Differenziale e approssimazione lineare

Stefano Volpe, 2022

Retta tangente e approssimazione lineare

L'approssimazione lineare **risolve un problema importante in matematica e nelle applicazioni: *approssimare con una retta l'andamento di una curva nell'intorno di un suo punto P.***

Un procedimento semplice per risolvere il problema: approssimare la curva con la retta tangente in P.

Un esempio mostra come posso ragionare.

La retta tangente approssima una curva
Un esempio

La curva è il grafico della funzione $f(x) = x^3$

che ha derivata $f'(x) = 3x^2$

Il punto della curva è $P(1, 1)$

L'equazione della tangente t

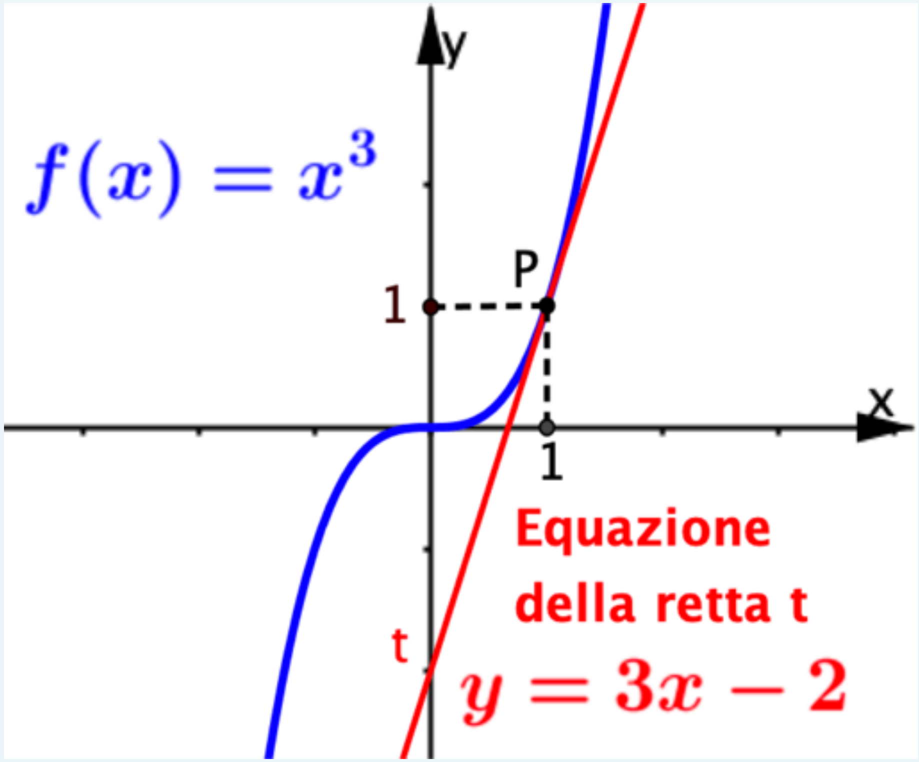
alla curva in $P(1, 1)$ è:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 2$$



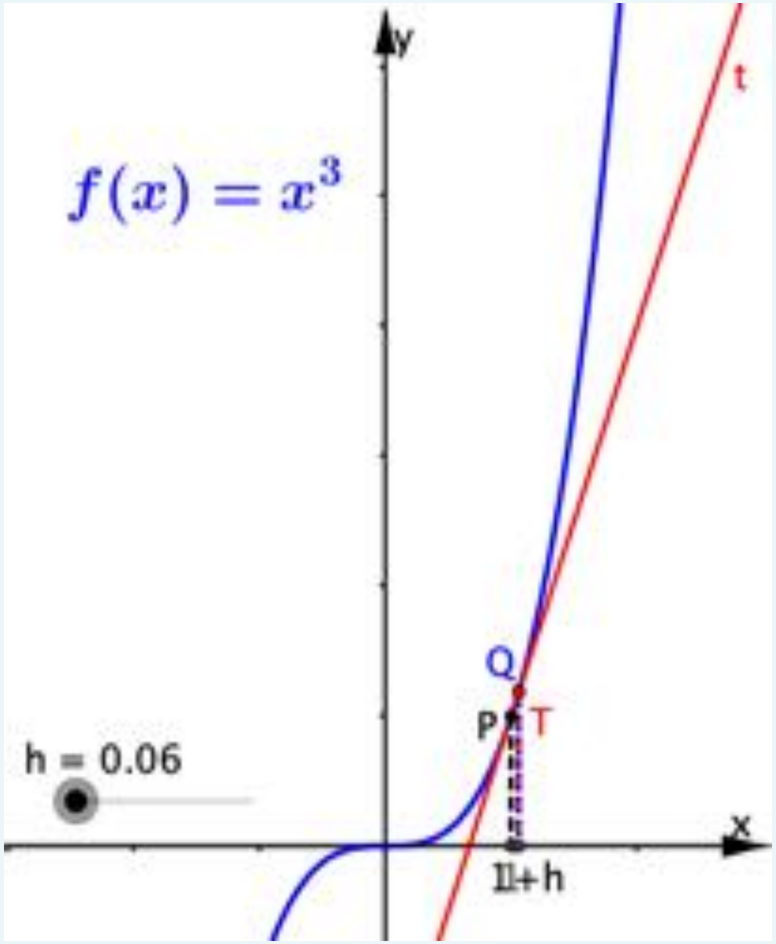
La tangente approssima una curva
Un esempio

