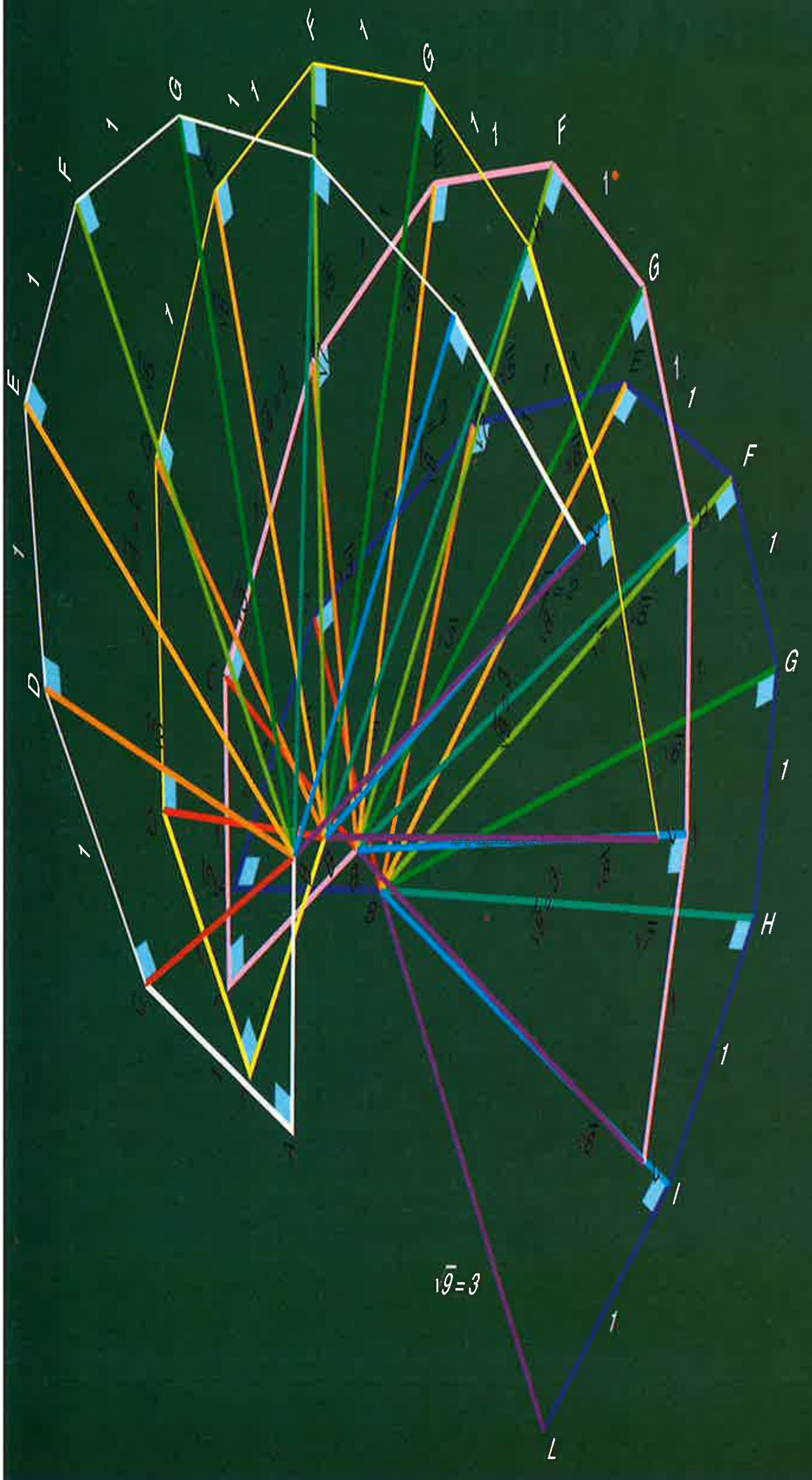
CAPITOLO PRIMO

I NUMERI IRRAZIONALI



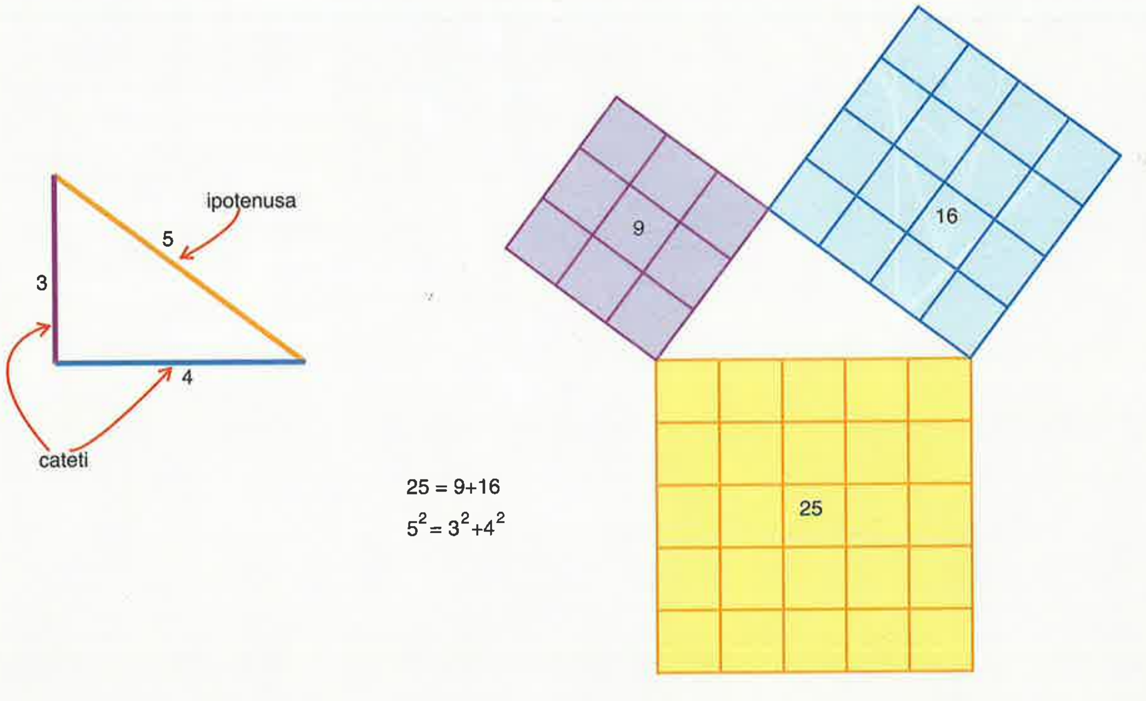
1 Il teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora

Il *teorema di Pitagora* esprime la proprietà del triangolo rettangolo illustrata in fig. 1: *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

La scoperta di questa proprietà è attribuita a *Pitagora*, matematico greco del VI secolo a.C. Per gli antichi greci la parola *teorema* significava «riflessione, osservazione» e quindi «scoperta di proprietà geometriche».

Figura 1
Il teorema di Pitagora in un caso particolare



Una dimostrazione del teorema di Pitagora

Non si sa come Pitagora sia arrivato a questa proprietà, perché nulla è rimasto delle sue opere; ma sembra che la proprietà sia stata scoperta in qualche triangolo rettangolo particolare (fig. 1). Successivamente si è trovato un ragionamento per spiegare perché la proprietà fosse valida per tutti i triangoli rettangoli.

Questo ragionamento, che prende anche il nome di *dimostrazione*, potrebbe essere quello illustrato in fig. 2, dove due quadrati di area Q vengono scomposti in due modi diversi.

I. Si tolgono da Q quattro triangoli di area T e si ottiene (fig. 2*a*) il quadrato di area C; cioè si ha:

$$C = Q - 4T \qquad (1)$$

II. Si tolgono da Q i quattro triangoli T disposti diversamente (fig. 2*b*) e così rimangono due quadrati di area A e B; perciò si trova anche:

$$Q - 4T = A + B \qquad (2)$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene allora:

$$C = A + B$$

Rappresentando i quadrati di area A, B, C in un'unica figura (fig. 2*c*) si nota che:

- C è l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa;
- A e B sono le aree dei quadrati costruiti sui due cateti.

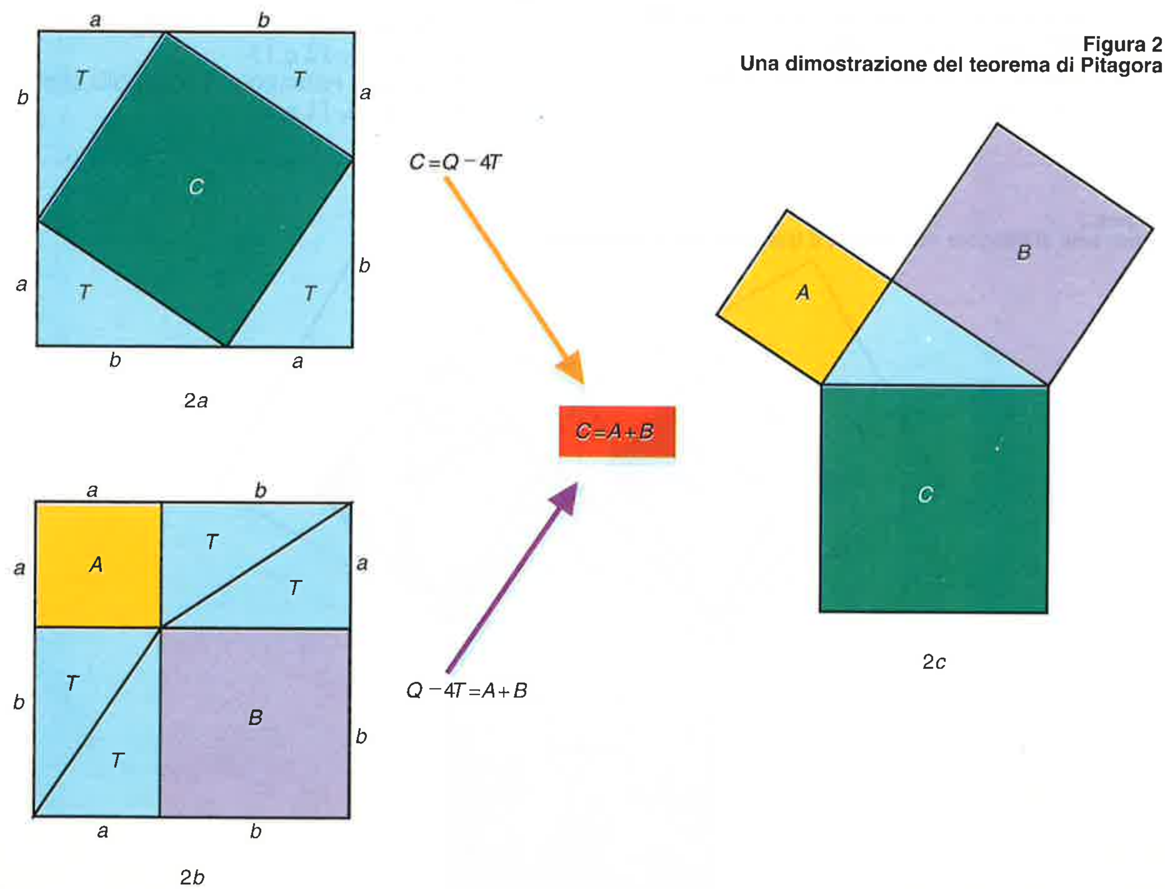
Si conclude così che *in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'ipotenusa ha l'area* C *che è uguale alla somma delle aree* A *e* B *dei quadrati costruiti sui cateti.*

E questo è il teorema di Pitagora, esposto, o meglio *enunciato*, in una forma solo apparentemente diversa da quella data all'inizio.

Il teorema di Pitagora vale solo per i triangoli rettangoli

Il teorema di Pitagora *non* vale per un triangolo che *non* è rettangolo; per rendersene conto basta osservare i tre triangoli isosceli con la

Figura 2
Una dimostrazione del teorema di Pitagora



stessa base MN rappresentati in fig. 3:

I. il triangolo MNP è rettangolo in P, perciò vale il teorema di Pitagora, cioè il quadrato di lato MN è equivalente alla somma dei quadrati di lati MP e NP ;

II. nel triangolo MNP', che ha l'angolo in P' ottuso, i lati MP' e NP' sono troppo piccoli, perciò la somma dei loro quadrati non riesce a raggiungere il quadrato di lato MN;

III. nel triangolo MNP'', che ha l'angolo in P'' acuto, i lati MP'' e NP'' sono troppo grandi, perciò la somma dei loro quadrati supera il quadrato di lato MN.

Riconoscere un triangolo rettangolo misurando i suoi lati

Il teorema di Pitagora caratterizza dunque un triangolo rettangolo; perciò, si può stabilire se un triangolo è rettangolo conoscendo solo la misura dei suoi lati. Ecco due esempi.

1. È rettangolo il triangolo MNP con i lati lunghi 8, 15 e 17 perché si ha che:
   - il quadrato costruito su MN ha area $17^2 = 289$;
   - la somma dei quadrati costruiti su MP e NP vale $8^2 + 15^2 = 289$;
   - risulta 289 = 225 + 64, cioè si ha:

     $17^2 = 15^2 + 8^2$

2. Invece, *non* è rettangolo il triangolo MNQ con i lati lunghi 9, 14 e 17 perché risulta:

   $17^2 = 289 \qquad 14^2 + 9^2 = 196 + 81 = 277$

   e perciò si trova:

   $17^2 \neq 14^2 + 9^2$

In generale, un triangolo con i lati lunghi a, b, c è rettangolo solo se risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Verifiche

Conoscenze

① Enunciare il teorema di Pitagora.

② Dimostrare il teorema di Pitagora.

Comprensione

① Portare qualche esempio di triangolo per cui non vale il teorema di Pitagora.

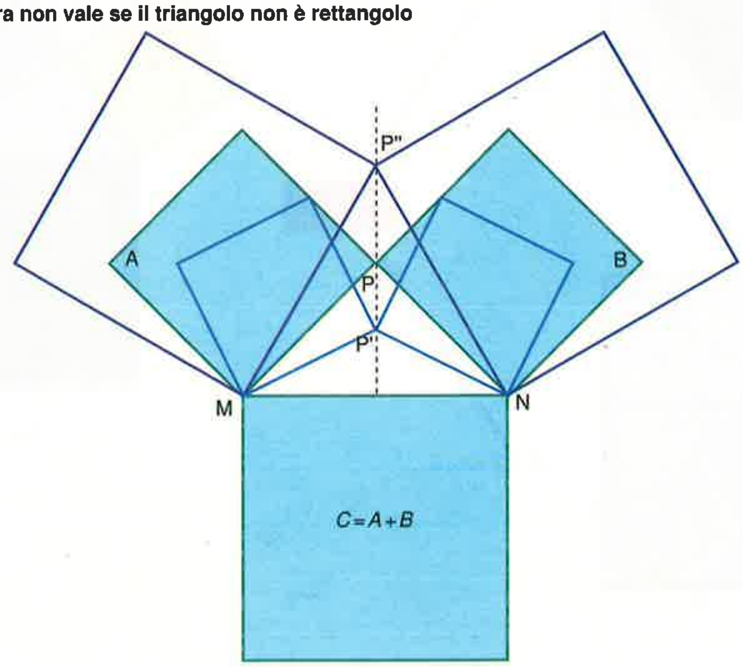
② Di un triangolo si sa soltanto che ha due lati lunghi 3 e 4; si può stabilire se il triangolo è rettangolo?

