2-2\right]^2-\left(\sqrt{2+\frac{1}{5}}\right)^2 \qquad [5]$$

203. Calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\sqrt{\left(3-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{7-\sqrt{5}}{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{7}{11}}} \qquad [2]$$

Rendere razionale il denominatore delle frazioni

Gli esercizi dal n. **204** *al n.* **217** *conducono ad esaminare espressioni frazionarie che presentano dei radicali al denominatore per trasformarle in espressioni equivalenti, ma con il denominatore razionale.*

204. Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$	$\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{5}}$			
$\frac{3}{\sqrt{7}}$			
$\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$			

205. Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \frac{3}{\sqrt{8}} \qquad \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \qquad \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

3. Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{5^2}$	$\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}$	$\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^n}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\frac{1\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}$			
$\frac{1}{\sqrt[4]{7^3}}$			

207. Dopo aver svolto l'esercizio 206, rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{6^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \qquad \frac{1}{\sqrt[5]{4^3}}$$

208. Ripetere l'esercizio 207 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{3}} \qquad \frac{6}{\sqrt[4]{3^3}} \qquad \frac{8}{\sqrt[5]{6^2}} \qquad \frac{9}{\sqrt[5]{3^4}}$$

209. Ripetere l'esercizio 207 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{5+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}} \qquad \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3^3}} \qquad \frac{8+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3^5}} \qquad \frac{10-\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{2}}$$

210. Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$ $=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$	$5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=$ $=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}$	$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$
$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$			

211. Dopo aver svolto l'esercizio 210, rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad \frac{3}{\sqrt{5}-2} \qquad \frac{6}{3-\sqrt{3}}$$

212. Ripetere l'esercizio 211 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \qquad \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

213. Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe:

Espressione data	Procedimento	Calcoli	Espressione ottenuta
$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$	$5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$	Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}-\sqrt{c}$	$\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}$	$\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$
$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$			
$\frac{7}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$			

214. Dopo aver svolto l'esercizio 213, rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{3}{\sqrt{5}+2} \qquad \frac{6}{3+\sqrt{3}}$$

215. Ripetere l'esercizio 214 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \qquad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

216. Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{6}{3+\sqrt{3}} \qquad \frac{6}{3-\sqrt{3}} \qquad \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \qquad \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

217. Rendere razionale il denominatore delle seguenti espressioni:

$$\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \qquad \frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} \qquad \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} \qquad \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$$

Problemi di geometria piana che conducono a calcoli con i radicali

I problemi dal n. **218** *al n.* **232** *hanno le seguenti caratteristiche:*
- richiedono di applicare il teorema di Pitagora a triangoli rettangoli e isosceli;
- richiedono di svolgere i calcoli con i radicali.

218. Un triangolo rettangolo isoscele ha i cateti lunghi 7; calcolare:
a. la lunghezza a dell'ipotenusa;
b. l'area S e il perimetro $2p$. [(b) $2p=7(2+\sqrt{2})$]

219. Un triangolo rettangolo isoscele ha i cateti lunghi 11; calcolare:
a. la lunghezza a dell'ipotenusa;
b. l'area S e il perimetro $2p$. [(b) $2p=11(2+\sqrt{2})$]

220. Dopo aver risolto gli esercizi 218 e 219, scrivere delle formule generali per calcolare la lunghezza a dell'ipotenusa, l'area S e il perimetro $2p$ di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti lunghi b.
[(b) $2p=b(2+\sqrt{2})$]

221. Dopo aver svolto l'esercizio 220, scrivere delle formule generali per calcolare l'area S, il perimetro $2p$ e la diagonale d del quadrato con il lato lungo b.
[$d=b\sqrt{2}$]

222. Un triangolo rettangolo isoscele ha l'ipotenusa lunga 5; calcolare:
a. la lunghezza b dei cateti;
b. l'area S e il perimetro $2p$. [(b) $2p=5(1+\sqrt{2})$]

223. Un triangolo rettangolo isoscele ha l'ipotenusa lunga 13; calcolare:
a. la lunghezza b dei cateti;
b. l'area S e il perimetro $2p$. [(b) $2p=13(1+\sqrt{2})$]

224. Dopo aver risolto gli esercizi 222 e 223, scrivere delle formule generali per calcolare la lunghezza b di cateti, l'area S e il perimetro $2p$ di un triangolo rettangolo isoscele con l'ipotenusa lunga a.
[$2p=a(1+\sqrt{2})$]

225. Dopo aver svolto l'esercizio 224, scrivere delle formule generali per calcolare il lato b, il perimetro $2p$ e l'area S del quadrato con la diagonale lunga d.
[$S=\dfrac{d^2}{2}$]

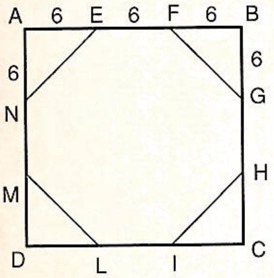
226. Dimostrare le seguenti proprietà:
a. è isoscele un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo b e l'ipotenusa lunga $b\sqrt{2}$;
b. è rettangolo un triangolo isoscele che ha il lato lungo b e la base lunga $b\sqrt{2}$.

227. In un triangolo rettangolo isoscele l'altezza relativa all'ipotenusa divide l'ipotenusa stessa in due segmenti uguali lunghi 5. Determinare la lunghezza h dell'altezza e la lunghezza b del cateto.
[$b=5\sqrt{2}$]

228. Dopo aver svolto l'esercizio 227, scrivere le formule generali per determinare l'altezza h e il cateto b di un triangolo rettangolo isoscele in cui l'altezza relativa all'ipotenusa divide l'ipotenusa stessa in due segmenti uguali lunghi q.
[$b=q\sqrt{2}$]

229. Un parallelogramma ABCD ha l'angolo acuto $D\hat{A}B$ ampio 45° e il lato AD lungo 8; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare l'altezza DH, relativa al lato AB;
b. spiegare perché i dati assegnati non bastano per determinare l'altro lato.
[(a) $DH=8\sqrt{2}$]

Figura 7



230. Un quadrato ABCD ha i lati lunghi 18 che vengono divisi in tre parti uguali (fig. 7); si uniscono quindi i punti di divisione ottenendo un ottagono.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché l'ottagono così ottenuto non è regolare;
b. calcolare i lati dell'ottagono.

