Derivate di funzioni inverse e composte

Enrico Pietropoli, 2022

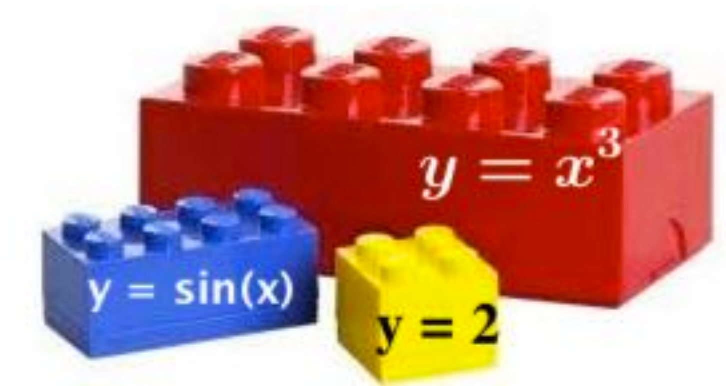
Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensate alla tante funzioni che avete incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguiamo:

1. **Calcolo le derivate di poche *funzioni elementari.***
2. **Studio le regole dell'*Algebra delle derivate* per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.**



Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

L'algebra delle derivate 3

In questa lezione completiamo lo studio delle regole per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti, ordinati qui sotto dai più immediati a quelli che richiedono più attenzione.

Procedimenti per calcolare la derivata di	Esempi
1. Somma di funzioni elementari	$y = \sin(x) + x^2$
2. Prodotto di funzioni elementari	$y = x^2 \sin(x)$
3. Quoziente di funzioni elementari	$y = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$
4. Inversa di funzioni elementari	$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$
5. Funzione composta con funzioni elementari	$y = \sin\left(x^2\right)$

Enrico Pietropoli, 2022

Simboli per la derivata

Questa ultima parte dell'algebra delle derivate si basa sui simboli introdotti da Leibniz e richiamati qui sotto.

Simbolo Per la derivata di $y = f(x)$	Esempio Per la derivata di $y = x^3$	Autore
$y' = f'(x)$	$y' = 3x^2$	Lagrange (1736 - 1813)
$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	Leibniz (1646 - 1716)

Le idee fondamentali di Leibniz:

- dy **e** dx **sono** ***infinitesimi*****, cioè numeri piccolissimi, ma diversi da zero;**
- **le regole dell'algebra dei numeri reali valgono anche per i calcoli con gli infinitesimi.**