Applicazioni

① Stabilire se è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 5, 12 e 13.

② Stabilire se è rettangolo il triangolo che ha i lati lunghi 6, 11 e 13.

Figura 3
Il teorema di Pitagora non vale se il triangolo non è rettangolo



Il teorema di Pitagora prima di Pitagora

Non si sa quale dimostrazione abbia dato Pitagora del «suo» teorema, perché nulla è rimasto delle sue opere. Quello che si sa è che la proprietà era già nota in qualche caso particolare prima di Pitagora.

La proprietà pitagorica al tempo degli antichi egiziani

Nell'antico Egitto, già nel 3000 a.C., si conosceva la proprietà pitagorica in qualche caso particolare. Il caso più noto era il triangolo rettangolo con i lati lunghi 3, 4 e 5, triangolo per cui risultava:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Gli antichi egiziani utilizzavano questa proprietà per costruire un angolo retto, in particolare per costruire la base quadrata delle piramidi. Ecco il metodo seguito (fig. 1).

Si prendeva una corda lunga 12 unità e la si divideva con dei nodi in 12 parti uguali (fig. 1*a*). Si tendeva la parte lunga 4 unità fra due paletti conficcati per terra e si tiravano le altre due parti, lunghe 3 e 5, fino a far incontrare i loro estremi (fig. 1*b*). Si aveva così sul terreno un triangolo rettangolo.

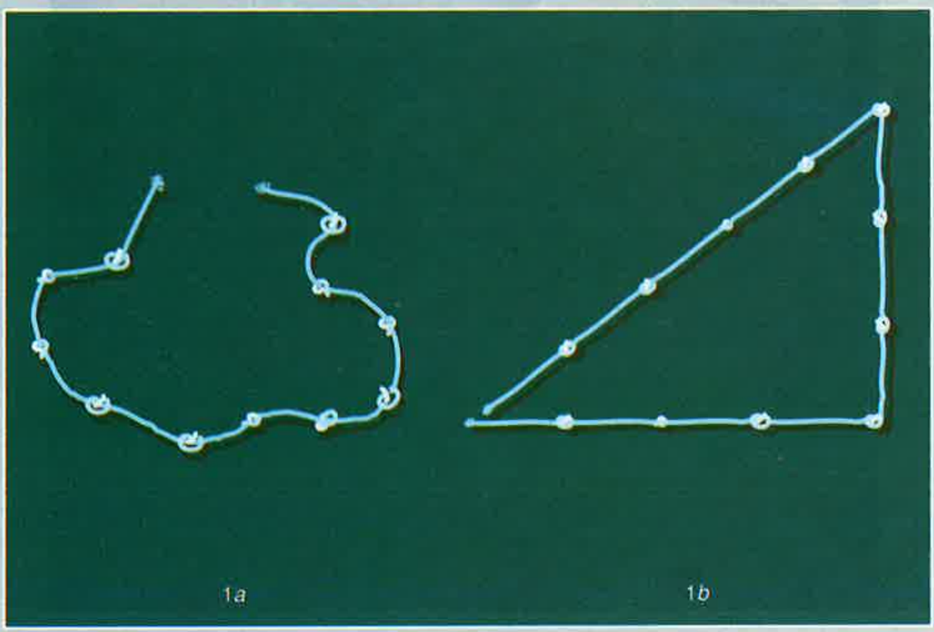


Figura 1
Un metodo degli antichi egiziani per costruire triangoli rettangoli

La proprietà pitagorica nelle tavolette babilonesi

Per gli egiziani dunque la proprietà pitagorica aveva un notevole interesse pratico. Sembra invece rivolta a studi geometrici più astratti una tavoletta babilonese del 2000-1800 a.C. (fig. 2), ritrovata, insieme ad altre, nella prima metà del nostro secolo durante scavi eseguiti nella zona dell'antica Babilonia e conservata oggi nel British Museum di Londra.

Un'altra tavoletta babilonese contiene un elenco di problemi proposti e risolti, fra i quali si trova il seguente (fig. 3*a*): «Un bastone lungo 30 unità è appoggiato ad un muro. In alto il bastone scivola di 6 unità. Di quanto si sarà allontanato dal muro il piede del bastone?»

Nella tavoletta al problema segue la soluzione:

- si deve elevare al quadrato 30;
- al quadrato di 30 si deve togliere il quadrato di 24 (che è il numero ottenuto togliendo 6 a 30);
- con queste operazioni si ottiene 324, che è il quadrato di 18;
- si conclude che 18 è il numero cercato, cioè il piede del bastone si allontana di 18 unità dalla base del muro.

I calcoli precedenti si scriverebbero, con i simboli matematici usati oggi, nel

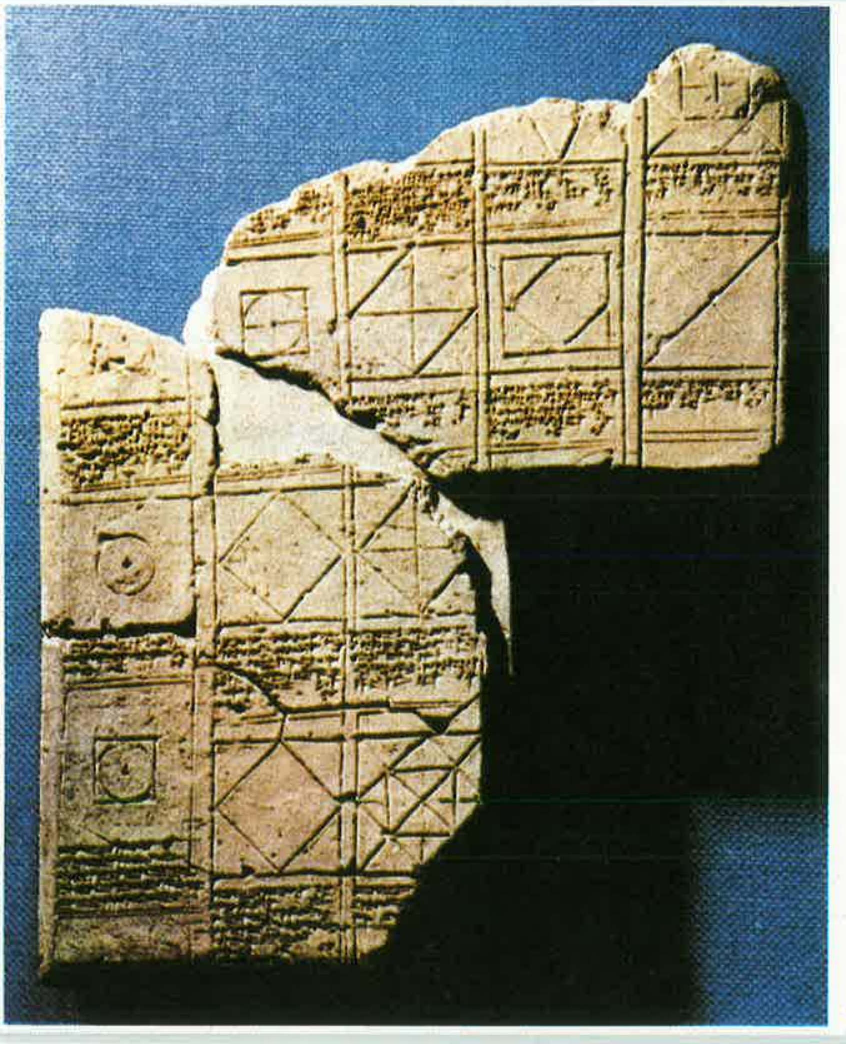


Figura 2
Una tavoletta babilonese contenente problemi matematici

modo seguente:

$$30^2 - 24^2 = 18^2 \qquad \text{da cui} \qquad \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

Così si osserva subito che i calcoli si basano sul fatto che, per il triangolo rettangolo di fig. 3*b*, si ha:

$$30^2 = 24^2 + 18^2$$

E questa è proprio la proprietà pitagorica, applicata però ad un particolare caso numerico: il triangolo rettangolo che ha i lati lunghi 18, 24 e 30.

Gli antichi babilonesi conoscevano dunque il teorema di Pitagora, ma era una conoscenza che riguardava dei particolari casi numerici.

Le terne pitagoriche

I casi numerici per cui valeva la proprietà pitagorica furono oggetto di attento studio da parte dei babilonesi: in una tavoletta datata intorno al 1900-1600 a.C. si trova un elenco di terne di numeri come 3, 4 e 5, per cui risulta:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

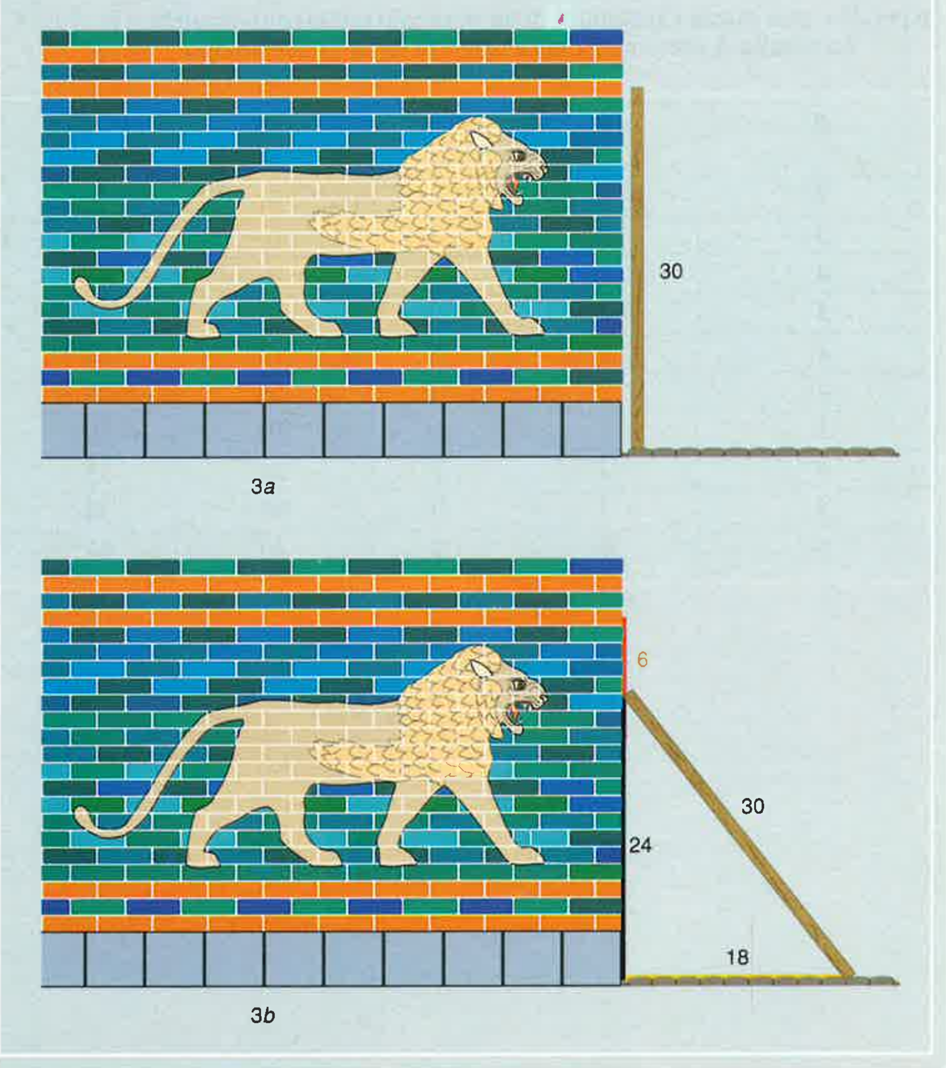


Figura 3
Gli antichi babilonesi usavano il teorema di Pitagora per risolvere problemi particolari

A queste terne viene spesso dato il nome di *terne pitagoriche*, cioè terne di numeri che possono essere i tre lati di un triangolo rettangolo, caratterizzato dalla proprietà pitagorica.

Nella tavoletta non si dice come queste terne siano state trovate, ma si può ipotizzare un procedimento di questo tipo:

- si considerano due numeri interi positivi p, q, con $p > q$;
- si forma una terna con i seguenti numeri:

$$a = p^2 - q^2 \qquad b = 2pq \qquad c = p^2 + q^2$$

Infatti, calcolando

$$a^2 = (p^2 - q^2)^2 = p^4 + q^4 - 2p^2q^2$$

$$b^2 = (2pq)^2 = 4p^2q^2$$

$$c^2 = (p^2 + q^2)^2 = p^4 + q^4 + 2p^2q^2$$

si trova che risulta sempre:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

e perciò c può essere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti a, b.

La tabella A presenta alcuni esempi di terne di questo tipo.

Tabella A
Alcune terne pitagoriche e il procedimento per ottenerle

p	q	p^2-q^2 a	$2pq$ b	p^2+q^2 c
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

2 Il primo teorema di Euclide

Verso il primo teorema di Euclide

Il teorema di Pitagora suggerisce altre indagini sui triangoli rettangoli. Dato che risulta:

$$C = A + B \quad \text{ossia} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

deve essere possibile dividere il quadrato di area c^2 in due parti, una di area a^2 e l'altra di area b^2.