231. Ripetere l'esercizio 230, a partire da un quadrato con i lati lunghi $3a$.

232. È dato un trapezio isoscele con le seguenti caratteristiche:
- la base minore è uguale ai lati obliqui;
- gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi 45°;
- il perimetro è lungo $2(4+\sqrt{2})$.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare i lati e l'area S del trapezio;
b. determinare i lati e il perimetro $2p$ del triangolo delimitato dalla base minore e dai prolungamenti dei lati obliqui.
[(b) $2p=2(1+\sqrt{2})$]

I problemi dal n. **233** *al n.* **248** *hanno le seguenti caratteristiche:*
- richiedono di applicare il teorema di Pitagora a triangoli equilateri;
- richiedono di svolgere i calcoli con i radicali.

233. Un triangolo equilatero ha il lato lungo 10; determinare la lunghezza h dell'altezza, il perimetro $2p$ e l'area S.
[$S=25\sqrt{3}$]

234. Un triangolo equilatero ha il lato lungo 6; determinare la lunghezza h dell'altezza, il perimetro $2p$ e l'area S.
[$S=9\sqrt{3}$]

235. Dopo aver svolto gli esercizi 233 e 234, scrivere delle formule generali per determinare la lunghezza h dell'altezza, il perimetro $2p$ e l'area S di un triangolo equilatero che ha il lato lungo $2b$.
[$S=b^2\sqrt{3}$]

236. Un triangolo equilatero ha l'altezza lunga 9; determinare il lato a, il perimetro $2p$ e l'area S.
[$S=27\sqrt{3}$]

237. Un triangolo equilatero ha l'altezza lunga 12; determinare il lato a, il perimetro $2p$ e l'area S.
[$S=48\sqrt{3}$]

238. Dopo aver svolto gli esercizi 236 e 237, scrivere delle formule generali per determinare la lunghezza a del lato, il perimetro $2p$ e l'area S di un triangolo equilatero che ha l'altezza lunga h.
[$S=\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$]

239. Un triangolo equilatero ha l'area che vale 16; determinare il lato a, il perimetro $2p$ e l'altezza h.
[$h=4\sqrt[4]{3}$]

240. Un triangolo equilatero ha l'area che vale 25; determinare il lato a, il perimetro $2p$ e l'altezza h.
[$h=5\sqrt[4]{3}$]

241. Dopo aver svolto gli esercizi 239 e 240, scrivere delle formule generali per determinare la lunghezza a del lato, il perimetro $2p$ e l'altezza h di un triangolo equilatero che ha l'area S.
[$h=\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{3}$]

242. È dato un triangolo ABC che ha il lato AC lungo 6, il lato BC lungo 10 e l'angolo $\hat{C}$ ampio 120°; determinare l'altezza AH relativa al lato BC e l'area S del triangolo.
[$S=18\sqrt{3}$]

243. È dato un triangolo ABC che ha il lato AC lungo 6, il lato BC lungo 10 e l'angolo $\hat{C}$ ampio 120°; risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'altezza AH relativa al lato BC;
b. determinare la lunghezza di HC e di HB;
c. determinare il terzo lato AB;
d. calcolare il perimetro $2p$ del triangolo ABC.

[(d) $2p=18+6\sqrt{7}$]

244. Un parallelogramma ABCD ha l'angolo acuto $D\hat{A}B$ ampio 60° e il lato AD lungo 6; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare l'altezza DH, relativa al lato AB;
b. spiegare perché i dati assegnati non bastano per determinare l'altro lato.

245. È dato un trapezio isoscele con le seguenti caratteristiche:
- la base minore è uguale ai lati obliqui;
- gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi 60°;
- il perimetro è lungo 10.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare i lati e l'area S del trapezio;
b. determinare i lati e il perimetro $2p$ del triangolo delimitato dalla base minore e dai prolungamenti dei lati obliqui.

[(b) $2p=6$]

246. Un rombo ha il lato lungo 12 e uno degli angoli acuti ampio 60°; determinare le diagonali e l'area S.

[$S=72\sqrt{3}$]

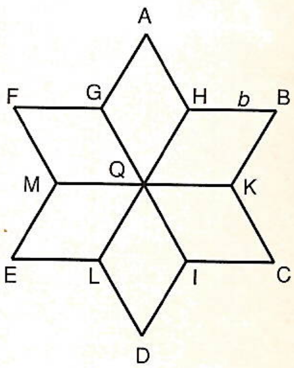
247. Dopo aver svolto l'esercizio 246, scrivere delle formule generali che forniscano le diagonali e l'area S di un rombo che ha un angolo acuto di 60° e il lato lungo b.

[$S=b^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$]

248. Sei rombi uguali con il lato lungo b sono disposti a formare il poligono di fig. 8. Risolvere i seguenti quesiti, basandosi anche sullo svolgimento dell'esercizio 247:
a. determinare gli angoli di ogni rombo;
b. determinare l'area di ciascun rombo;
c. determinare l'area S del poligono.

[(c) $S=3b^2\sqrt{3}$]

Figura 8



Gli esercizi dal n. **249** *al n.* **264** *presentano le seguenti caratteristiche:*
- richiedono di applicare i teoremi di Pitagora o di Euclide;
- richiedono di svolgere i calcoli con i radicali.

249. Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare la lunghezza d della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 5 e 10;
b. determinare la lunghezza d della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 3 e 6;
c. scrivere una formula generale per calcolare la lunghezza d della diagonale di un rettangolo che ha i lati lunghi b e $2b$.

[(c) $d=b\sqrt{5}$]

250. Dopo aver risolto l'esercizio 249, scrivere una formula generale per calcolare la lunghezza d della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi b e $\dfrac{3}{2}b$.

[$d=b\dfrac{\sqrt{13}}{2}$]

251. Dopo aver risolto gli esercizi 249 e 250, scrivere una formula generale per calcolare la lunghezza della diagonale d di un rettangolo con i lati lunghi b e kb.

[$d=b\sqrt{1+k^2}$]

252. Un rettangolo ha i lati lunghi b=12 e h=5; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la diagonale d del rettangolo;
b. raddoppiare solo il lato b e calcolare la diagonale d' del nuovo rettangolo;
c. raddoppiare solo il lato h e calcolare la diagonale d'' del nuovo rettangolo;
d. raddoppiare entrambi i lati e calcolare la diagonale d^* del nuovo rettangolo.

