Retta tangente. Esercizi

Problemi che chiedono di applicare solo le regole di derivazione di somma e prodotto

Regole di derivazione in sintesi

Algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile

*L'equazione della tangente al grafico di una funzione derivabile $y = f(x)$ in suo punto **A** di ascissa **a** è data da:* $\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$

Completa il procedimento per risolvere il seguente problema guidato.

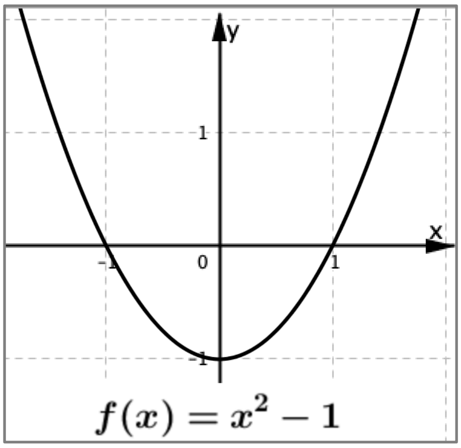
1. È data la funzione $y = x^2 - 1$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel suo punto A di ascissa 1.

Sono dati: $f(x) = x^2 - 1$ e $a = 1$

- *Calcolo* $f(1)$ = ……… = ……
- *Calcolo* $f'(1)$:
  $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) =$ …… $\Rightarrow f'(1) =$ ….. = …..
- *Scrivo l'equazione della tangente:*
  $y -$ …… = …. $(x - 1)$ ossia $y =$ …………..

Fig. 1



b. Scrivi l'equazione della retta t_B, tangente al grafico della funzione nel suo punto A di ascissa 0.

Sono dati: $f(x) = x^2 - 1$ e $a = 0$

- *Calcolo* $f(0)$ = ……… = ……
- *Calcolo* $f'(0)$ = …….
- *Scrivo direttamente l'equazione della tangente:* y = ….

c. Completa la figura 1 a fianco con i punti A e B e il grafico delle tangenti in A e in B.

2. È data la funzione $y = x^3 - 1$. Risolvi i seguenti quesiti.
   a. Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto A di ascissa 1.
   b. Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto B di ascissa 0.
   c. Completa la figura 2 qui sotto a sinistra con i punti A e B e i grafici delle tangenti in A e in B.
3. Scrivi le equazioni delle tangenti al grafico della funzione $y = \frac{1}{8}x^4 - 2$ nel suo punto A di ascissa 0 e nel suo punto B di ascissa 2. Completa la figura 3 qui sotto a destra con i punti A e B e i grafici delle tangenti in A e in B.

Fig.2

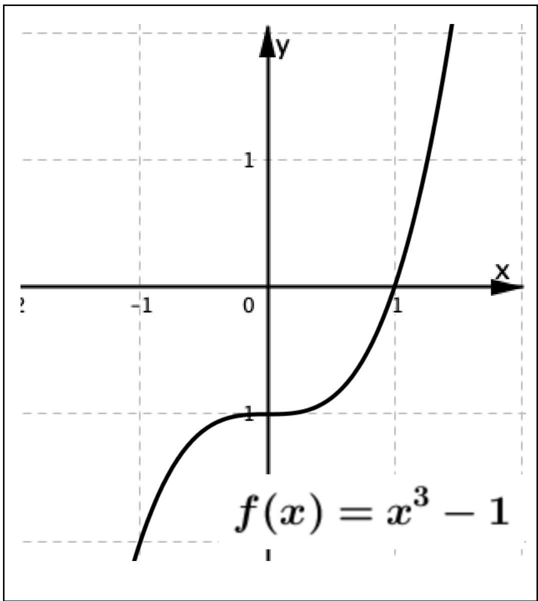
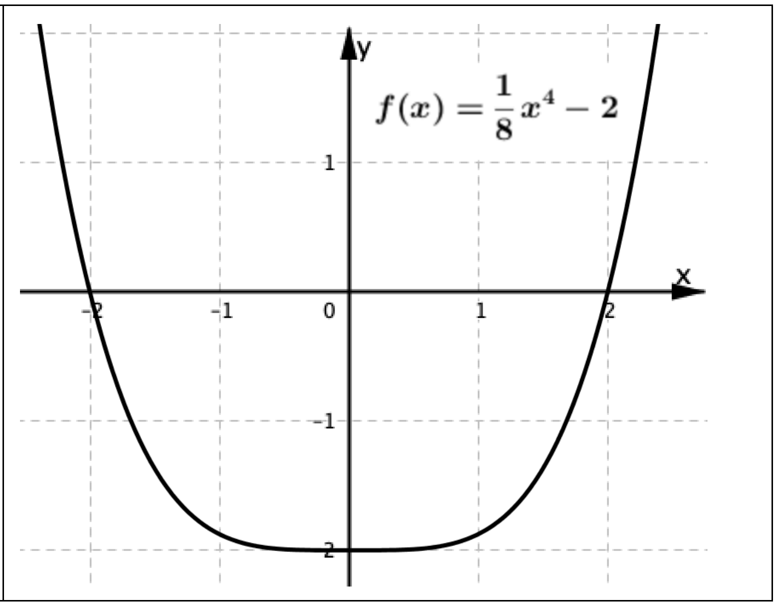