C'è un caso particolare in cui questa suddivisione è immediata: il triangolo rettangolo isoscele; infatti, per questo triangolo (LMN in fig. 1) i due quadrati costruiti sui cateti hanno la stessa area a^2. In tal caso, prolungando l'altezza NH si divide il quadrato di area c^2 in due parti uguali, ciascuna delle quali deve avere area a^2.
Negli altri triangoli rettangoli, invece (fig. 2), prolungando l'altezza NH si divide il quadrato di area c^2 in due parti disuguali e cioè:

I. il rettangolo che ha come lati:
- LV, uguale all'ipotenusa;
- LH, *proiezione* sull'ipotenusa del cateto LN, lungo a.

II. il rettangolo che ha come lati:
- HK, uguale all'ipotenusa;

Figura 1
Il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele

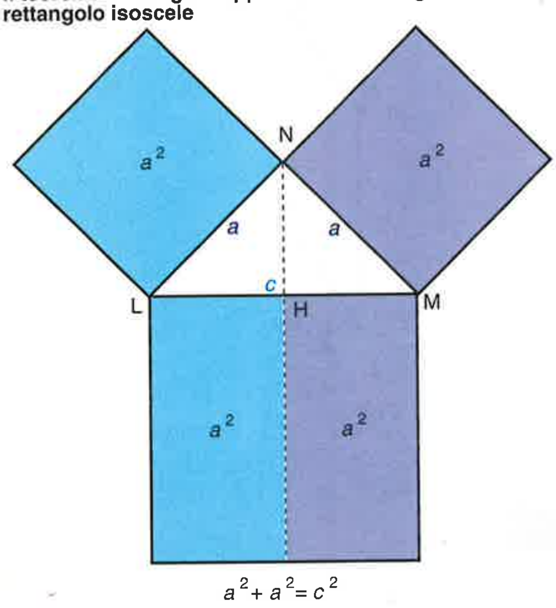
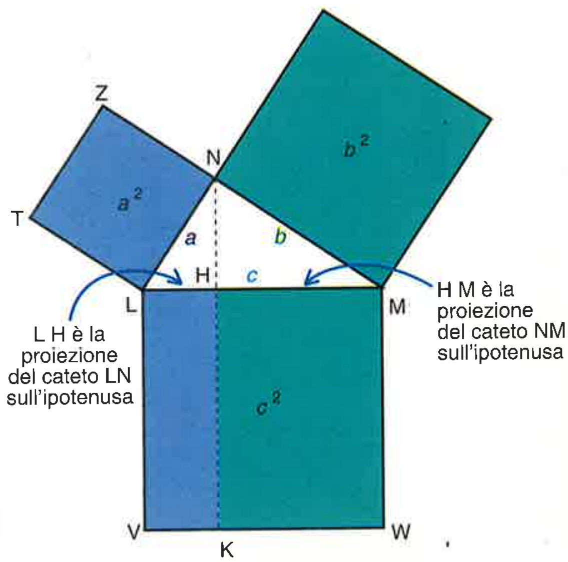


Figura 2
Dividere il quadrato costruito sull'ipotenusa



- HM, *proiezione* sull'ipotenusa del cateto MN, lungo b.

Un teorema, attribuito a Euclide (III sec. a.C.), stabilisce che il primo rettangolo ha sempre area a^2 e il secondo rettangolo ha sempre area b^2.

Si tratta del *primo teorema di Euclide*, che afferma (fig. 2): *in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.*

Una dimostrazione del primo teorema di Euclide

Il teorema può essere dimostrato nel modo seguente (fig. 3):

- si prolungano i lati VL e KH fino ad incontrare la retta TZ in R e Q (fig. 3*a*); si ottiene così un «parallelogramma ausiliario» LNQR che ha il lato LN lungo a e il lato RL lungo c (fig. 3*b*);
- si calcola l'area S di LNQR in due modi diversi (fig. 3*c*).

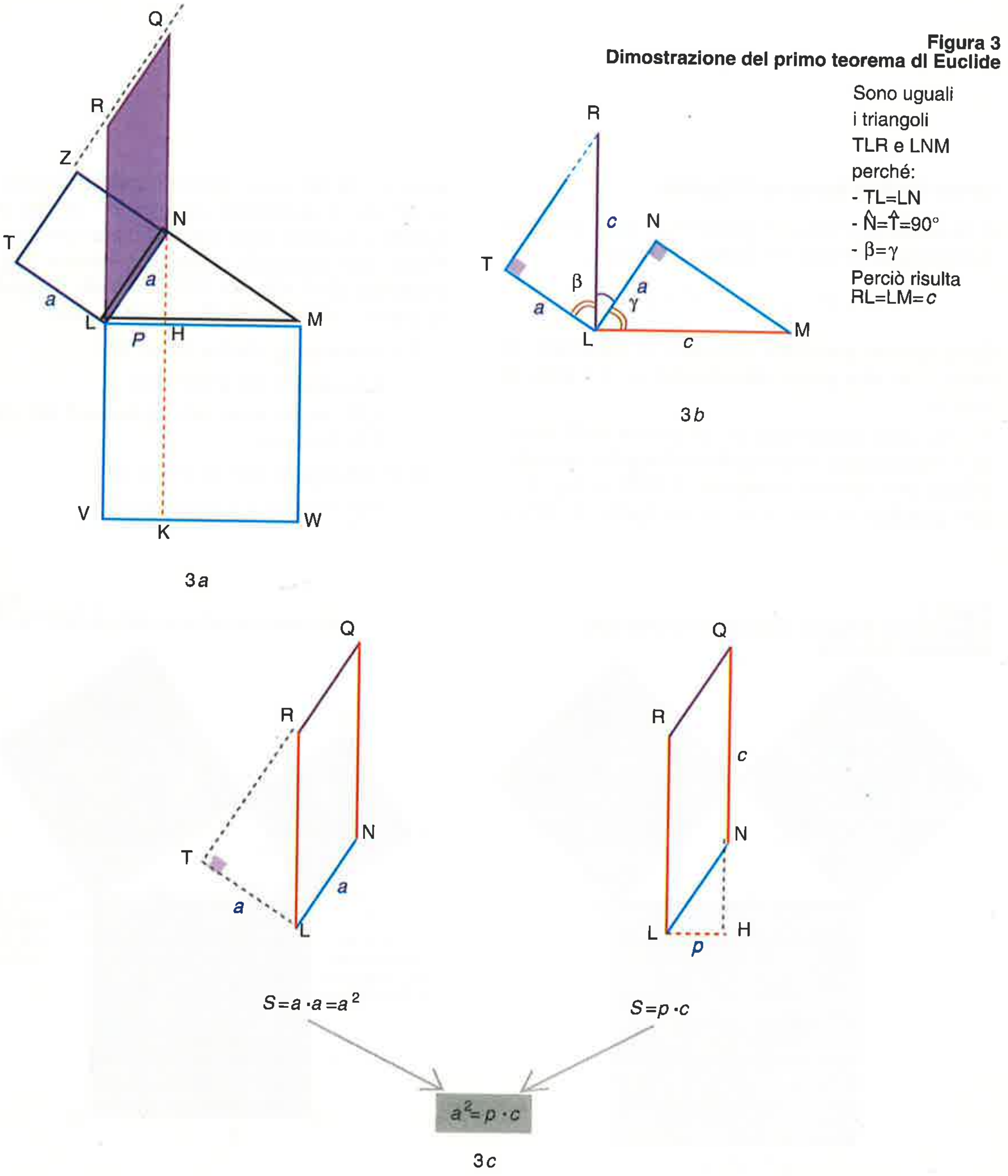


Figura 3
Dimostrazione del primo teorema di Euclide

I. Si calcola l'area di LNQR considerando il lato LN = a e l'altezza relativa TL, che è pure lunga a; l'area S è quindi:

$$S = a \cdot a = a^2 \qquad (1)$$

II. Si calcola la stessa area S, considerando il lato NQ = c e l'altezza relativa LH, che è lunga p; così si ottiene anche:

$$S = p \cdot c \qquad (2)$$

Figura 4
Il primo teorema di Euclide vale per tutti i triangoli rettangoli

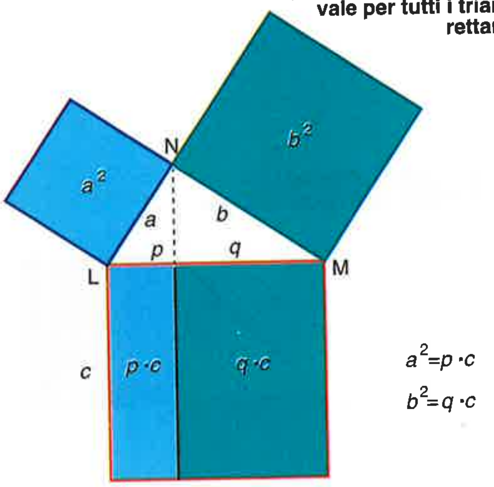
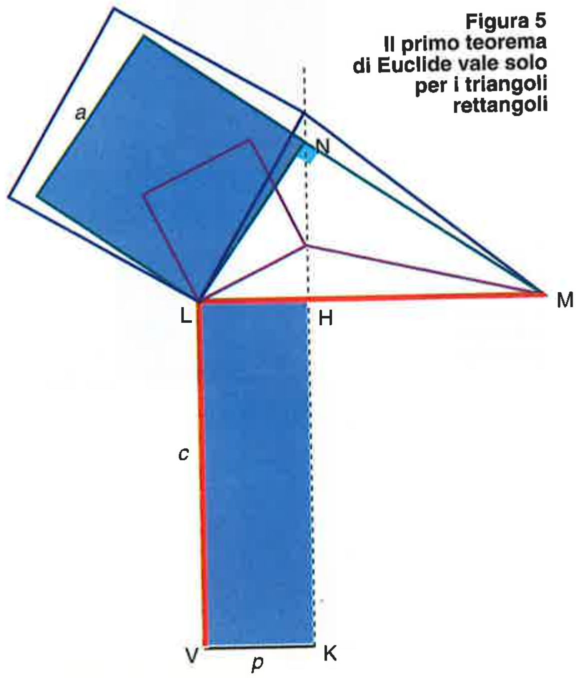


Figura 5
Il primo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli



Confrontando la (1) con la (2), si trova che deve essere:

$$a^2 = p \cdot c$$

dove (fig. 4):

- a^2 è l'area del quadrato costruito sul cateto LN;
- $p \cdot c$ è l'area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto LN sull'ipotenusa.

Una dimostrazione del tutto analoga, ripetuta a partire dal cateto NM, porta a verificare che il primo teorema di Euclide esprime una proprietà valida per tutti i triangoli rettangoli (fig. 4).

Il primo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli

Il primo teorema di Euclide non vale se il triangolo non è rettangolo; per rendersene conto basta esaminare la fig. 5:

- solo nel caso del triangolo rettangolo LMN il quadrato costruito su LN è equivalente al rettangolo LHVK; altrimenti il quadrato è troppo piccolo (nel caso dell'angolo $\hat{N}$ ottuso) o troppo grande (nel caso dell'angolo $\hat{N}$ acuto).

Il primo teorema di Euclide esprime dunque un'altra proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli.

Verifiche

Conoscenze

① Enunciare il primo teorema di Euclide
② Dimostrare il primo teorema di Euclide.

Comprensione

① Su quali nozioni di geometria si basa la dimostrazione del primo teorema di Euclide data in questo paragrafo?

Applicazioni

① Un triangolo LMN ha il lato LM lungo 12 e il lato LN lungo 6, che, proiettato su LM, dà un segmento LH, lungo 3; il triangolo è rettangolo?
② Un triangolo LMN ha il lato LM lungo 11 e il lato LN lungo 5, che, proiettato su LM, dà un segmento LH lungo 2; il triangolo è rettangolo?

3

Il secondo teorema di Euclide

Verso il secondo teorema di Euclide

Nel primo teorema di Euclide si considerano le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, ma, per ottenere queste proiezioni, bisogna costruire l'altezza relativa all'ipotenusa.
Così ancora una volta il caso particolare del triangolo rettangolo isoscele suggerisce di cercare nuove proprietà.
Nel triangolo rettangolo isoscele LMN (fig. 1) l'altezza NH divide l'ipotenusa in due parti uguali lunghe h e perciò anche il rettangolo LHKV si può dividere in due quadrati uguali di area h^2.

Negli altri triangoli rettangoli però (fig. 2) l'altezza NH divide l'ipotenusa in due parti disuguali lunghe p e q.
In tal caso il rettangolo LHKV può essere diviso in due parti disuguali:

- il quadrato di lato LH;
- il rettangolo che ha per lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Un secondo teorema attribuito ad Euclide stabilisce che questo ultimo rettangolo ha sempre area h^2.

Si tratta del secondo teorema di Euclide, che afferma: *in tutti i triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Una dimostrazione del secondo teorema di Euclide

La dimostrazione di questo teorema può essere condotta nel modo seguente (fig. 3):

Figura 1
L'altezza relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo isoscele

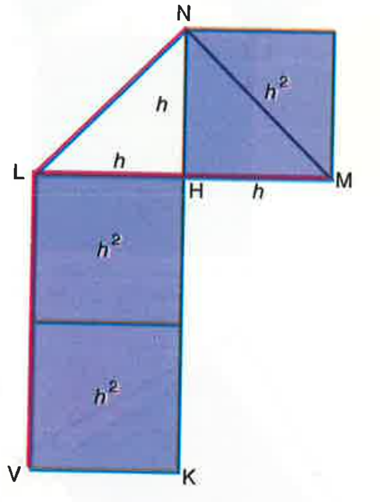
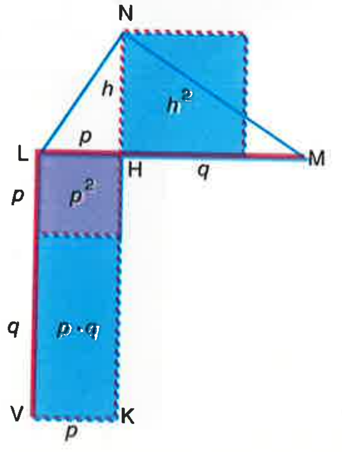


Figura 2
L'altezza relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo qualunque



- si applica ad un qualunque triangolo rettangolo LMN il primo teorema di Euclide (fig. 3*a*), ottenendo:

$$a^2 = c \cdot p \qquad (1)$$

- tracciata l'altezza NH relativa all'ipotenusa, si applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo LHN (fig. 3*b*); si ha:

$$a^2 = p^2 + h^2 \qquad (2)$$

- si confronta la (1) con la (2), ottenendo:

$$c \cdot p = p^2 + h^2 \qquad (3)$$

- si osserva (fig. 3*c*) il rettangolo LHKV, di area $p \cdot c$, diviso in due parti:
  - il quadrato di lato LH, che ha area p^2;
  - il rettangolo rimanente, che ha area $p \cdot q$;

