

Funzioni composte: dalla realtà alla matematica

Un progetto innovativo

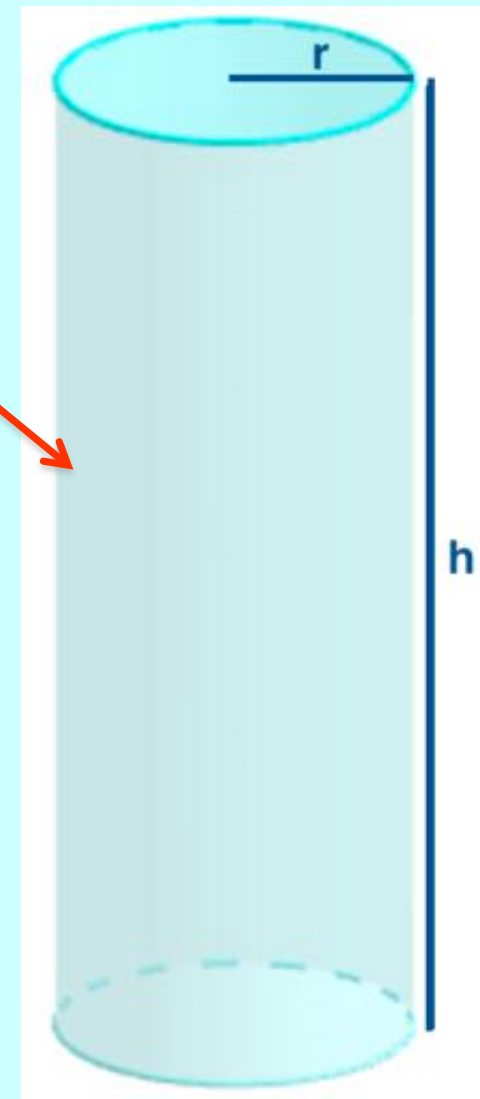
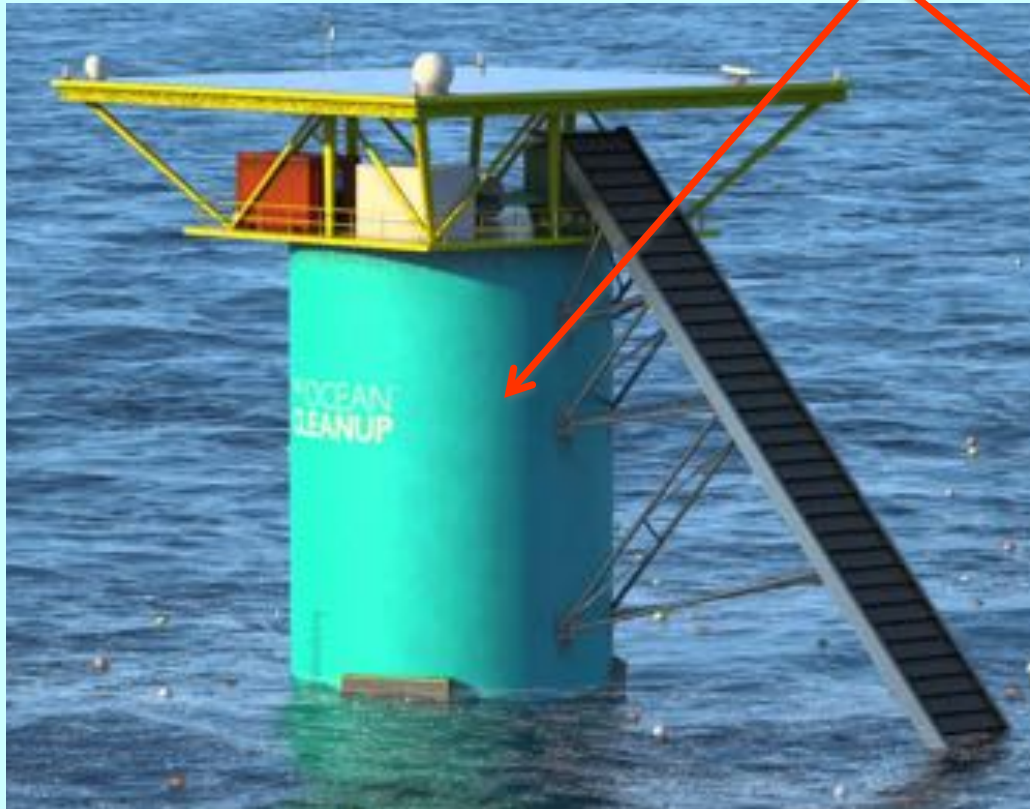
Un ricercatore olandese ha progettato un innovativo sistema galleggiante per ripulire gli oceani dalla plastica.



