L’inversa di una funzione

Cominciamo con l’esaminare schematicamente uno dei tanti problemi concreti che conduce a ricercare l’inversa di una data funzione: il problema di determinare l’età di un fossile basandosi sul decadimento radioattivo di una particolare sostanza (il Carbonio 14).

Si tratta di questo: ogni organismo contiene una quantità di C_{14} che rimane costante fino a che l’organismo vive; non appena l’organismo muore, inizia il decadimento del C_{14} con un tempo di dimezzamento di 6000 anni (cioè il C_{14} dimezza ogni 6000 anni).

In prima approssimazione, la legge che regola questo fenomeno si può scrivere così:

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^{t} \qquad (1)$$

dove

M indica la massa di C_{14},
t indica il tempo, misurato dal numero di tempi di dimezzamento trascorsi.

Questa legge può essere considerata da due punti di vista:
- previsione: è dato il tempo t e si vuole prevedere la massa M dopo che è trascorso il tempo t;
- datazione: si trova un fossile che contiene una data massa M e si vuole risalire al tempo t trascorso.

Si distinguono i due casi indicando con x la variabile che si conosce e con y la variabile che si vuole ricavare. In questo modo la legge (1) si scrive:

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, se è dato $t=x$ e si vuole calcolare $M=y$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$, se è data $M=x$ e si vuole risalire a $t=y$

La seconda espressione si scrive introducendo il termine logaritmo e cioè:

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$, invece di $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$

Dal punto di vista grafico si ottengono le curve delle figg. 69 e 70; le due curve sono simmetriche rispetto alla retta d’equazione $y=x$ (fig. 71).

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

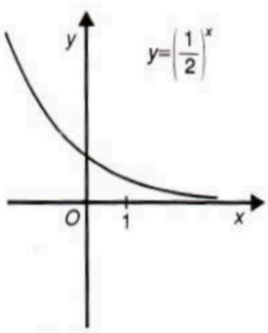


Fig. 69

x	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1

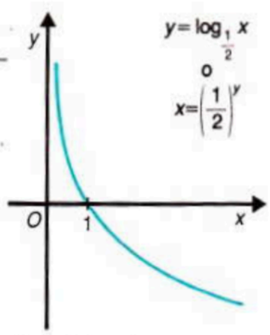


Fig. 70

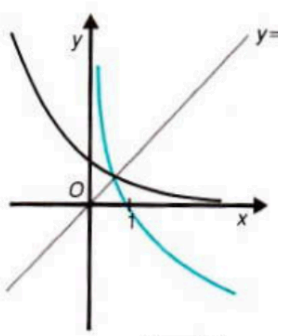


Fig. 71

Rivediamo il procedimento seguito:

- ho scritto la formula che definisce la funzione esponenziale
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$
- nella formula ho scambiato x con y, così ho ottenuto l'equazione
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$
- dall'ultima equazione ho ricavato y e ho ottenuto la formula che definisce la funzione logaritmica.
$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$$

Le figg. 69 e 70 mettono in rilievo alcune caratteristiche della funzione esponenziale (fig. 69) e della funzione logaritmica (fig. 70):

– la funzione esponenziale ha come campo di esistenza l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, e come immagine l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi;
– la funzione logaritmica ha come campo di esistenza l'insieme $\mathbb{R}^+$, e come immagine l'insieme $\mathbb{R}$;
– per passare dalla funzione esponenziale alla funzione logaritmica si scambia x con y, ossia **si inverte la legge di corrispondenza**; per questo si dice che **la funzione esponenziale e la funzione logaritmica sono l'una l'inversa dell'altra**.