P(1; 1) si trova:
- sulla curva d'equazione $y = x^3$;
- sulla tangente d'equazione $y = 3x - 2$.

Mi muovo in un intorno di P e trovo due punti con l'ascissa 1+h, vicina a 1:
- Q che percorre la curva;
- T che percorre la tangente.

T e Q sono vicini se h è piccolo:
la tangente approssima la curva in un intorno di P.

Come valuto l'errore di approssimazione?

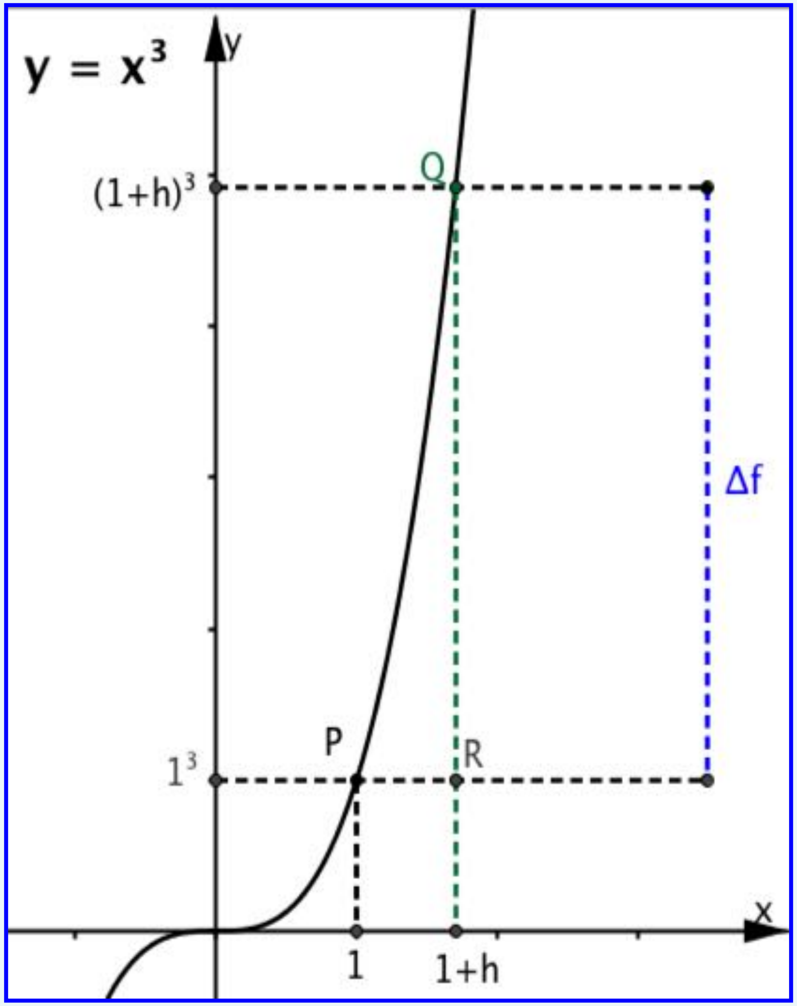


La tangente approssima una curva. Un esempio

Percorro la curva nell'intorno di P:

- passo dal punto P al punto Q;
- l'ascissa passa da 1 a $1 + h$;
- l'ordinata passa da 1 a $(1 + h)^3$.
- perciò l'ordinata subisce una variazione Δf data da:

$$\boxed{\Delta f = (1 + h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3}$$

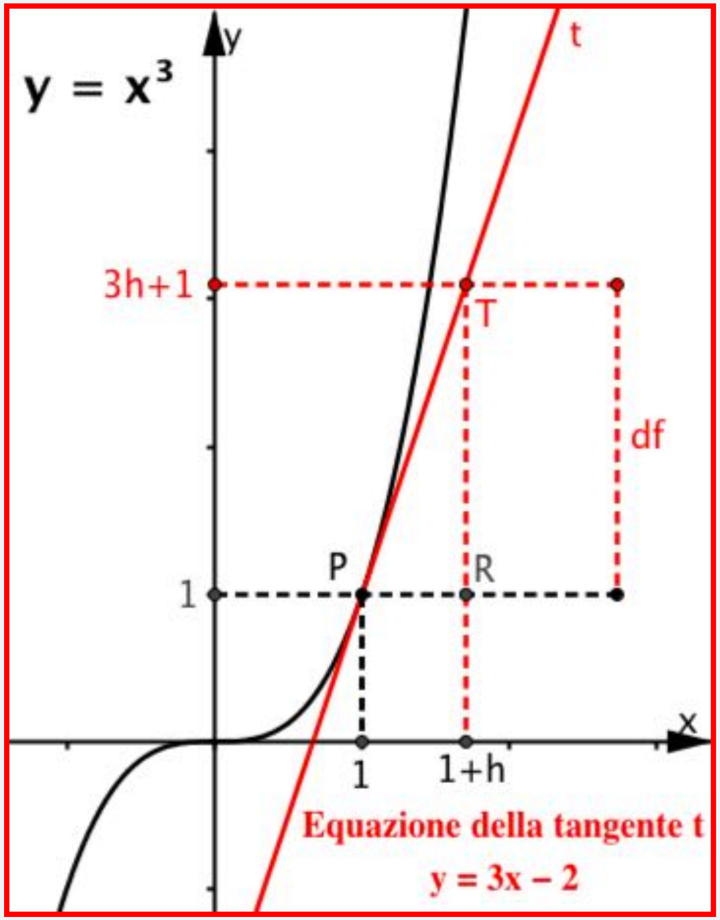


La tangente approssima una curva. Un esempio

Percorro la tangente t **nell'intorno di P passo dal punto P al punto T.**

- **l'ascissa passa da 1 a 1 + h;**
- **l'ordinata passa da 1 a 3h + 1;**
- **perciò l'ordinata subisce una variazione d*f* data da**

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \mathbf{3}\boldsymbol{h} + \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{3}\boldsymbol{h}$$



$$y_T = 3(h + 1) - 2 = 3h + 3 - 2 = 3h + 1$$

La tangente approssima una curva.
Un esempio

Approssimare la curva con la tangente nell'intorno di P porta ad approssimare la variazione Δf con df.