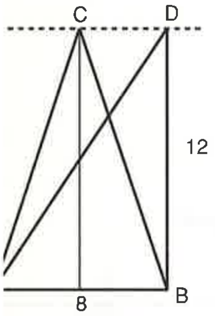
[(a) d=13; (b) $d'=\sqrt{601}$; (c) $d''=2\sqrt{61}$; (d) d^*=26]

253. Dopo aver svolto l'esercizio 252, considerare un rettangolo con i lati lunghi b e h e risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la diagonale d del rettangolo;
b. raddoppiare il lato b e determinare la diagonale d' del nuovo rettangolo;
c. raddoppiare il lato h e determinare la diagonale d'' del nuovo rettangolo;
d. raddoppiare entrambi i lati e determinare la diagonale d^* del nuovo rettangolo

254. Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 6 e 8 e quindi l'ipotenusa lunga 10. Risolvere i seguenti quesiti:
a. costruire su ogni lato un triangolo equilatero e calcolarne l'area;
b. verificare che il triangolo costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei triangoli costruiti sui cateti.

255. Ripetere l'esercizio 254 in generale, cioè a partire da un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi a e b e l'ipotenusa lunga c.

Figura 9



256. In fig. 9 sono disegnati il triangolo rettangolo ABD, che ha i cateti lunghi 8 e 12, e il triangolo isoscele ABC, che ha la base AB e l'altezza uguale a DB. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due triangoli hanno la stessa area;
b. calcolare il perimetro dei due triangoli e verificare che il triangolo isoscele ha il perimetro minore.

257. Determinare i lati di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 4 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12.

[$4\sqrt{10}$; $12\sqrt{10}$; 40]

258. Determinare i lati di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga p e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga $3p$.

[$p\sqrt{10}$; $3p\sqrt{10}$; $10p$]

259. Determinare i lati e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 4 e 12.

[16; 8; $8\sqrt{3}$; $h=4\sqrt{3}$]

260. Determinare i lati e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe p e $3p$.

[$4p$; $2p$; $2p\sqrt{3}$; $h=p\sqrt{3}$]

261. Determinare i cateti e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 3 e l'ipotenusa lunga 15.

[$3\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; h=6]

262. Determinare i cateti e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga p e l'ipotenusa lunga $5p$.

[$p\sqrt{5}$; $2p\sqrt{5}$; $h=2p$]

263. Determinare i lati e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 5 e quel cateto lungo 15.

[45; $30\sqrt{2}$; $h=10\sqrt{2}$]

264. Determinare i lati e l'altezza h relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga p e quel cateto lungo $3p$.

[$9p$; $6p\sqrt{2}$; $h=2p\sqrt{2}$]

Problemi di geometria dello spazio che conducono a calcoli con i radicali

I problemi dal n. **265** *al n.* **269** *hanno le seguenti caratteristiche:*
- richiedono di applicare il teorema di Pitagora a figure solide;
- richiedono di svolgere i calcoli con i radicali.

265. È dato un cubo con il lato lungo 5 (fig. 10); tenendo presente che HB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti DB e DH, risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la lunghezza della diagonale DB di una faccia;
b. calcolare la lunghezza della diagonale HB del cubo.

[(b) $5\sqrt{3}$]

266. Ripetere l'esercizio 265 in generale, cioè a partire da un cubo di lato b determinando:
a. la lunghezza della diagonale DB di una faccia;
b. la lunghezza della diagonale HB del cubo. [(b) $b\sqrt{3}$]

267. Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area S del rettangolo diagonale EHCB (fig. 11) che ha come dimensioni uno spigolo e la diagonale di una faccia di un cubo.

[$S=b^2\sqrt{2}$]

268. Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area S del triangolo equilatero EBG di fig. 12, che ha per lati le diagonali di tre facce del cubo concorrenti in uno stesso vertice.

[$S=b^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$]

269. Dopo aver risolto l'esercizio 266, determinare l'area S del triangolo equilatero LMN di fig. 13, ottenuto congiungendo i punti medi di tre spigoli del cubo che escono da uno stesso vertice. Osservare che il lato del triangolo è metà della diagonale di una faccia del cubo.

[$S=b^2\dfrac{\sqrt{3}}{8}$]

Figura 10

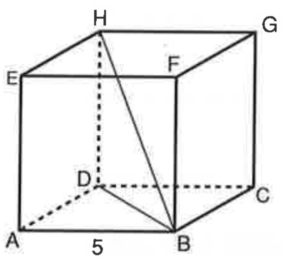


Figura 11

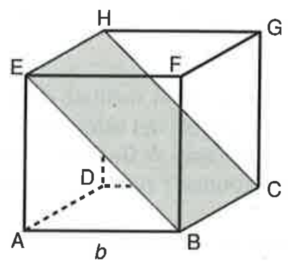


Figura 12

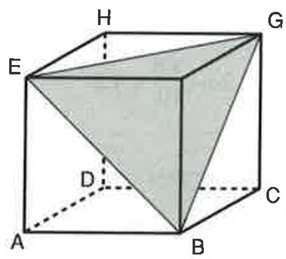
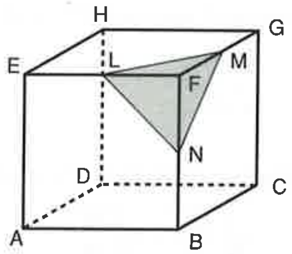


Figura 13



Il calcolatore tascabile per eseguire calcoli con numeri reali

Gli esercizi dal n. **270** *al n.* **280** *richiedono di:*
- usare il calcolatore tascabile per svolgere dei calcoli con numeri reali;
- riflettere sui procedimenti seguiti.

270. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Risultato
$\sqrt{\frac{25-9}{49}}$	$[(25-9):49]^{\frac{1}{2}}$	$\boxed{(}\boxed{(}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{9}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{9}\boxed{)}\boxed{\sqrt{\ }}$	0.5714286
$\frac{\sqrt{25-9}}{49}$			
$\frac{\sqrt{25}-9}{49}$			
$\sqrt{25}-\frac{9}{49}$			
$\frac{\sqrt{25}}{49}-9$			
$25-\frac{9}{\sqrt{49}}$			

271. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{12-3}}{\sqrt{4}} \qquad \frac{\sqrt{3-12}}{\sqrt{4}} \qquad \frac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{4}} \qquad \frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$$

Determinare il risultato di ogni espressione nei seguenti modi:
a. valendosi del calcolatore tascabile;
b. valendosi di frazioni e radicali.
Confrontare i risultati ottenuti.

272. Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{44+100}{\sqrt{3}} \qquad 44+\frac{100}{\sqrt{3}} \qquad 44+\sqrt{\frac{100}{3}} \qquad \sqrt{\frac{44+100}{3}}$$

273. Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{24-8}}{\sqrt{10+2}} \qquad \frac{\sqrt{24}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} \qquad 24-\frac{\sqrt{8}}{10}+\sqrt{2} \qquad \frac{\sqrt{24-8}}{10}+\sqrt{2}$$

274. Ripetere l'esercizio 271, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{121}{9}}-\sqrt{\frac{25}{36}} \qquad \frac{\sqrt{121-25}}{9\cdot 36} \qquad \frac{121}{\sqrt{9}}-\frac{25}{\sqrt{36}} \qquad \frac{\sqrt{121}}{9}-\frac{\sqrt{25}}{36}$$

275. Scrivere l'espressione che viene calcolata mediante la sequenza di tasti riportata qui sotto:

$$\boxed{9}\,\boxed{+}\,\boxed{4}\,\boxed{\div}\,\boxed{1}\,\boxed{6}\,\boxed{-}\,\boxed{9}\,\boxed{\sqrt{\ }}\,\boxed{=}$$

276. Completare la seguente tabella come è mostrato nella prima riga:

Frazioni radicali	Esponenti frazionari	Tasti	Risultato
$\sqrt[5]{\left(\frac{4+28}{7}\right)^3}$	$[(4+28):7]^{\frac{3}{5}}$	$\boxed{(}\,\boxed{(}\,\boxed{4}\,\boxed{+}\,\boxed{2}\,\boxed{8}\,\boxed{)}\,\boxed{\div}\,\boxed{7}\,\boxed{)}\,\boxed{y^x}\,\boxed{(}\,\boxed{3}\,\boxed{\div}\,\boxed{5}\,\boxed{)}\,\boxed{=}$	2.4890359
$4+\frac{\frac{28}{7^3}}{5}$			
$\frac{(4+28)^3}{\sqrt[5]{7}}$			
$\frac{\sqrt[5]{(4+28)^3}}{7}$			

277. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{19+8}{\sqrt{4}}} \qquad 19+\sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{4}}} \qquad \frac{\sqrt[3]{19+8}}{\sqrt{4}} \qquad \frac{19+\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}}$$

Determinare il risultato di ogni espressione nei seguenti modi:
a. valendosi del calcolatore tascabile;
b. valendosi di frazioni e radicali.
Confrontare i risultati ottenuti.

278. Ripetere l'esercizio 277, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[5]{\frac{2\cdot 4^2}{43+2\cdot 10^2}} \qquad \sqrt[5]{\frac{(2\cdot 4)^2}{(43+2)\cdot 10^2}} \qquad \frac{\sqrt[5]{2\cdot 4^2}}{43+10^2} \qquad \frac{\sqrt[5]{(2\cdot 4)^2}}{(43+2\cdot 10)^2}$$

279. Ripetere l'esercizio 277, a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2^3}{4} \qquad \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)^3} \qquad \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}+2^3}{\sqrt{5}-2^3}} \qquad \frac{\sqrt{5}+\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt{5}-\sqrt[4]{2^3}}$$

280. Scrivere l'espressione che viene calcolata mediante la sequenza di tasti riportata qui sotto:

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{-}\,\boxed{4}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{0}\,\boxed{+}\,\boxed{2}\,\boxed{y^x}\,\boxed{4}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$$

Approssimazioni e propagazione degli errori

Valori approssimati e intervallo d'errore

Gli esercizi dal n. **281** *al n.* **286** *conducono a riflettere sui valori approssimati di un numero reale e sul relativo intervallo d'errore.*

281. Esaminare la disuguaglianza:

$$2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare il numero reale che viene approssimato;
b. indicare il valore approssimato per difetto e quello approssimato per eccesso;
c. determinare l'intervallo d'errore, spiegando il procedimento seguito.

282. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$ $\quad$ $2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$ $\quad$ $2{,}645<\sqrt{7}<2{,}646$

283. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$1{,}7<\sqrt[3]{5}<1{,}8$ $\quad$ $1{,}70<\sqrt[3]{5}<1{,}71$ $\quad$ $1{,}709<\sqrt[3]{5}<1{,}710$

284. Dopo aver svolto l'esercizio 3, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché 1,7 e 1,70 sono due diversi valori approssimati di $\sqrt[3]{5}$;

b. spiegare perché 1,71 e 1,710 sono due diversi valori approssimati di $\sqrt[3]{5}$.

285. Valendosi di un calcolatore tascabile o di tavole numeriche, scrivere i seguenti valori approssimati:
a. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 1;
b. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 0,1;
c. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 0,01.

286. Valendosi di un calcolatore tascabile o di tavole numeriche, scrivere i seguenti valori approssimati:

a. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 1;

b. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 0,1;

c. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 0,01.

Sulla propagazione degli errori

Gli esercizi dal n. **287** *al n.* **295** *conducono ad eseguire calcoli con valori approssimati per studiare come si propagano gli errori.*

287. Sono dati i seguenti valori approssimati di $\sqrt{3}$ e $\sqrt{12}$:

$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$ $\quad$ $3{,}4<\sqrt{12}<3{,}5$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare l'intervallo d'errore scelto;
b. addizionare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore della somma;
c. moltiplicare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore del prodotto.

288. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:

$1,73<\sqrt{3}<1,74 \qquad 3,46<\sqrt{12}<3,47$

289. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:

$1,7<\sqrt[3]{5}<1,8 \qquad 2,9<\sqrt[3]{25}<3$

290. Ripetere l'esercizio 287 a partire dai seguenti valori approssimati:

$1,70<\sqrt[3]{5}<1,71 \qquad 2,92<\sqrt[3]{25}<2,93$

291. Le dimensioni di un rettangolo sono lunghe $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ e vengono approssimate con un intervallo d'errore ampio 0,1. Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'intervallo d'errore del semiperimetro p del rettangolo;
b. determinare l'intervallo d'errore dell'area S del rettangolo;
c. spiegare perché i due intervalli non sono uguali.

292. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene addizionando tre numeri.

293. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene moltiplicando due numeri uguali.

294. Si vuole determinare il valore approssimato di una somma di due numeri con un intervallo d'errore k; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli addendi?

295. Si vuole determinare il valore approssimato di un prodotto con un intervallo d'errore k; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli fattori?

