Differenziale e approssimazione lineare. Esercizi

Problemi che chiedono di applicare solo le regole di derivazione di somma e prodotto

Regole di derivazione in sintesi

Algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Differenziale di $y = f(x)$ in $x = a$: $\boldsymbol{df = f'(a)h}$

1. Data $f(x) = x^2$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$, completa le risposte ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa;

$f(x) = \ldots\ldots$ $\quad f(1) = \ldots\ldots$ $\quad f(1 + h) = \ldots\ldots$ $\quad f'(x) = \ldots\ldots$ $\quad f'(1) = \ldots\ldots$

$\Delta f = f(1 + h) - f(1) = \ldots..$ $\quad df = f'(1)h = \ldots..$

b. rappresenta Δf e df nella figura 1 qui sotto;

c. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = (1 + h)^2$

$f(1 + h) = \Delta f + \ldots = \ldots\ldots$ $\quad$ valutazione approssimata $(1 + h)^2 \approx df + \ldots. = \ldots\ldots$

d. Valuta l'errore commesso applicando il differenziale e interpretalo geometricamente nella figura 2 qui sotto.

$\Delta f - $ d$f = \ldots\ldots\ldots$

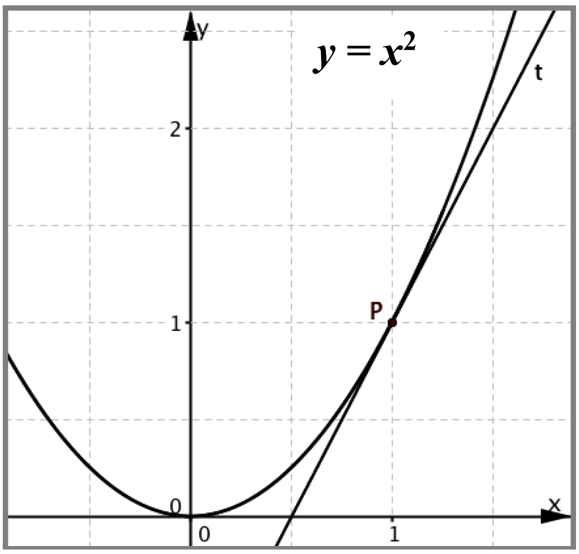

Fig.1

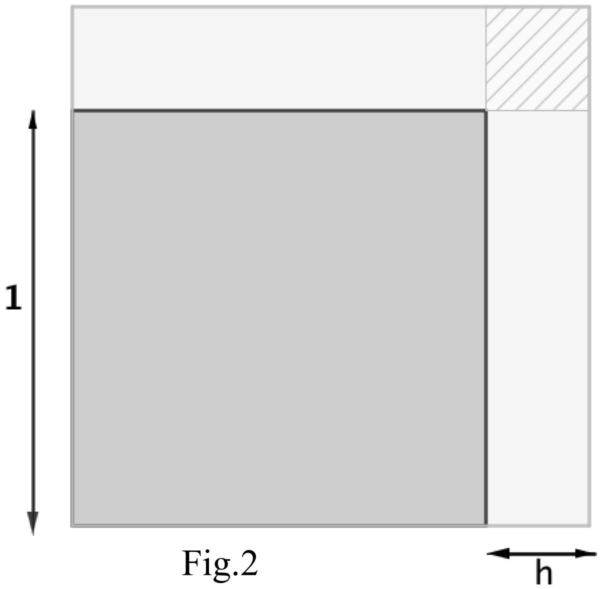

Fig.2

2. Spiega perché un errore h sulla misura del raggio di un cerchio comporta approssimativamente un errore $2h$ nella misura dell'area del cerchio.
[*Tieni presente che:*
- la superficie y è legata alla lunghezza x del raggio dalla funzione $y = \pi x^2$;
-l'errore sulla superficie è Δy *che può essere approssimato con dy.]*

3. È data $f(x) = x^3$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$, completa le risposte ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa;

$f(x) = \ldots\ldots$ $\quad f(1) = \ldots\ldots$ $\quad f(1 + h) = \ldots\ldots$ $\quad f'(x) = \ldots\ldots$ $\quad f'(1) = \ldots\ldots$

$\Delta f = f(1 + h) - f(1) = \ldots..$ $\quad df = f'(1)h = \ldots..$

b. rappresenta Δf e df nella figura 3 qui sotto;

c. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = (1 + h)^3$

$f(1 + h) = \Delta f + \ldots = \ldots\ldots$ $\quad$ valutazione approssimata $(1 + h)^3 \approx \mathrm{d}f + \ldots. = \ldots\ldots$

d. Valuta l'errore commesso applicando il differenziale e interpretalo geometricamente nella figura 4 qui sotto.