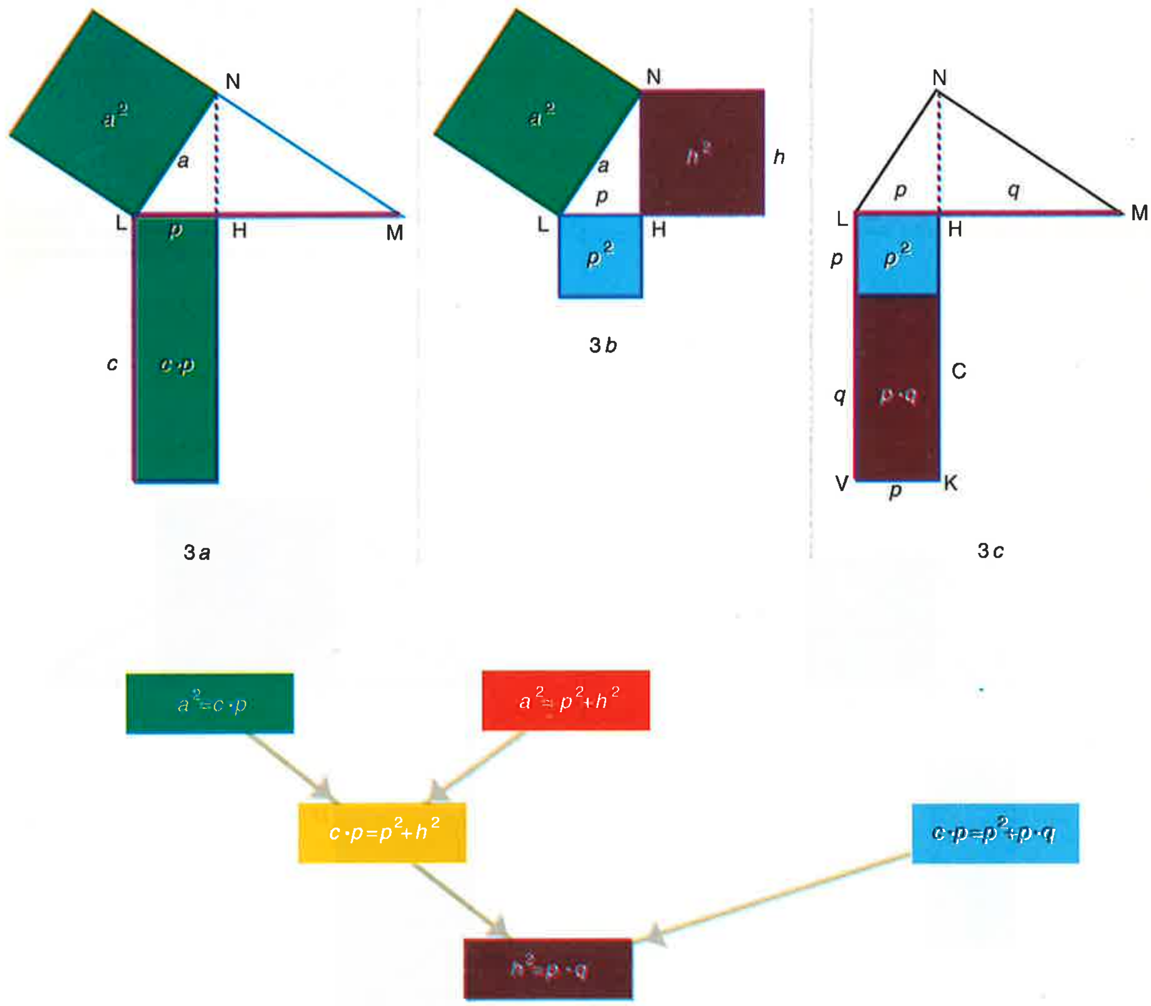
e si trova:

$$c \cdot p = p^2 + p \cdot q \qquad (4)$$

- si confronta la (3) con la (4) ottenendo appunto:

$$h^2 = p \cdot q$$

Figura 3
Dimostrazione del secondo teorema di Euclide



Il secondo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli

Anche il secondo teorema di Euclide (fig. 4) non vale se il triangolo non è rettangolo; per rendersene conto basta osservare la fig. 5:

- solo nel caso del triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza NH è equivalente al rettangolo L'H'KV; altrimenti il quadrato è troppo piccolo (nel caso dell'angolo $\hat{N}$ ottuso) o troppo grande (nel caso dell'angolo $\hat{N}$ acuto).

Così, anche il secondo teorema di Euclide caratterizza i triangoli rettangoli.

Verifiche

Conoscenze

① Enunciare il secondo teorema di Euclide.

② Dimostrare il secondo teorema di Euclide.

Comprensione

① Su quali nozioni di geometria si basa la dimostrazione del secondo teorema di Euclide data in questo paragrafo?

Applicazioni

① Un triangolo LMN ha l'altezza NH lunga 2, che divide il lato LM in due parti lunghe 1 e 4; il triangolo è rettangolo?

② Un triangolo LMN ha l'altezza NH lunga 3, che divide il lato LM in due parti lunghe 2 e 5; il triangolo è rettangolo?

Figura 4
Il secondo teorema di Euclide

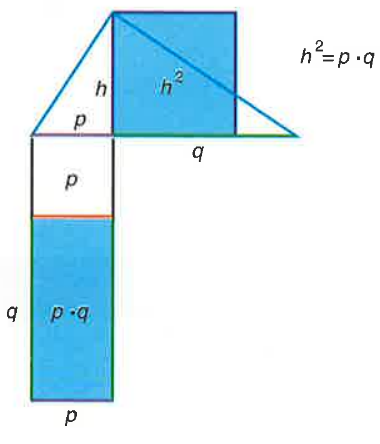
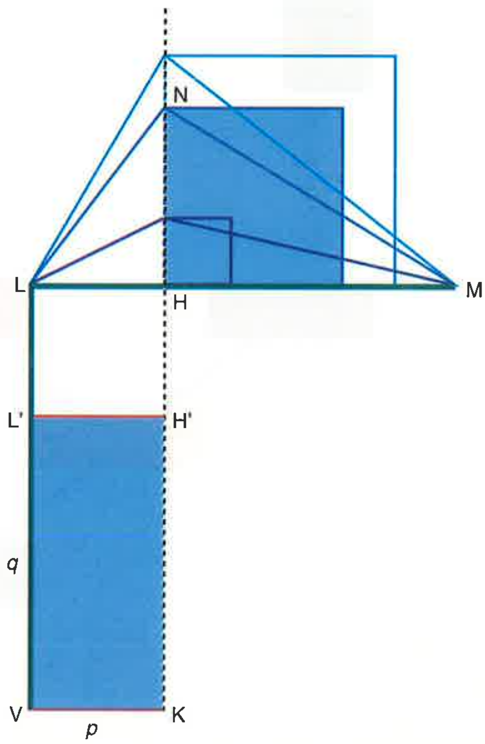


Figura 5
Il secondo teorema di Euclide vale solo per i triangoli rettangoli



Applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide

I teoremi di Pitagora e di Euclide

Nei paragrafi 1, 2 e 3 sono state presentate delle proprietà valide per un qualunque triangolo rettangolo (fig. 1):

- *il teorema di Pitagora*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- *il primo teorema di Euclide*

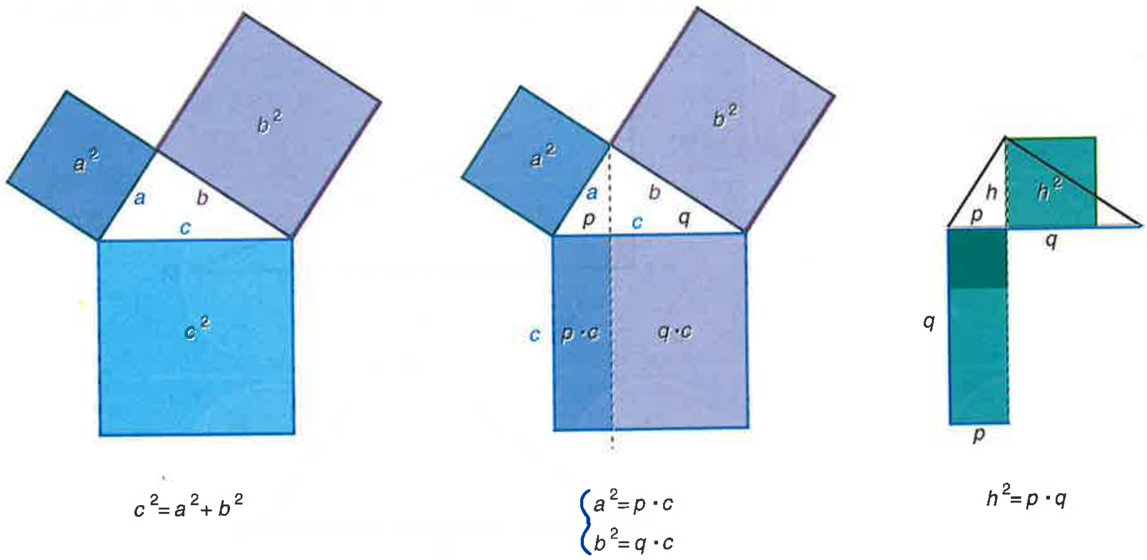
$$a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$$

- *il secondo teorema di Euclide*

$$h^2 = p \cdot q$$

Questi teoremi collegano dunque vari elementi di un triangolo rettangolo (lati,

Figura 1
I teoremi di Pitagora e di Euclide



altezza relativa all'ipotenusa, proiezioni dei cateti sull'ipotenusa) e hanno molte applicazioni, fra le quali si segnalano le seguenti:

A. dati alcuni elementi di un triangolo rettangolo, ricavane altri;

B. scoprire altre proprietà delle figure geometriche.

In questa scheda sono proposti degli esempi di queste applicazioni.

A. Dati alcuni elementi di un triangolo rettangolo ricavarne altri

Attività 1

Disegnare il triangolo rettangolo LMN, che ha i due cateti lunghi 5 e 12 (fig. 2*a*); quanto è lunga l'ipotenusa?

Indicata con x *la lunghezza incognita dell'ipotenusa, si applica il teorema di Pitagora, che lega direttamente i tre lati del triangolo, e si scrive:*

$$x^2 = \dots\dots\dots$$

Così si ottiene x^2, *cioè il quadrato di* x, *e bisogna risalire al valore di* x. *In questo caso è facile calcolare* x *perché risulta:*

$$\dots\dots\dots = 13^2$$

e perciò da

$$x^2 = 13^2$$

si ricava subito:

$$x = 13$$

Attività 2

Disegnare il triangolo rettangolo PQR, che ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10 (fig. 2*b*); quanto è lungo l'altro cateto?

Anche questo problema si risolve applicando il teorema di Pitagora; indicata con x *la lunghezza incognita del cateto, si scrive:*

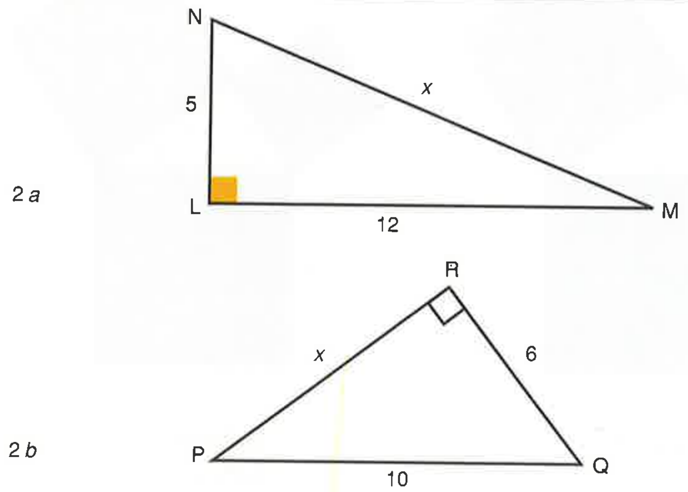
$$x^2 + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

da cui si può ricavare

$$x^2 = \dots\dots\dots$$

Così si ottiene ancora una volta il quadrato di x, *da cui però si può ricavare il*

Figura 2
Applicare il teorema di Pitagora



valore di x, *tenendo presente che risulta*:

$$\ldots\ldots\ldots = 8^2$$

e perciò da

$$x^2 = 8^2$$

si ottiene subito:

$$x = \ldots\ldots$$

Attività 3

Disegnare il triangolo rettangolo LMN, che ha l'ipotenusa LM lunga 8 e la proiezione del cateto LN sull'ipotenusa lunga 2; quanto è lungo il cateto LN?

Ora conviene applicare il primo teorema di Euclide perché non sono dati i due lati del triangolo ma solo l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. Indicata con x *la lunghezza incognita del cateto, si scrive*:

$$x^2 = \ldots\ldots\ldots \text{ da cui } \quad x = 4$$

Attività 4

Disegnare il triangolo rettangolo LMN che ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 9 e 16; determinare l'altezza relativa all'ipotenusa e i lati del triangolo.

Altezza relativa all'ipotenusa

Conviene applicare il secondo teorema di Euclide, l'unico in cui compare questo elemento. Indicata con x *la lunghezza incognita dell'altezza relativa all'ipotenusa, si scrive*:

$$x^2 = \ldots\ldots\ldots \text{ da cui } \quad x = 12$$

Ipotenusa

È ovviamente la somma delle due proiezioni.

Cateti

Si hanno ora a disposizione almeno due alternative:

1. *Applicare il primo teorema di Euclide* (fig. 3*a*);
2. *Applicare il teorema di Pitagora ai triangoli LHN e NHM* (fig. 3*b*).

Sviluppare i due procedimenti, verificando che i lati del triangolo sono lunghi 15, 20 *e* 25.

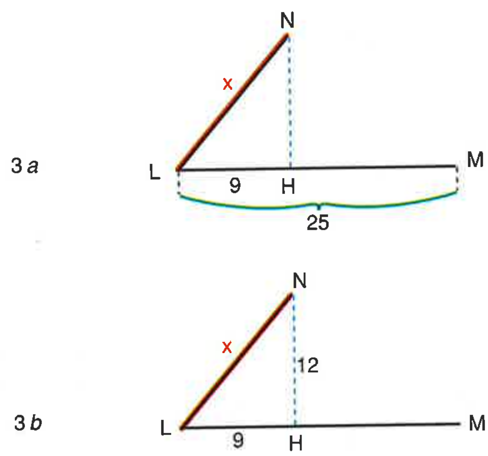


Figura 3
Calcolare i cateti di un triangolo rettangolo

B. Scoprire proprietà di triangoli non rettangoli

Attività 5

Cercare una relazione fra i lati di un triangolo acutangolo.
Esaminare i due triangoli di fig. 4:

- LMN è rettangolo in N e quindi ha i lati lunghi a, b, c legati dal teorema di Pitagora:

  $$c^2 = a^2 + b^2$$

- LMN' ha l'angolo in N' acuto e quindi ha i lati lunghi m, n, c che *non* sono legati dal teorema di Pitagora.

Tuttavia, tracciando l'altezza LH si possono individuare, all'interno del triangolo LMN', due triangoli rettangoli a cui applicare il teorema di Pitagora (fig. 5):

- LN'H, che ha l'ipotenusa lunga m ed i cateti lunghi h e p e quindi risulta:

  $$m^2 = \boxed{\quad\quad\quad} \qquad (1)$$

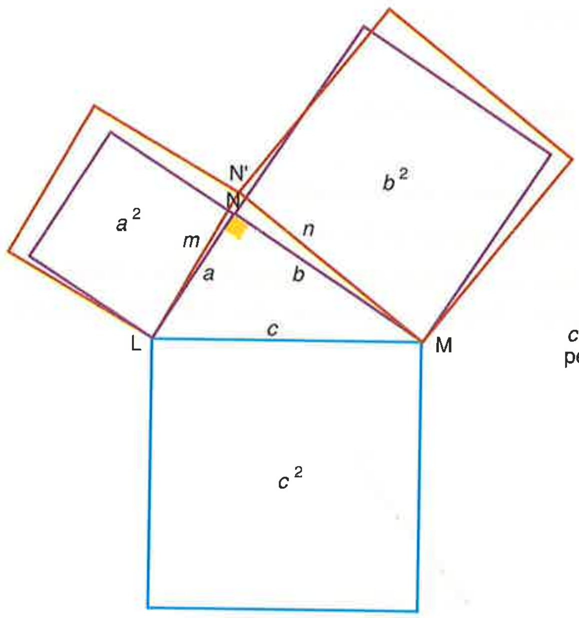
- LHM, che ha l'ipotenusa lunga c ed i cateti lunghi h e $n-p$ e quindi si ha:

  $$c^2 = \text{.............} \text{ ossia } c^2 = \boxed{\quad\quad\quad} + \text{.............} \qquad (2)$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene

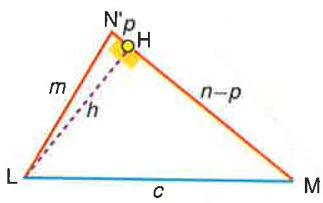
$$\boldsymbol{c^2 = m^2 + n^2 - 2np}$$

Figura 4
Il teorema di Pitagora non vale per i triangoli acutangoli



$c^2 = a^2 + b^2$
per il triangolo rettangolo

Figura 5
Una proprietà dei triangoli acutangoli



$c^2 = m^2 + n^2 - 2np$
per un triangolo acutangolo

Si precisa così il risultato suggerito dalla fig. 4: nel caso del triangolo acutangolo i quadrati di area m^2 e n^2 sono troppo grandi e perciò la loro somma supera il quadrato di area c^2; per ottenere c^2 si deve togliere alla somma $m^2 + n^2$ il rettangolo di area $2np$.

