

## Derivate di funzioni inverse e composte. Esercizi

### Derivata di funzioni inverse

#### *Derivate di funzioni inverse delle altre funzioni trigonometriche*

1. Completa qui sotto la derivata della funzione inversa di  $y = \sin(x)$

$$x = \sin(y) \Leftrightarrow y = \arcsin(x)$$

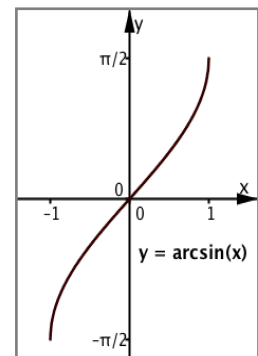
$$\frac{dx}{dy} = \dots \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(y) + \cos^2(y) &= 1 \\ \text{da cui} \\ \cos(y) &= \sqrt{1 - \sin^2(y)} \end{aligned}$$

La derivata di  $y = \arcsin(x)$  è  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. Una riflessione sulla precedente derivata: osserva qui a fianco il grafico di  $y = \arcsin(x)$  e rispondi ai seguenti quesiti:

- Qual è il dominio di  $y = \arcsin(x)$ ? .....
- Qual è il codominio di  $y = \arcsin(x)$ ? .....
- Perché risulta  $\cos(y) \geq 0$ ? .....



3. Completa il calcolo della derivata di  $y = \arccos(x)$  con due diversi procedimenti.

**I.** Procedimento analogo a quello seguito per la derivata di  $y = \arcsin(x)$

$$x = \cos(y) \Leftrightarrow y = \arccos(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = \dots \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$$

La derivata di  $y = \arccos(x)$  è  $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**II.** Procedimento basato sulla relazione fra funzioni trigonometriche di angoli complementari:

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \dots$$

Ritrovo così la stessa derivata.

4. Calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$$

Hai seguito il procedimento più rapido?

5. Calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \arcsin(x) - \arccos(x)$$

Hai seguito il procedimento più rapido?

## Derivata di funzioni composte

**Procedimento generale per derivare funzioni composte:**

- scomporre la funzione nelle sue componenti, usando idonee variabili;
- applicare la notazione di Leibniz e trattare i differenziali come numeri.

6. È data la funzione  $y = (3x^2 - 4x)^2$ . Completa il calcolo della derivata con due procedimenti.

a. Sviluppa il quadrato e calcola la derivata del polinomio ottenuto

$$y = \dots\dots\dots$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

b. Calcola la derivata della funzione data, considerata come funzione composta da

$$y = \dots\dots\dots \text{ con } z = \dots\dots\dots$$

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \dots\dots\dots \Rightarrow y' = \dots\dots\dots$$

Quale procedimento ti sembra più semplice? .....

7. Calcola le derivate delle seguenti funzioni con due procedimenti:

a. deriva la funzione data con la regola di derivazione di funzione composta;

b. sviluppa il quadrato e calcola la derivata del polinomio ottenuto.

Qual è il procedimento più rapido?

$$y = (x-1)^2, \quad y = (x+2)^2, \quad y = (3x-5)^2.$$

8. Calcola le derivate delle seguenti funzioni

$$y = (x^2-2)^2, \quad y = (3-x^3)^2, \quad y = (2x^2+x)^2.$$

In quanti puoi svolgere il calcolo?

Qual è il procedimento più rapido?

9. Calcola le derivate delle seguenti funzioni

$$y = (2x+3)^3, \quad y = (x-2)^4, \quad y = (4x^2-8)^3.$$

In quanti puoi svolgere il calcolo?

Qual è il procedimento più rapido?

**Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 10 a 13.**

10.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

11.  $y = \cos(x + \pi), \quad y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

12.  $y = \sin(2x), \quad y = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

13.  $y = \cos(2x), \quad y = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad y = \cos(2x - \pi)$

14. Indica la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni  
 $y = \sin(\omega x)$ ,  $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $y = \sin[f(x)]$ ,  
dove  $\omega$  e  $\varphi$  indicano due costanti e  $f(x)$  una qualunque funzione derivabile.
15. Indica la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni  
 $y = \cos(\omega x)$ ,  $y = \cos(\omega x + \varphi)$ ,  $y = \cos[f(x)]$ ,  
dove  $\omega$  e  $\varphi$  indicano due costanti e  $f(x)$  una qualunque funzione derivabile.

**Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 16 a 19.**

16.  $y = e^{-x}$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $y = e^{(3x+4)}$   
17.  $y = e^{x^2}$ ,  $y = e^{-x^2}$ ,  $y = e^{2x^2}$   
18.  $y = e^{(4-3x^2)}$ ,  $y = e^{(x^2+x)}$ ,  $y = e^{(x^2-3x+2)}$   
19.  $y = e^{\frac{1}{x}}$ ,  $y = e^{\frac{-1}{x}}$ ,  $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

20. Scrivi la regola generale per derivare le seguenti funzioni:

$$y = e^{ax}, \quad y = e^{ax+b}, \quad y = e^{f(x)}$$

**La composizione di funzioni per derivare particolari funzioni**

21. Completa il procedimento per calcolare la derivata di  $y = a^x$

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$a^x = e^{\ln(a^x)}$$

- Applico la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da

$$y = e^z, \quad z = \dots\dots\dots \text{ da cui } \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \dots\dots$$

- La derivata di  $y = a^x$  è  $y' = \ln(a) \cdot a^x$

22. Completa il procedimento per calcolare la derivata di  $y = x^r$ , dove l'esponente  $r$  è un numero reale, anche irrazionale.

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$x^r = e^{\ln(x^r)}$$

- Applica la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln(x^r)} = \dots\dots\dots$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da:

$$y = e^z, \quad z = \dots\dots\dots \text{ da cui } \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \dots\dots$$

- La derivata di  $y = x^r$  è  $y' = rx^{r-1}$

**Logaritmo in base e**  
 $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$   
 $x = e^{\ln(x)}$   
 $f(x) = e^{\ln[f(x)]}$

**Proprietà dei logaritmi**  
**I.**  $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$   
**II.**  $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

23. Completa il procedimento per calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \pi^x - x^\pi$$

$$f'(x) = \dots \cdot \pi^x - \pi \cdot \dots$$

24. Completa il procedimento per calcolare la derivata di  $y = x^x$

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$x^x = e^{\ln(x^x)}$$

- Applico la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln(x^x)} = \dots$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da:

$$y = e^z, z = \dots \text{ da cui } \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \dots$$

- La derivata di  $y = x^x$  è  $y' = [\ln(x) + 1] \cdot x^x$ .

**Logaritmo in base e**  
 $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$   
 $x = e^{\ln(x)}$   
 $f(x) = e^{[f(x)]}$

**Proprietà dei logaritmi**  
**I.**  $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$   
**II.**  $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$   
**III.**  $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

*È molto più rapido e basato solo su una proprietà dei logaritmi il procedimento per derivare la funzione logaritmo in una qualunque base b.*

25. Completa il procedimento per calcolare la derivata di  $y = \log_b(x)$ .

Applica la proprietà III per scrivere

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Così devi derivare la funzione  $y = \dots \ln(x)$ .

$$\text{La derivata di } y = \log_b(x) \text{ è } y' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

## Derivate di funzioni composte anche con funzioni inverse

*Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 26 a 30*

26.  $y = \ln(-x), \quad y = \ln(4x), \quad y = \ln(3x+4)$

27.  $y = \ln(\cos x), \quad y = \ln(\sin x), \quad y = \ln(\tan x)$   
*(Si ottiene  $y' = -\tan x, \quad y' = \cotg x, \quad y' = \tan x + \cotg x$ ).*

28.  $y = \arcsin(2x), \quad y = \arcsin(2x+3), \quad y = \arcsin(x^2)$

29.  $y = \arctg(3x), \quad y = \arctg(3x+2), \quad y = \arctg(\sqrt{x})$

30. Scrivere la formula generale per ottenere le derivate delle seguenti funzioni:

$$y = \ln f(x), \quad y = \arctg f(x), \quad y = \arcsin f(x).$$

$$\text{(Si ottiene: } y' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}, \quad y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}).$$

## Derivate di funzioni composte anche con $y = x^r$ , con $r$ numero reale

31. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione $y = x^r$ con esponente $r$ numero reale	Derivata $y' = rx^{r-1}$
$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dots\dots\dots$	
$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \dots\dots\dots$	
$y = x^{\sqrt{2}}$	

32. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione $y = [f(x)]^r$	Derivata $y' = r[f(x)]^{r-1}$
$y = \sqrt{3x} = [\dots\dots\dots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \sqrt{-x} = [\dots\dots\dots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \sqrt{4-3x} = [\dots\dots\dots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt{-4x}} = \dots\dots\dots$	
$y = \frac{1}{\sqrt{4-5x}} = \dots\dots\dots$	
$y = \frac{1}{\ln(x)} = [\ln(x)]^{-1}$	
$y = \frac{1}{\text{sen}^2(x)} = [\dots\dots\dots]^{-2}$	
$y = \sqrt{\cos(x)} = [\dots\dots\dots]^{\frac{1}{2}}$	