

Il teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora per risolvere problemi di geometria piana

I problemi dal n. 1 al n. 16 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il teorema di Pitagora;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

- Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
 - ABC, con i lati lunghi 6, 8 e 10;
 - A'B'C', con i lati lunghi 7, 9 e 11;
 - A''B''C'', con i lati lunghi 5, 7 e 9;
 - DEF, con i lati lunghi 12, 16 e 20;
 - D'E'F', con i lati lunghi 3, 4 e 5.
- Determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi 10 e 24.
- Determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi 8 e 6.
- Determinare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto lungo 8 e l'ipotenusa lunga 17.
- Determinare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto lungo 5 e l'ipotenusa lunga 13.
- Determinare la lunghezza della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 7 e 24.
- Determinare la lunghezza della diagonale di un rettangolo con i lati lunghi 21 e 20.
- Determinare la lunghezza di un lato di un rettangolo che ha l'altro lato lungo 9 e la diagonale lunga 41.
- Determinare la lunghezza di un lato di un rettangolo che ha l'altro lato lungo 15 e la diagonale lunga 17.
- Un triangolo isoscele ha la base lunga 8 e l'altezza relativa alla base lunga 3; risolvere i seguenti quesiti:
 - determinare il lato b del triangolo;
 - determinare il perimetro $2p$ del triangolo.
- Un triangolo isoscele ha la base lunga 24 e il lato lungo 13; risolvere i seguenti quesiti:
 - determinare l'altezza h del triangolo;
 - determinare l'area S del triangolo.
- Calcolare il lato l di un rombo che ha le diagonali lunghe 16 e 30. Tenere presente che le diagonali di un rombo sono perpendicolari e si tagliano a metà.
- In un cerchio con il raggio lungo 13 è disegnata una corda AB lunga 24; calcolare la distanza h della corda dal centro (fig. 1).
- In un cerchio con il raggio lungo 20 è disegnata una corda AB che ha la distanza dal centro $h=16$; determinare la lunghezza $2a$ della corda (fig. 2).
- In un cerchio è disegnata una corda AB, che è lunga $2a=40$ e dista $h=21$ dal centro; determinare il raggio del cerchio (fig. 3).
- In un cerchio di raggio lungo 10 sono disegnate due corde parallele: AB lunga 12 e CD lunga 16 (fig. 4). Determinare la distanza h fra le due corde.

Figura 1

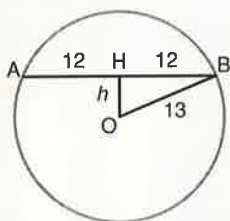
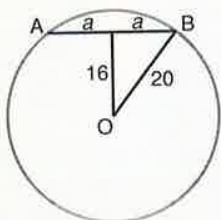


Figura 2



Il teorema di Pitagora per scoprire proprietà delle figure piane

I problemi dal n. 17 al n. 26 presentano le seguenti caratteristiche:

- richiedono di dimostrare delle proprietà delle figure piane basandosi sul teorema di Pitagora;
- danno dei suggerimenti per impostare la dimostrazione.

17. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare un punto qualunque P del cateto AC e congiungerlo con il vertice opposto B; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$PB^2 + AC^2 = AP^2 + BC^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli ABP e ABC]

18. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare il punto medio M del cateto AC e congiungerlo con il vertice opposto B; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$BM^2 + 3AM^2 = BC^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABM e ABC, ricordando che $AC = 2AM$]

19. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in A, considerare un punto qualunque D del cateto AB e un punto qualunque E del cateto AC; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$EB^2 + DC^2 = BC^2 + ED^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABE, ADC, ABC, ADE]

20. Disegnare un triangolo equilatero ABC e il cerchio a esso circoscritto che ha centro O e raggio r ; disegnare il diametro passante per uno dei vertici del triangolo, per esempio CH, e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché i triangoli OAH e OBH sono equilateri e determinarne il lato;

b. dimostrare che risulta:

$$AC^2 = 3r^2$$

c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[(a) Il triangolo AOH è isoscele perché..., ha l'angolo \widehat{AOH} ampio 60° perché...

(b) Applicare il teorema di Pitagora al triangolo CAH, che è rettangolo perché...]

21. Disegnare un quadrilatero ABCD con le diagonali AC e DB che si incontrano nel punto H e sono perpendicolari; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$AD^2 + CB^2 = DC^2 + AB^2$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ADH, CHB, AHB, DHC]

22. Disegnare un quadrato ABCD, fissare a piacere un punto P interno al quadrato e tracciare (fig. 5):

- le distanze di P dai vertici, cioè PA, PB, PC, PD;

- le distanze di P dai lati del quadrato (PH, PK, PL, PM in fig. 5).

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che risulta:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2(PH^2 + PK^2 + PL^2 + PM^2)$$

b. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

[Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHP, PHB, PLC, PLD]

Figura 3

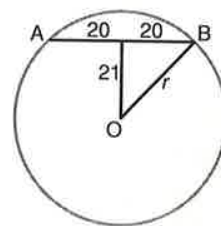


Figura 4

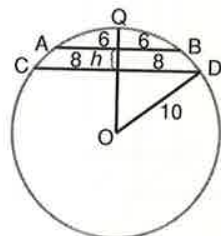


Figura 5

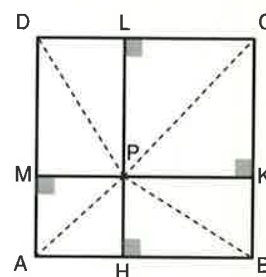


Figura 6

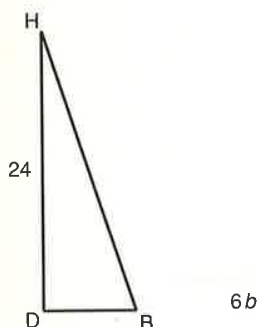
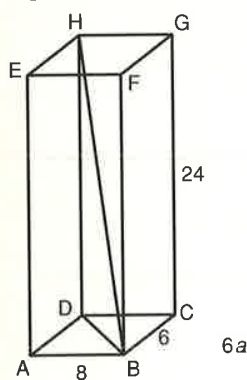
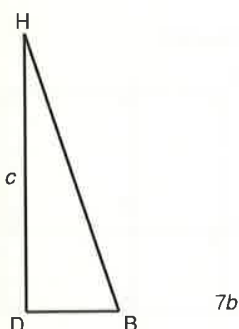
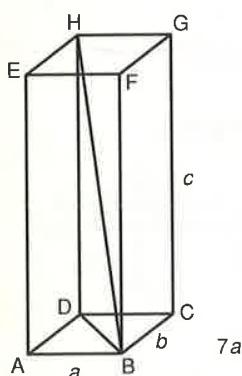