Attività 6

Cercare una relazione fra i lati di un triangolo ottusangolo.

Esaminare i due triangoli di figura 6:

- LMN è rettangolo in N e perciò ha i lati legati dal teorema di Pitagora;
- LMN" ha l'angolo in N" ottuso e quindi ha i lati lunghi m, n, c che *non* sono legati dal teorema di Pitagora.

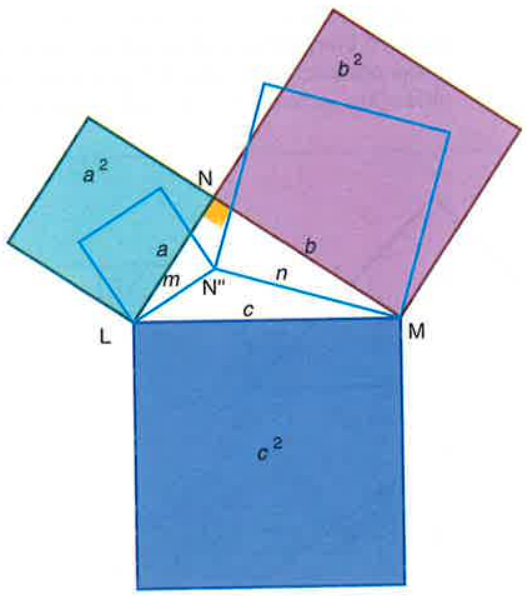
Nel triangolo LMN" tracciare l'altezza LH (fig. 7) e applicare il teorema di Pitagora ai triangoli LHN" e LHM.

Verificare che si ottiene:

$$c^2 = m^2 + n^2 + 2np$$

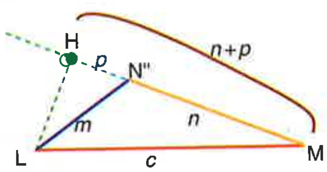
Anche in questo caso si precisa il risultato suggerito dalla fig. 6: nel caso del triangolo ottusangolo i quadrati di area m^2 e n^2 sono troppo piccoli e perciò la loro somma non raggiunge il quadrato di area c^2. Per ottenere c^2 si deve aggiungere alla somma $m^2 + n^2$ il rettangolo di area $2np$.

Figura 6
Il teorema di Pitagora non vale per i triangoli ottusangoli



$c^2=a^2+b^2$
per un triangolo rettangolo

Figura 7
Una proprietà valida per i triangoli ottusangoli



$c^2=m^2+n^2+2np$
per un triangolo ottusangolo

4

Dalla geometria alla scoperta dei numeri irrazionali

Due problemi di geometria che conducono a calcolare $\sqrt{2}$

Ecco due problemi di geometria che si risolvono applicando i teoremi di Pitagora e di Euclide.

1. Il triangolo rettangolo di fig. 1 ha i due cateti lunghi 1; quanto è lunga l'ipotenusa?
   Per ottenere la lunghezza x dell'ipotenusa basta applicare il teorema di Pitagora; si ottiene:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 = 2$$

2. Il triangolo rettangolo di fig. 2 ha le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 2; quanto è lunga l'altezza relativa all'ipotenusa?
   Per ottenere la lunghezza x dell'altezza relativa all'ipotenusa basta applicare il secondo teorema di Euclide; si ottiene:

$$x^2 = 1 \cdot 2 \quad \text{cioè} \quad x^2 = 2$$

In questi casi non si trova subito qual è il numero che, elevato al quadrato, dà 2; per ottenerlo occorre un elaborato procedimento che è chiamato *estrazione di radice quadrata* ed è

Figura 1
Un'applicazione del teorema di Pitagora

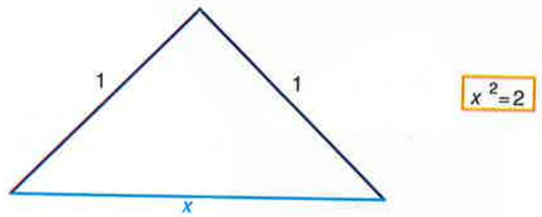
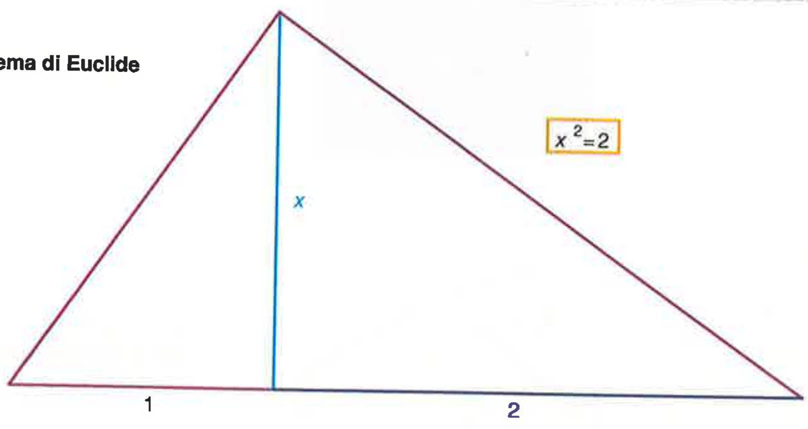


Figura 2
Un'applicazione del secondo teorema di Euclide



indicato con il simbolo $\sqrt[2]{\ }$ o più spesso $\sqrt{\ }$.
Si ha dunque che:

$$\text{da } x^2 = 2 \quad \text{si ricava } x = \sqrt{2}$$

Alla ricerca del risultato di $\sqrt{2}$

Per calcolare $\sqrt{2}$ non vale la pena di eseguire il procedimento di estrazione di radice quadrata, visto che il risultato viene dato dalle tavole numeriche o da qualunque calcolatore tascabile:

- sulle tavole numeriche si trova il risultato 1,4142;
- alcuni calcolatori forniscono il risultato 1,4142136;
- altri calcolatori forniscono il risultato 1,414213562.

Ora, per riconoscere il risultato esatto c'è un ovvio procedimento: il risultato esatto, elevato al quadrato, deve dare 2.

Ecco invece che cosa si ottiene elevando al quadrato i numeri elencati prima:

$$(1{,}4142)^2 = 1{,}99996164$$

$$(1{,}4142136)^2 = 2{,}00000010642496$$

$$(1{,}414213562)^2 = 1{,}999999998944727844$$

Dunque, nessuno dei risultati è esatto, neanche quello con nove cifre dopo la virgola; quante cifre decimali avrà il risultato esatto?
Per studiare questa situazione si ricorda che i numeri razionali, scritti in forma decimale, danno luogo a due soli casi possibili:

I. decimali finiti (per esempio $\frac{3}{4} = 0{,}75$)

II. decimali infiniti ma periodici (per esempio $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$).

Perciò, per il risultato di $\sqrt{2}$, si possono avere le seguenti situazioni:

A. si tratta di un numero razionale, e allora si dovrà continuare a cercare la fine delle cifre dopo la virgola o il periodo, in modo da arrivare a scrivere il risultato esatto;

B. si tratta di un nuovo tipo di numero che non è razionale, e allora è inutile continuare le ricerche.

Perché $\sqrt{2}$ non può avere un risultato razionale

Risale agli antichi greci la conclusione delle ricerche su $\sqrt{2}$: *il numero che, elevato al quadrato, dà 2 non è razionale.*

Ecco come si arriva a questa conclusione.

1. *Si esclude che $\sqrt{2}$ possa avere risultato intero*

Infatti si ha che:

- $1^2 = 1$ e perciò 1 è troppo piccolo;
- $2^2 = 4$ e perciò 2 è troppo grande;
- non c'è nessun intero fra 1 e 2.

2. *Si esclude che $\sqrt{2}$ possa avere come risultato una frazione*

Si può cominciare con un caso particolare, verificando, per esempio, che il risultato non può essere la frazione

$$\frac{14}{10}$$

Allora si procede così:

I. si riduce la frazione ai minimi termini, in modo da avere i due termini primi fra loro, cioè senza divisori comuni; si ha:

$$\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

con 7 e 5 che sono due numeri privi di divisori comuni.

II. si verifica se la frazione $\frac{7}{5}$, elevata al quadrato, dà 2; si ha:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$$

e non può risultare:

$$\frac{7^2}{5^2} = 2 \quad \text{ossia} \quad 7^2 = 2 \cdot 5^2$$

$$\text{cioè} \quad 49 = 2 \cdot 5 \cdot 5$$

perché 49, scomposto in fattori, non può presentare il fattore 2.

Questo stesso ragionamento si può ripetere per escludere che $\sqrt{2}$ abbia come risultato una qualunque frazione $\frac{p}{q}$ con p e q primi fra loro: non può risultare:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{ossia} \quad p^2 = 2q^2$$

perché p^2 e q^2 non possono avere il fattore 2 in comune.

I numeri irrazionali sono decimali infiniti e non periodici

Il ragionamento precedente porta ad escludere che il risultato di $\sqrt{2}$ sia razionale; quindi la corrispondente scrittura decimale non potrà essere né finita, né periodica.
Si otterrà dunque un decimale con infinite cifre dopo la virgola e senza un periodo che si ripete.
Il risultato ora ottenuto porta ad osservare la successione dei naturali, a cominciare dai numeri scritti qui sotto:

$\mathbf{1 = 1^2}$	2	3	$\mathbf{4 = 2^2}$	5
6	7	8	$\mathbf{9 = 3^2}$	10
11	12	13	14	15
$\mathbf{16 = 4^2}$	17	18	19	20

Si osserva subito che i quadrati perfetti sono pochi; si ha:

$$\sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4$$

Avranno invece un risultato decimale infinito e non periodico le radici quadrate di tutti gli altri numeri che non sono quadrati perfetti; per esempio, non sono razionali i risultati di:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt{6} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt{8}$$

Per convincersi di questo, basta ripetere il ragionamento che ha condotto ad escludere che $\sqrt{2}$ è razionale.
Tutti questi numeri che non sono razionali prendono il nome di *numeri irrazionali*.
Più in generale, *sono irrazionali tutti i numeri decimali infiniti non periodici*.
Può sembrare difficile trovare dei numeri di questo tipo, perché le cifre decimali sono solo nove e, quindi, dovranno ricomparire. Invece è facile scrivere dei numeri in cui le cifre decimali ricompaiono, ma sempre in un ordine diverso; ecco qualche esempio:

1,234567891011121314151617181920...

2,468101214161820222426283O3234...

13,5791113151719212325272931 33...

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa si intende con il termine «numero irrazionale»?
② Portare qualche esempio di numero irrazionale.

Comprensione

① Spiegare perché il risultato di $\sqrt{3}$ non può essere razionale.
② Spiegare perché il risultato di $\sqrt{25}$ è razionale.

Applicazioni

① Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 1 e 2; calcolare la lunghezza dell'ipotenusa. Il risultato è razionale o irrazionale?
② Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 6 e l'ipotenusa lunga 10; calcolare la lunghezza dell'altro cateto. Il risultato è razionale o irrazionale?
③ Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 1 e l'ipotenusa lunga 2; calcolare la lunghezza dell'altro cateto. Il risultato è razionale o irrazionale?
④ Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 1 e 6; calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa. Il risultato è razionale o irrazionale?

5 I radicali quadratici

Valori approssimati di $\sqrt{2}$

Nel paragrafo precedente si è visto come il numero che, elevato al quadrato, dà 2 non può essere razionale.
Questo vuol dire che l'operazione di estrazione di radice quadrata non arriva mai a conclusione e potrebbe essere continuata indefinitamente: si potrebbero così trovare 10, 100, 1000 cifre dopo la virgola, ma non si troverebbe mai un periodo, né si arriverebbe mai a concludere l'operazione.
Dunque, *con la scrittura decimale, non si riesce a rappresentare esattamente il risultato di* $\sqrt{2}$.
Si dovranno allora riprendere i procedimenti di approssimazione introdotti nel primo volume (pp. 55-56) e procedere, per esempio, in uno dei modi seguenti:

- arrotondare il risultato alla prima cifra decimale (cioè a meno di $0{,}1=10^{-1}$), scrivendo:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}4$$

- arrotondare il risultato alla seconda cifra decimale (cioè a meno di $0{,}01=10^{-2}$), scrivendo:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41$$

- arrotondare il risultato all'ottava cifra decimale (cioè a meno di 10^{-8}), scrivendo:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41421356$$

In ogni caso si dovrà sempre scrivere «≅», simbolo che si legge «circa uguale», perché il numero decimale non darà mai il risultato esatto, ma solo un valore approssimato.

Il numero $\sqrt{2}$

Con procedimenti geometrici è invece possibile disegnare un segmento lungo proprio $\sqrt{2}$.

- nel triangolo rettangolo di fig. 1 l'ipotenusa ha una lunghezza x, che dà esattamente $x^2 = 2$;
- nel triangolo rettangolo di fig. 2 l'altezza relativa all'ipotenusa ha una lunghezza y, che dà esattamente $y^2 = 2$.

