Algebra delle derivate 3. Esercizi

Derivata di funzioni inverse

Derivate di funzioni inverse delle funzioni trigonometriche

1. Completa qui sotto la derivata della funzione inversa di $y = \tan(x)$

$$x = \tan(y) \Leftrightarrow y = \arctan(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots}$$

La derivata di $y = \arctan(x)$ è $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

2. Completa qui sotto la derivata della funzione inversa di $y = \text{sen}(x)$

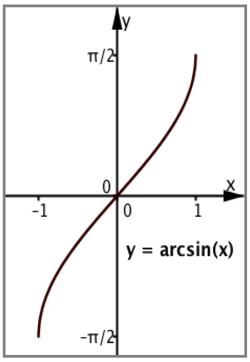
$$x = \sin(y) \Leftrightarrow y = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ da cui $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$

La derivata di $y = \arcsin(x)$ è $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Una riflessione sulla precedente derivata: osserva qui a fianco il grafico di $y = \text{arcsen}(x)$ e rispondi ai seguenti quesiti:



- Qual è il dominio di $y = \text{arcsen}(x)$?......................................
- Qual è il codominio di $y = \text{arcsen}(x)$? ....
- Perché risulta $\cos(y) \geq 0$? ....

4. Completa il calcolo della derivata di $y = \arccos(x)$ con due diversi procedimenti.

I. Procedimento analogo a quello seguito per la derivata di $y = \text{arcsen}(x)$

$$x = \cos(y) \Leftrightarrow y = \arccos(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

La derivata di $y = \arccos(x)$ è $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

II. Procedimento basato sulla relazione fra funzioni trigonometriche di angoli complementari:

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ritrovo così la stessa derivata.

5. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

$f(x) = \text{arcsen}(x) + \arccos(x)$ $\quad g(x) = \text{arcsen}(x) - \arccos(x)$

Hai seguito il procedimento più rapido?

Derivata di funzioni composte

Procedimento generale per derivare funzioni composte:
- ***scomporre la funzione nelle sue componenti, usando idonee variabili;***
- ***applicare la notazione di Leibniz e trattare i differenziali come numeri.***

6. È data la funzione $y = (3x^2 - 4x)^2$. Completa il calcolo della derivata con due procedimenti.

a. Sviluppa il quadrato e calcola la derivata del polinomio ottenuto

$y =$ ……………………

$y' =$……………………………

b. Calcola la derivata della funzione data, considerata come funzione composta da

$y =$……… con $z =$………

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cdots\cdots\cdots \Rightarrow y' = \cdots\cdots\cdots$$

Quale procedimento ti sembra più semplice? ……………………………

7. Calcola le derivate delle seguenti funzioni con due procedimenti:
a. deriva la funzione data con la regola di derivazione di funzione composta;
b. sviluppa il quadrato e calcola la derivata del polinomio ottenuto.
Qual è il procedimento più rapido?

$y=(x-1)^2, \quad y=(x+2)^2, \quad y=(3x-5)^2.$

8. Calcola le derivate delle seguenti funzioni

$y=(x^2-2)^2, \quad y=(3-x^3)^2, \quad y=(2x^2+x)^2.$

In quanti puoi svolgere il calcolo?
Qual è il procedimento più rapido?

9. Calcola le derivate delle seguenti funzioni

$y=(2x+3)^3, \quad y=(x-2)^4, \quad y=(4x^2-8)^3.$

In quanti puoi svolgere il calcolo?
Qual è il procedimento più rapido?

Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 10 a 13.

10. $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad y=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \quad y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

11. $y=\cos(x+\pi), \quad y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right), \quad y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

12. $y=\operatorname{sen}(2x), \quad y=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \quad y=\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

13. $y=\cos(2x), \quad y=\cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad y=\cos(2x-\pi)$

14. Indica la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$y=\text{sen}\ (\omega x)$, $y=\text{sen}\ (\omega x+\varphi)$, $y=\text{sen}\ [f(x)]$,

dove ω e φ indicano due costanti e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile.

15. Indica la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$y=\cos\ (\omega x)$, $y=\cos\ (\omega x+\varphi)$, $y=\cos\ [f(x)]$,

dove ω e φ indicano due costanti e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile.

Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 16 a 19.

16. $y=e^{-x}$, $y=e^{2x}$, $y=e^{(3x+4)}$

17. $y=e^{x^2}$, $y=e^{-x^2}$, $y=e^{2x^2}$

18. $y=e^{(4-3x^2)}$, $y=e^{(x^2+x)}$, $y=e^{(x^2-3x+2)}$

19. $y=e^{\frac{1}{x}}$, $y=e^{\frac{-1}{x}}$, $y=e^{\frac{1}{x^2}}$

20. Scrivi la regola generale per derivare le seguenti funzioni:

$y = e^{ax}$, $y = e^{ax+b}$, $y = e^{f(x)}$

La composizione di funzioni per derivare particolari funzioni

Logaritmo in base e

$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$

$\boldsymbol{x} = e^{\ln(x)}$

$\boldsymbol{f(x)} = e^{\ln[f(x)]}$

Proprietà dei logaritmi

I. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

II. $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

21. Completa il procedimento per calcolare la derivata di $\boldsymbol{y = a^x}$

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$a^x = e^{\ln\left(a^x\right)}$$

- Applico la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln\left(a^x\right)} = e^{x\cdot\ln(a)}$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da

$y = e^z$, $z =$ …….. da cui. $\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx} = e^z \cdot$.....