Figura 7



23. Disegnare un rettangolo ABCD e, all'interno, fissare a piacere un punto P; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che risulta:

$$PA^2 + PC^2 = BP^2 + DP^2$$
 - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
[Tracciare per P la parallela al lato AD, fino a incontrare AB in H e DC in K; applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHP, PHB, PKC, PKD]
24. Disegnare un rettangolo ABCD e costruire un qualunque triangolo ABE esterno al rettangolo; dimostrare che risulta:

$$EA^2 + EC^2 = BE^2 + DE^2$$

[Tracciare per E la parallela al lato AD, fino a incontrare AB in H e DC in K; applicare il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AHE, KCE, EHB, EKD]
25. Disegnare un trapezio isoscele ABCD circoscritto a un cerchio di centro O e risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché sono rettangoli i triangoli DOA e COB, dove DA e CB sono i lati obliqui del trapezio (vedi il primo volume, pp. 231-232);
 - dimostrare che risulta:

$$AD^2 + BC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$
 - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
[(b) Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli DOA e COB]
26. Disegnare un trapezio rettangolo ABCD con la diagonale minore AC che è perpendicolare al lato obliquo BC; risolvere i seguenti quesiti:
- dimostrare che risulta:

$$AB^2 = BC^2 + DC^2 + AD^2$$
 - enunciare a parole la proprietà appena dimostrata;
 - dire come si può costruire un pentagono in cui il quadrato costruito su un lato sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri quattro lati.
[Applicare il teorema di Pitagora prima al triangolo rettangolo ABC e, successivamente, al triangolo rettangolo ADC]

Il teorema di Pitagora per studiare figure solide

I problemi dal n. 27 al n. 32 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il teorema di Pitagora;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali;
- richiedono di tenere presenti alcune nozioni elementari sulle figure solide.

27. È dato un parallelepipedo con gli spigoli lunghi 6, 8 e 24 (fig. 6a); risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza della diagonale DB della faccia ABCD;
 - calcolare la lunghezza della diagonale HB del parallelepipedo.
- Tenere presente che HB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti DB e DH (fig. 6b) [HB=26]
28. Risolvere l'esercizio 27 in generale, cioè a partire da un parallelepipedo con gli spigoli lunghi a, b e c (fig. 7); risolvere i seguenti quesiti:
- calcolare la lunghezza della diagonale DB della faccia ABCD;
 - calcolare la lunghezza della diagonale HB del parallelepipedo.

29. È data una piramide retta a base quadrata con il lato di base lungo 8 e l'altezza VH lunga 3 (fig. 8); determinare l'apotema VK della piramide.
30. Risolvere l'esercizio 29 in generale, cioè a partire da una piramide retta a base quadrata con il lato di base lungo $2b$ e l'altezza lunga h (fig. 9).
31. È data una piramide retta a base quadrata (fig. 10) che ha il lato di base lungo 10 e l'apotema lungo 13; calcolare l'altezza h della piramide.
32. È data una piramide retta a base quadrata (fig. 11) che ha l'altezza lunga 10 e l'apotema lungo 13; calcolare il lato di base $2b$ della piramide.

Figura 8

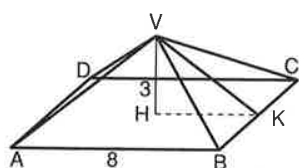


Figura 9

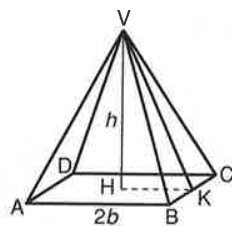


Figura 10

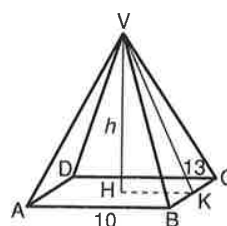
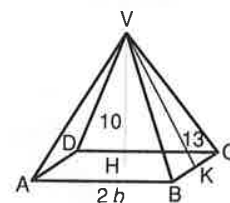


Figura 11



Il primo teorema di Euclide

I problemi dal n. 33 al n. 41 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il primo teorema di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

33. Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
- LMN con il lato LM lungo 16 e il lato LN lungo 8, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 4;
 - L'M'N' con il lato LM lungo 17 e il lato LN lungo 9, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 5;
 - L''M''N'' con il lato LM lungo 8 e il lato LN lungo 4, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 2.
34. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 9; determinare la lunghezza del cateto.
35. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 27 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 3; determinare la lunghezza del cateto.
36. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 10 e un cateto lungo 6; determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
37. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 25 e un cateto lungo 10; determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
38. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 12 e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 8; determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
39. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 15 e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 10; determinare la lunghezza dell'ipotenusa.

40. Esaminare la fig. 12 in cui è rappresentato il triangolo ABC, rettangolo in C, e rispondere ai seguenti quesiti:
- AHDE è il rettangolo di dimensioni p e c : calcolare l'area di ACE, considerando il lato AE e l'altezza relativa al lato AE;
 - spiegare perché nel triangolo ACE l'altezza relativa al lato AC è lunga quanto il cateto AC.
41. Esaminare la fig. 13 in cui è rappresentato il triangolo ABC, rettangolo in C, e rispondere ai seguenti quesiti:
- ACLM è il quadrato costruito sul cateto AC: determinare l'area del triangolo MAB, considerando il lato AB e l'altezza relativa al lato AB.
 - spiegare perché nel triangolo MAB l'altezza relativa al lato AB è lunga quanto la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa.