Sul rapporto fra due segmenti

Segmenti commensurabili

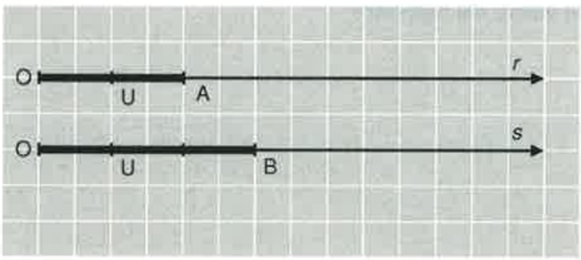
Gli esercizi dal n. **296** *al n.* **301** *conducono a riflettere sul rapporto di segmenti commensurabili.*

296. In fig. 14 sono disegnati due segmenti ottenuti a partire da uno stesso segmento OU nei seguenti modi:
- sulla semiretta Or si è riportato due volte OU, a partire da O, ottenendo OA;
- sulla semiretta Os si è riportato tre volte OU, a partire da O, ottenendo OB;
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OA}{OU} \qquad \frac{OB}{OU} \qquad \frac{OB}{OA} \qquad \frac{OA}{OB}$$

b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

Figura 14



297. Disegnare un segmento OU ed indicarne il suo punto medio M; effettuare quindi le seguenti costruzioni, analoghe a quelle descritte nell'esercizio 296:
- sulla semiretta O*r* riportare una volta OM, a partire da O, ottenendo OC;
- sulla semiretta O*s* riportare tre volte OM, a partire da O, ottenendo OD;

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OC}{OU} \qquad \frac{OU}{OC} \qquad \frac{OD}{OU} \qquad \frac{OU}{OD}$$

b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

298. Dopo aver svolto l'esercizio 297, indicare su OM il suo punto medio N ed effettuare le seguenti costruzioni, analoghe a quelle descritte nell'esercizio 296:
- sulla semiretta O*r* riportare una volta ON, a partire da O, ottenendo OE;
- sulla semiretta O*s* riportare tre volte ON, a partire da O, ottenendo OF.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OE}{OU} \qquad \frac{OU}{OE} \qquad \frac{OF}{OU}$$

$$\frac{OU}{OF} \qquad \frac{OF}{OE} \qquad \frac{OE}{OF}$$

b. spiegare il significato di ciascun rapporto.

299. Riportare il segmento ON ottenuto nell'esercizio 298 nei seguenti modi:
- sulla semiretta O*r* riportare due volte ON, a partire da O, ottenendo OG;
- sulla semiretta O*s* riportare cinque volte ON, a partire da O, ottenendo OH.

Determinare il valore dei seguenti rapporti:

$$\frac{OG}{OU} \qquad \frac{OU}{OG} \qquad \frac{OH}{OU}$$

$$\frac{OU}{OH} \qquad \frac{OG}{OH} \qquad \frac{OH}{OG}$$

300. Costruire due segmenti AB e CD in modo che risulti:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{4}$$

Calcolare il valore del rapporto:

$$\frac{CD}{AB}$$

301. Costruire due segmenti AB e CD in modo che risulti:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{6}$$

Calcolare il valore del rapporto:

$$\frac{CD}{AB}$$

Segmenti incommensurabili

Gli esercizi dal n. **302** *al n.* **306** *conducono a riflettere sul rapporto di segmenti incommensurabili.*

302. In fig. 15 è disegnato il quadrato ABCD, una sua diagonale AC e il punto medio O della diagonale. Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti:

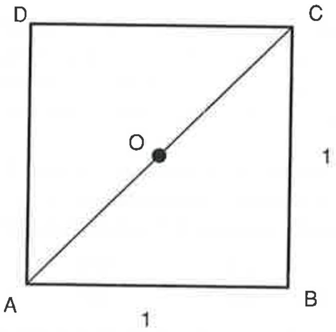
$$\frac{AC}{AB} \qquad \frac{AO}{AB} \qquad \frac{AC}{AO} \qquad \frac{AO}{AC}$$

b. dire se i segmenti AB e AC sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;

c. dire se i segmenti AB e AO sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;

d. dire se i segmenti AC e AO sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta.

Figura 15



303. In fig. 16 è disegnato il triangolo equilatero ABC e una sua altezza CH. Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti:

$$\frac{CH}{AB} \qquad \frac{HB}{AB} \qquad \frac{CH}{HB} \qquad \frac{HB}{CH}$$

b. dire se i segmenti CH e AB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;

c. dire se i segmenti HB e AB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta;

d. dire se i segmenti CH e HB sono commensurabili o incommensurabili, motivando la risposta.

Figura 16

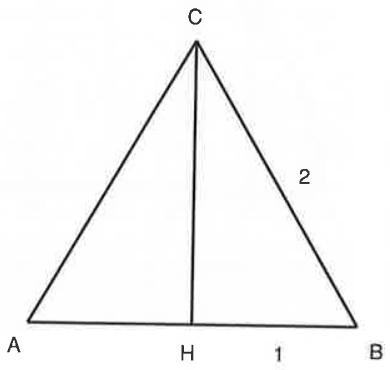
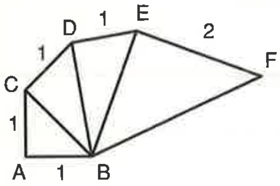


Figura 17



304. I triangoli rettangoli della fig. 17 hanno i cateti AB, AC, CD, DE tutti uguali fra loro, mentre EF è il doppio di DE; risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare i rapporti

$$\frac{BC}{AC} \qquad \frac{DB}{BC} \qquad \frac{EB}{AC} \qquad \frac{BF}{BC}$$

b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;

c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

305. In fig. 18 è rappresentata una semicirconferenza con il diametro AB diviso in 5 parti uguali mediante i punti H, K, L, M; da ciascuno di questi punti è stata quindi tracciata la perpendicolare al diametro, fino ad intersecare la semicirconferenza nei punti P, Q, R, S. Risolvere i seguenti quesiti:

a. valendosi anche del secondo teorema di Euclide calcolare i rapporti:

$$\frac{HP}{AH} \qquad \frac{KQ}{AH} \qquad \frac{LR}{KQ} \qquad \frac{KQ}{HP}$$

b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;

c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

306. In fig. 19 è ripetuta una costruzione analoga a quella di fig. 18, dividendo però il diametro in 7 parti uguali. Risolvere i seguenti quesiti:

a. valendosi anche del secondo teorema di Euclide calcolare i rapporti:

$$\frac{HQ}{AH} \qquad \frac{KR}{AH} \qquad \frac{LS}{AH} \qquad \frac{MT}{AH} \qquad \frac{MT}{LS} \qquad \frac{LS}{HQ}$$

b. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti commensurabili, motivando la scelta;

c. fra le coppie di segmenti di cui si è calcolato il rapporto indicare quelle in cui compaiono segmenti incommensurabili, motivando la scelta.

