Comporre una funzione con la sua inversa

Daniela Valenti, 2022

Rifletto sulla composizione di tre coppie di funzioni interessanti

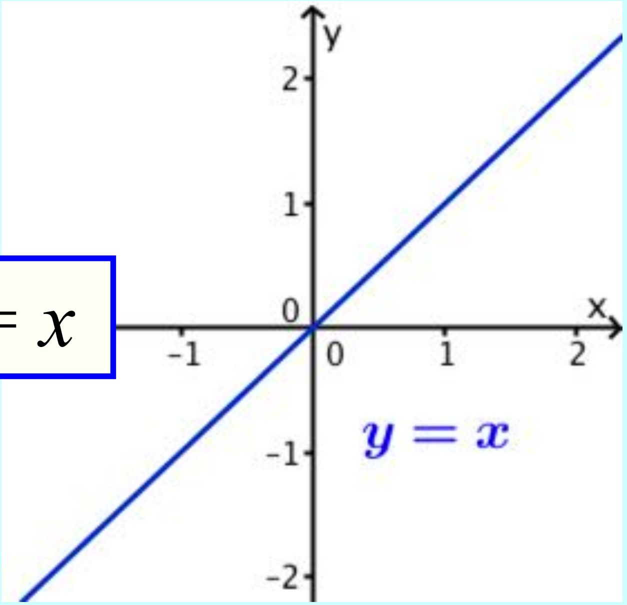
1. $y = x^3$ e la sua inversa
2. $y = e^x$ e la sua inversa
3. $y = x^2$ e la sua inversa

Prima coppia

Compongo $z = x^3$ con $y = \sqrt[3]{z}$ e ottengo $y = \sqrt[3]{x^3}$

x	$z = x^3$	$y = \sqrt[3]{z} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3}$
-2	$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
-1	$(-1)^3 = -1$	$\sqrt[3]{-1} = -1$
0	$0^3 = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$
1	$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
2	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$

$y = x$



Conclusione

$$y = \sqrt[3]{x^3} \Leftrightarrow y = x$$

Daniela Valenti, 2022

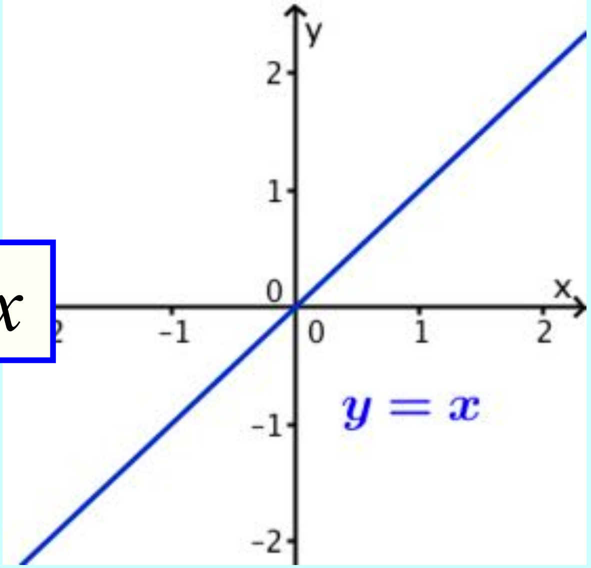
Prima coppia

Compongo le stesse due funzioni, ma cambio l'ordine

Compongo $z = \sqrt[3]{z}$ **con** $y = z^3$ **e ottengo** $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

x	$z = \sqrt[3]{x}$	$y = z^3 \Leftrightarrow y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$
-8	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$(-2)^3 = -8$
-1	$\sqrt[3]{-1} = -1$	$(-1)^3 = -1$
0	$\sqrt[3]{0} = 0$	$0^3 = 0$
1	$\sqrt[3]{1} = 1$	$1^3 = 1$
8	$\sqrt[3]{8} = 2$	$2^3 = 8$

$y = x$



Conclusione

$$y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \Leftrightarrow y = x$$

Comporre una funzione con la sua inversa: ho trovato un risultato generale?

Sono tentata di generalizzare queste conclusioni semplici e facili di ricordare: compongo una funzione con la sua inversa e ottengo la funzione $y = x$

Provo a comporre altre coppie di funzioni, una inversa dell'altra.