Figura 12

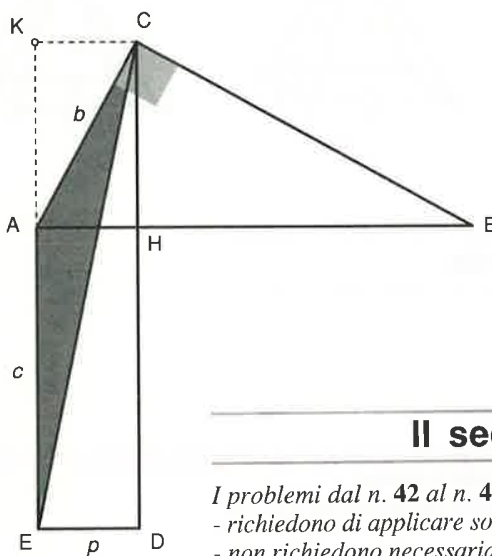
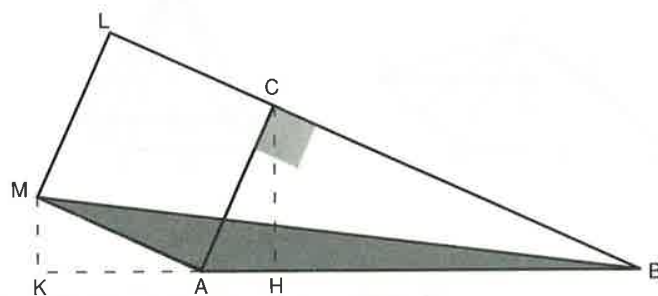


Figura 13



Il secondo teorema di Euclide

I problemi dal n. 42 al n. 48 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare solo il secondo teorema di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

42. Fra i seguenti triangoli scegliere quelli rettangoli motivando la scelta:
- LMN ha l'altezza NH lunga 6, che divide il lato LM in due parti lunghe 9 e 4;
 - L'M'N' ha l'altezza NH lunga 5, che divide il lato LM in due parti lunghe 8 e 3;
 - L''M''N'' ha l'altezza NH lunga 12, che divide il lato LM in due parti lunghe 18 e 8.
43. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 6; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa;
 - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
44. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 10 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 4; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa;
 - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
45. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 24 e 6; risolvere i seguenti quesiti:
- determinare la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
 - determinare la lunghezza dell'ipotenusa.

46. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 20 e 5; risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
 b. determinare la lunghezza dell'ipotenusa.
47. Disegnare un trapezio isoscele ABCD circoscritto a un cerchio di centro O e raggio r ; risolvere i seguenti quesiti:
 a. spiegare perché sono rettangoli i triangoli DOA e COB, dove DA e CB sono i lati obliqui del trapezio (vedi il primo volume, pp. 231-232);
 b. indicare con H, K e L i punti di contatto della base AB, del lato obliquo CB e dell'altra base DC con la circonferenza (vedi il primo volume, p. 232); spiegare perché risulta:

$$KB = \frac{HB}{2} \qquad KC = \frac{DC}{2}$$

 c. dimostrare che risulta:

$$\frac{AB}{2} \cdot \frac{CD}{2} = r^2$$

 d. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
 [Applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo BOC, tenendo presente che l'altezza relativa all'ipotenusa è il raggio]
48. Disegnare una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo $2r$; tracciare le seguenti tangenti alla circonferenza:
 - tangente a , che tocca la semicirconferenza in A;
 - tangente b , che tocca la semicirconferenza in B;
 - tangente t , che tocca la semicirconferenza in un qualunque punto T e incontra la retta a in P e la retta b in Q.
 Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 47):
 a. spiegare perché il triangolo POQ è rettangolo;
 b. dimostrare che risulta:

$$AP \cdot BQ = r^2$$

 c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.

Sui teoremi di Pitagora e di Euclide

I problemi dal n. 49 al n. 58 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- non richiedono necessariamente di risolvere equazioni o sistemi;
- hanno tutti i risultati razionali.

49. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 9; determinare i lati del triangolo. [15; 20; 25]
50. Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 16; determinare i lati del triangolo. [15; 20; 25]
51. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 50 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 32; determinare i lati del triangolo. [30; 40; 50]
52. Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 18 e 32; determinare i lati del triangolo. [30; 40; 50]

53. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa lunga 3; determinare i lati del triangolo.
[5; $\frac{20}{3}$; $\frac{25}{3}$]
54. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa lunga 4; determinare i lati del triangolo.
[5; $\frac{15}{4}$; $\frac{25}{4}$]
55. Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 3 e 4; determinare l'ipotenusa, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.
[5; 1,8; 3,2; 2,4]
56. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10; determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.
[8; 3,6; 6,4; 4,8]
57. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 10 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 6; determinare la proiezione del cateto sull'ipotenusa, l'ipotenusa, l'altro cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa.
[8; 12,5; 7,5; 4,5]
58. Un rombo ABCD ha le diagonali lunghe 42 e 56 che si incontrano nel punto O e da O si traccia la perpendicolare OH al lato AB; risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare il lato AB del rombo;
b. determinare la lunghezza dei segmenti AH, HB e OH.
[(b) AH=12,6; HB=22,4; OH=16,8]

I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono a equazioni di 1° grado

I problemi dal n. 59 al n. 70 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- conducono a risolvere equazioni di 1° grado con coefficienti numerici;
- hanno tutti i risultati razionali.

Il procedimento per impostare e risolvere questo tipo di problemi è quello indicato nel primo volume, p. 449.

59. In un rombo una diagonale d è $\frac{3}{4}$ dell'altra diagonale d' e la somma delle due diagonali vale 14.
Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 12):
a. determinare la lunghezza delle diagonali;
b. determinare il lato e l'area S del rombo. [(a) $d=6$; $d'=8$; (b) $S=24$]
60. In un rombo con il perimetro lungo 1600 una diagonale d è $\frac{8}{5}$ del lato.
Risolvere i seguenti quesiti (tenendo anche presente l'esercizio 12):
a. determinare la lunghezza del lato e della diagonale d ;
b. determinare la lunghezza dell'altra diagonale e l'area S del rombo. [(a) $d=64$; (b) $d'=48$]
61. Un trapezio isoscele ha la base minore lunga 8, la base maggiore che è tripla della base minore e il perimetro che è lungo 52.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare la base maggiore e il lato obliquo del trapezio;
b. determinare l'altezza h del trapezio;
c. determinare l'area S del trapezio. [(c) $S=96$]

62. Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo lungo 13, l'altezza lunga 5, una base doppia dell'altra e il perimetro lungo 54.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare le basi del trapezio;
b. determinare l'area S del trapezio. [(b) $S=90$]
63. Il perimetro di un rettangolo è lungo 92 e un lato è gli $\frac{8}{15}$ dell'altro.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare i lati a e b del rettangolo;
b. determinare la diagonale d del rettangolo. [(a) $a=16$; $b=30$; (b) $d=34$]
64. In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{3}{4}$ dell'altro e la somma dei cateti vale 49.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare i cateti a e b del triangolo;
b. determinare l'ipotenusa c del triangolo. [(a) $a=28$; $b=21$; (b) $c=35$]
65. In un triangolo ABC, rettangolo in A, l'ipotenusa BC è $\frac{13}{12}$ del cateto AB e la somma $AB+BC$ misura 325.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'ipotenusa e il cateto AB;
b. determinare il cateto AC e il perimetro $2p$ del triangolo. [(b) $2p=390$]
66. Un trapezio rettangolo ABCD ha l'altezza CH lunga 15, il lato obliquo BC lungo 17 e l'area che vale 390.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicata con AB la base maggiore, calcolare la lunghezza di HB;
b. calcolare le basi e il perimetro $2p$ del trapezio. [(b) $2p=84$]
67. Un trapezio isoscele ABCD, che è circoscritto a una semicirconferenza, ha il perimetro lungo 110 e la base minore che è $\frac{2}{5}$ del lato obliquo.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché la base maggiore è il doppio del lato obliquo (vedi il primo volume, p. 231);
b. determinare i lati e l'area S del trapezio. [(b) $S=450$]
68. Un trapezio ABCD ha l'altezza lunga 20, la base maggiore che è quadrupla della base minore e l'area che vale 1150. Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare le basi del trapezio;
b. sapendo che le proiezioni dei lati obliqui sulla base sono l'una $\frac{16}{7}$ dell'altra, determinare i lati obliqui e il perimetro $2p$ del trapezio. [(b) $2p=146$]
69. È dato un arco AB, quarta parte di una circonferenza con il centro O e il raggio lungo 10. Determinare sull'arco un punto P in modo che, indicate con M e N le sue proiezioni ortogonali su OA e OB (fig. 14), valga la relazione:
$$ON^2 + AM^2 = OP^2$$

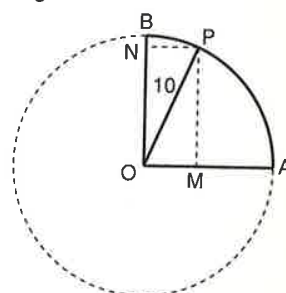
[Scegliendo come incognita x la distanza OM, si ottiene: $x=5$]

70. È dato un quadrato ABCD con il lato lungo 8; determinare sul lato BC un punto P in modo che valga la relazione:

$$PD^2 - AP^2 = \frac{CB^2}{4}$$

[Si può scegliere come incognita x la distanza CP; applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PDC e PAB, si ottiene: $x=5$]

Figura 14



I problemi dal n. 71 al n. 74 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- conducono a risolvere equazioni di 1° grado letterali.

Il procedimento per risolvere le equazioni di 1° grado letterali è esposto nel primo volume, p. 388.

71. Determinare le diagonali e l'area di un rombo che ha il lato lungo a ed una diagonale che è $\frac{3}{4}$ dell'altra.

[Indicando con $2x$ la lunghezza della diagonale maggiore, si ottiene $x=0,8a$]

72. Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale ai $\frac{2}{5}$ della maggiore, il lato obliquo uguale alla base maggiore e l'altezza lunga h ; determinare il perimetro e l'area del trapezio.

[Indicando con x la lunghezza della base maggiore, si ottiene $x=1,25h$]

73. È dato un quadrato ABCD con il lato lungo a . Tenendo anche presente l'esercizio 56, determinare sul lato BC un punto P in modo che valga la relazione:

$$PD^2 - AP^2 = \frac{CB^2}{4}$$

[$x=0,625a$]

74. È dato un arco AB, quarta parte di una circonferenza con il centro O e il raggio lungo r .

Determinare sull'arco un punto P in modo che, indicate con M e N le sue proiezioni ortogonali su OA e OB (fig. 13), valga la relazione:

$$ON^2 + AM^2 = OP^2$$

[Scegliendo come incognita x la distanza OM, si ottiene: $x = \frac{r}{2}$]

I teoremi di Pitagora e di Euclide per risolvere problemi che conducono a sistemi di 1° grado

I problemi dal n. 75 al n.80 hanno le seguenti caratteristiche:

- richiedono di applicare contemporaneamente i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- possono condurre a sistemi di 1° grado con coefficienti numerici;
- hanno tutti i risultati razionali.

Il procedimento per impostare e risolvere questo tipo di problemi è analogo a quello indicato nel primo volume, p. 449.

75. In un triangolo rettangolo la somma dei cateti vale 14, e la loro differenza 2. Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare i cateti del triangolo;
 - b. determinare l'ipotenusa c del triangolo.

[(b) $c=10$]

76. In un triangolo rettangolo la somma dei cateti vale 7, mentre la loro differenza è 1. Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare i cateti del triangolo;
 b. determinare l'ipotenusa c del triangolo.
 [(b) $c=5$]
77. In un rettangolo la somma della diagonale e di un lato vale 72, mentre la loro differenza è 8. Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la diagonale e il lato del rettangolo;
 b. determinare il perimetro $2p$ del rettangolo.
 [(b) $2p=112$]
78. In un rettangolo la somma della diagonale e di un lato vale 18, mentre la loro differenza è 2. Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la diagonale e il lato del rettangolo;
 b. determinare il perimetro $2p$ del rettangolo.
 [(b) $2p=28$]
79. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 25 e la differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è lunga 7. Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa;
 b. determinare i cateti del triangolo;
 c. determinare il perimetro $2p$ e l'area S del triangolo
 [(c) $S=150$]
80. Un trapezio rettangolo ABCD ha l'altezza lunga 7,2, la base minore lunga 9,6 e la diagonale minore AC perpendicolare al lato obliquo BC. Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la lunghezza della diagonale AC;
 b. determinare gli altri lati del trapezio;
 c. determinare il perimetro $2p$ e l'area S del trapezio.
 [(c) $S=88,56$]

I numeri irrazionali

Gli esercizi dal n. 81 al n. 90 hanno le seguenti caratteristiche:
 - richiedono di applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide;
 - richiedono di distinguere i numeri razionali da quelli irrazionali.

81. Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
 - ABC, che ha i cateti lunghi 3 e 4;
 - A'B'C', che ha i cateti lunghi 4 e 5.
 Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la lunghezza dell'ipotenusa di ogni triangolo;
 b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
82. Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
 - ABC, che ha l'ipotenusa lunga 16 e un cateto lungo 8;
 - A'B'C', che ha l'ipotenusa lunga 17 e un cateto lungo 8.
 Risolvere i seguenti quesiti:
 a. determinare la lunghezza dell'altro cateto di ciascun triangolo;
 b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.