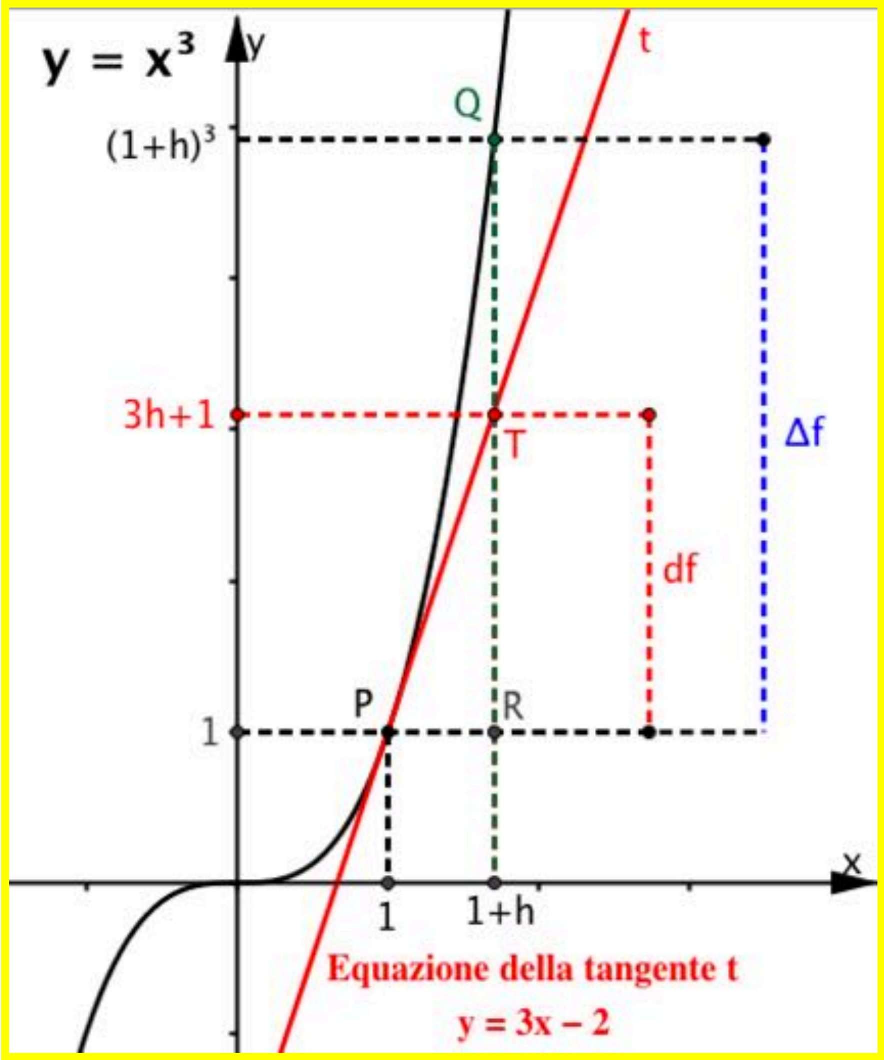
$$\Delta f = 3h + 3h^2 + h^3$$

$$df = 3h$$

L'errore che si commette con questa approssimazione è

$$\Delta f - df = 3h^2 + h^3$$

L'errore dipende da *h* ed è molto piccolo, se *h* è molto vicino a 0.



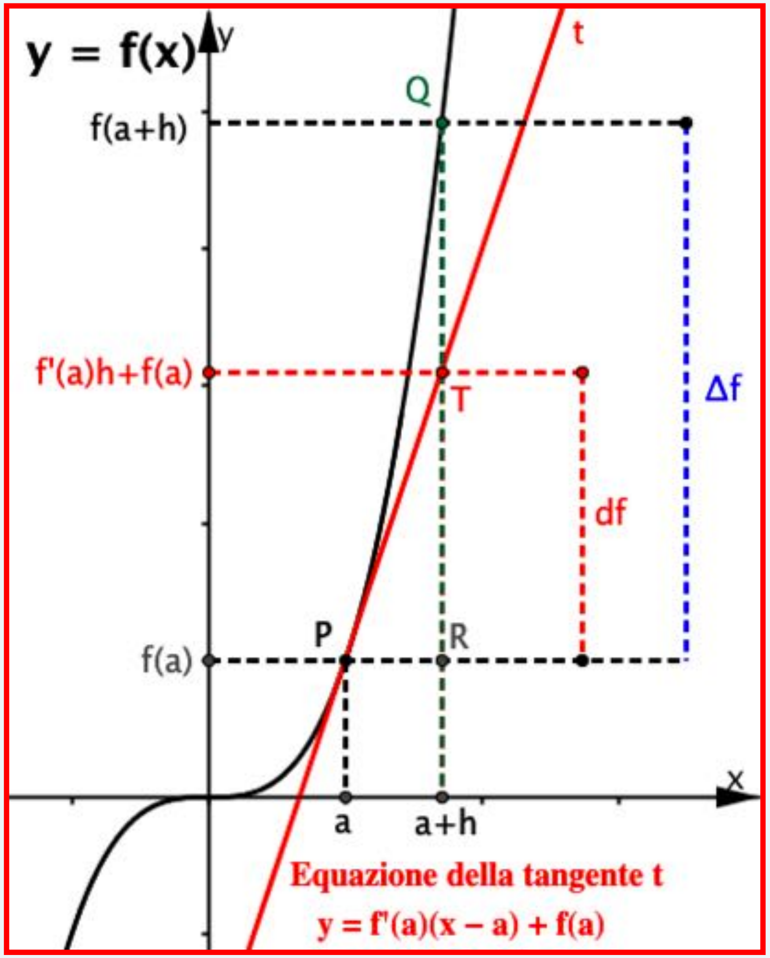
La tangente approssima la curva Il differenziale