Figura 1
Un triangolo la cui ipotenusa è lunga $\sqrt{2}$

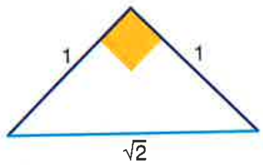
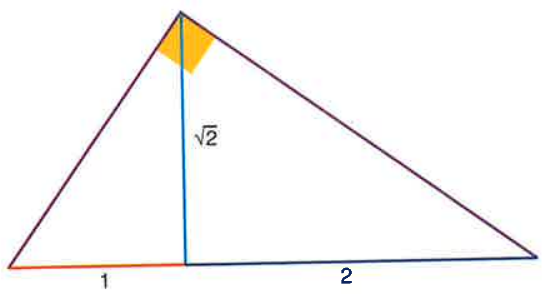


Figura 2
Un triangolo la cui altezza relativa all'ipotenusa è lunga $\sqrt{2}$



Proprio perché questo risultato esatto si riesce a vedere, ma non a scrivere in forma decimale, si è introdotto il simbolo

$$\sqrt{2}$$

(che si legge «radice di 2»): questo simbolo indica il numero che, elevato al quadrato, dà *esattamente* 2.
In questo modo *il simbolo* $\sqrt{2}$ *non indica più un'operazione di radice quadrata da eseguire, ma il risultato esatto dell'operazione;* si ha dunque che:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

E invece si scrive:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41$$

cioè 1,41 è il valore approssimato del numero $\sqrt{2}$, dato che risulta:

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$$

I radicali

Il simbolo $\sqrt{2}$, che è scritto valendosi del segno di radice ($\sqrt{\ }$) prende anche il nome di *radicale*.

Ecco degli esempi di altri radicali ottenuti con semplici costruzioni geometriche.

1. *Applicare il teorema di Pitagora*

In fig. 3 sono disegnati i seguenti triangoli rettangoli:
- il triangolo rettangolo ABC ha i cateti lunghi 1 e quindi l'ipotenusa BC lunga $\sqrt{2}$;
- il triangolo rettangolo BCD ha i cateti lunghi 1 e $\sqrt{2}$ e quindi l'ipotenusa BD ha una lunghezza x data da:

$$x^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1+2 \quad \text{ossia} \quad x^2 = 3$$

da cui

$$x = \sqrt{3}$$

- il triangolo rettangolo BDE ha i cateti lunghi 1 e $\sqrt{3}$ e quindi l'ipotenusa BE ha una lunghezza y data da:

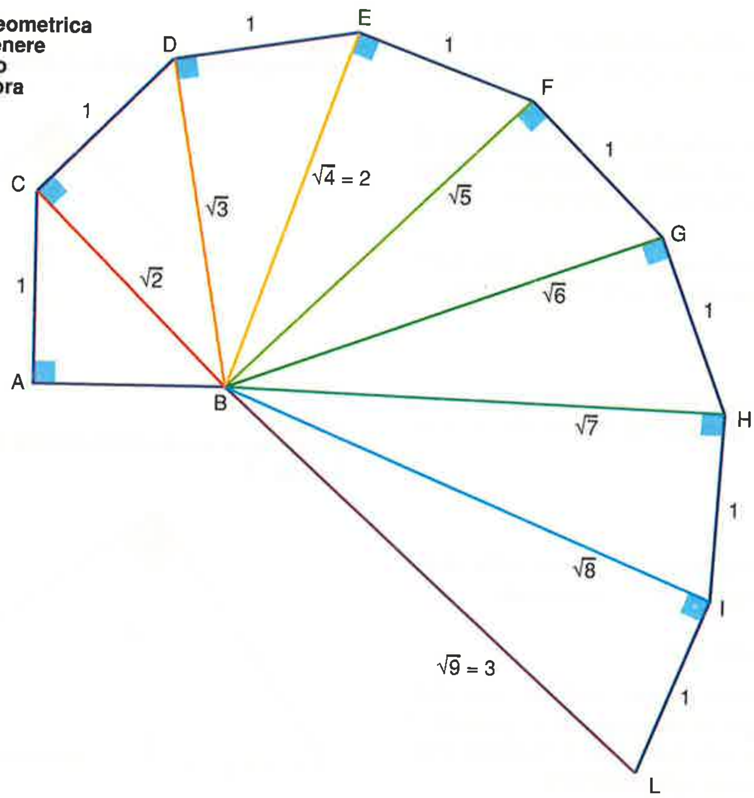
$$y^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1+3 \quad \text{ossia} \quad y^2 = 4$$

da cui

$$y = 2$$

- il triangolo rettangolo BEF ha i cateti lunghi 1 e 2 e quindi l'ipotenusa BF ha una lunghez-

Figura 3
Una costruzione geometrica che conduce a ottenere radicali, applicando il teorema di Pitagora



za z data da:

$$z^2 = 1^2+2^2 = 1+4 \quad \text{ossia} \quad z^2 = 5$$

$$\text{da cui } z = \sqrt{5}$$

E così si può continuare, trovando altri segmenti che permettono di visualizzare tanti altri numeri irrazionali scritti per mezzo di radicali; per esempio:

$$\sqrt{6} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt{8} \qquad \sqrt{10}$$

2. *Applicare il secondo teorema di Euclide*

In fig. 4*a* si è effettuata la seguente costruzione:

- si è disegnato un segmento AB, composto di due parti: AH lunga 1 e HB lunga 2;
- si è disegnata la semiretta Hr, perpendicolare a AB in H;
- si è tracciata la semicirconferenza di diametro AB, individuando su r il punto C;
- si è costruito il triangolo ABC, che è rettangolo perché l'angolo in C è inscritto in una semicirconferenza (vedi il primo volume, p. 145);
- si è applicato al triangolo ABC il secondo teorema di Euclide, indicando con x la lunghezza di HC ed ottenendo quindi:

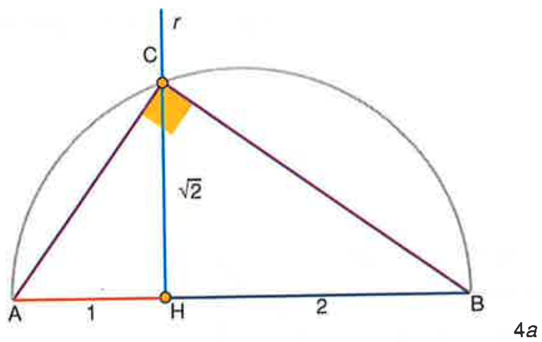
$$x^2 = 2 \qquad \text{da cui } x = \sqrt{2}$$

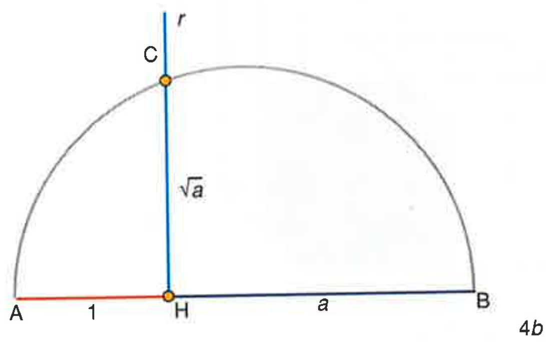
Si osserva che, per ottenere il segmento HC lungo $\sqrt{2}$, non c'è bisogno di disegnare il triangolo rettangolo: basta disegnare la semiretta Hr e la semicirconferenza di diametro AB.

Si ha così un procedimento di carattere generale per visualizzare un radicale $\sqrt{a}$, dove a è un numero positivo (fig. 4*b*):

- si disegna un segmento AB, composto di due parti: AH lunga 1 e HB lunga a;
- si disegna la semiretta Hr, perpendicolare a AB in H;
- si traccia la semicirconferenza di diametro AB, individuando sulla semiretta il punto C;
- il segmento HC è lungo proprio $\sqrt{a}$.

Figura 4
Una costruzione basata sul secondo teorema di Euclide per ottenere radicali





Verifiche

Conoscenze

① Quanto vale il quadrato di $\sqrt{5}$?

② Spiegare perché le formule seguenti sono tutte sbagliate e correggere gli errori

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{4} \cong 2$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 \cong 2 \qquad (1{,}41)^2 = 2$$

Comprensione

① Il quadrato di $\sqrt{2}$ è un numero razionale o irrazionale?

② Sulle tavole numeriche si trova, in corrispondenza della radice quadrata di 52, il numero 7,2111; scegliere fra le seguenti formule quella corretta, spiegando perché le altre sono sbagliate:

$$\sqrt{52} = 7{,}2111 \qquad \sqrt{52} = 7{,}2(1)$$

$$\sqrt{52} \cong 7{,}2111$$

Applicazioni

① Costruire due segmenti: uno lungo $\sqrt{6}$ e l'altro lungo $\sqrt{12}$; il secondo segmento è il doppio del primo?

6

I radicali: il caso generale

Altri numeri irrazionali espressi con radicali

Ecco un problema che conduce a scoprire altri numeri irrazionali espressi con radicali.
In fig. 1 sono disegnati due cubi:

- il cubo che ha il lato lungo 1 e il volume $V = 1^3 = 1$;
- il cubo che ha il lato lungo 2 e il volume $V' = 2^3 = 8$.

Quanto è lungo il lato del cubo di volume 2?
Il lato non può valere 2, perché in questo caso il volume vale 8; invece, indicata con x la lunghezza incognita del lato, deve essere:

$$x^3 = 2$$

Ora, il numero che, elevato al cubo, dà 2 non può essere razionale; per rendersene conto basta ripetere un ragionamento analogo a quello seguito nel paragrafo 4 a proposito di $\sqrt{2}$.
Il numero che, elevato al cubo, dà *esattamente* 2 si indica allora con il simbolo $\sqrt[3]{2}$ (che si legge «radice cubica di 2»). Così si scrive:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$

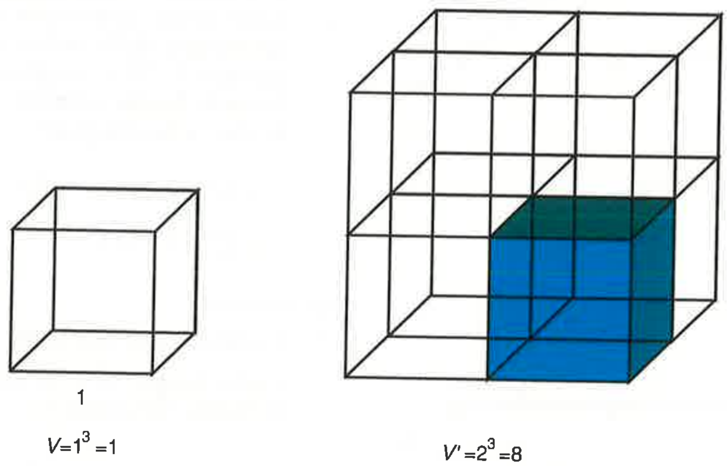
Il valore approssimato di questo numero è dato dalle tavole numeriche o dal calcolatore tascabile e è:

$$\sqrt[3]{2} \cong 1,26$$

cioè 1,26 è il valore approssimato del numero $\sqrt[3]{2}$, dato che risulta:

$$(1,26)^3 = 2,000376$$

Figura 1
Il cubo di lato 1 e il cubo di lato 2



Il risultato ora ottenuto porta ad osservare di nuovo la successione dei naturali, a partire dai numeri scritti qui sotto:

$1=1^3$	2	3	4	5	6	7
$8=2^3$	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	**$27=3^3$**	28

Si osserva che sono pochi i cubi di numeri naturali; si ha in questo elenco:

$$\sqrt[3]{1}=1 \qquad \sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{27}=3$$

Hanno invece un risultato decimale infinito e non periodico le radici cubiche di tutti gli altri numeri; il risultato esatto di tali radici viene espresso per mezzo di radicali, scrivendo, per esempio:

$$\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{9} \quad \sqrt[3]{16}$$

Il valore approssimato di questi numeri è dato dalle tavole numeriche o dal calcolatore tascabile; si trova, considerando per esempio i decimali arrotondati con due cifre dopo la virgola:

$$\sqrt[3]{4} \cong 1{,}59 \qquad \sqrt[3]{9} \cong 2{,}08 \qquad \sqrt[3]{16} \cong 2{,}52$$

I radicali

Osservando meglio i radicali scritti prima, si osserva che in molti casi il numero scritto sotto radice è una potenza; si ha per esempio:

$$4=2^2 \qquad 9=3^2 \qquad 16=2^4$$

perciò risulta:

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2} \qquad \sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2} \qquad \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}$$

Si è dunque arrivati a scrivere dei numeri irrazionali con le seguenti formule:

$$\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[3]{3^2} \quad \sqrt[3]{2^4}$$

Tutti questi numeri irrazionali sono caratterizzati dalla stessa proprietà: elevati ad esponente 3, riproducono esattamente il numero sotto radice. Si ha per esempio:

$$\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^3=2^4$$

Le formule finora ottenute sono del tipo:

$$\sqrt[n]{a^m}$$

e prendono sempre il nome di *radicali*, descritti generalmente mediante i seguenti termini:

- il numero n sopra la radice si chiama *indice del radicale*;
- il numero a^m sotto il segno di radice si chiama *radicando*, termine di origine latina, che significa «ciò di cui si deve estrarre la radice»;
- il numero m, esponente di a, è *l'esponente del radicando*.

I radicali sono caratterizzati dalla seguente proprietà: elevati a esponente n riproducono il numero sotto radice; risulta dunque:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n=a^m$$

Così, per esempio, nella formula:

$$\sqrt[3]{2^4}$$

si ha che:

- l'indice del radicale è 3;
- il radicando è 2^4;
- l'esponente del radicando è 4;
- risulta:

$$\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^3=2^4$$

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa significa il simbolo $\sqrt[n]{a^m}$?

② Esaminare il simbolo $\sqrt[3]{7^2}$ e indicare:
- l'indice del radicale;
- il radicando;
- l'esponente del radicando.

Comprensione

① Spiegare la differenza fra:

$$\sqrt[3]{3^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{2^3}$$

Applicazioni

① Quanto vale il volume del cubo di lato $\sqrt[3]{5}$?

② È dato un cubo che ha il lato lungo 2; risolvere i seguenti quesiti:
   a. calcolare il volume V del cubo;
   b. calcolare il lato del cubo che ha volume W metà del cubo dato;
   c. calcolare il volume V' del cubo che ha il lato metà del cubo dato.

7 Potenze a esponente frazionario

L'idea degli esponenti frazionari

Nel paragrafo precedente si sono ottenuti vari numeri irrazionali espressi sotto forma di radicale; per esempio:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} \qquad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4}$$

Le formule ottenute prima portano ad osservare meglio i casi in cui la radice cubica ha risultato intero; si ha per esempio:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

cioè:

$$\sqrt[3]{2^3} = 2^1 \qquad (1)$$

La radice cubica ha dunque l'effetto di «trasformare» l'esponente del radicando: 3 «diventa» 1. D'altra parte questo stesso risultato si ottiene moltiplicando 3 per il suo reciproco $\frac{1}{3}$.

Si è così condotti a scrivere che risulta:

$$2^1 = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \qquad (2)$$

Quest'ultima formula suggerisce di applicare una nota proprietà delle potenze, e cioè:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Così si scrive:

$$2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

e, quindi, sostituendo quest'ultima espressione nella (2), si ha:

$$2^1 = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

Perciò si può riscrivere la (1) nella forma seguente:

$$\sqrt[3]{2^3} = (2^3)^{\frac{1}{3}}$$

ossia:

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$$

In questo modo il radicale viene sostituito da una *potenza ad esponente frazionario.*

Forse sono state proprio considerazioni di questo tipo a suggerire al matematico fiammingo Simon Stevin di introdurre gli esponenti frazionari in una sua opera del 1585.