Figura 18

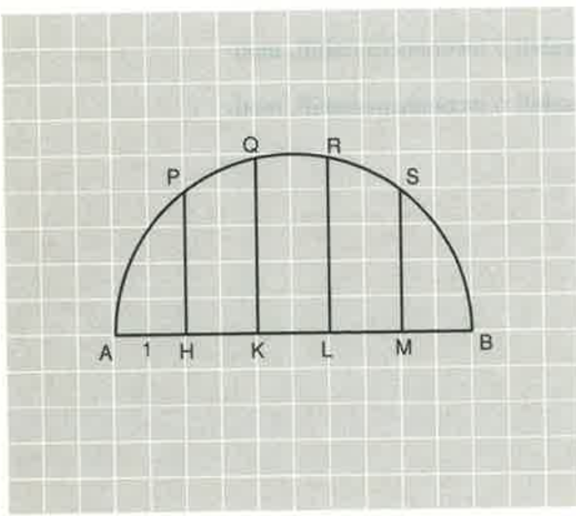
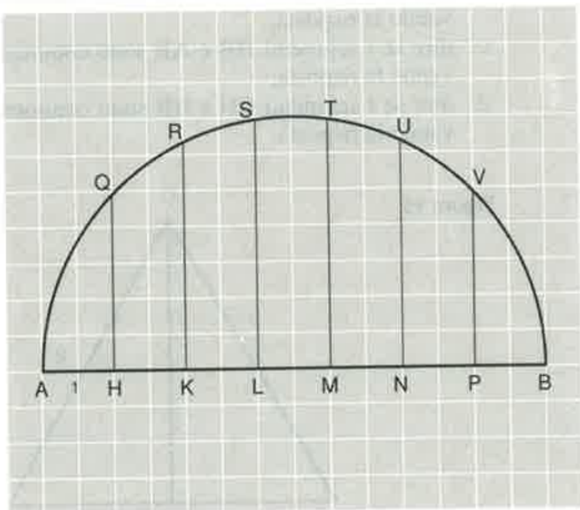


Figura 19

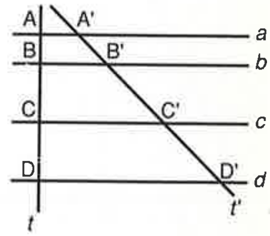


Sul teorema di Talete

Gli esercizi dal n. **307** *al n.* **312** *conducono a riflettere sul teorema di Talete.*

307. In fig. 20 sono rappresentate quattro rette parallele a, b, c, d, tagliate da due trasversali t e t'. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle che sono vere in base al teorema di Talete, motivando la scelta:
a. dato che risulta BC = CD, risulta pure B'C' = C'D';
b. risulta BC = B'C' e CD = C'D'.

Figura 20



308. Sempre a partire dalla fig. 20, fra le seguenti uguaglianze scegliere quelle che sono vere in base al teorema di Talete, motivando la scelta:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{B'C'}{C'D'} \qquad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'} \qquad \frac{BC}{AB}=\frac{A'B'}{B'C'} \qquad \frac{CD}{AB}=\frac{C'D'}{B'C'}$$

309. In fig. 21 sono rappresentate tre rette parallele a, b, c, tagliate dalle trasversali t e t'; basandosi sul teorema di Talete e sulle informazioni date dalla figura, determinare la lunghezza x del segmento B'C'.

310. Ripetere l'esercizio 309 a partire dalla fig. 22.

311. Ripetere l'esercizio 309 a partire dalla fig. 23.

312. In fig. 24 sono rappresentate tre rette parallele a, b, c, tagliate dalle trasversali t e t'; basandosi sul teorema di Talete e sulle informazioni date dalla figura, determinare la lunghezza dei segmenti BC, A'B' e B'C'.

Figura 21

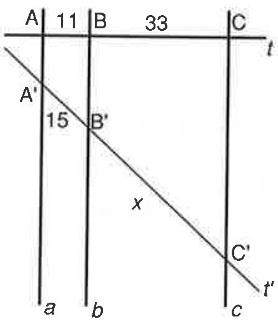


Figura 22

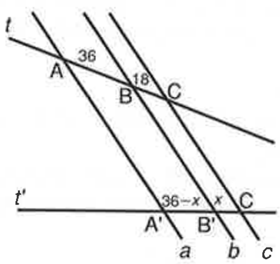


Figura 23

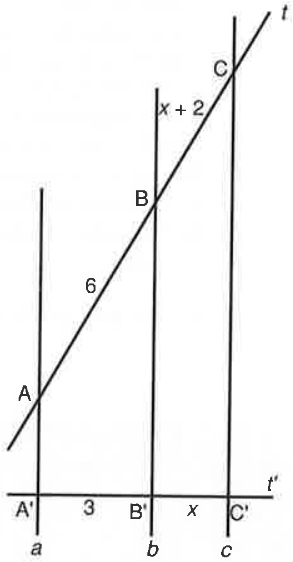


Figura 24

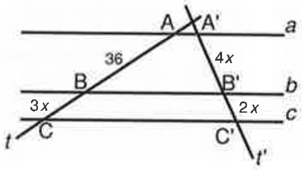
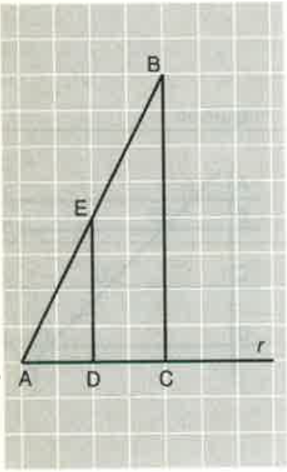


Figura 25



Suddividere un segmento in parti uguali

Gli esercizi dal n. **313** *al n.* **319** *conducono ad applicare il teorema di Talete per dividere un segmento in parti uguali.*

313. A partire dal segmento AB rappresentato in fig. 25 si è effettuata la seguente costruzione:
- sulla semiretta Ar si fissano due segmenti uguali consecutivi AD e DC;
- si unisce C con B;
- da D si traccia la parallela a BC, fino ad incontrare AB in E.