Seconda coppia

Componi le funzioni $z = e^x$ con $y = \ln(z)$

a. Scrivi la funzione composta:

$$\left.\begin{array}{l} z = e^x \\ y = \ln(z) \end{array}\right\} \Rightarrow y = \ln\left(e^x\right)$$

b. Scrivi in forma più breve la formula ottenuta:

$$\left.\begin{array}{r} z = e^x \\ y = \ln(z) \Leftrightarrow z = e^y \end{array}\right\} \Rightarrow e^y = e^x \Rightarrow y = x$$

c. Completa lo studio del dominio della funzione composta

Deve essere $z > 0$, ma risulta $e^x > 0$ per tutti i numeri reali.
Perciò il dominio è l'insieme R dei numeri reali.

Conclusione

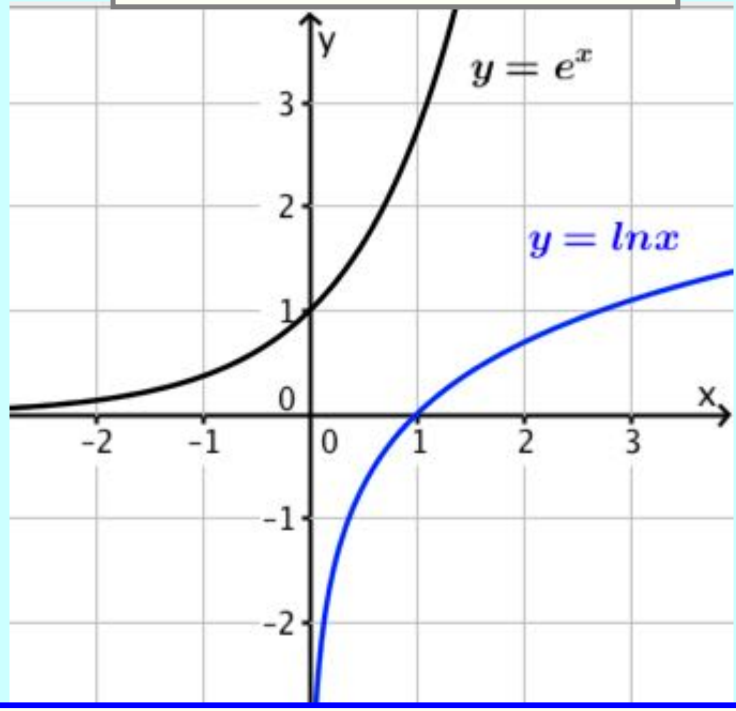
La funzione composta è

$$y = \ln\left(e^x\right) \Leftrightarrow y = x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali

$y = \ln(x)$ è la funzione inversa di $y = e^x$

Per qualunque numero reale x trovo $e^x > 0$.



Il dominio della funzione $y = \ln(x)$ è l'insieme dei numeri reali positivi.

Seconda coppia

$y = \ln(x)$ è la funzione inversa di $y = e^x$

Componi le funzioni $z = \ln(x)$ con $y = e^z$

a. Scrivi la funzione composta $\left.\begin{array}{l} z = \ln(x) \\ y = e^z \end{array}\right\} \Rightarrow y = e^{\ln(x)}$

b. Scrivi in forma più semplice la formula ottenuta:

$$\left.\begin{array}{r} z = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^z \\ y = e^z \end{array}\right\} \Rightarrow y = x$$

c. Completa lo studio del dominio della funzione composta

Deve essere $x > 0$.
Perciò il dominio della funzione composta è l'insieme dei numeri reali positivi.