In generale, approssimare la curva con la tangente nell'intorno di P porta ad approssimare la variazione Δf con df.

$$\Delta f = f(a+h) - f(a)$$

$$df = f'(a)h$$

df prende il nome di **differenziale**



$$y_T = f'(a)(a+h-a) + f(a) = \\ = f'(a)h + f(a)$$

Problemi per riflettere

Completa la scheda di lavoro per risolvere vari problemi che richiedono di applicare il differenziale

Che cosa hai ottenuto

Problema 1

Quesiti a, b

1. Data $f(x) = x^2$ e il suo punto P di ascissa a =
completa le risposte ai seguenti quesiti:

a. calcola la variazione Δf e il differenziale
corrispondenti ad un incremento h;

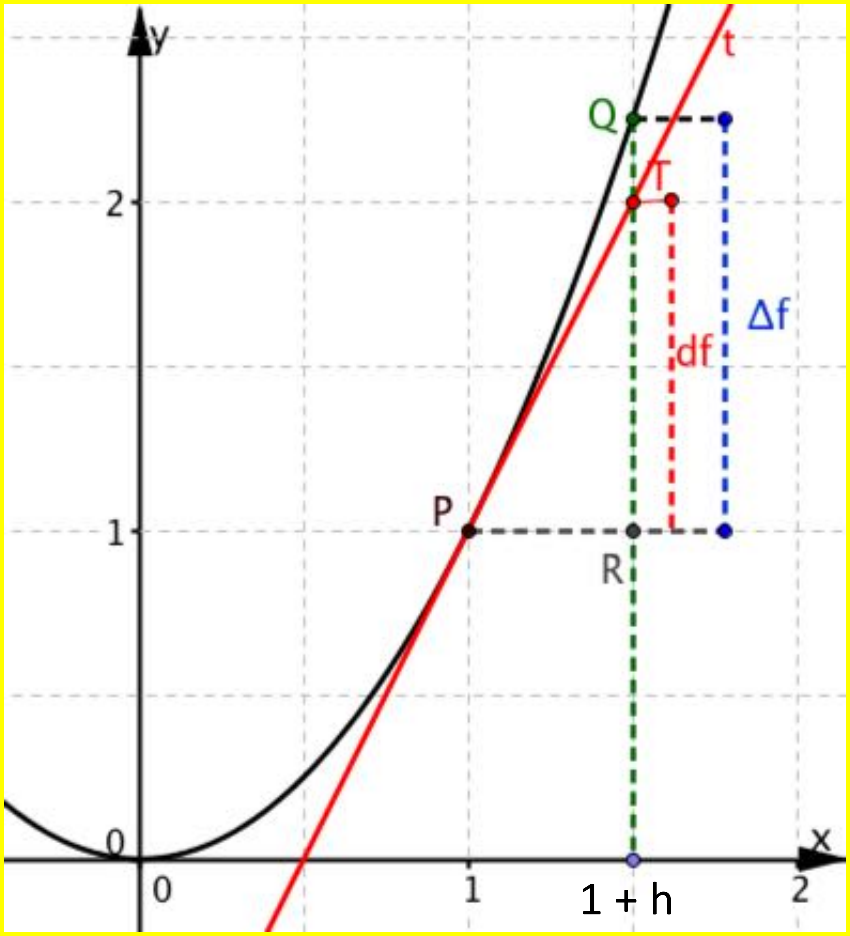
$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(1) = 1^2 = 1$

$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

$f'(x) = 2x$ $\qquad$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$\Delta f = (1+h)^2 - 1 = 2h + h^2$ $\qquad$ $df = 2h$

b. rappresenta Δf e df nella figura 1.



Problema 1

Quesiti c, d

c. Applica il differenziale per dare un valore approssimato di $f(1+h) = (1+h)^2$

$f(1+h) = \Delta f + 1 = 2h + 1 + h^2$

valutazione approssimata

$f(1+h) = \mathrm{d}f + 1 = 2h + 1$

d. Valuta l'errore commesso applicando il differenziale e interpretalo geometricamente nella figura 2.