- 83.** Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
- ABC, che ha l'ipotenusa lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 9;
 - A'B'C', che ha l'ipotenusa lunga 16 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 8.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la lunghezza del cateto di ciascun triangolo;
 - b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
- 84.** Sono dati i seguenti triangoli rettangoli:
- ABC, che ha l'ipotenusa lunga 14 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 6;
 - A'B'C', che ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 6.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la lunghezza della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa di ciascun triangolo;
 - b. dire in quale caso si ottiene un risultato irrazionale, motivando la risposta.
- 85.** Un triangolo rettangolo ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 10 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 4.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare i lati del triangolo;
 - b. indicare i lati che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 86.** Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 8 e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa lunga 2.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare i cateti del triangolo;
 - b. indicare i lati che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 87.** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 15 e 8.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare l'ipotenusa, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa;
 - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 88.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 5 e l'ipotenusa lunga 13.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa;
 - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 89.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 13 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 5.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare la proiezione del cateto sull'ipotenusa, l'ipotenusa, l'altro cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa;
 - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.
- 90.** Un rombo ha le diagonali lunghe 24 e 10 che si incontrano nel punto O; da O si traccia la perpendicolare OH al lato AB.
- Risolvere i seguenti quesiti:
- a. determinare il lato AB del rombo e la lunghezza dei segmenti AH, HB e OH;
 - b. indicare i segmenti che hanno lunghezza irrazionale motivando la scelta.

I radicali quadratici e la loro scrittura decimale

Gli esercizi dal n. 91 al n. 102 conducono a distinguere un radicale quadratico dalla sua scrittura decimale.

91. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in C, con i cateti lunghi 1 e 2. Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza c dell'ipotenusa BC;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$c=\sqrt{5} \quad c=2,24 \quad c\approx 2,24 \quad c^2\approx 5$$

92. Disegnare un triangolo ABC, rettangolo in C, con i cateti lunghi 1 e 2; dal punto A disegnare il segmento AD lungo 2 e perpendicolare all'ipotenusa AB. Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza d del segmento BD;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$d\approx 3 \quad d^2=5+4 \quad d^2=(2,24)^2+4 \quad d^2\approx (\sqrt{5})^2+4$$

93. Disegnare un triangolo rettangolo LMN con le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 3.

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare la lunghezza h dell'altezza relativa all'ipotenusa;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta e correggere quelle errate:

$$h\approx \sqrt{3} \quad h\approx 1,73 \quad (1,73)^2=3 \quad (\sqrt{3})^2\approx 3$$

94. Risolvere i seguenti quesiti relativi al triangolo LMN dell'esercizio 93:

- calcolare la lunghezza m del cateto che ha la proiezione sull'ipotenusa lunga 1;
- calcolare la lunghezza n del cateto che ha la proiezione sull'ipotenusa lunga 3;
- fra le seguenti formule indicare quelle corrette, motivando la scelta, e correggere quelle errate:

$$m\approx 2 \quad m^2=1+3 \quad n^2\approx 12 \quad n=3,46 \quad n=\sqrt{12}$$

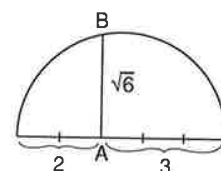
95. Completare le seguenti uguaglianze:

$$4=(\dots)^2 \quad 2=(\dots)^2 \quad 8=(\dots)^2 \quad 9=(\dots)^2$$

96. Spiegare perché le formule seguenti sono tutte errate e correggere gli errori:

$$\sqrt{9}\approx 3 \quad 3^2\approx 9 \quad \sqrt{3}\approx 1,73 \quad (1,73)^2=3 \quad (\sqrt{3})^2\approx 3$$

Figura 15



15a

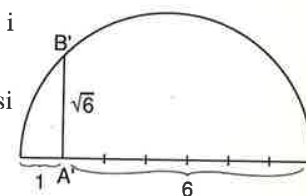
97. Scrivere in forma decimale le radici quadrate dei primi venti numeri naturali, prestando particolare attenzione al corretto uso dei simboli « \approx » e « \equiv ».

98. Spiegare perché, con i due procedimenti illustrati in fig. 15 si ottengono i segmenti AB e A'B' lunghi esattamente $\sqrt{6}$ cm.

Costruire poi un segmento CD lungo $\sqrt{12}$, illustrando i vari procedimenti che si possono seguire.

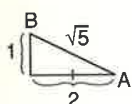
Risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare perché CD non è il doppio di AB;
- scrivere $\sqrt{6}$ e $\sqrt{12}$ in forma decimale.

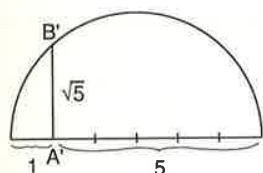


15b

Figura 16



16a



16b

99. Spiegare perché, con i due procedimenti illustrati in fig. 16, si ottengono i segmenti AB e A'B' lunghi esattamente $\sqrt{5}$ cm. Costruire poi un segmento CD lungo $\sqrt{15}$, illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD non è il triplo di AB;
 - scrivere $\sqrt{5}$ e $\sqrt{15}$ in forma decimale.
100. Costruire un segmento AB lungo esattamente $\sqrt{7}$ cm. Costruire poi un segmento CD lungo $\sqrt{28}$, illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD è il doppio di AB;
 - scrivere $\sqrt{7}$ e $\sqrt{28}$ in forma decimale.
101. Costruire un segmento AB lungo esattamente $\sqrt{3}$ cm. Costruire poi un segmento CD lungo $\sqrt{27}$, illustrando i vari procedimenti che si possono seguire. Risolvere i seguenti quesiti:
- spiegare perché CD è il triplo di AB.
 - scrivere $\sqrt{3}$ e $\sqrt{27}$ in forma decimale.
102. Costruire un segmento AC, ottenuto disegnando due segmenti consecutivi: AB lungo $\sqrt{8}$ cm e BC lungo $\sqrt{2}$. Costruire poi un segmento DE lungo $\sqrt{10}$ e confrontare i segmenti AC e DE.

Radicali

Gli esercizi dal n. 103 al n. 109 conducono a impadronirsi del simbolo di radicale.