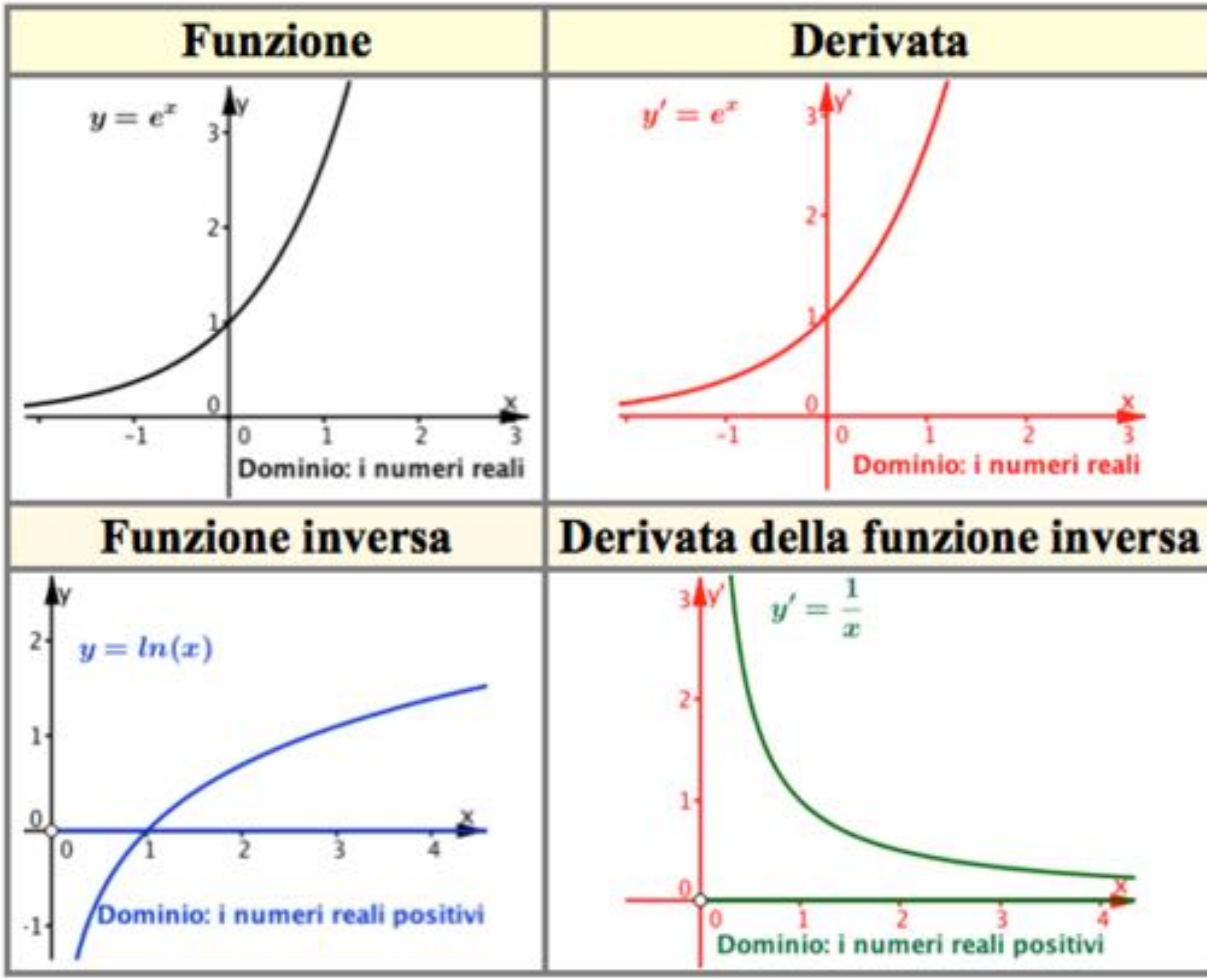
Derivata di funzioni inverse

Due esempi per riflettere

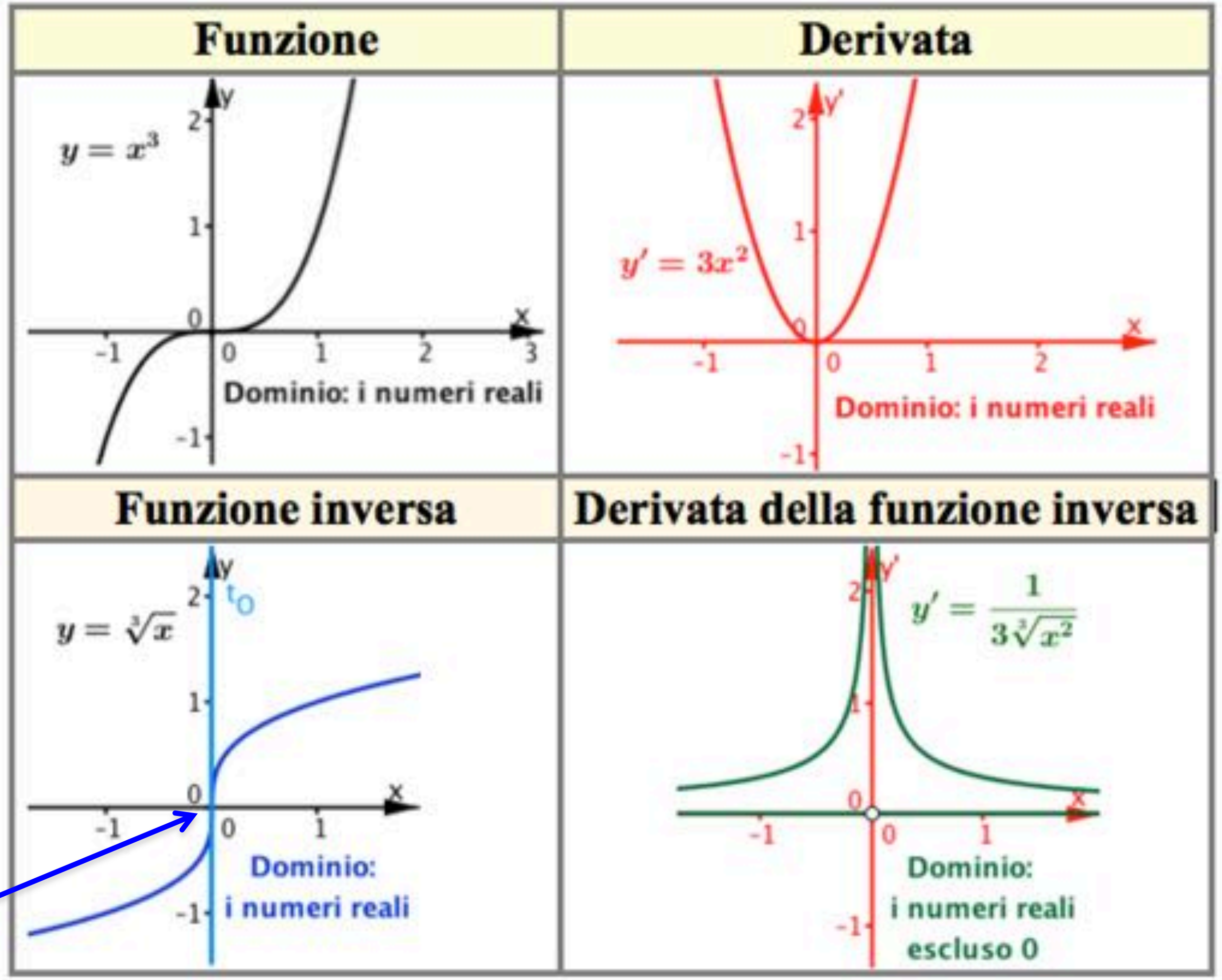
Derivata dell'inversa di $y = e^x$	Derivata dell'inversa di $y = x^3$
$x = \boxed{e^y} \Leftrightarrow y = \ln(x)$	$x = y^3 \Leftrightarrow y = \boxed{\sqrt[3]{x}}$
$\frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\boxed{e^y}} = \frac{1}{x}$	$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\boxed{y}^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
La derivata di $y = \ln(x)$ è $y' = \frac{1}{x}$	La derivata di $y = \sqrt[3]{x}$ è $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Al centro del procedimento l'idea di Leibniz:
trattare il rapporto $\frac{dy}{dx}$ come un rapporto fra numeri reali.

Funzioni inverse e derivate : grafici a confronto



Funzioni inverse e derivate: grafici a confronto



La funzione non è derivabile in O(0, 0)

Funzioni inverse: significato delle parole

In aritmetica

$$\frac{1}{5} \text{ è il } \boldsymbol{reciproco} \text{ o } \boldsymbol{inverso} \text{ di } 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

Nel calcolo letterale

$$\text{Solo se } x \neq 0,$$
$$\frac{1}{x} \text{ è il } \boldsymbol{reciproco} \text{ o } \boldsymbol{inverso} \text{ di } x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

Inverso e reciproco sono sinonimi

Nel calcolo differenziale, inverso e reciproco NON HANNO LO STESSO SIGNIFICATO

Funzione reciproca e funzione inversa

Un esempio

		Per invertire la funzione	
Funzione	**Funzione reciproca**	**Scambio x con y**	**Esplicito y**
$y = x^3$	$y = \frac{1}{x^3}$	$x = y^3$	$y = \sqrt[3]{x}$
	DERIVATE		
$y' = 3x^2$	$y' = \frac{-3x^2}{[x^3]^2}$	$\frac{dx}{dy} = 3y^2$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$

In generale

		Per invertire la funzione	
Funzione	**Funzione reciproca**	**Scambio x con y**	**Esplicito y**
$y = f(x)$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$x = f(y)$	$y = f^{-1}(x)$
	DERIVATE		
$y' = f'(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$	$\frac{dx}{dy} = f'(y)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$

Attenzione ai simboli!