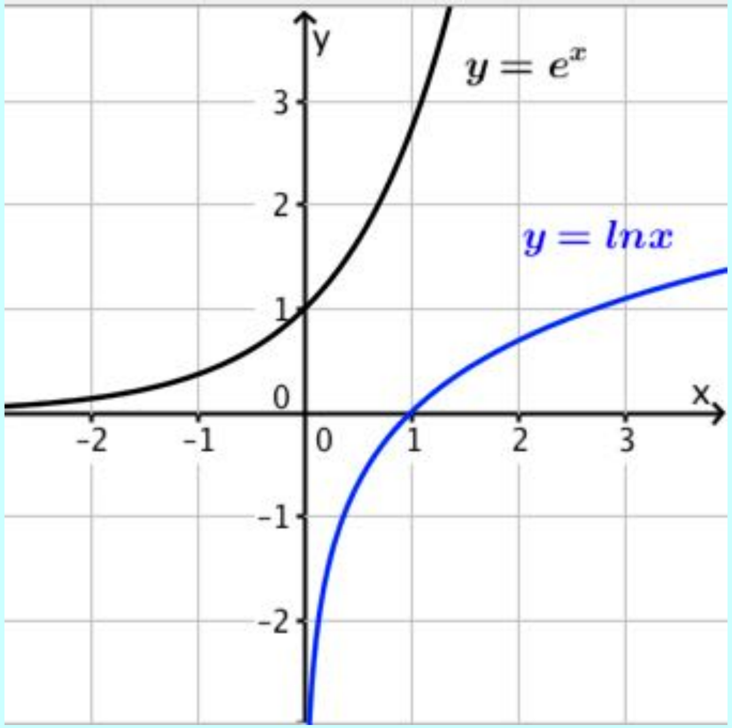
Conclusione

La funzione composta è

$$y = e^{\ln(x)} \Leftrightarrow y = x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali positivi

Per qualunque numero reale x trovo $e^x > 0$.



Il dominio della funzione $y = \ln(x)$ è l'insieme dei numeri reali positivi.

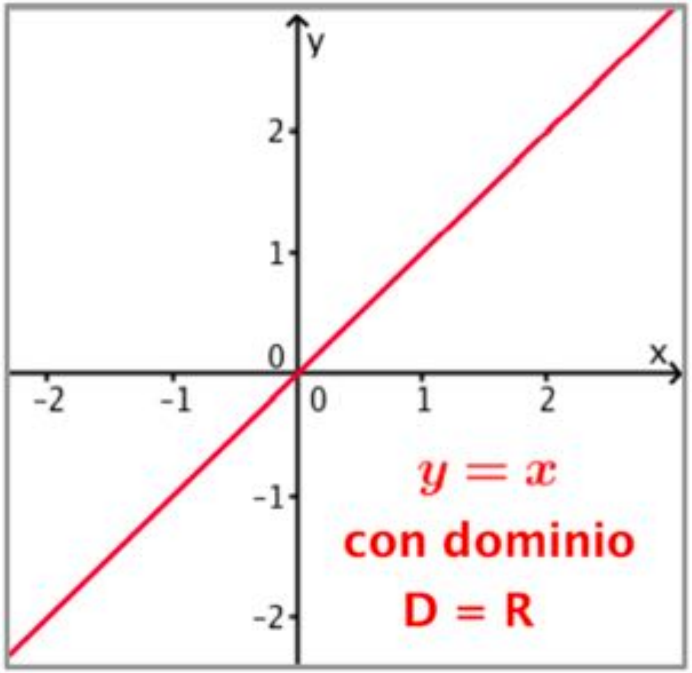
Riflessioni sulla seconda coppia

Compongo una funzione con la sua inversa

Compongo $z = e^x$ e $y = \ln(z)$

Ottengo come funzione composta

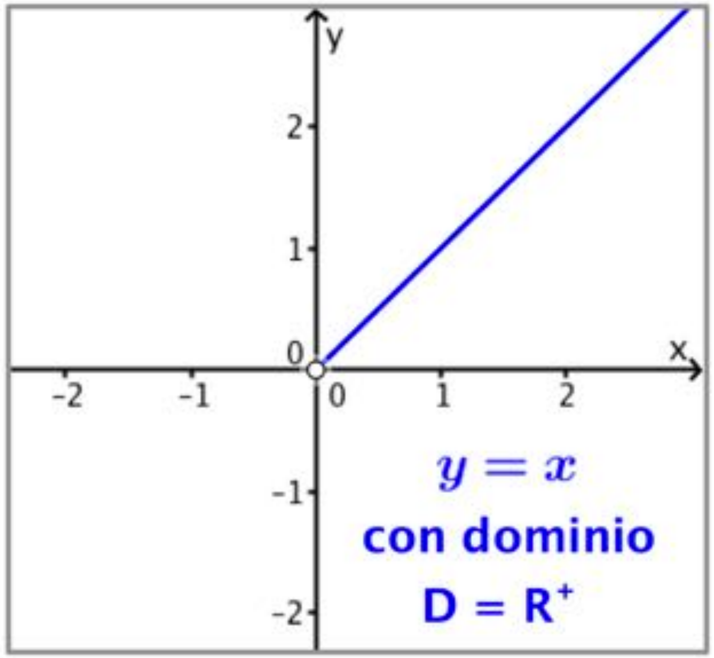
$y = x$ con dominio D = R



Compongo $z = e^x$ e $y = \ln(z)$

Ottengo come funzione composta

$y = x$ con dominio D = R^+



Cambio l'ordine delle funzioni e cambia la funzione composta:

la formula è la stessa ($y = x$), ma cambia il dominio.