Gli esponenti frazionari si affiancano così al simbolo $\sqrt{\ }$, introdotto circa quarant'anni prima dal matematico tedesco Michael Stifel.

I due simboli – radicali ed esponenti frazionari – si trovano entrambi nei successivi sviluppi della matematica: alcuni matematici hanno adottato prevalentemente i radicali, altri si valgono delle potenze ad esponente frazionario.

Gli esponenti frazionari possono sostituire i radicali con indice 2 o 3

Gli esponenti frazionari possono dunque sostituire i radicali cubici finora introdotti; ecco qualche altro esempio.

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$$

Anche le radici quadrate possono essere sostituite da esponenti frazionari: il simbolo $\sqrt{\ }$ (abbreviazione di $\sqrt[2]{\ }$) può essere sostituito dalla potenza con esponente $\frac{1}{2}$; l'idea è suggerita dal fatto che risulta:

$$\sqrt{9} = 3$$

cioè

$$\sqrt[2]{3^2} = 3^1 = 3^{2\cdot\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}}$$

E perciò si è condotti a scrivere:

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$$

E analogamente si scrive per esempio:

$$\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{32} = 32^{\frac{1}{2}}$$

Radicali con indice maggiore di 3 e loro significato

Si può ora applicare agli esponenti frazionari la proprietà delle potenze richiamata prima e cioè:

$$a^{m\cdot n} = (a^m)^n$$

Ecco un esempio da esaminare:

$$\left(32^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 32^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \mathbf{32^{\frac{1}{6}}}$$

Qual è il significato del numero $32^{\frac{1}{6}}$ così ottenuto?

Per capire meglio di che cosa si tratta si possono ripetere alcune considerazioni svolte nel paragrafo precedente. Elevando a esponente 6 il numero, si ha:

$$\left(32^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 32^{6\cdot\frac{1}{6}} = 32^1$$

Questa stessa uguaglianza si esprime per mezzo di radicali, scrivendo:

$$\left(\sqrt[6]{32}\right)^6 = 32$$

Si trova dunque che:

$\sqrt[6]{32} = 32^{\frac{1}{6}}$ è il numero che, elevato ad esponente 6, dà 32.

Si può ora osservare che risulta:

$$32 = 2^5$$

e quindi

$$32^{\frac{1}{6}} = (2^5)^{\frac{1}{6}} = 2^{5\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

Perciò si può dire che:

$\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$ è il numero che, elevato ad esponente 6, dà 2^5

I procedimenti seguiti conducono a risultati di carattere generale: indicati con a, m, n tre qualunque numeri interi positivi, si ha che:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ è il numero che, elevato ad esponente n, dà a^m

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Spiegare il significato del simbolo $a^{\frac{m}{n}}$.

Comprensione

① Esporre le considerazioni che hanno condotto a scrivere:

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$$

② Esporre le considerazioni che hanno condotto a scrivere:

$$\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$$

③ Spiegare la differenza fra le seguenti scritture:

$$3^{\frac{1}{3}} \quad 3\cdot\frac{1}{3} \quad 3^{3\cdot\frac{1}{3}} \bullet (3\cdot 3)^{\frac{1}{3}}$$

Applicazioni

① Scrivere sotto forma di radicale le seguenti potenze a esponente frazionario:

$$4^{\frac{2}{5}} \quad 4^{\frac{5}{2}} \quad 21^{\frac{1}{7}} \quad 24^{\frac{3}{8}}$$

② Scrivere sotto forma di potenza a esponente frazionario i seguenti radicali:

$$\sqrt{5^3} \quad \sqrt[3]{2^4} \quad \sqrt[5]{3^4} \quad \sqrt[8]{2^7}$$

Le radici con il calcolatore tascabile

Il tasto con il simbolo $\boxed{\sqrt{\ }}$

Il tasto con il simbolo $\boxed{\sqrt{\ }}$ serve per calcolare la radice quadrata di un numero e si usa nel modo seguente:

I. si digitano le cifre che compongono il numero;

II. si preme il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Attività 1

Conviene provare subito questo tasto, completando la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
$\sqrt{9}$	$\boxed{9}\ \boxed{\sqrt{\ }}$	3.
$\sqrt{324}$	$\square\ \square\ \square\ \square$	
$\sqrt{2}$ Testo	$\square\ \square$	

Completando la tabella si osserva un fatto: *il calcolatore esegue subito l'estrazione di radice quadrata, senza aspettare il tasto* $\boxed{=}$.

Calcolare le radici con il tasto $\boxed{y^x}$

Il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$ permette di calcolare solo le radici quadrate; *per calcolare le radici con indice superiore a 2, si usa invece il tasto contrassegnato con il simbolo* $\boxed{y^x}$ (o $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^x}$).

In tal caso bisogna ricordare:

I. il significato delle potenze ad esponente frazionario (vedi i paragrafi 6 e 7 di questo capitolo);

II. la priorità delle operazioni e il ruolo delle parentesi (vedi il primo volume, p. 36);

III. come si usa il tasto $\boxed{y^x}$ (vedi il primo volume, pp. 30-31).

Attività 2

Conviene riprendere subito le nozioni indicate per completare la tabella seguente:

Calcolo	Tasti	Visualizzatore
$\sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}} = 243^{(1:5)}$	$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{y^x}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{)}\boxed{=}$	3.
$243^1 : 5$	$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{y^x}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{=}$	48.6
$\sqrt[4]{16} =$	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	
	$\boxed{1}\boxed{6}\boxed{y^x}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{=}$	

La prima riga della tabella ricorda come usare il tasto $\boxed{y^x}$:

I. si digitano le cifre che fissano la base della potenza;

II. si preme il tasto $\boxed{y^x}$;

III. si introduce l'esponente;

IV. si preme il tasto $\boxed{=}$ per eseguire il calcolo.

Il passo (III) richiede ora di introdurre un esponente che è il risultato di una divisione; quindi, per esempio, per calcolare $\sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}}$ si deve procedere nel modo seguente:

- prima calcolare il quoziente 1:5 = 0,2;
- successivamente calcolare la potenza $243^{0,2}$.

Questo significa che si deve alterare la priorità delle operazioni e perciò si debbono usare le parentesi.

La seconda riga della tabella mostra infatti il risultato che si ottiene omettendo le parentesi: si mantiene la priorità delle operazioni e perciò si calcola:

- prima la potenza $243^1 = 243$;
- successivamente il risultato della divisione 243:5 = 48,6.

Le radici quadrate ripetute di un numero

Alcune radici di indice superiore a 2 si possono ottenere senza usare il tasto $\boxed{y^x}$ e usando invece il tasto $\boxed{\sqrt{}}$ più volte. Ecco due esempi:

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[8]{5} = 5^{\frac{1}{8}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \left[\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$$

Si osserva dunque che, ripetendo più volte l'estrazione di radice quadrata, si ottengono radicali che hanno i seguenti indici:

$4 = 2^2$ $\quad$ $8 = 2^3$ $\quad$ $16 = 2^4$ $\quad$ ...

Questi esempi suggeriscono delle conclusioni di carattere generale:

- ripetendo più volte l'estrazione di radice quadrata, si ottengono radicali con l'indice che è una potenza di 2;
- viceversa, radicali con l'indice che è una potenza di 2 possono essere ottenuti con il calcolatore usando ripetutamente il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Attività 3

Digitare il numero 2 e poi premere tante volte il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$; ripetere l'attività a partire da altri numeri, per esempio 3 o 0,1.

Si otterrà, in tutti i casi, una successione di numeri che si avvicina sempre di più a 1 e, ad un certo punto, il visualizzatore mostrerà proprio 1.

Per capire questo risultato, completare la seguente tabella, in cui a indica un qualunque numero positivo.

Numero di volte che si preme il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$	Potenza	Esponente
1	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5}$	0,5
2	$\sqrt[4]{a} =$	
3		
10		

Dunque, a partire da un qualunque numero positivo a, continuando a premere il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$ si ottengono esponenti che si avvicinano a 0; le corrispondenti potenze si avvicinano perciò al valore:

$$a^0 = 1$$

Ad un certo punto, il calcolatore arrotonderà l'esponente a 0 e darà proprio il risultato 1.

Valori approssimati dati da un calcolatore tascabile

Un calcolatore tascabile lavora solo con numeri decimali finiti e perciò dà solo un valore approssimato dei numeri irrazionali.

Per capire come il calcolatore approssima i numeri irrazionali che provengono dall'estrazione di radice, si può esaminare la seguente tabella, dove sono indicati alcuni risultati dati dai tascabili più comuni.

Tasti	Visualizzatore	Espressione calcolata	Commenti
$\boxed{2}\,\boxed{\sqrt{\ }}$	1.4142136	$\sqrt{2}$	valore approssimato di $\sqrt{2}$
$\boxed{x^2}$	2.	$(\sqrt{2})^2$	è il quadrato del numero precedente
$\boxed{-}\,\boxed{2}\,\boxed{=}$	-3. -10	$(\sqrt{2})^2 - 2$	si ottiene $-3 \cdot 10^{-10} = -0{,}0000000003$

I risultati ottenuti nella seconda e terza riga destano delle perplessità per due motivi:

I. elevando al quadrato 1,4142136 non si ottiene 2, come è indicato dal calcolatore; si ha invece, eseguendo i calcoli «a mano»:

$$(1{,}4142136)^2 = 2{,}00000010642496$$

e, dato che il calcolatore mostra 7 cifre dopo la vigola, ci si aspettava il risultato 2,0000001;

II. nella seconda riga, invece, ci si aspettava il risultato;

$$2 - 2 = 0$$

Come si spiega il risultato con tante cifre dopo la virgola?

Tutto è dovuto al fatto seguente: mentre il visualizzatore mostra in tutto 8 cifre, i circuiti del calcolatore lavorano con numeri di 9 cifre; la nona cifra dunque è presente nei calcoli, ma non si può vedere sul visualizzatore.

Perciò, eseguendo $\sqrt{2}$, il calcolatore ottiene:

$$1{,}41421356 \qquad (*)$$

ma mostra solo 7 cifre dopo la virgola, arrotondando il risultato; così sul visualizzatore compare:

$$1{,}4142136$$

Se ora si prova a calcolare «a mano» il quadrato del numero (*) con nove cifre, si ottiene:

$$(1{,}41421356)^2 = 1{,}9999999932878736$$

numero che diventa proprio 2, quando viene arrotondato per mostrare solo 7 cifre dopo la virgola.

Attività 4

Completare la seguente tabella e commentare i risultati ottenuti.

Espressione da calcolare	Visualizzatore
$\left(\sqrt{6}\right)^2 - 6$	
$\left(\sqrt{101}\right)^2 - 101$	
$\left(\sqrt{1001}\right)^2 - 1001$	

Attività 5

Completare la seguente tabella e commentare i risultati ottenuti.

Espressione da calcolare	Visualizzatore
$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$	
$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 2$	
$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4$	
$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 - 5$	

8

Proprietà delle potenze e calcoli con i radicali

Elevare a potenza un radicale

L'elevazione a potenza di un radicale si esegue basandosi sulla proprietà delle potenze già richiamata nei paragrafi precedenti, e cioè:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (1)$$

dove ora al posto di m e n si possono trovare frazioni positive, mentre a indica un qualunque numero intero positivo.

Ecco qualche caso da esaminare.

1. $m = \frac{1}{p}$ $\qquad n = q$

Per esempio: $\qquad m = \frac{1}{3} \qquad n = 4$

Applicando la proprietà (1), si ha:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4 = a^{\frac{1}{3} \cdot 4} = a^{\frac{4}{3}}$$

e in generale:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = a^{\frac{1}{p} \cdot q} = a^{\frac{q}{p}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^4 = \sqrt[3]{a^4}$$

e in generale:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$$

2. $m = \frac{1}{p}$ $\qquad n = \frac{1}{q}$

Per esempio: $\qquad m = \frac{1}{3} \qquad n = \frac{1}{4}$

Applicando la proprietà (1), si ha:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$$

e in generale:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p \cdot q}}$$

Le stesse formule possono essere scritte valendosi dei radicali; si ha:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a}$$

e in generale:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$$

Moltiplicare due radicali

Per moltiplicare due radicali ci si può basare sulla seguente proprietà delle potenze:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad (2)$$

dove ora al posto di n si trova una frazione positiva, mentre a e b indicano due qualunque numeri interi positivi.

Il caso che si presenta più frequentemente è il seguente:

$$n = \frac{1}{q}$$

Per esempio: $n = \frac{1}{3}$

Applicando la proprietà (2), si ha:

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \quad \text{e in generale:}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b} \quad \text{e in generale:}$$

$$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b}$$

Ecco due esempi di applicazione di questa regola:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Questi esempi fanno capire la differenza fra i calcoli svolti valendosi dei radicali e quelli svolti con i valori approssimati dei radicali.
Infatti, nei due casi precedenti i calcoli con i valori approssimati, per esempio arrotondati alla seconda cifra decimale, conducono ai seguenti risultati:

$$\sqrt{8} \cong 2{,}83 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}41 \qquad \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cong 3{,}99$$

$$\sqrt[3]{5} \cong 1{,}71 \qquad \sqrt[3]{25} \cong 2{,}92 \qquad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cong 4{,}99$$

Dividere due radicali

Per dividere due radicali ci si baserà invece sulla seguente proprietà delle potenze:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (3)$$

dove a, b e n mantengono il significato indicato prima.
Il caso che si presenta più frequentemente è analogo a quello esaminato per moltiplicare due radicali:

$$n = \frac{1}{q}$$

Per esempio: $n = \frac{1}{3}$

Applicando la proprietà (3), si ha:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e in generale:}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Valendosi invece dei radicali, le stesse formule diventano:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{e in generale:}$$

$$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$$

Ecco un esempio di applicazione di questa regola:

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Anche in questo caso solo il calcolo con i radicali conduce al risultato esatto; altrimenti, il valore approssimato darebbe il seguente risultato:

$$\sqrt{18} \cong 4{,}24 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}41 \qquad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \cong 3{,}01$$

Radicali con radicando frazionario

La divisione di due radicali con radicando intero porta a considerare radicali che hanno come radicando una frazione.
Ecco due esempi di radicali che hanno un valore razionale:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \qquad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Il seguente radicale rappresenta invece un numero irrazionale:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}$$

Il valore approssimato di questo irrazionale si trova svolgendo i calcoli con i valori approssimati; per esempio, arrotondando alla seconda cifra decimale, si ottiene:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}\cong 1{,}71 : 1{,}82 \cong 0{,}94$$

Proprio eseguendo i calcoli precedenti si osserva che ci si vale due volte dell'approssimazione:

I. approssimando i radicali;

II. approssimando il risultato della divisione.

È per questo che risulta:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right)^3=\frac{5}{6}=0{,}8(3) \quad \text{ma} \quad 0{,}94^3=0{,}830584$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Completare la tabella A.

Comprensione

① Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Il prodotto di due radicali è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi».

② Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Il quoziente di due radicali è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi».

③ Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «Per elevare a potenza un radicale si eleva a potenza il radicando».