Boyan Slat, Olanda 1994

Un cilindro che accumula plastica

Il sistema, ora in via di sperimentazione, raccoglie la plastica in una vasta zona di oceano e l'accumula in un cilindro.

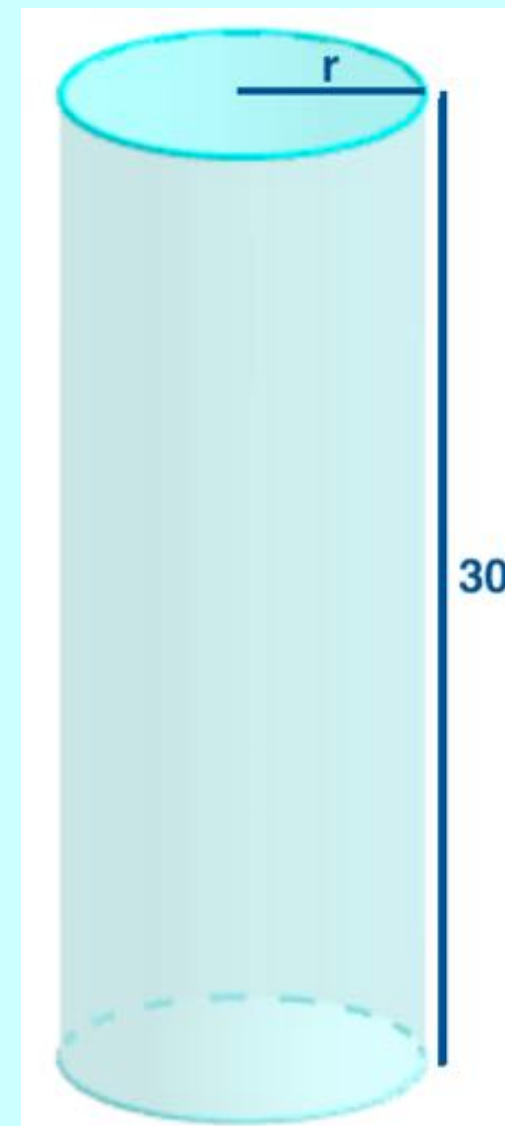


Comporre funzioni nella realtà

Ogni giorno il sistema accumula 65m^3 di plastica nel cilindro, che deve essere svuotato appena è pieno.

In fase di progettazione, **il cilindro doveva avere un'altezza $h = 30\text{m}$** , determinata dalle condizioni dell'oceano, e **bisognava scegliere il raggio r** .

Lo studio necessario: collegare il raggio r con il volume V di plastica accumulata al passare del tempo t , misurato in giorni. Vediamo come si può ragionare.