Spiegare perché con questa costruzione si ottiene:

$$AE = EB$$

314. Dopo aver svolto l'esercizio 313, riprodurre su un foglio a quadretti il segmento AB e dividerlo prima in tre parti uguali AH=HK=KB e poi in sei parti uguali.

315. A partire dal segmento AB rappresentato in fig. 26, si è effettuata la seguente costruzione:
- si è costruito il triangolo rettangolo e isoscele ABC;
- si è prolungato AB di un segmento uguale BD;
- si è congiunto D con C;
- da B si è tracciata la parallela a DC, fino ad incontrare AC in E.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il segmento AC è stato diviso in due parti uguali;
b. determinare il rapporto fra AE e AB.

316. Dopo aver svolto l'esercizio 315, risolvere i seguenti quesiti:
a. riprodurre su un foglio a quadretti il triangolo ABC;
b. dividere AC in tre parti uguali;
c. calcolare il rapporto fra una di queste parti e il segmento AB.

317. In fig. 27 si è effettuata la seguente costruzione a partire da un segmento AH:
- a partire da H si è riportato tre volte il segmento AH, fino ad ottenere il segmento AB;
- si è costruita la semicirconferenza di diametro AB;
- da H si è costruita la perpendicolare ad AB, fino ad incontrare la semicirconferenza in C;
- si è congiunto B con C;
- da K e da L si sono tracciate le parallele a CB, fino ad incontrare HC in M e N.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il segmento HC è stato diviso in tre parti uguali;
b. basandosi anche sul secondo teorema di Euclide, determinare il rapporto fra CH e AH;
c. spiegare perché risulta $\frac{HM}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Figura 26

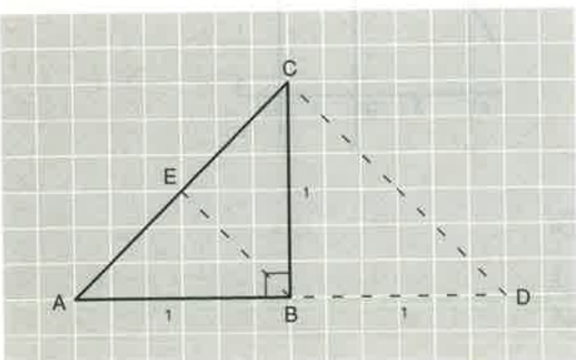
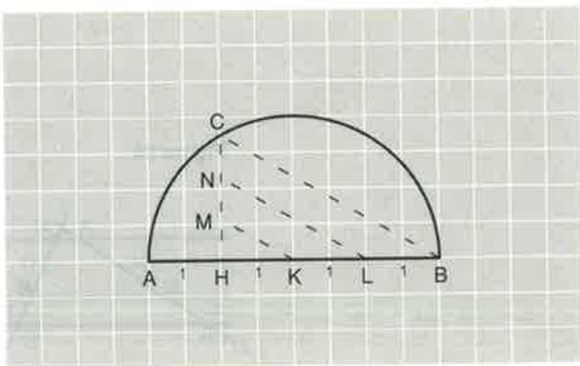


Figura 27



318. Eseguire una costruzione analoga a quella descritta nell'esercizio 317, riportando però AH cinque volte a partire da H.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il segmento HC è stato diviso in cinque parti uguali;
b. basandosi anche sul secondo teorema di Euclide, determinare il rapporto fra CH e AH;
c. spiegare perché risulta $\dfrac{HM}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

319. Dopo aver svolto gli esercizi 317 e 318, descrivere una costruzione per ottenere due segmenti che abbiano il rapporto dato da $\dfrac{\sqrt{a}}{a}$.

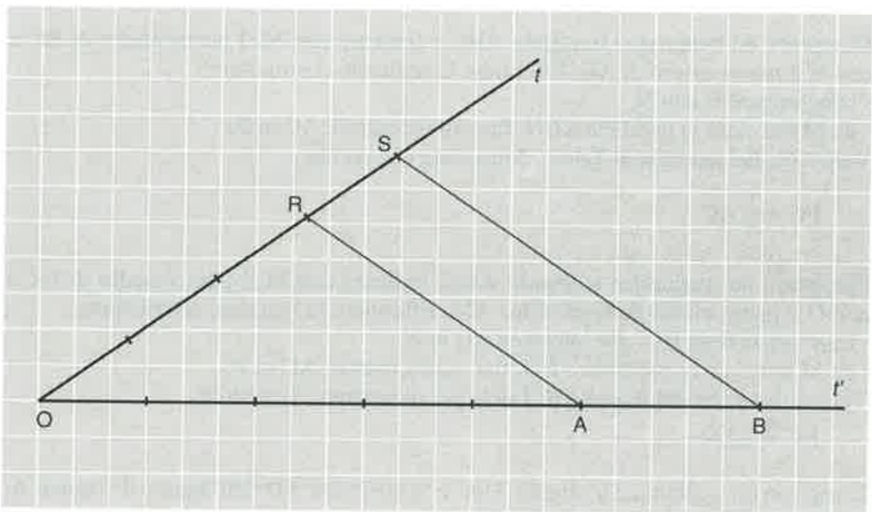
Altre applicazioni del teorema di Talete

Gli esercizi dal n. **320** *al n.* **332** *conducono ancora ad applicare il teorema di Talete.*

320. In fig. 28 si è effettuata la seguente costruzione a partire da un segmento RS:
- si sono costruite due semirette Ot e Ot';
- a partire da O si è riportato RS su Ot tre volte, ottenendo il segmento OR e quindi si è riportato RS un'ultima volta a partire da R;
- a partire da O si è riportato RS su Ot' cinque volte, ottenendo il segmento OA;
- si è congiunto A con R;
- da S si è tracciata la parallela a AR, fino ad incontrare Ot' in B.

Spiegare perché risulta $\dfrac{AB}{RS} = \dfrac{5}{3}$.

Figura 28



321. Eseguire una costruzione analoga a quella descritta in fig. 28, a partire dallo stesso segmento RS, allo scopo di ottenere i seguenti segmenti:
- CD, in modo che risulti $\dfrac{CD}{RS} = \dfrac{6}{5}$.
- EF, in modo che risulti $\dfrac{EF}{RS} = \dfrac{5}{6}$.

322. Spiegare come organizzare una costruzione analoga a quella descritta in fig. 28, a partire dallo stesso segmento RS, per ottenere un segmento PQ tale che $\dfrac{PQ}{RS} = \dfrac{m}{n}$.