$\Delta f - \mathrm{d}f = \ldots\ldots\ldots\ldots$

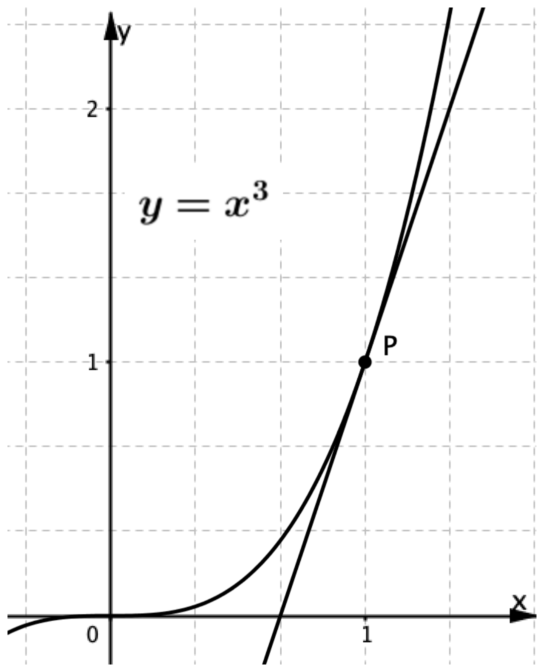

Fig.3

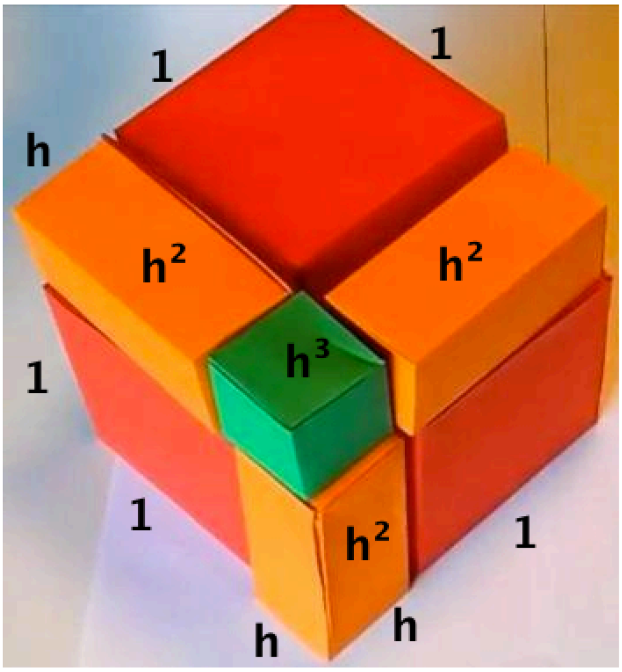

Fig.4

4. Generalizza i risultati ottenuti nell'esercizio precedente: considera una funzione del tipo $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$. Rispondi ai seguenti quesiti.

a. Calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa.

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = (1 + h)^{\mathrm{n}}$

c. Spiega perché ottieni $(1 + h)^{\mathrm{n}} \approx 1 + nh$.

5. Spiega perché un errore h sulla misura del raggio di una sfera comporta approssimativamente:

a. un errore $2h$ nella misura della superficie della sfera;

b. un errore $3h$ nella misura della superficie della sfera

[*Tieni presente che:*

- la superficie y è legata alla lunghezza x del raggio dalla funzione $y = 4\pi x^2$;

- il volume y è legato alla lunghezza x del raggio dalla funzione $y = \frac{4}{3}\pi x^3$;

6. Il raggio della Terra misura circa 6400 km, l'altezza dell'atmosfera è di circa 50 km; valuta approssimativamente il volume occupato dall'atmosfera (in km^3).