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

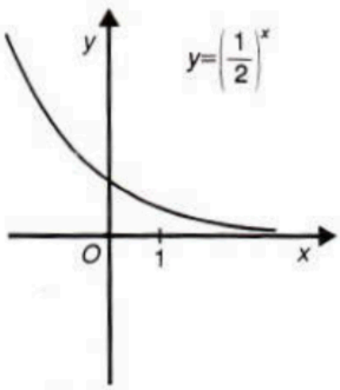


Fig. 69

x	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1

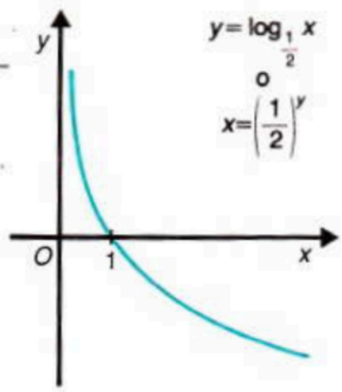


Fig. 70

È chiaro che la stessa linea può essere seguita per cercare la funzione inversa di una qualunque funzione $y=f(x)$; si procede così:

– si scrive la formula $y=f(x)$, che definisce la funzione;
– si scambia x con y, ottenendo l'equazione $x=f(y)$;
– si ricava y dall'equazione, ottenendo una nuova formula;
– se la formula ottenuta definisce una funzione $y=g(x)$, quest'ultima funzione è l'inversa di quella data[1].

In base al procedimento seguito si ha che:

il grafico di una funzione e della sua inversa sono due curve simmetriche rispetto alla retta d'equazione $y = x$.

[1] La funzione inversa di $y = f(x)$ si indica talvolta con il simbolo $y = f^{-1}(x)$

Inverse di funzioni elementari

Inversa di $y = e^x$

L'inversa della funzione

$$y = e^x$$

è la funzione $y = \log_e(x)$, indicata spesso con il simbolo

$$y = \ln(x).$$

Qui sotto i grafici delle due funzioni.

x	$y=e^x$
$\vdots$	
-1	$e^{-1}=\frac{1}{e}\cong 0,37$
0	$e^0=1$
1	$e^1=e\cong 2,72$

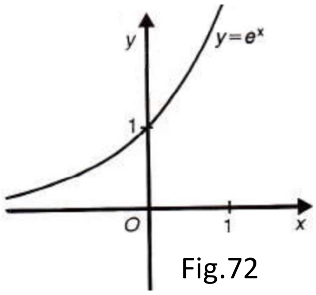


Fig.72

x	$y=\ln x$
$\frac{1}{e}$	-1
1	0
e	1

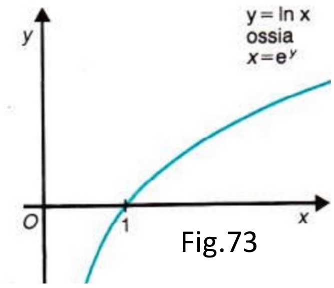


Fig.73

Inversa di $y = x^3$

L'inversa della funzione

$$y = x^3$$

è la funzione $x = y^3$, indicata con il simbolo

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Qui sotto i grafici delle due funzioni.

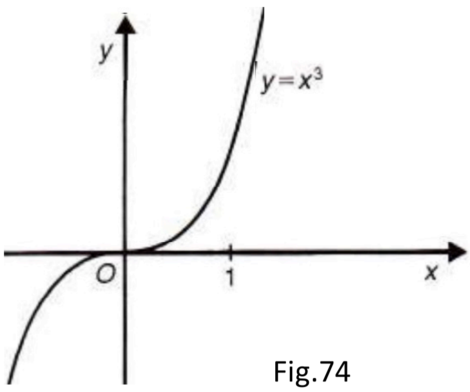


Fig.74

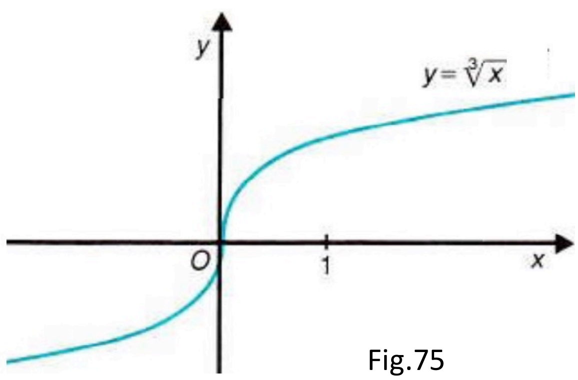


Fig.75

Inversa di $y = x^2$

In questo caso trovo una difficoltà illustrata in figura 77: la formula $x = y^2$ non descrive una funzione, dato che ad un valore di x **non** corrisponde un solo valore di y.