Fig.3



4. È data la funzione $y = \sin(x)$, rappresentata in fig.4 nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivi le equazioni delle tangenti al grafico della funzione nel suo punto O di ascissa 0 e nel suo punto B di ascissa $\frac{\pi}{2}$. Completa la figura 4 qui sotto a sinistra con i punti O e B e i grafici delle tangenti in O e in B.
5. È data la funzione $y = \cos(x)$, rappresentata in fig.5 nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivi le equazioni delle delle tangenti al grafico della funzione nel suo punto A di ascissa 0 e nel suo punto B di ascissa $\frac{\pi}{2}$. Completa la figura 5 qui sotto a destra con i punti A e B e i grafici delle tangenti in A e in B.

Fig. 4

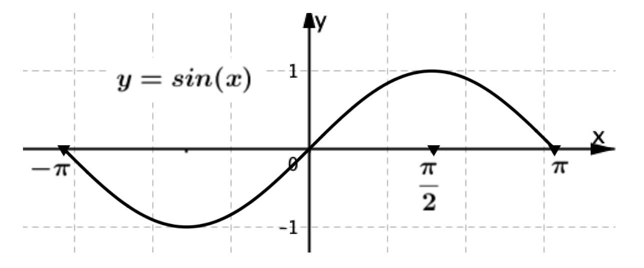
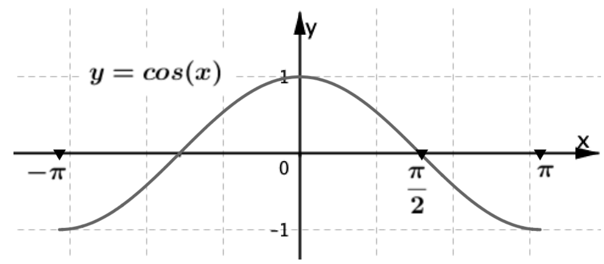


Fig.5



6. Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione $y = e^x$ nel suo punto A di ascissa 0. Completa la figura 6 qui sotto con il punto A e il grafico della tangente in A.

7. È data la curva, grafico della funzione $f(x) = -x^3 + x + 2$. Risolvi i seguenti quesiti:

a. scrivi l'equazione della retta t_A, tangente alla curva nel suo punto A di ascissa 0;
b. scrivi l'equazione della retta t_B, tangente alla curva nel suo punto B di ascissa 1;
c. Completa la figura 7 qui sotto con il grafico delle tangenti t_A e t_B.