④ Esprimere con una formula e spiegare la seguente regola: «La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando e per indice il prodotto degli indici».

Applicazioni

① Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è razionale.

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)^3 \quad \left(\sqrt{5^3}\right)^4 \quad \left(\sqrt[3]{2^2}\right)^5$$

② Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è irrazionale.

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} \quad \sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8} \quad \sqrt{12}\cdot\sqrt{3} \quad \sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$$

③ Scrivere il risultato delle seguenti espressioni e spiegare perché uno solo dei risultati ottenuti è irrazionale.

$$\sqrt{\frac{25}{16}} \quad \sqrt{\frac{7}{5}} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$$

Tabella A
Radicali e potenze a esponente frazionario

Proprietà delle potenze	Potenze ad esponente frazionario	Radicali
$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q=$	
$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}=$	
$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$(a\cdot b)^{\frac{1}{q}}=$	
$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}}=$	

Potenze e prodotti di radicali

Questa «Attività» propone alcuni calcoli da svolgere sia valendosi dei radicali che delle potenze ad esponente frazionario; si avrà così l'occasione di confrontare i due simboli e di individuarne vantaggi e svantaggi. Per confrontare i due simboli occorre sempre ricordare che risulta:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Potenze di radicali

Per elevare a potenza un radicale ci si basa sulla seguente proprietà delle potenze:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

che, in particolare fornisce:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = a^{\frac{1}{p} \cdot q} = a^{\frac{q}{p}} \qquad \left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p \cdot q}} \qquad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$$

Attività 1

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con esponenti frazionari	Calcoli con radicali
$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3}$
$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} =$
$\left(11^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$	

Semplificazione di radicali

La tabella conduce a valersi delle nozioni relative alle frazioni equivalenti per semplificare un radicale. Ecco un esempio che conduce ad una regola generale.

$$\sqrt[15]{13^6} = 13^{\frac{6}{15}}$$

Dato che risulta: $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

si ha pure: $13^{\frac{6}{15}} = 13^{\frac{2}{5}}$

ed essendo: $13^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{13^2}$

si conclude che risulta:

$$\sqrt[15]{13^6} = \sqrt[5]{13^2}$$

Attività 2

Ripetere il procedimento precedente per completare la seguente tabella, dove si svolgono affiancati :

- i calcoli su un esempio numerico;
- i calcoli svolti in generale per ottenere risultati validi per qualunque valore intero positivo dato alle lettere a, p, q, m.

Esempio numerico	In generale
$\sqrt[10]{7^4} = 7^{\frac{\cdots}{\cdots}}$	$\sqrt[m\cdot q]{a^{m\cdot p}} = a^{\frac{\cdots}{\cdots}}$
$\dfrac{10}{4} = \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$	$\dfrac{mp}{mq} = \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$
$7^{\frac{10}{4}} = \cdots\cdots\cdots$	$a^{\frac{mp}{mq}} = a\cdots\cdots$
$7^{\frac{5}{2}} = \sqrt[\cdots]{7^{\cdots}}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[\cdots]{a^{\cdots}}$
$\sqrt[10]{7^4} = \sqrt[5]{7^2}$	$\sqrt[m\cdot q]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$

Moltiplicazione di radicali

La moltiplicazione si svolge basandosi anche sulla seguente proprietà:

$$a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{q}} \qquad \sqrt[q]{a}\cdot\sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a\cdot b} \qquad (1)$$

Attività 3

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con radicali	**Calcoli con esponenti frazionari**
$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{10}$	$5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=(5\cdot 2)^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}=$	
	$7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=$

Portare un fattore fuori dalla radice

La proprietà (1), relativa alla moltiplicazione di radicali, può essere anche usata per ridurre il più possibile i numeri di cui calcolare la radice. Ecco un esempio che conduce ad una regola generale. Calcolare:

$$\sqrt{147}$$

In tal caso conviene procedere nel modo seguente:

- si scompone 147 in fattori, trovando che risulta:

$$147=7^2\cdot 3 \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{147}=\sqrt{7^2\cdot 3}$$

- si applica la proprietà (1), scrivendo:

$$\sqrt{7^2\cdot 3}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{3}$$

- si ricorda che risulta:

$$\sqrt{7^2}=7 \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{7^2}\cdot\sqrt{3}=7\cdot\sqrt{3}$$

Attività 4

Ripetere il procedimento precedente per completare la seguente tabella, dove si svolgono affiancati:

- i calcoli su un esempio numerico;
- i calcoli svolti in generale per ottenere risultati validi per qualunque valore intero positivo dato alle lettere a, b, q.

Esempio numerico	**In generale**
$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{\ldots\ldots}$	$\sqrt[q]{a^q\cdot b}=\sqrt[q]{a^q}\cdot\sqrt[q]{\ldots\ldots}$
$\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{\ldots\ldots}=5\cdot\sqrt[3]{\ldots\ldots}$	$\sqrt[q]{a^q}\cdot\sqrt[q]{\ldots\ldots}=a\cdot\sqrt[q]{\ldots\ldots}$
$\sqrt[3]{250}=5\cdot\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[q]{a^q\cdot b}=a\cdot\sqrt[q]{b}$

Divisioni di radicali

Esercizi e considerazioni svolte a proposito della moltiplicazione di radicali possono essere svolte per la divisione di radicali; operazione regolata dalla seguente proprietà:

$$\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}=\sqrt[q]{\frac{a}{b}}$$

Attività 5

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con radicali	Calcoli con esponenti frazionari
$\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{22}{2}} = \sqrt{11}$	$\dfrac{22^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{22}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{1}{2}}$
$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} =$	
	$\dfrac{15^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} =$

Esponenti frazionari negativi

La divisione conduce a richiamare le potenze ad esponente intero negativo (vedi anche il primo volume, pp. 25-26), ricordando che risulta:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dove a e n indicano ora due qualunque numeri interi positivi.

Introducendo le potenze ad esponente negativo si può infatti sostituire la divisione con la moltiplicazione, scrivendo:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{e quindi} \quad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

L'idea dell'esponente negativo può essere estesa anche agli esponenti frazionari, come si può capire svolgendo l'attività seguente.

Attività 6

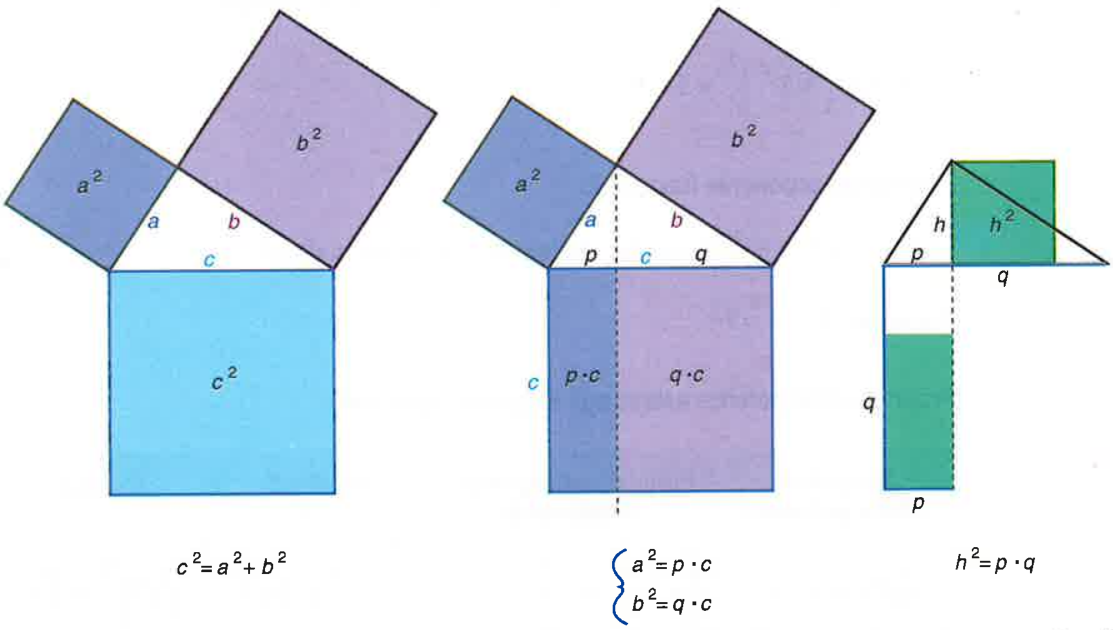
Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con frazioni e radicali	Calcoli con esponenti negativi e frazionari	
$\sqrt[3]{\dfrac{1}{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$	$\left(\dfrac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\frac{1}{3}} = 5^{-2 \cdot \frac{1}{3}} = 5^{-\frac{2}{3}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = 5^{-\frac{2}{3}}$
	$\left(\dfrac{1}{7^3}\right)^{\frac{1}{4}} =$	
$\sqrt[q]{\dfrac{1}{a^p}} = \dfrac{\sqrt[q]{1}}{\sqrt[q]{a^p}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$	$\left(\dfrac{1}{a^p}\right)^{\frac{1}{q}} = (a^{-p})^{\frac{1}{q}} = a^{-\frac{p}{q}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = a^{-\frac{p}{q}}$

Che cosa bisogna sapere

Proprietà che caratterizzano i triangoli rettangoli

Il teorema di Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$
I teoremi di Euclide: (I) $a^2 = c \cdot p$
(II) $h^2 = p \cdot q$



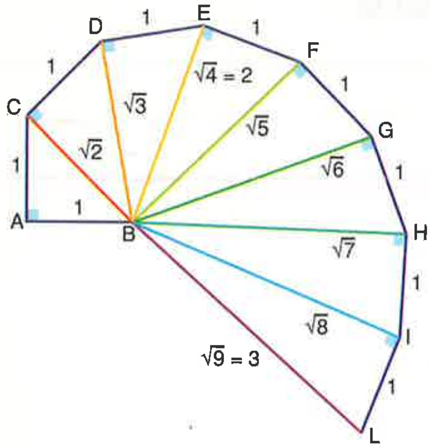
Teorema di Pitagora — Primo teorema di Euclide — Secondo teorema di Euclide

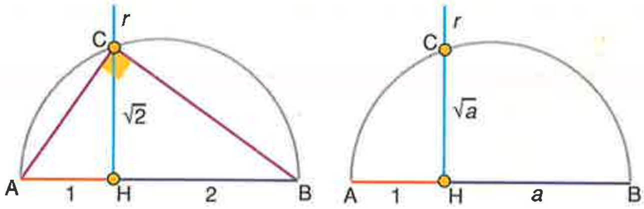
Numeri irrazionali

Si chiamano irrazionali i numeri che non sono razionali, cioè che non possono essere scritti sotto forma di frazione.
Scritti in forma decimale danno luogo a numeri decimali illimitati non periodici.

Esempi: 0,1234567891011... $\sqrt{2} = 1{,}4142...$

Con il teorema di Pitagora ed il secondo teorema di Euclide si costruiscono segmenti che hanno lunghezza irrazionale.





Radicali

Il simbolo $\sqrt[n]{a^m}$ indica il numero che, elevato ad esponente n, dà a^m; si ha dunque:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m \qquad \text{con } a, m, n \text{ numeri interi positivi}$$

Esempio: $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3 = 5^2$

Potenze ad esponente frazionario

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ è il numero che, elevato ad esponente n, dà a^m

Esempio: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

Proprietà delle potenze estese agli esponenti frazionari

Proprietà delle potenze	Potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempi
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$	$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 = \sqrt[4]{5^3}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{pq}}$	$\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[12]{7}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{q}}$	$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{15}$
$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$	$\dfrac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{7}{2}}$

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due argomenti, ben collegati fra loro:
- i teoremi di Pitagora e di Euclide;
- i numeri irrazionali.

Le applicazioni di questi argomenti, che sono numerose e molto varie, sono state qui riunite in due gruppi:

A. applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide per scoprire proprietà delle figure geometriche;
B. eseguire calcoli con i radicali o con le potenze ad esponente frazionario.

A. Applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide per scoprire proprietà delle figure

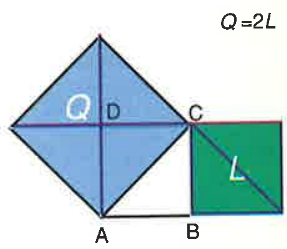
Attività 1

Valersi del teorema di Pitagora per dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque quadrato ABCD il quadrato costruito sulla diagonale è equivalente al doppio del quadrato costruito sul lato.

La fig. 1 suggerisce di considerare il triangolo rettangolo ABC e di indicare con Q *l'area del quadrato costruito sulla diagonale e con* L *l'area del quadrato costruito sul lato; si ha:*

$Q =$ .... ossia $Q = 2L$

Figura 1
Il quadrato costruito sulla diagonale di un quadrato ABCD



Attività 2

Valersi del teorema di Pitagora per dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque triangolo equilatero ABC il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al triplo del quadrato costruito su metà lato.

La fig. 2 suggerisce di indicare con H *l'area del quadrato costruito sull'altezza, con* Q *l'area del quadrato costruito su metà lato e con* L *l'area del quadrato costruito sul lato; si ha:*

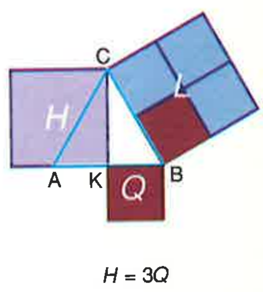
- applicando il teorema di Pitagora al triangolo CKB si ha:

$L =$ .... (1)

- esaminando i quadrati L *e* Q *risulta:*

$L = 4Q$ (2)

Figura 2
Il quadrato costruito sull'altezza di un triangolo equilatero

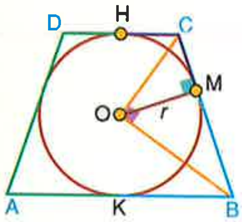


Confrontando la (1) con la (2) si ottiene appunto:

$$H = 3Q$$

Attività 3

Figura 3
Un trapezio isoscele circoscritto a un cerchio



$OM^2 = CH \cdot KB$

Dato un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad un cerchio di centro O e raggio r, dimostrare che il quadrato costruito sul raggio è equivalente al rettangolo che ha per lati metà delle basi AB e CD.

La fig. 3 ricorda due proprietà caratteristiche del trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza (vedi il primo volume, pp. 231-232):

- *sono uguali i segmenti CH e CM, MB e KB;*
- *il triangolo COB è rettangolo in O;*
- *nel triangolo COB l'altezza relativa all'ipotenusa (OM) è il raggio della circonferenza.*

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo COB si ottiene:

$OM^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ e quindi $OM^2 = CH \cdot KB$

B. Eseguire calcoli con i radicali e con le potenze ad esponente frazionario

Attività 4

Completare la seguente tabella come è indicato nella prima riga.

Calcoli con esponenti frazionari	Calcoli con radicali
$\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{4}\cdot 2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^2 = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$
	$\sqrt[3]{7}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 =$
$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$	
	$\frac{\left(\sqrt[4]{11}\right)^5}{\sqrt[4]{11}} =$
	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^4}} =$