Daniela Valenti, 2022

Terza coppia

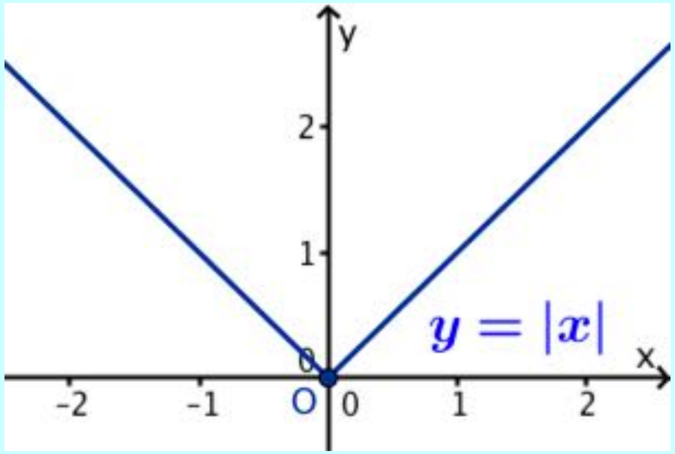
Compongo $z = x^2$ con $y = \sqrt{z}$ e ottengo $y = \sqrt{x^2}$

x	$z = x^2$	$y = \sqrt{z} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2}$
-2	$(-2)^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
-1	$(-1)^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
0	$0^2 = 0$	$\sqrt{0} = 0$
1	$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$

$$y = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = |x|$$



Conclusione

$$y = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow y = |x|$$

Daniela Valenti, 2022

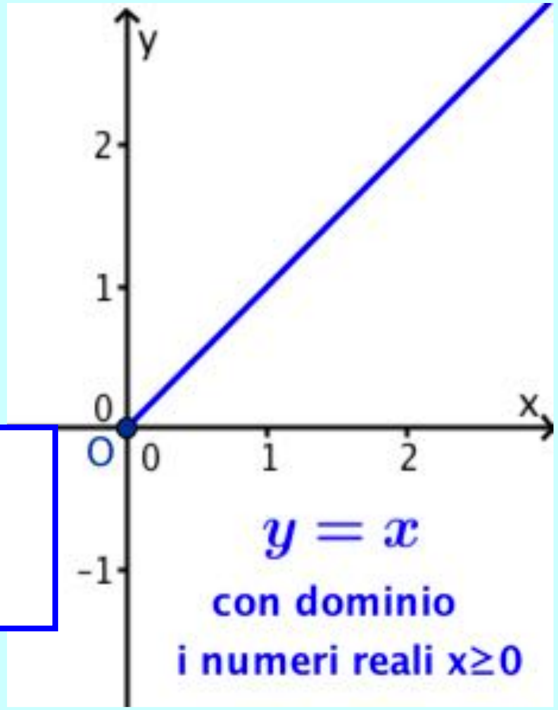
Terza coppia

Compongo le stesse due funzioni, ma cambio l'ordine

Compongo $z = \sqrt{x}$ **con** $y = z^2$ **e ottengo** $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$

x	$z = \sqrt{x}$	$y = z^2 \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x}\right)^2$
-4	$\sqrt{-4}$ non reale	NO
-1	$\sqrt{-1}$ non reale	NO
0	$\sqrt{0} = 0$	$0^2 = 0$
1	$\sqrt{1} = 1$	$1^2 = 1$
4	$\sqrt{4} = 2$	$2^2 = 4$