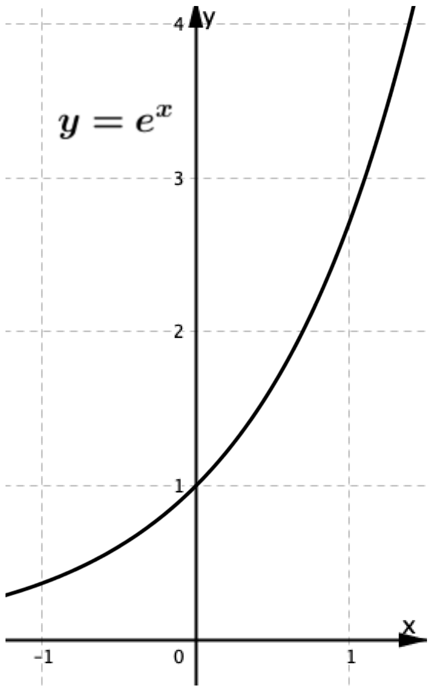


Fig. 6

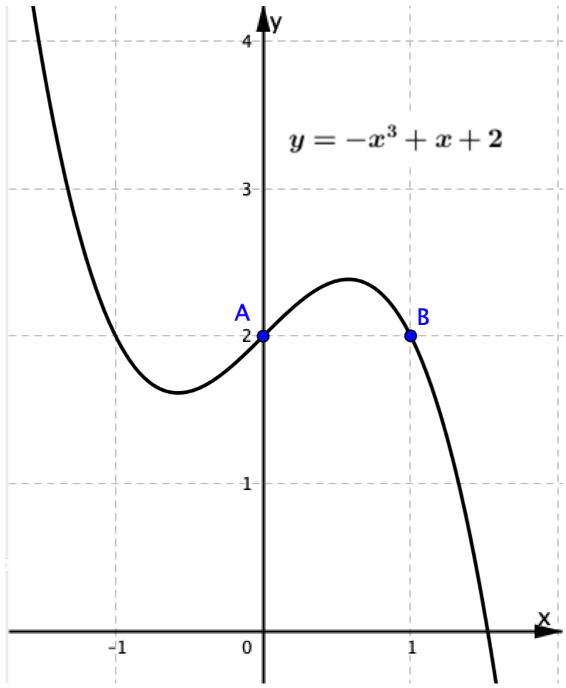


Fig.7

L'equazione della tangente al grafico di una funzione derivabile y = f(x) in suo punto ***A*** *di ascissa* ***a*** *è data da:* $\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$

Completa il procedimento per risolvere il seguente problema guidato.

8. È data la funzione $y = x^2 - 2x$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta ***t***, che ha pendenza $m = 2$ ed è tangente al grafico della funzione in un suo punto A.

Dati: $f(x) = x^2 - 2x$ e $f'(a) = 2$; ***debbo calcolare a e f(a)***

- *Calcolo* $f'(x)$ = ……… = ……
- *Cerco il valore* ***a*** *per cui risulta* $f'(\boldsymbol{a}) = 2$
  Perciò risolvo l'equazione
  ……….. = 2 ⇒ ***a*** = …… e $f(\boldsymbol{a})$ = ……
- *Scrivo l'equazione della tangente:*
  y – …… = 2(x – …..) ossia y = …………..

b. Completa la figura 8 qui a fianco con il punto A e il grafico della retta tangente in A.

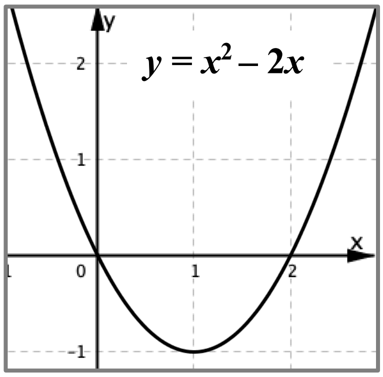


Fig.8

9. È data la funzione $y = x^3 + 3x^2$. Risolvi i seguenti quesiti.

- **a.** Scrivi l'equazione della retta, che ha pendenza $m = 9$ ed è tangente al grafico della funzione.
- **b.** Quante tangenti trovi con pendenza $m = 9$?
- **c.** Scrivi l'equazione della retta che ha pendenza $m = 0$ ed è tangente al grafico della funzione.
- **d.** Quante tangenti trovi con pendenza $m = 0$?
- **e.** Completa la figura 9 qui sotto con i grafici delle tangenti ottenute.

10. È data la funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, con il grafico disegnato in figura 10 qui sotto.

Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

a. Scrivi l'equazione della retta $\boldsymbol{t_A}$, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1 e traccia il grafico della retta $\boldsymbol{t_A}$ nella figura 10 qui sotto.

b. In quali punti la curva ha la tangente parallela all'asse delle x?
Scrivi le equazioni delle tangenti ottenute e tracciane il grafico in figura 10 qui sotto.
L'asse delle x ha pendenza m = 0
Per trovare le ascisse dei punti richiesti risolvo l'equazione …………. = 0 e ottengo:
a_1 = …. *e calcolo* $f(a_1)$ = ………….. ,
a_2 = …. *e calcolo* $f(a_2)$ = …………..
I punti richiesti sono B_1 (….., …..) e B_2 (….., …..) *[B_1 è il punto di ascissa minore]*

t_1 *ha equazione* ………………….. , t_2 *ha equazione* ………………….. .

c. Determina le coordinate del punto C, ulteriore intersezione della curva con t_1.
Dal grafico ricavo C(….., …..).
Verifico algebricamente che C appartiene a t_1. ………………………………………
Verifico algebricamente che C appartiene alla curva. ………………………………..