103. Completare le seguenti uguaglianze:

$$8=(\dots)^3$$

$$2=(\dots)^3$$

$$20=(\dots)^3$$

$$27=(\dots)^3$$

104. Completare le seguenti uguaglianze:

$$16=(\dots)^4$$

$$5=(\dots)^4$$

$$45=(\dots)^4$$

$$81=(\dots)^4$$

105. Completare le seguenti uguaglianze:

$$32=(\dots)^5$$

$$10=(\dots)^5$$

$$49=(\dots)^5$$

$$243=(\dots)^5$$

106. Completare la seguente tabella, come è indicato nella prima riga.

Radicale $\sqrt[n]{a^m}$	Indice del radicale n	Radicando a^m	Esponente del radicando m
$\sqrt[4]{7^3}$	4	7^3	3
$\sqrt[3]{7^4}$			
	7	3^4	
	5	4^3	
	7	4	
	4	7	
	3	7	

107. Scrivere 10 radicali a piacere precisando:
 - l'indice del radicale;
 - il radicando e l'esponente del radicando.

108. Completare le seguenti uguaglianze:

$$(\sqrt[3]{5})^3 = \dots \quad (\sqrt[5]{3})^{\dots} = 3 \quad (\sqrt[4]{\dots})^4 = 6 \quad (\sqrt[5]{7})^5 = 7$$

109. Completare le seguenti uguaglianze:

$$(\sqrt[3]{4^2})^3 = \dots \quad (\sqrt[5]{4^3})^{\dots} = 4^3 \quad (\sqrt[4]{\dots})^4 = 3^2$$

$$(\sqrt[5]{11^3})^5 = 11^3 \quad (\sqrt[5]{13^{\dots}})^5 = 13^2 \quad (\sqrt[7]{4^{\dots}})^7 = 4^{\dots}$$

Potenze a esponente frazionario

Gli esercizi dal n. 110 al n. 117 richiedono solo di applicare la nozione di potenza a esponente frazionario.

110. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{8} = \dots \quad \sqrt[3]{8} = \dots \quad \sqrt[4]{8} = \dots \quad \sqrt[5]{8} = \dots$$

111. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{7} = \dots \quad \sqrt[3]{7} = \dots \quad \sqrt[4]{7^5} = \dots \quad \sqrt[5]{7^8} = \dots$$

112. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[3]{11} = \dots \quad \sqrt[3]{11^2} = \dots \quad \sqrt[3]{11^4} = \dots \quad \sqrt[3]{11^6} = \dots$$

113. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{7} = \dots \quad \sqrt[3]{7} = \dots \quad \sqrt[4]{7} = \dots \quad \sqrt[5]{7^2} = \dots$$

114. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[4]{5} = \dots \quad \sqrt[5]{4} = \dots \quad \sqrt[5]{5^4} = \dots \quad \sqrt[4]{4^5} = \dots$$

115. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni radicale sotto forma di potenza a esponente frazionario; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[4]{5^3} = \dots \quad \sqrt[3]{5^4} = \dots \quad \sqrt[5]{4^3} = \dots \quad \sqrt[5]{3^4} = \dots$$

116. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni potenza a esponente frazionario sotto forma di radicale; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$a^n = \sqrt[n]{a^m} \quad 16^{\frac{1}{2}} = \dots \quad 16^{\frac{1}{4}} = \dots \quad 16^{\frac{3}{4}} = \dots \quad 16^{\frac{3}{2}} = \dots$$

117. Completare le seguenti uguaglianze, esprimendo ogni potenza ad esponente frazionario sotto forma di radicale; applicare la regola mostrata nella prima formula.

$$a^n = \sqrt[n]{a^m} \quad 8^{\frac{1}{3}} = \dots \quad 32^{\frac{1}{5}} = \dots \quad 8^{\frac{2}{3}} = \dots \quad 32^{\frac{4}{5}} = \dots$$

Gli esercizi dal n. 118 al n. 122 richiedono di applicare:

- la nozione di potenza a esponente frazionario;
- la seguente proprietà delle potenze:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

118. Completare le seguenti uguaglianze:

$$\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dots \quad \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \dots \quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \dots \quad \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^5 = \dots$$

119. Completare le seguenti uguaglianze:

$$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \dots \quad \left(16^{\frac{3}{4}}\right)^4 = \dots \quad \left(8^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \dots \quad \left(32^{\frac{4}{5}}\right)^5 = \dots$$

120. Completare le seguenti uguaglianze per scrivere il risultato delle potenze, come indicato nel primo esempio:

$$\begin{array}{ll} 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4} \cdot 4} = 2^1 = 2 & 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = \dots \\ 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = \dots & 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = \dots \\ 32^{\frac{4}{5}} = (2^5)^{\frac{4}{5}} = \dots & 81^{\frac{5}{4}} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = \dots \end{array}$$

121. Determinare il risultato delle seguenti potenze, come indicato nell'esercizio 120:

$$16^{\frac{5}{4}} \quad 8^{\frac{4}{3}} \quad 32^{\frac{6}{5}} \quad 49^{\frac{3}{2}} \quad 49^{\frac{5}{2}}$$

122. Determinare il risultato delle seguenti potenze, come indicato nell'esercizio 120:

$$64^{\frac{1}{2}} \quad 64^{\frac{2}{3}} \quad 64^{\frac{3}{2}} \quad 64^{\frac{5}{6}} \quad 64^{\frac{7}{6}}$$

Le radici con il calcolatore tascabile

Gli esercizi dal n. 123 al n. 130 richiedono di usare il calcolatore tascabile.

123. Esaminare la seguente tabella:

Calcoli da eseguire	Sequenza di tasti	Risultato
$\sqrt{529}$		
		230
$\sqrt{52,9}$		
		2,3
$\sqrt{0,00529}$		
		0,23

Risolvere i seguenti quesiti:

- completare la tabella valendosi di un calcolatore tascabile;
- indicare i risultati esatti e quelli approssimati;
- spiegare perché tutte le formule seguenti sono errate e correggere gli errori:

$$\sqrt{529} \approx 23$$

$$\sqrt{52,9} \approx 2,3$$

$$\sqrt{52,9} = 7,27$$

124. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quadrate dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

125. Completare la seguente tabella, seguendo le indicazioni date nel testo a p. 30.

Calcolo	Sequenza di tasti	Risultato
$\sqrt[7]{128}$		
	1 2 8 y^x 1 \div 7 =	
$\sqrt[9]{11^5}$		
$\frac{11^5}{6}$		
$\sqrt[7]{125^3}$		

126. Valutare con un calcolatore tascabile le radici cubiche dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

127. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quarte dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

128. Valutare con un calcolatore tascabile le radici quinte dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

129. Valutare con un calcolatore tascabile le radici seste dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

130. Valutare con un calcolatore tascabile le radici settime dei primi trenta numeri naturali e scrivere i risultati prestando attenzione al corretto uso dei simboli = e \approx .