In aritmetica e algebra	Nel calcolo differenziale
$5^{-1} = \frac{1}{5}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$y = f^{-1}(x)$ indica la funzione inversa di $y = f(x)$

Enrico Pietropoli, 2022

Derivare altre funzioni inverse

Derivata dell'inversa di $y=x^2$	Derivata dell'inversa di $y=x^n$
$x=y^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{x}$	$x=y^n \Leftrightarrow y=\sqrt[n]{x}$
$\frac{dx}{dy}=2y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{dx}{dy}=ny^{n-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
La derivata di $y=\sqrt{x}$ è $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	La derivata di $y=\sqrt[n]{x}$ è $y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

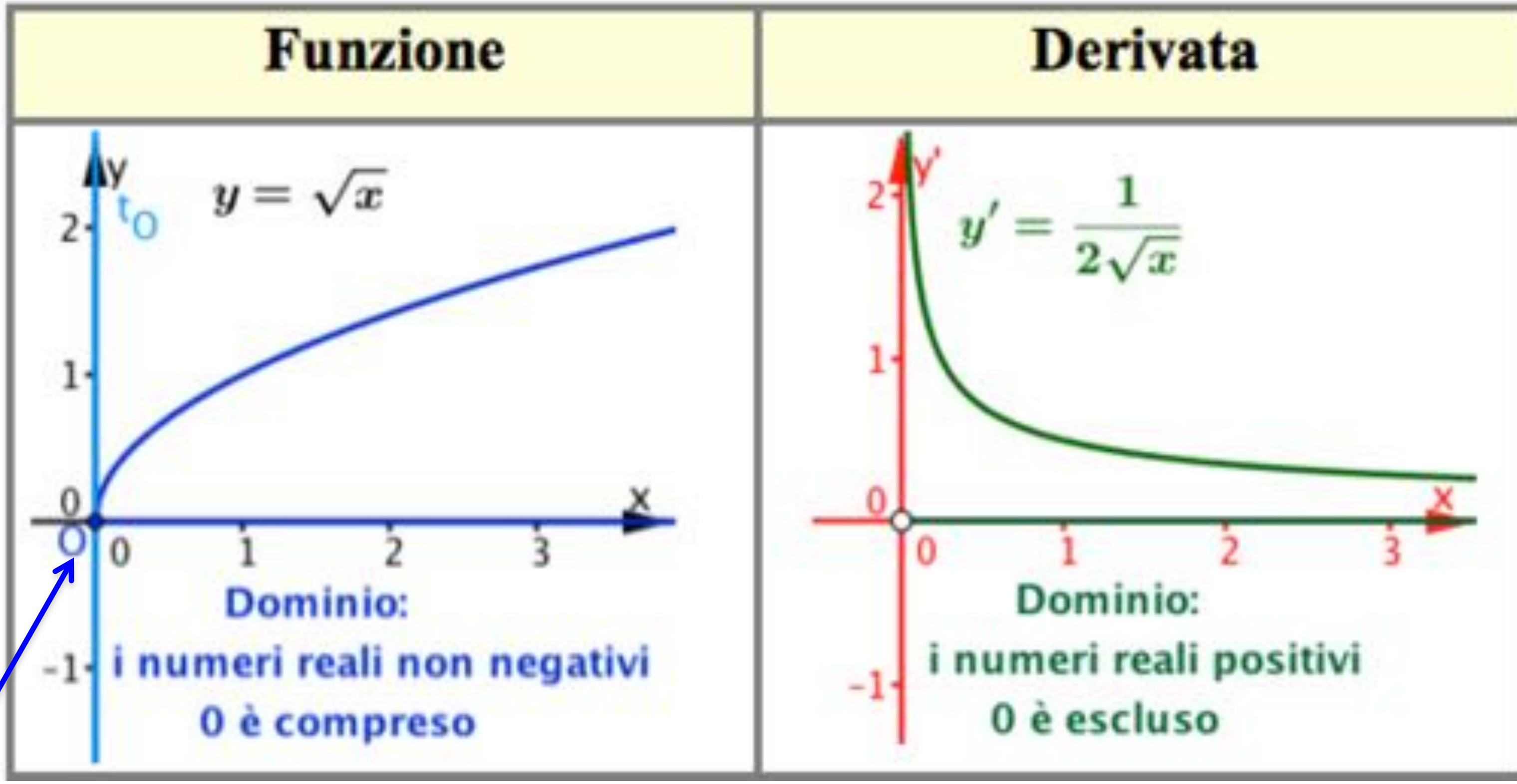
Con esponenti frazionari

$y = x^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}}$ **o meglio** $y = x^{\boxed{\frac{1}{n}}} \Rightarrow y' = \boxed{\frac{1}{n}} x^{\boxed{\frac{1}{n}}-1}$

Indico con q l'esponente frazionario $\frac{1}{n}$ e ritrovo la regola di derivazione

$$\boxed{y = x^q \Longrightarrow y' = q\, x^{q-1}}$$

Funzioni inverse e derivate: grafici a confronto



La funzione non è derivabile in O(0, 0)

Derivare funzioni composte

Due esempi

Esempio	Esempio
E' data la funzione $y = \sin(x^2)$ composta da $y = \sin(z)$ con $z = x^2$ E so che $\frac{dy}{dz} = \cos(z) \quad \frac{dz}{dx} = 2x$	E' data la funzione $y = \sin^2(x)$ composta da $y = z^2$ con $z = \sin(x)$ E so che $\frac{dy}{dz} = 2z \quad \frac{dz}{dx} = \cos(x)$
Tratto i differenziali come i numeri e calcolo $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} = 2x \cdot \cos(z)$ e quindi $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$	Tratto i differenziali come i numeri e calcolo $\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot \cos(x)$ e quindi $\frac{dy}{dx} = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$