Comporre funzioni nella realtà

Ogni giorno accumulo nel cilindro 65m^3 di plastica;
in t giorni accumulo un volume V di plastica dato da:

$$V = 65t$$

V funzione
del tempo t

Il cilindro riempito dalla plastica ha volume V e altezza
 30m , perciò posso ricavare il raggio r .

$$V = \pi r^2 \cdot 30 \Rightarrow r^2 = \frac{V}{30\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{30\pi}}$$

r funzione
del volume V

Compongo le due funzioni

$$t \xrightarrow{65t} V \xrightarrow{\sqrt{\frac{V}{30\pi}}} r = \sqrt{\frac{65t}{30\pi}}$$

**FUNZIONE
COMPOSTA**
 r funzione
del tempo t

Un problema risolto con la funzione composta

Una buona offerta economica propone una nave che svuota il cilindro ogni 45 giorni. Quanti metri deve essere lungo il raggio r ?

$$\left. \begin{array}{l} r = \sqrt{\frac{65t}{30\pi}} \\ t = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{65 \cdot 45}{30\pi}} \cong 5,57$$

Funzione composta in matematica

Un esempio

Indico le variabili con x , z , y e compongo due funzioni che 'somigliano' a quelle esaminate nel problema:

$$z = 4x \text{ e } y = \sqrt{z}$$

Ottengo

$$x \xrightarrow{4x} z \xrightarrow{\sqrt{z}} y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

Funzione composta in matematica

Un esempio

Una tabella per esaminare meglio le funzioni

**Posso calcolare y solo se
 $z \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$**

x	$z = 4x$	$y = \sqrt{z} \Leftrightarrow y = \sqrt{4x}$
-2	-8	$\sqrt{-8}$ non è un numero reale
-1	-4	$\sqrt{-4}$ non è un numero reale
0	0	$\sqrt{0} = 0$
1	4	$\sqrt{4} = 2$
2	8	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$

Per comporre le due funzioni:

- scelgo x nel dominio di $4x$ e ottengo z ;
- solo se z appartiene al dominio di \sqrt{z} posso calcolare y .

Il dominio della funzione composta è costituito dai soli valori $x \geq 0$, per i quali posso calcolare y .

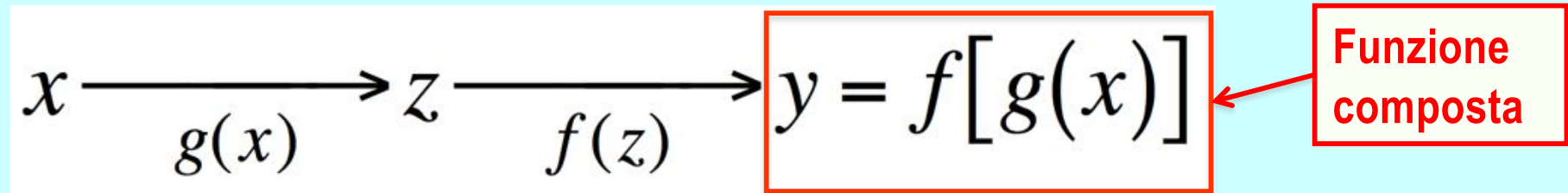
Funzione composta in matematica

In generale

Indico le variabili con x , z , y e compongo due funzioni:

$$z = g(x) \text{ e } y = f(z)$$

Ottengo



Posso comporre le funzioni solo se z appartiene al dominio di $f(z)$.

Perciò il dominio della funzione composta è formato solo dai valori di x che permettono di comporre le funzioni.

Vocabolario matematico

Compongo due funzioni $z = g(x)$ e $y = f(z)$

Ottengo

$$x \xrightarrow{g(x)} z \xrightarrow{f(z)} y = f[g(x)]$$

$$y = f(g(x))$$

$$y = (f \circ g)(x)$$

Simboli alternativi che si trovano in vari testi

Composizione di funzioni in matematica

Se cambia l'ordine delle funzioni, cambia anche la funzione composta ottenuta.

Esempi

$$x \xrightarrow{4x} z \xrightarrow{\sqrt{z}} y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{\sqrt{x}} z \xrightarrow{4z} y = 4\sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{x+3} z \xrightarrow{z^2} y = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$x \xrightarrow{x^2} z \xrightarrow{z+3} y = x^2 + 3$$