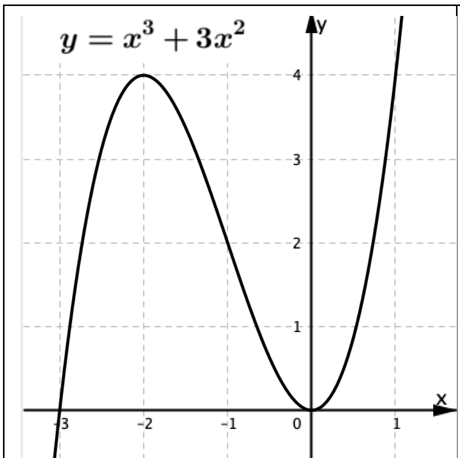


Fig.9

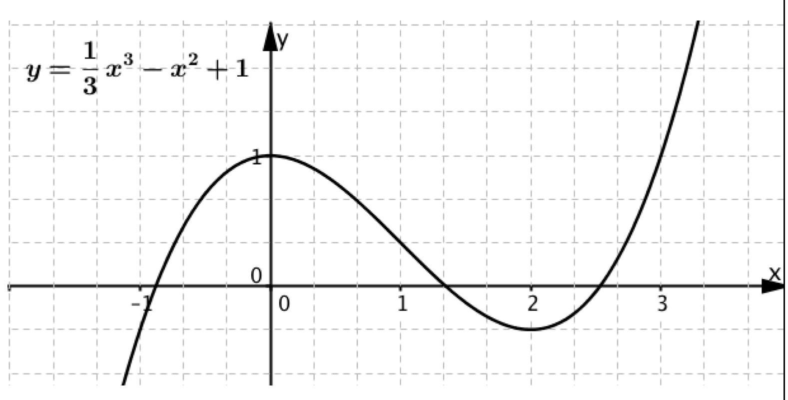


Fig. 10

11. È data la funzione polinomiale nella variabile x:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n .$$

Dimostra che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = b_0 + b_1 x$.

*Il problema **12** ti guida a confrontare due procedimenti per risolvere un problema*

12. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente alla parabola d'equazione $y = 2x^2 + x - 1$ nel suo punto A di ascissa 1.

- Calcolo y_A = ……………………….= …… e quindi A(1, …)
- Scrivo l'equazione del fascio di rette di centro ***A***:

$y - \ldots\ldots = m\,(x - 1)$ ossia $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Continua ora a seguire due procedimenti possibili:

I. Con la geometria analitica

Per determinare le intersezioni di ogni retta del fascio con la parabola risolvo il sistema

$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ metodo di sostituzione $\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ 2x^2 + x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ da cui

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ 2x^2 + (1 - m)x \ldots\ldots\ldots = 0\,* \end{cases}$$

Per individuare, tra tutte le rette del fascio, la tangente $\boldsymbol{t_A}$ scelgo m in modo che l'equazione (*) abbia due soluzioni coincidenti e cioè abbia il discriminante $\Delta = 0$.

$\Delta = (1 - m)^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{m_1 = m_2} = \ldots\ldots$

II. Con le derivate

$f(x) = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f'(1) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

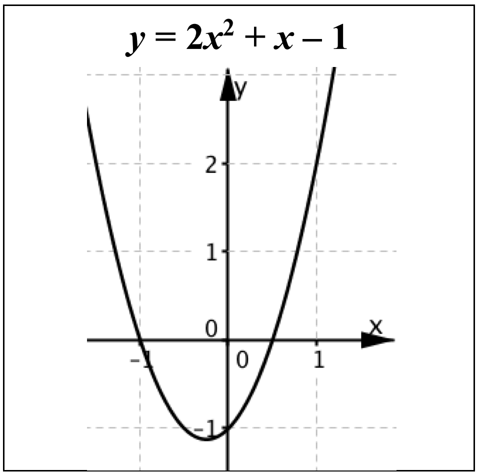
Con entrambi i procedimenti hai trovato che la pendenza della tangente è **m** = …….

Perciò l'equazione della tangente è:

$y - \ldots\ldots = \ldots\ldots\,(x - 1)$ ossia $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Completa la figura 11 qui sotto con il punto A e il grafico della tangente $\boldsymbol{t_A}$.