$y = x$
solo se $x \geq 0$



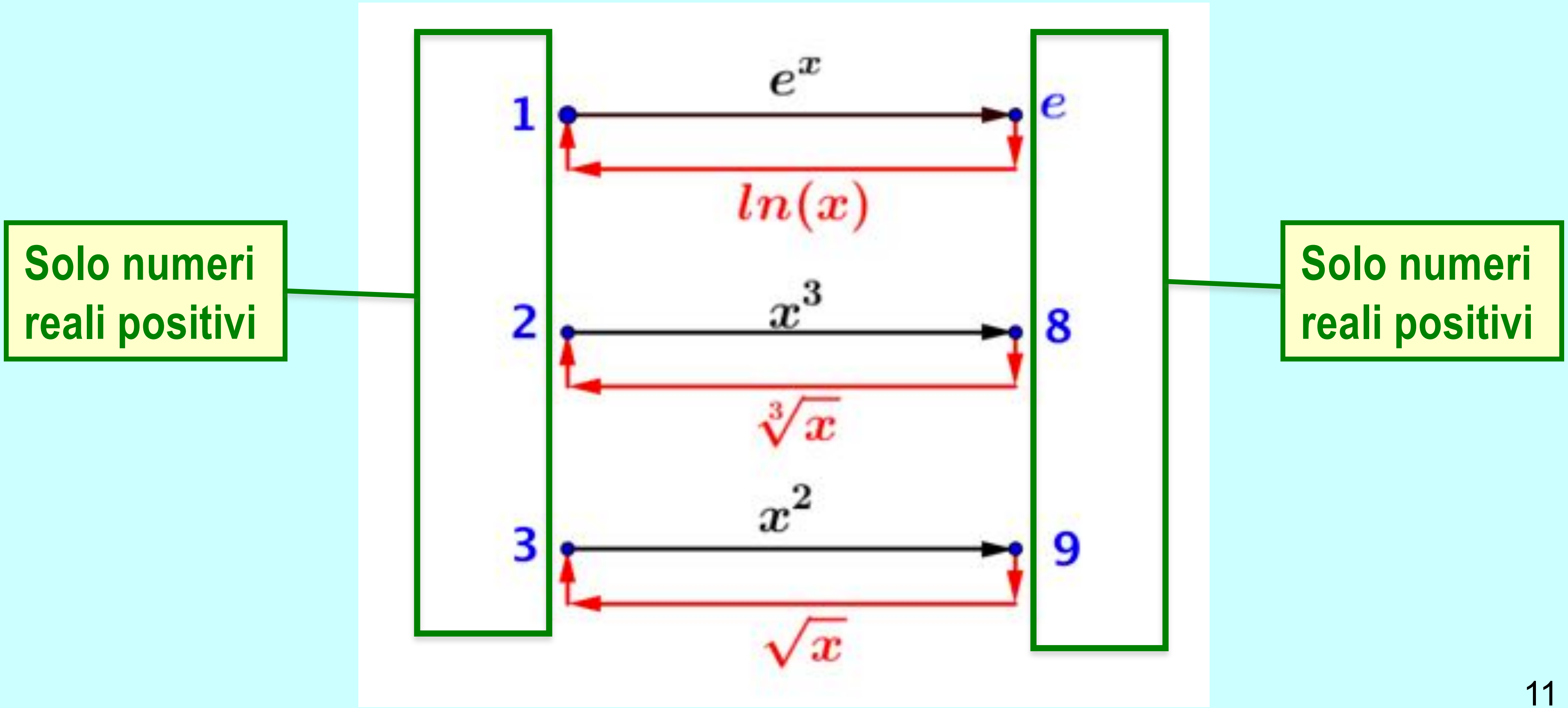
Conclusione

$$y = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow y = x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali $x \geq 0$

Opero con i soli numeri reali positivi

Abbiamo composto tre coppie di funzioni una inversa dell'altra e il lavoro svolto suggerisce una riflessione: se opero con i soli numeri reali positivi, la composizione di una funzione con la sua inversa non incontra difficoltà.



Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Antiche regole pratiche

Problema storico

Solo a partire dal 1600 i matematici europei lavorano stabilmente con i numeri negativi, ma già gli antichi babilonesi calcolavano radici quadrate. E la difficoltà dei lunghi calcoli spiega nascita e larga diffusione fino al 1600 di regole pratiche come le seguenti.

$$\cancel{\sqrt{x^{\cancel{2}}}} = x$$

$$\left(\cancel{\sqrt{x}}\right)^{\cancel{2}} = x$$

La radice elimina il quadrato

Antiche regole pratiche vere esclusivamente se opero con i soli numeri reali positivi.

Daniela Valenti, 2022

Composizione di funzioni nella storia

Dalla fine del 1800 si consolida lo studio della composizione di funzioni e si diffondono relazioni e formule oggi condivise dalla comunità scientifica internazionale.
Ecco le formule emerse in questa lezione.

$\sqrt{x^2} = |x|$ **vera per qualunque numero reale** x

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ **vera per qualunque numero reale** $x \geq 0$

$\sqrt[3]{x^3} = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$\ln\left(e^x\right) = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$e^{\ln(x)} = x$ **vera per qualunque numero reale** $x > 0$

Daniela Valenti, 2022