- La derivata di $\boldsymbol{y = a^x}$ è $\boldsymbol{y' = \ln(a) \cdot a^x}$

22. Completa il procedimento per calcolare la derivata di $\boldsymbol{y = x^r}$, dove l'esponente $\boldsymbol{r}$ è un numero reale, anche irrazionale.

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$x^r = e^{\ln\left(x^r\right)}$$

- Applica la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln\left(x^r\right)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da:

$y = e^z$, $z =$ ………… da cui $\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx} = e^z \cdot$.....

- La derivata di $\boldsymbol{y = x^r}$ è $\boldsymbol{y' = rx^{r-1}}$

23. Completa il procedimento per calcolare la derivata della funzione

$f(x) = \pi^x - x^\pi$

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots \cdot \pi^x - \pi \cdot \ldots\ldots\ldots$

24. Completa il procedimento per calcolare la derivata di $\boldsymbol{y = x^x}$

- Scrivo la funzione data come funzione composta.

$$x^x = e^{\ln\left(x^x\right)}$$

- Applico la II proprietà dei logaritmi per scrivere:

$$e^{\ln\left(x^x\right)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Calcola la derivata della funzione ottenuta, composta da:

$$y = e^z \, , z = \ldots\ldots\ldots \text{ da cui } \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z \cdot\ldots\ldots$$

- La derivata di $\boldsymbol{y = x^x}$ è $\boldsymbol{y' = [\ln(x) + 1] \cdot x^x}$.

Logaritmo in base e

$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$

$x = e^{\ln(x)}$

$f(x) = e^{[f(x)]}$

Proprietà dei logaritmi

I. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

II. $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

III. $\log_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$

È molto più rapido e basato solo su una proprietà dei logaritmi il procedimento per derivare la funzione logaritmo in una qualunque base b.

25. Completa il procedimento per calcolare la derivata di $\boldsymbol{y = \log_b(x)}$.

Applica la proprietà III per scrivere

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Così devi derivare la funzione $y = \ldots\ldots\ln(x)$.

La derivata di $\boldsymbol{y = \log_b(x)}$ è $\boldsymbol{y' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}}$

Derivate di funzioni composte anche con funzioni inverse

Calcola le derivate delle funzioni composte assegnate negli esercizi da 26 a 30

26. $y=\ln(-x)$, $\quad y=\ln(4x)$, $\quad y=\ln(3x+4)$

27. $y=\ln(\cos x)$, $\quad y=\ln(\text{sen } x)$, $\quad y=\ln(\text{tg } x)$

(Si ottiene $y'=-tg\ x$, $y'=ctg\ x$, $y'=tg\ x+ctg\ x$).

28. $y=\text{arcsen}(2x)$, $\quad y=\text{arcsen}(2x+3)$, $\quad y=\text{arcsen}(x^2)$

29. $y=\text{arctg}(3x)$, $\quad y=\text{arctg}(3x+2)$, $\quad y=\text{arctg}(\sqrt{x})$

30. Scrivere la formula generale per ottenere le derivate delle seguenti funzioni:

$y=\ln f(x)$, $\quad y=\text{arctg}\, f(x)$, $\quad y=\text{arcsen}\ f(x)$.

(Si ottiene: $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$).

Derivate di funzioni composte anche con $y = x^r$, con r numero reale

31. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione $y = x^r$ con esponente r numero reale	**Derivata $y' = rx^{r-1}$**
$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \cdots\cdots\cdots$	
$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \cdots\cdots\cdots$	
$y = x^{\sqrt{2}}$	

32. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione $y = [f(x)]^r$	**Derivata $y' = r[f(x)]^{r-1}$**
$y = \sqrt{3x} = [\cdots\cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \sqrt{-x} = [\cdots\cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \sqrt{4-3x} = [\cdots\cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}$	
$y = \frac{1}{\sqrt{-4x}} = \cdots\cdots\cdots$	
$y = \frac{1}{\sqrt{4-5x}} = \cdots\cdots\cdots$	
$y = \frac{1}{\ln(x)} = [\ln(x)]^{-1}$	
$y = \frac{1}{\text{sen}^2(x)} = [\cdots\cdots\cdots]^{-2}$	
$y = \sqrt{\cos(x)} = [\cdots\cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}$	