$\Delta f - \mathrm{d}f = h^2$

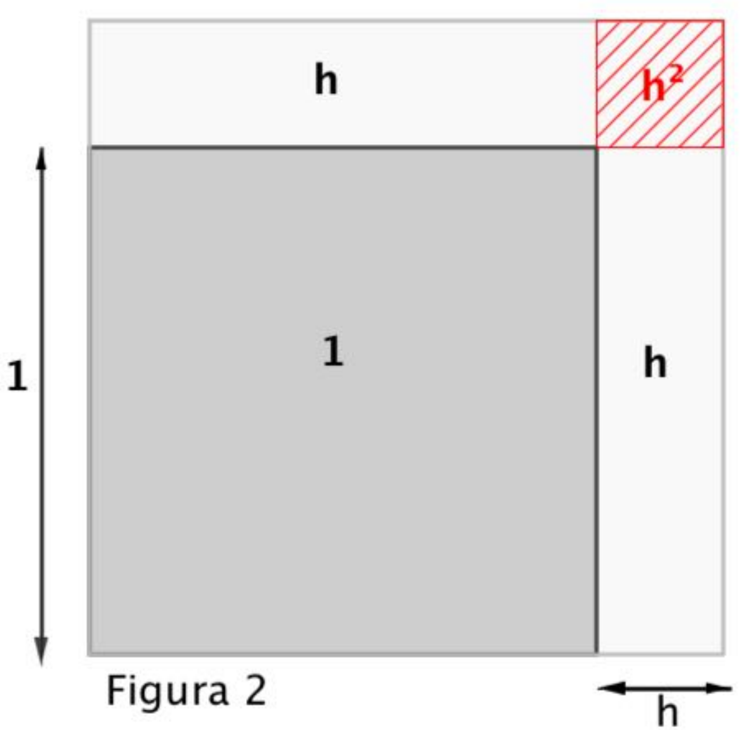


Figura 2

Problema 2

2. Una ditta deve produrre cubetti di marmo con il volume di 1cm^3 e l'errore tollerato sul volume è di $0{,}001\text{cm}^3$, ma posso misurare direttamente solo il lato. Come calcolo l'errore tollerato sul lato? Completa la risposta qui sotto.

Il volume V è legato alla lunghezza x dalla legge $V = x^3$

Se il lato è lungo 1, il volume è $V = 1$

Se indico con h l'errore tollerato sul lato, ho $x = 1 + h$ e $V = (1 + h)^3$

L'errore nella misura del volume è $\Delta V = (1 + h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3$