Calcoli con i radicali

Potenza di un radicale

Gli esercizi dal n. 131 al n. 140 richiedono solo di elevare a potenza dei radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

131. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{1}{5^3}\right)^2 =$	$(\sqrt[3]{5})^2 =$
		$(\sqrt[4]{23})^3 =$
	$\left(\frac{3}{7^2}\right)^4 =$	
		$(\sqrt{6^3})^5 =$
	$\left(\frac{2}{21^3}\right)^6 =$	
		$(\sqrt[5]{15^2})^3 =$

132. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{\dots}{10^{\dots}}\right)^{\dots} =$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}} =$
		$\sqrt[4]{\sqrt[3]{36}} =$
	$\left(\frac{2}{8^3}\right)^{\frac{1}{2}} =$	
		$\sqrt{\sqrt[4]{4^3}} =$
	$\left(\frac{2}{13^3}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
		$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{51}}} =$

133. Esaminare le seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt{5}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt{8}})^5 \quad (\sqrt[4]{\sqrt{17}})^7$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

134. Ripetere l'esercizio 133 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[5]{13}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt[5]{18}})^2 \quad (\sqrt[4]{\sqrt[5]{31}})^9$$

135. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\left(37^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(53^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \left(61^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di potenza a esponente frazionario con l'esponente ridotto ai minimi termini;
- riscrivere i risultati ottenuti valendosi dei radicali.

136. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(47^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \left(71^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(67^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

137. Esaminare le seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[3]{5}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt{2^4}})^5 \quad (\sqrt[4]{\sqrt{5^3}})^6$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale, con l'indice del radicale e l'esponente del radicando primi fra loro.
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

138. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$(\sqrt{\sqrt[6]{19^2}})^3 \quad (\sqrt[3]{\sqrt[4]{73^2}})^3 \quad (\sqrt[4]{\sqrt[6]{89^3}})^8$$

139. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt[5]{31^3}}}\right)^4 \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{67^3}}}\right)^8 \quad \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{91^6}}}\right)^4$$

140. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\left(\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt[5]{43^3}}}\right)^{10} \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{83^2}}}\right)^6 \quad \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{19^3}}}\right)^6$$

Prodotto di radicali

Gli esercizi dal n. 141 al n. 150 richiedono solo di moltiplicare dei radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

141. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} =$
		$\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} =$
	$11^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} =$	
		$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10} =$
	$13^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} =$	
		$\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2^3} =$

142. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} = \quad \sqrt{21} \cdot \sqrt{5} = \quad \sqrt{15} \cdot \sqrt{7} =$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

143. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{23} \cdot \sqrt{6} = \quad \sqrt{7} \cdot \sqrt{11} = \quad \sqrt{13} \cdot \sqrt{30} =$$

144. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{29} \cdot \sqrt[3]{2} = \quad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{21} = \quad \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{5} =$$

145. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{92} \cdot \sqrt[4]{3} = \quad \sqrt[4]{20} \cdot \sqrt[4]{9} = \quad \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[4]{10} =$$

146. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{11^3} \cdot \sqrt[4]{5^3} = \quad \sqrt[4]{23^5} \cdot \sqrt[4]{11^5} = \quad \sqrt[3]{15^4} \cdot \sqrt[3]{7^4} =$$

147. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} =$$

148. Ripetere l'esercizio 142 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{10^3} = \quad \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{7^2} =$$

149. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

A. $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10^3}$

B. $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$

C. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{10}$

D. $\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[6]{55}$

150. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

A. $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{14}$

B. $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[7]{70}$

C. $\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[3]{36}$

D. $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[3]{30}$

Portare un fattore fuori della radice

Gli esercizi dal n. 151 al n. 158 richiedono di portare un fattore fuori della radice, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

151. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(5^2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{5^2 \cdot 3} =$
		$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot \dots} =$
		$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \dots} =$

152. Esaminare le seguenti espressioni:

$\sqrt{12}$

$\sqrt{45}$

$\sqrt{50}$

$\sqrt{200}$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scomporre in fattori ciascun radicando;
- scrivere ogni radicale portando un fattore fuori della radice;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

153. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$\sqrt{8}$

$\sqrt{20}$

$\sqrt{27}$

$\sqrt{1000}$

154. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$\sqrt{32}$

$\sqrt{28}$

$\sqrt{60}$

$\sqrt{2000}$

155. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$\sqrt[3]{16}$

$\sqrt[3]{40}$

$\sqrt[3]{54}$

$\sqrt[3]{2000}$

156. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$\sqrt[3]{81}$

$\sqrt[3]{250}$

$\sqrt[3]{189}$

$\sqrt[3]{80000}$

157. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[4]{32}$$

$$\sqrt[4]{48}$$

$$\sqrt[4]{405}$$

$$\sqrt[4]{20000}$$

158. Ripetere l'esercizio 152 a partire dai seguenti radicali:

$$\sqrt[4]{11250}$$

$$\sqrt[4]{80}$$

$$\sqrt[4]{324}$$

$$\sqrt[4]{160000}$$

Divisione di radicali

Gli esercizi dal n. 159 al n. 168 richiedono solo di dividere due radicali, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

159. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^2} =$	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$
		$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} =$
		$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$
		$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{10}} =$
		$\frac{\sqrt[4]{768}}{\sqrt[4]{3}} =$
		$\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{10}} =$

160. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} =$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di un radicale;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

161. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \quad \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{8}} = \quad \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{6}} =$$

162. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} = \quad \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \quad \frac{\sqrt[3]{23}}{\sqrt[3]{13}} =$$

163. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \quad \frac{\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \quad \frac{\sqrt[3]{6^4}}{\sqrt[3]{3^4}} =$$

164. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \quad \frac{\sqrt[4]{810}}{\sqrt[4]{10}} = \quad \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} =$$

165. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{100}}{\sqrt[4]{8}} = \quad \frac{\sqrt[4]{50000}}{\sqrt[4]{5}} = \quad \frac{\sqrt[4]{24}}{\sqrt[4]{12}} =$$

166. Ripetere l'esercizio 160 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\sqrt[4]{10^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \quad \frac{\sqrt[4]{14^3}}{\sqrt[4]{7^3}} = \quad \frac{\sqrt[4]{6^5}}{\sqrt[4]{3^5}} =$$

167. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\text{B. } \frac{\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{3^3} \quad \frac{\sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{2} \quad \text{D. } \frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{5}$$

168. Spiegare perché le seguenti uguaglianze sono tutte errate:

$$\text{C. } \frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10} \quad \text{A. } \frac{\sqrt[6]{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{6} \quad \frac{\sqrt[8]{12}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt{3}$$

I radicali con radicando frazionario

Gli esercizi dal n. 169 al n. 173 richiedono solo di calcolare radici di frazioni, applicando le proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile o delle tavole numeriche.