323. Esaminare la fig. 29, in cui le rette AA' e BB' sono parallele fra loro e sono pure parallele fra loro le rette A'A'' e B'B''. Dimostrare che risulta:

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{OA''}{OA}$$

324. Esaminare la fig. 30, in cui le rette AA' e BB' sono parallele fra loro e sono pure parallele fra loro le rette A'B e B'C. Dimostrare che risulta:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$$

Figura 29

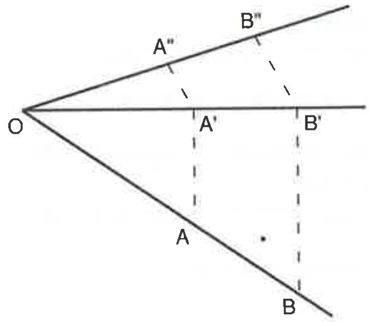


Figura 30

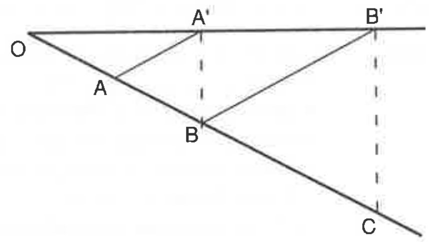
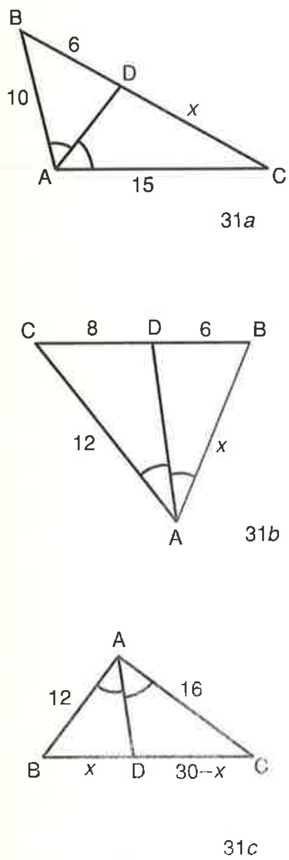


Figura 31



325. Disegnare un qualunque triangolo ABC e indicare con M il punto medio di BC e con N il punto medio di AC. Effettuare la seguente costruzione:
- congiungere B con N;
- da M tracciare la parallela a BN, fino ad incontrare AC in P.

Valendosi del teorema di Talete, dimostrare che risulta:

$$PC = \frac{1}{4} AC$$

326. Disegnare un qualunque triangolo ABC, indicare con M il punto medio di BC e con O il punto medio della mediana AM. Effettuare la seguente costruzione:
- tracciare la retta BO, che interseca AC in N;
- da M tracciare la parallela a BO, fino ad incontrare AC in P.

Valersi due volte del teorema di Talete per dimostrare che risulta:

$$NC = 2AN$$

327. Disegnare un qualunque triangolo ABC e la bisettrice AD dell'angolo di vertice A; condurre da C la parallela ad AD, fino ad incontrare in E il prolungamento di BA. Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$;

b. dimostrare che il triangolo ACE è isoscele sulla base EC;

c. dimostrare che risulta $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$;

d. esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.

328. In tutti i triangoli di fig. 31 è disegnata la bisettrice di un angolo interno; basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 327 e sulle informazioni date dalla figura per calcolare le lunghezze incognite.

329. Disegnare un qualunque triangolo ABC e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A; la bisettrice incontra il prolungamento di BC in D. Condurre da C la parallela ad AD, fino ad incontrare in E il lato AB e risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$;

b. dimostrare che il triangolo ACE è isoscele sulla base EC;

c. dimostrare che risulta $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$;

d. esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.

330. In tutti i triangoli di fig. 32 è disegnata la bisettrice di un angolo esterno; basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 329 e sulle informazioni date dalla figura per calcolare le lunghezze incognite.

331. La fig. 33 rappresenta schematicamente uno specchio concavo (del tipo usato per avere un ingrandimento del viso); C è il centro della sfera da cui è stato «tagliato» lo specchio e A indica il punto in cui è stata disposta una sorgente luminosa (per esempio una candela).
Un raggio di luce esce da A, colpisce lo specchio e «rimbalza», incontrando la retta AC in OA', dove si forma l'immagine di A, immagine che può essere colta disponendo in A' uno schermo.
In base alla legge della riflessione (vedi primo volume, p. 190) si trova che sono uguali gli angoli A'BC e CBA; risolvere i seguenti quesiti:

a. riprendere i risultati dell'esercizio 328, per dimostrare che risulta:

AB:A'B=AC:A'C (1)

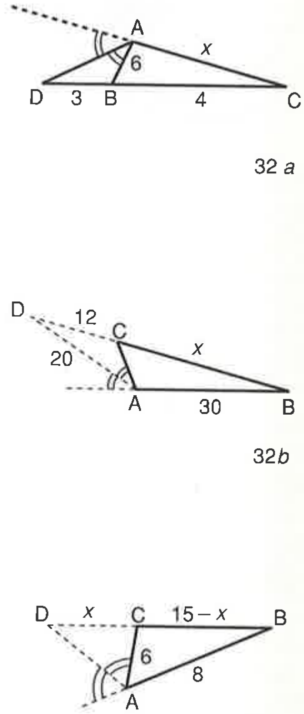
b. indicare con r il raggioVC=BC dello specchio, con p la distanza AV di A dallo specchio e con q la distanza A'V; approssimare AB con AV e A'B con A'V per ricavare dalla (1) la seguente relazione detta *formula dei punti coniugati per lo specchio concavo*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

332. La fig. 34 rappresenta schematicamente uno specchio convesso (del tipo usato come retrovisore nelle auto); C, A e A' hanno lo stesso significato dato nell'esercizio 331. Riprendere considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 331 e basarsi sulla proprietà (c) dimostrata nell'esercizio 329 per trovare anche in questo caso la formula dei punti coniugati.

[$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{r}$]

Figura 32



32 *a*
32*b*
32 *c*

Figura 33

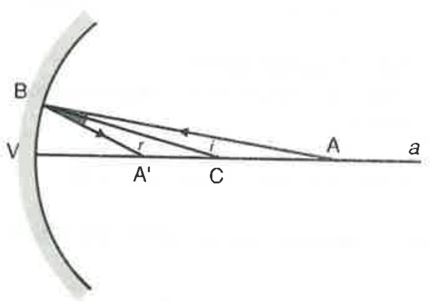


Figura 34