7. È data la funzione $f(x) = \text{sen}(x)$ e il suo punto P di ascissa $a = 0$.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento α dato all'ascissa;

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(0 + \alpha) = \text{sen}(\alpha)$

c. Spiega perché ottieni $\text{sen}(\alpha) \approx \alpha$.

d. Osserva la figura 5 qui sotto per interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

8. È data la funzione $f(x) = \cos(x)$ e il suo punto P di ascissa $a = 0$.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento α dato all'ascissa;

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(0 + \alpha) = \cos(\alpha)$

c. Spiega perché ottieni $\cos(\alpha) \approx 1$.

d. Osserva la figura 6 qui sotto per interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

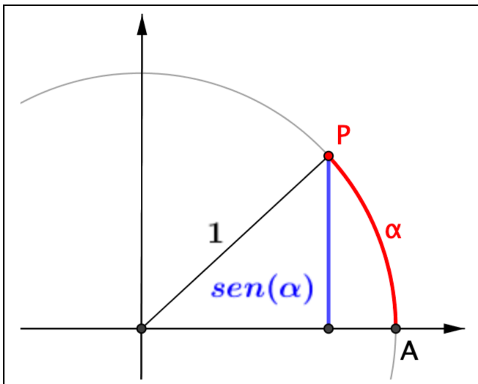

Fig.5

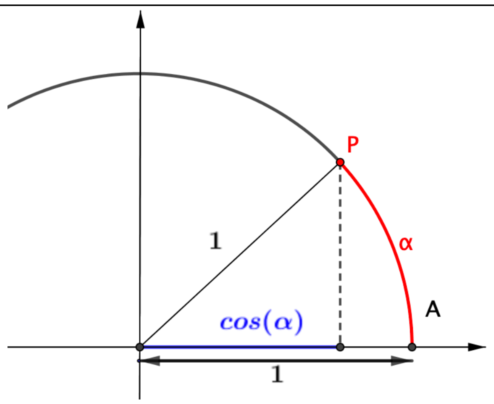

Fig.6

9. È data la funzione $f(x) = e^x$ e il suo punto P di ascissa $a = 0$.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. Calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa.

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(0 + h) = e^h$

c. Spiega perché ottieni $e^h \approx 1 + h$.

Problemi che chiedono di applicare le regole di derivazione di quoziente, somma e prodotto di funzioni derivabili.

Regole di derivazione in sintesi

Algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{1}{g(x)}$	$y' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Differenziale di y = f(x) in x = a: ***df = f'(a)h***

10. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$.
Rispondi ai seguenti quesiti.

a. Calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa.

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = \frac{1}{1+h}$

c. Spiega perché ottieni $f(1 + h) \approx 1 - h$

11. È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. Calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa.

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = \frac{1}{(1+h)^2}$

c. Spiega perché ottieni $f(1 + h) \approx 1 - 2h$

12. Generalizza i risultati dei due precedenti esercizi: ora è data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^n}$ e il suo punto P di ascissa $a = 1$. Rispondi ai seguenti quesiti:

a. Calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento h dato all'ascissa.

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1 + h) = \frac{1}{(1+h)^n}$

c. Spiega perché ottieni $f(1 + h) \approx 1 - nh$.

13. È data la funzione $f(x) = \tan(x)$ e il suo punto P di ascissa $a = 0$.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale df, corrispondenti ad un incremento α dato all'ascissa;

b. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(0 + \alpha) = \tan(\alpha)$

c. Spiega perché ottieni $\tan(\alpha) \approx \alpha$.

d. Osserva la figura 7 qui sotto per interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

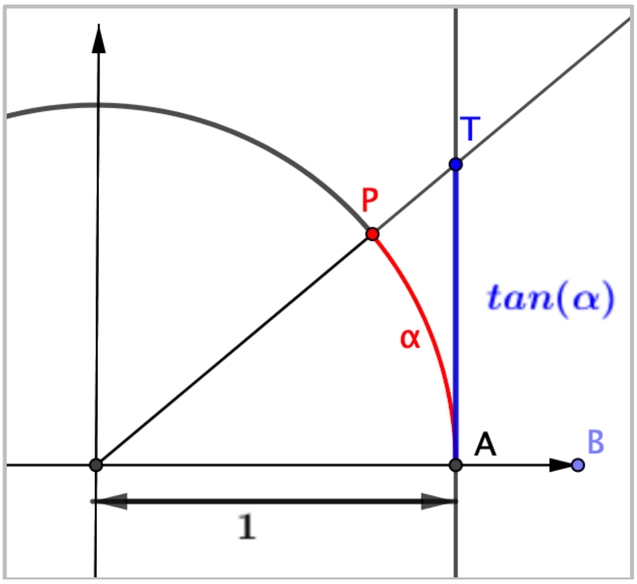

Fig. 7