Fig. 11



Riflessioni sul problema

Nel caso della parabola la derivata porta al risultato con il minor numero di passaggi e quindi dà una minore probabilità di commettere errori.

Inoltre puoi applicare il procedimento che richiede di calcolare il $\Delta = 0$ ***solo per le curve che hanno un'equazione di 2° grado.***

Invece, puoi applicare il procedimento con la derivata per trovare la tangente al grafico di una qualunque funzione derivabile in un suo punto.

Problemi che chiedono di applicare le regole di derivazione di quoziente, somma e prodotto di funzioni derivabili.

Regole di derivazione in sintesi

Algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \dfrac{1}{g(x)}$	$y' = \dfrac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$

*L'equazione della tangente al grafico di una funzione derivabile $y = f(x)$ in suo punto **A** di ascissa **a** è data da:* $\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$

13. È data la funzione $y = \dfrac{2}{x}$, con il grafico disegnato in figura 12 qui sotto.

Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 2 e traccia il grafico della retta t_A nella figura 12 qui sotto.

b. In quali punti la curva ha la tangente parallela alla retta d'equazione $y = -2x$? Scrivi le equazioni delle tangenti ottenute e tracciane il grafico in figura 12.

14. È data la funzione $y = \dfrac{1}{x^2}$, con il grafico disegnato in figura 13 qui sotto.

Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1 e traccia il grafico della retta t_A nella figura 13 qui sotto

b. La tangente t_A incontra la curva anche in un altro punto B? In caso affermativo, trova le coordinate di B e spiega il procedimento che hai seguito.

c. Spiega perché un solo punto della curva ha la tangente parallela alla retta $y = 2x$. Scrivi l'equazione della tangente ottenuta e tracciane il grafico in figura 13

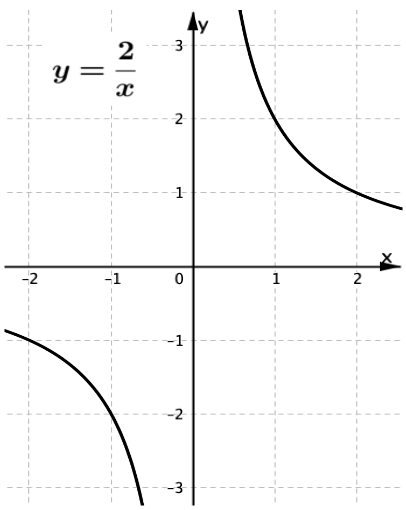


Fig. 12

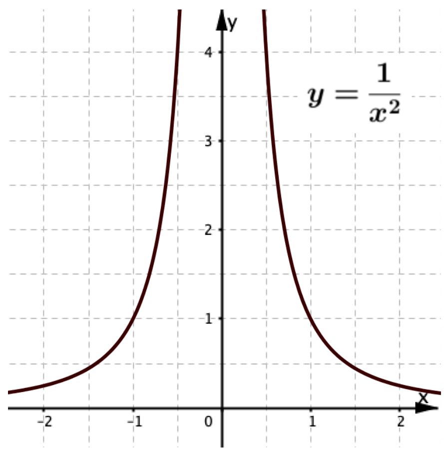


Fig.13

15. È data la funzione $y = -\frac{2}{x^3}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1.

b. Il grafico della funzione ha la tangente parallela a t_A in un altro punto B. Determina le coordinate del punto B e scrivi l'equazione della tangente in B.

16. È data la funzione $y = \frac{x+1}{x^2}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1.

b. Scrivi l'equazione della retta che è tangente al grafico della funzione ed è parallela all'asse delle x. Determina le coordinate del punto B di contatto.

17. È data la funzione $y = \frac{2x}{x^2+1}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto O di ascissa 0.

b. In quali punti il grafico della funzione ha la tangente parallela all'asse delle x? Scrivi le equazioni delle tangenti ottenute.

18. È data la funzione $y = \frac{1-x}{x+3}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa –2.

b. In quali punti il grafico della funzione ha la tangente con pendenza $m = -1$? Scrivi le equazioni delle tangenti ottenute.

19. È data la funzione $y = \tan(x)$ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

b. In quale punto il grafico della funzione ha la tangente con pendenza $m = 1$? Scrivi l'equazione della tangente ottenuta.

20. È data la funzione $y = \frac{4x}{e^x}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1.

b. In quale punto il grafico della funzione ha la tangente con pendenza $m = 4$? Scrivi l'equazione della tangente ottenuta.