169. Completare la seguente tabella, tenendo presenti le indicazioni date nel testo alle pp. 34-36.

Proprietà delle potenze	Potenze a esponente frazionario	Radicali
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{\frac{9}{4}} =$
		$\sqrt{\frac{4}{9}} =$
		$\sqrt{\frac{25}{16}} =$
		$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} =$
		$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} =$
		$\sqrt[4]{\frac{10}{16}} =$

170. Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{4}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{81}{100}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere il risultato di ciascuna espressione nella forma di una frazione;
- motivare i risultati ottenuti basandosi sulle proprietà delle potenze e sulle potenze a esponente frazionario.

171. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{49}}$$

$$\sqrt{\frac{121}{100}}$$

172. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$$

173. Ripetere l'esercizio 170 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{10000}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$$

Espressioni con potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario

Gli esercizi dal n. 174 al n. 178 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario, applicando più proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile.

174. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(16 \cdot 16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 16 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \quad [2^3; 2^5; 2^4]$$

175. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(4 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 4 \cdot \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \quad [2; 2^3; 2^3]$$

176. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(8 \cdot 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 8 \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \quad [2^2; 2^2; 2^2]$$

177. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(512 \cdot 512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 512 \cdot \left(512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 512^{\frac{1}{3}} \cdot 512^{\frac{1}{3}} \quad [2^4; 2^{10}; 2^6]$$

178. Determinare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\left(256 \cdot 256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 256 \cdot \left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 256^{\frac{1}{2}} \cdot 256^{\frac{1}{4}} \quad [2^5; 2^9; 2^6]$$

Espressioni con potenze, radici e moltiplicazioni di radicali

Gli esercizi dal n. 179 al n. 192 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze, radici e moltiplicazioni di radicali, applicando opportunamente più proprietà delle potenze.

179. Esaminare le seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 174):

$$\sqrt{16 \cdot \sqrt{16}} \quad 16 \cdot \sqrt{\sqrt{16}} \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{16}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere ciascuna espressione nella forma di un'espressione con potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione, valendosi delle proprietà delle potenze;
- scrivere il risultato dell'espressione in forma di radicale.

$$[2^3; 2^5; 2^4]$$

180. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 175):

$$\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{4}} \quad 4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{4}} \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{4} \quad [2; \sqrt[3]{2^7}; \sqrt[3]{2^5}]$$

181. Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 176):

$$\sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{8}} \quad 8 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{8}} \quad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{8} \quad [2^2; \sqrt{2^7}; \sqrt{2^5}]$$

- 182.** Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 177):

$$\sqrt[3]{512 \cdot \sqrt[3]{512}} \quad 512 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} \quad \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{512} \quad [2^4; 2^{10}; 2^6]$$

- 183.** Ripetere l'esercizio 179 a partire dalle seguenti espressioni (tenendo presente anche l'esercizio 178):

$$\sqrt{256 \cdot \sqrt[4]{256}} \quad 256 \cdot \sqrt{\sqrt[4]{256}} \quad \sqrt{256} \cdot \sqrt[4]{256} \quad [2^5; 2^9; 2^6]$$

- 184.** Esaminare le seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt{p}} \quad p \cdot \sqrt{\sqrt{p}} \quad \sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$$

(dove p rappresenta un numero razionale positivo) e risolvere i seguenti quesiti:

- riscriverle in forma di espressioni con potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione, valendosi delle proprietà delle potenze;
- dare una regola generale per scrivere il risultato in forma di radicale.

- 185.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}} \quad p \cdot \sqrt[3]{\sqrt{p}} \quad \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p}$$

- 186.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad p \cdot \sqrt{\sqrt[3]{p}} \quad \sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{p}$$

- 187.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad p \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{p}} \quad \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p}$$

- 188.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}} \quad \sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p}}$$

- 189.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt[3]{p}}$$

- 190.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[4]{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt{p}} \quad \sqrt[4]{p \cdot \sqrt[4]{p}}$$

- 191.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt{p \cdot \sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p}}}$$

- 192.** Ripetere l'esercizio 184 a partire dalle seguenti espressioni:

$$\sqrt{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}} \quad \sqrt[3]{p \cdot \sqrt[3]{p \cdot \sqrt{p}}}$$

Espressioni con potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario anche negativo

Gli esercizi dal n. 193 al n. 198 richiedono di calcolare il risultato di espressioni che presentano potenze e moltiplicazioni di potenze a esponente frazionario anche negativo, applicando più proprietà delle potenze e senza valersi del calcolatore tascabile.

193. Esaminare la seguente espressione:

$$\left[4 \cdot (4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[4 \cdot (4^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il risultato dell'espressione, valendosi opportunamente delle proprietà delle potenze;
- scrivere l'espressione e il risultato valendosi di radicali e frazioni.

$$\left[\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right]$$

194. Ripetere l'esercizio 193 a partire dalla seguente espressione:

$$\left[8 \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot \left(8 \cdot 8^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\sqrt[8]{2^7} \right]$$

195. Ripetere l'esercizio 193 a partire dalla seguente espressione:

$$\left(10 \cdot 10^{\frac{3}{7}} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(10 \cdot 10^{-\frac{2}{7}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(10^4 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{7}}$$

$$[1]$$

196. Esaminare la seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{6 \cdot \sqrt[5]{6}} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt[5]{\sqrt{72}} \cdot \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt[5]{3}}}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere l'espressione valendosi delle potenze a esponente frazionario;
- determinare il risultato dell'espressione.

$$\frac{7}{[2^{15}]}$$

197. Ripetere l'esercizio 197 a partire dalla seguente espressione:

$$\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{4}}}}{\sqrt[6]{8 \cdot \sqrt[3]{2}}}$$

$$\frac{2}{[2^9]}$$

198. Ripetere l'esercizio 197 a partire dalla seguente espressione:

$$\frac{\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{45}}}{\left(\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{4}} \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{5}}} \right)^2}$$

$$\frac{-\frac{8}{3}}{[2^3]}$$