Per avere l'errore tollerato sul lato, dovrei trovare h in modo che

$$-0{,}001 < 3h + 3h^2 + h^3 < 0{,}001$$

Ma trovo facilmente la risposta se approssimo ΔV con il differenziale

$$dV = 3h$$

Così da $-0{,}001 < 3h < 0{,}001$ divido i due membri per 3 e ricavo

$$-0{,}0003 < h < 0{,}0003$$

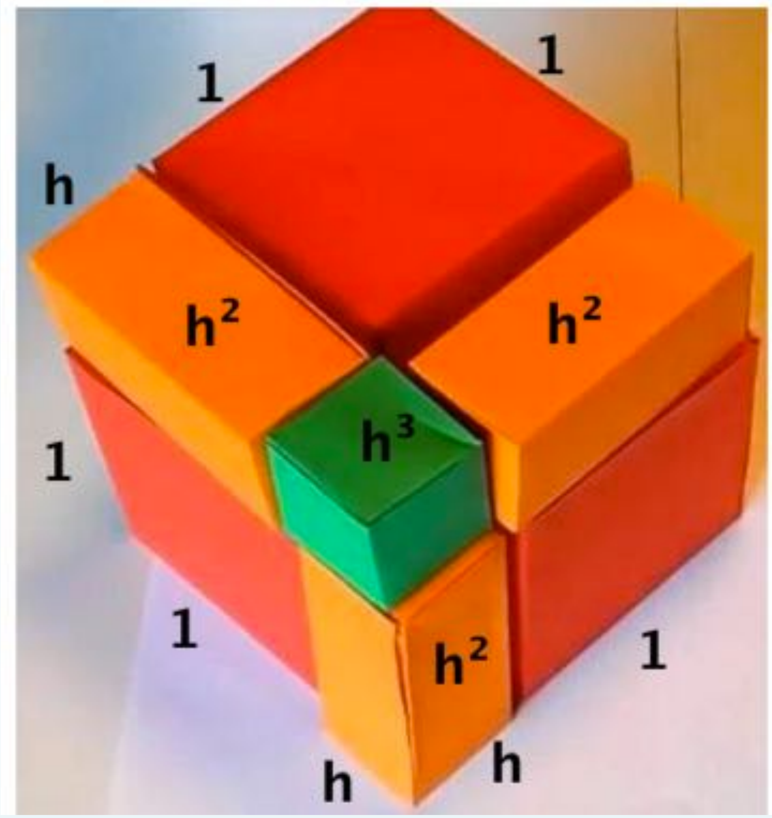
Problema 2

Visualizzo geometricamente l'errore che commetto quando approssimo ΔV con dV

$V = x^3 \qquad a = 1$

$$1 + \Delta V = 1 + 3h + \boxed{3h^2 + h^3}$$

$$1 + dV = 1 + 3h$$



Problema 2

Visualizzo geometricamente l'errore che commetto quando approssimo ΔV con dV

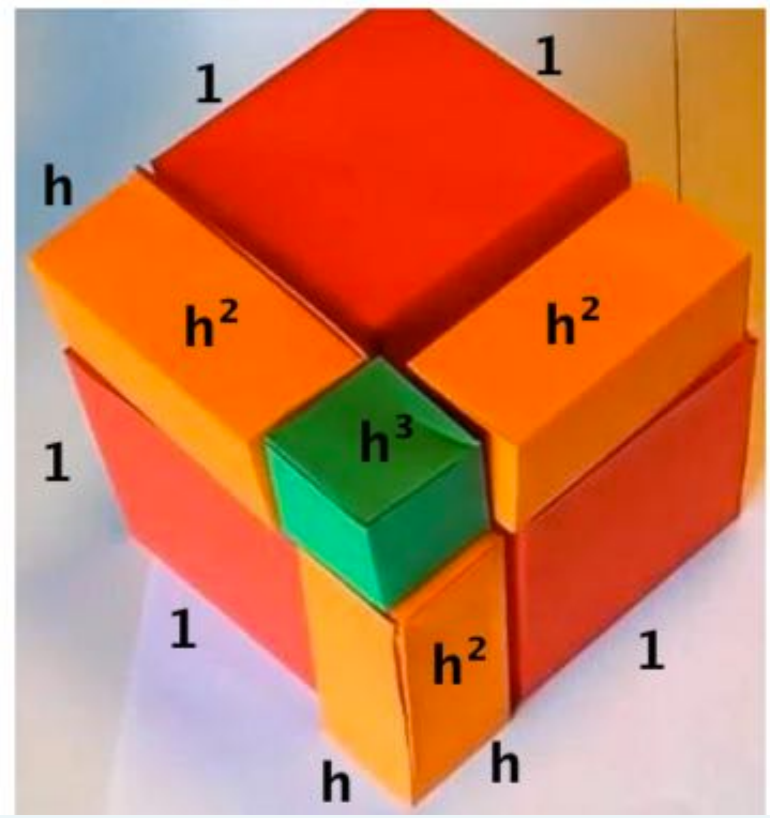
$$V = x^3 \qquad a = 1$$

$$1 + \Delta V = 1 + 3h + \boxed{3h^2 + h^3}$$

$$1 + dV = 1 + 3h$$

Valuto l'errore in qualche caso numerico

h	$3h^2 + h^3$
0,001	0,000003
0,0003	0,00000027
0,0001	0,00000003



Il differenziale nello sviluppo teorico dell’analisi matematica

Differenziale per qualunque ascissa x

Posso calcolare il differenziale df di una funzione non solo in corrispondenza ad un'ascissa fissata *a*, ma per una qualunque ascissa *x*.

Esempi

1. $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$

   $a = 2$ $\quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ $\quad df = 12h$

   $a = x$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad dx^3 = 3x^2h$

2. $f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$

   $a = 2$ $\quad f'(2) = 1$ $\quad df = h$

   $a = x.$ $\quad f'(x) = 1$ $\quad dx = h$

$$\boxed{dx^3 = 3x^2dx}$$

La notazione di Leibniz

Esamino il differenziale df di una funzione in corrispondenza a qualunque ascissa *x*.

Esempio

$$dx^3 = 3x^2 dx$$

$$3x^2 = \frac{dx^3}{dx}$$

In generale

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Ritrovo il simbolo scelto da Leibniz per indicare la derivata