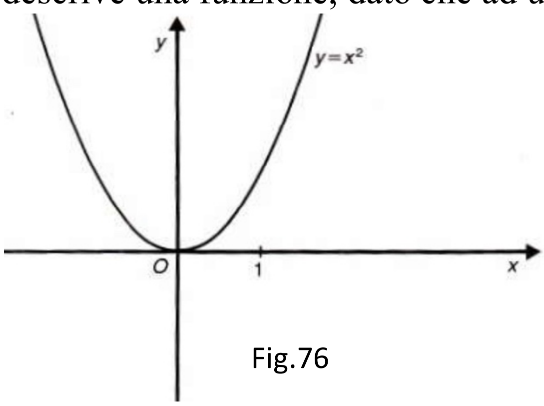


Fig.76

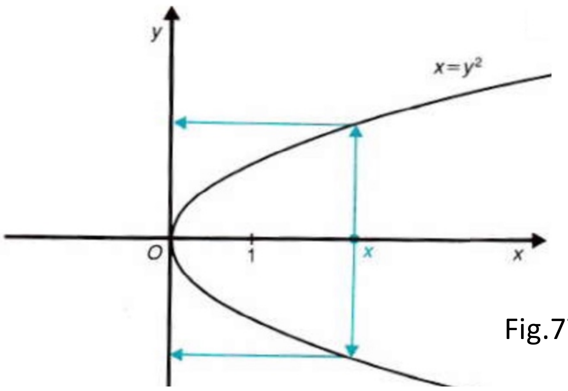


Fig.77

Per superare questa difficoltà, considero la funzione $y = x^2$ definita nell'insieme R^+ dei numeri reali positivi. Ottengo così la funzione di figura 78, che è invertibile, perché ogni *y* proviene da una sola *x*.

La funzione inversa di quest'ultima funzione è definita dalla formula:

$$y = \sqrt{x}$$

ed è rappresentata in figura 79.

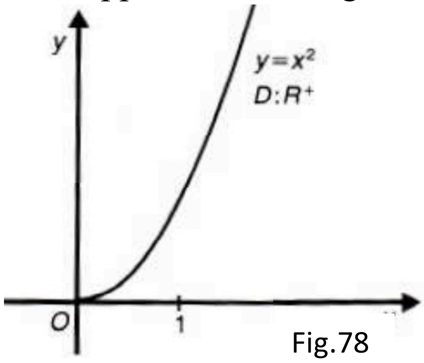


Fig.78

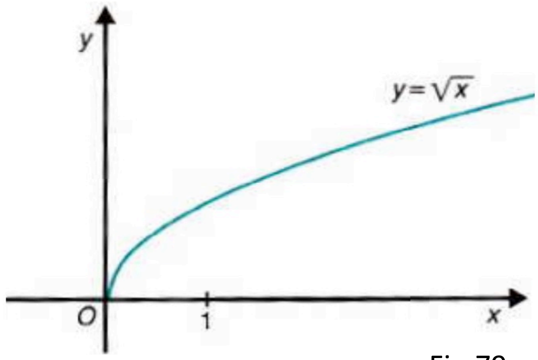


Fig.79

Inverse di funzioni trigonometriche

Trovo un'analoga difficoltà per determinare le inverse delle funzioni trigonometriche. La formula $x = sen(y)$ non descrive una funzione, dato che ad un valore di *x* **non** corrisponde un solo valore di *y* (fig. 81).