La funzione derivata di $y = \sin(x^2)$ $y' = 2x \cdot \cos(x^2)$	La funzione derivata di $y = \sin^2(x)$ $y' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

Simboli e procedimento generale

Funzione $y = f(z)$	Funzione $z = g(x)$	Funzione composta	Per derivare la funzione composta	Derivata della funzione composta
$y = \sin(z)$	$z = x^3$	$y = \sin(x^3)$	$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos(z) \cdot 3x^2$	$y' = \cos(x^3) \cdot 3x^2$
$y = z^3$	$z = \sin(x)$	$y = \sin^3(x)$	$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3z^2 \cdot \cos(x)$	$y' = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$
		IN GENERALE		
$y = f(z)$	$z = g(x)$	$y = f[g(x)]$	$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot g'(x)$	$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Funzioni elementari ‘generalizzate’

Ora posso calcolare la derivata di tante funzioni composte con funzioni derivabili; ecco qualche altro esempio.

Funzione	Derivata	Esempi
$y = [f(x)]^n$ composta di $y = z^n$ e $z = f(x)$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$	$y = (3x^2 - 2)^2 \Rightarrow y' = 2(3x^2 - 2)\, 6x$
$y = \sin[f(x)]$ composta di $y = \sin(z)$ e $z = f(x)$	$y' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$	$y = \sin(\pi - x) \Rightarrow y' = -\cos(\pi - x)$
$y = \cos[f(x)]$ composta di $y = \cos(z)$ e $z = f(x)$	$y' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$	$y = \cos(2x) \Rightarrow y' = -2\sin(2x)$
$y = e^{f(x)}$ composta di $y = \sin(z)$ e $z = f(x)$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$y = e^{\sin(x)} \Rightarrow y' = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$
$y = \ln[f(x)]$ composta di $y = \ln(z)$ e $z = f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln[\sin(x)] \Rightarrow y' = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$