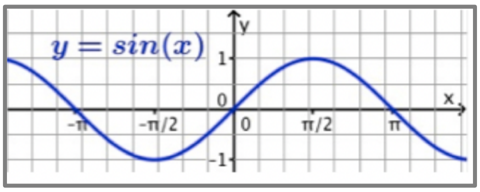


Fig.80

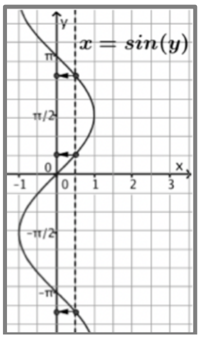


Fig.81

Per superare questa difficoltà, considero la funzione $y = \mathrm{sen}(x)$ definita nel dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ottengo così la funzione di figura 82, che è invertibile, perché ogni *y* proviene da una sola *x*.

La funzione inversa di quest'ultima funzione è definita dalla formula:

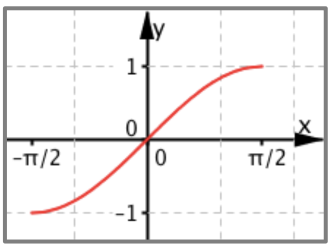
$$y = \mathrm{arcsen}(x)$$

ed è rappresentata in figura 83.

$y = \mathrm{sen}(x)$

$D\colon \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

Fig.82



$y = \mathrm{arcsen}(x)$

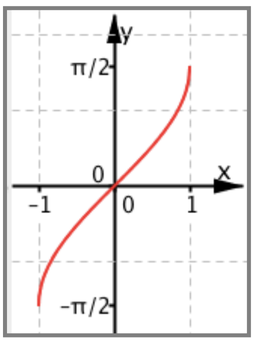
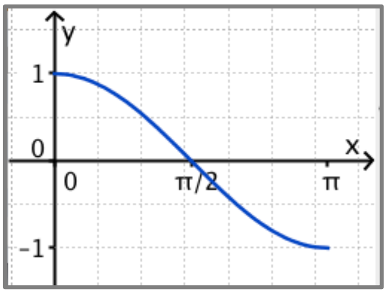


Fig.83

Con analoghi ragionamenti trovo l'inversa di $y = \cos(x)$

$y = \cos(x)$
$D: [0, \pi]$

Fig.84



$y = \arccos(x)$

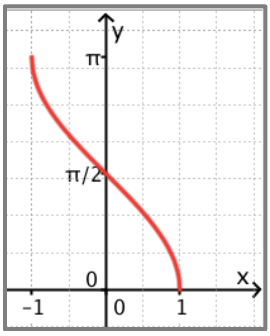
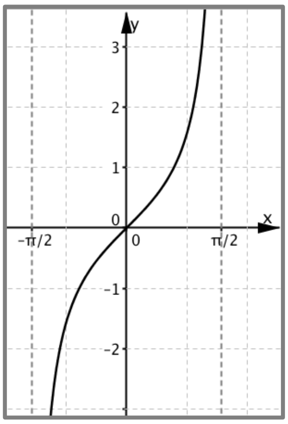


Fig.85

E trovo anche l'inversa di $y = \tan(x)$

$y = \tan(x)$
$D: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Fig.86



$y = \arctan(x)$

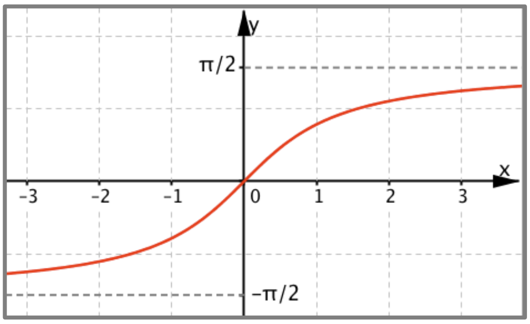


Fig.87

Funzioni inverse e rette tangenti

Per passare da una funzione alla sua inversa opero la simmetria rispetto alla retta d'equazione $y = x$. La simmetria 'coinvolge' anche la retta t tangente alla curva in un suo punto t, come mostra l'esempio nella figura seguente.