Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile

Stefano Volpe, 2022

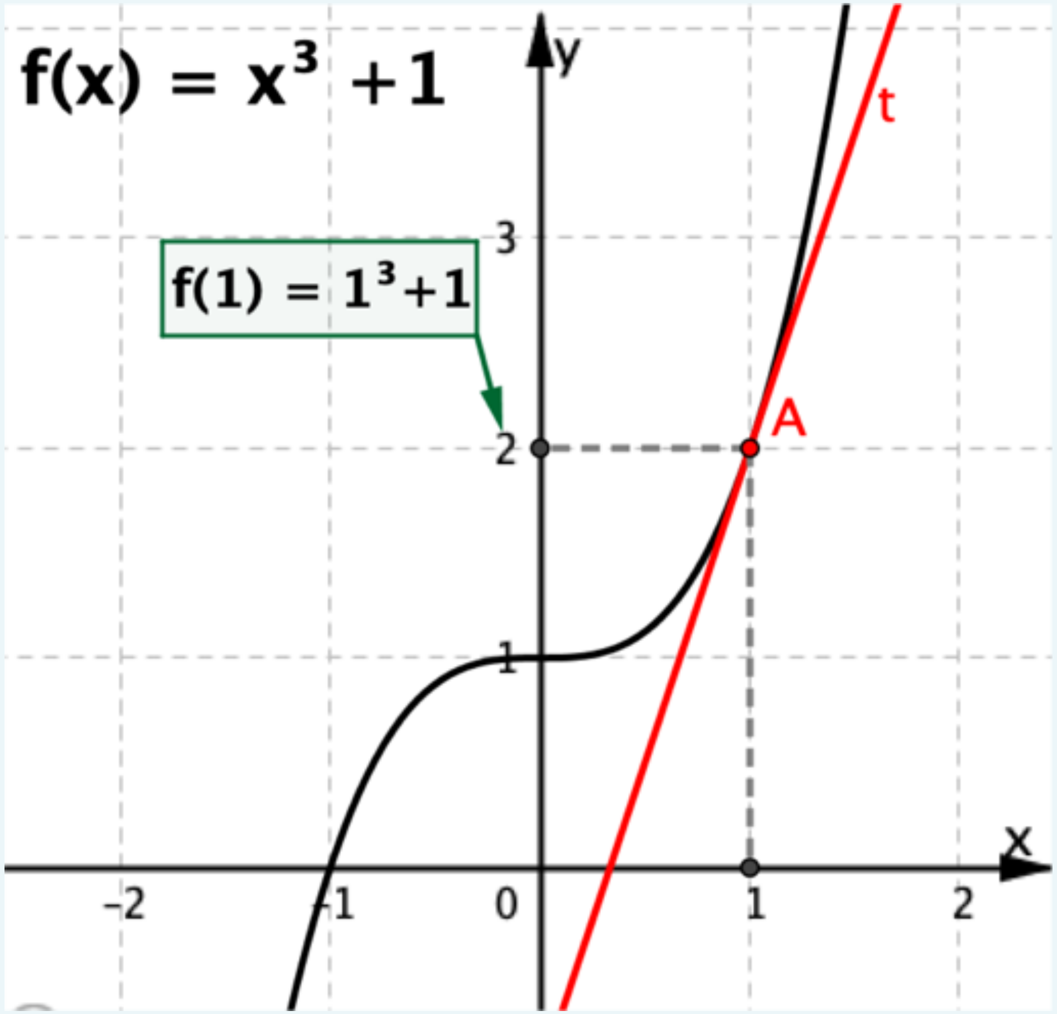
Pendenza della tangente e derivata

Fisso l'attenzione su un punto, ad esempio A(1, 2)
So calcolare la pendenza m_t della tangente *t* in A:

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$m_t = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$\boxed{m_t = 3}$$



Come trovo l'equazione della tangente?

Equazione della retta tangente

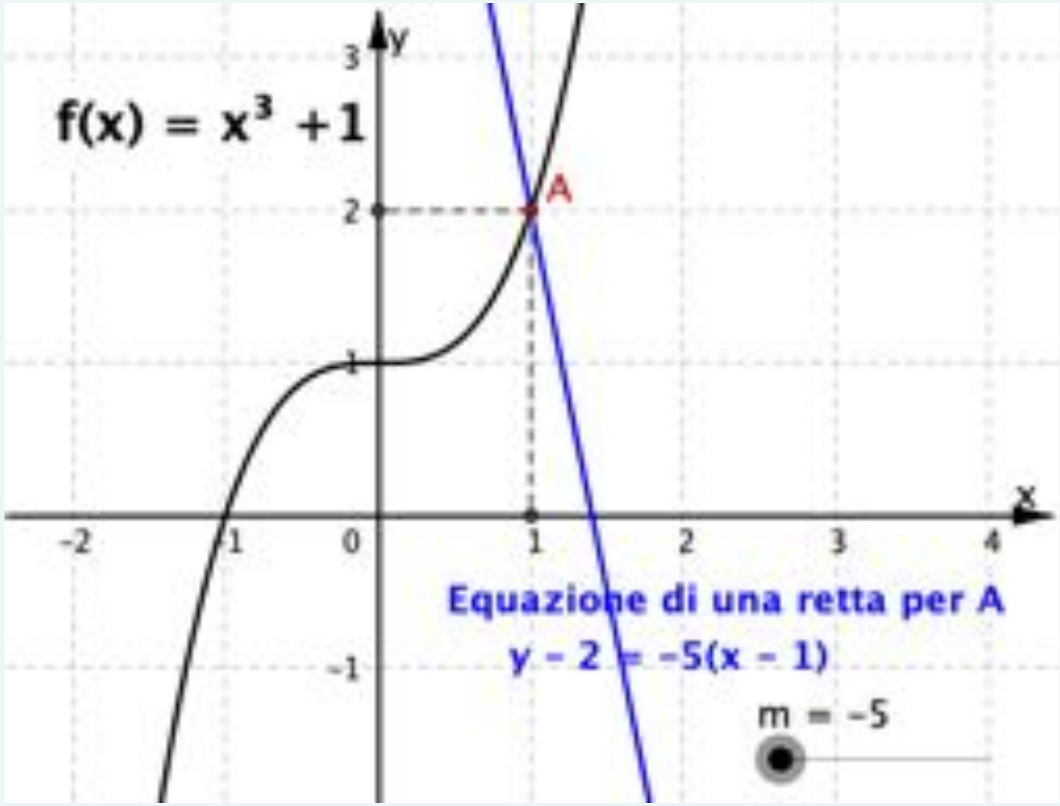
La retta che 'gira' attorno ad A(1; 2) ha equazione:

$$y - 2 = \mathbf{m}(x - 1)$$

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Per scegliere la tangente, debbo fissare la pendenza

$$\mathbf{m}_t = f'(1) = 3$$



L'equazione della tangente è

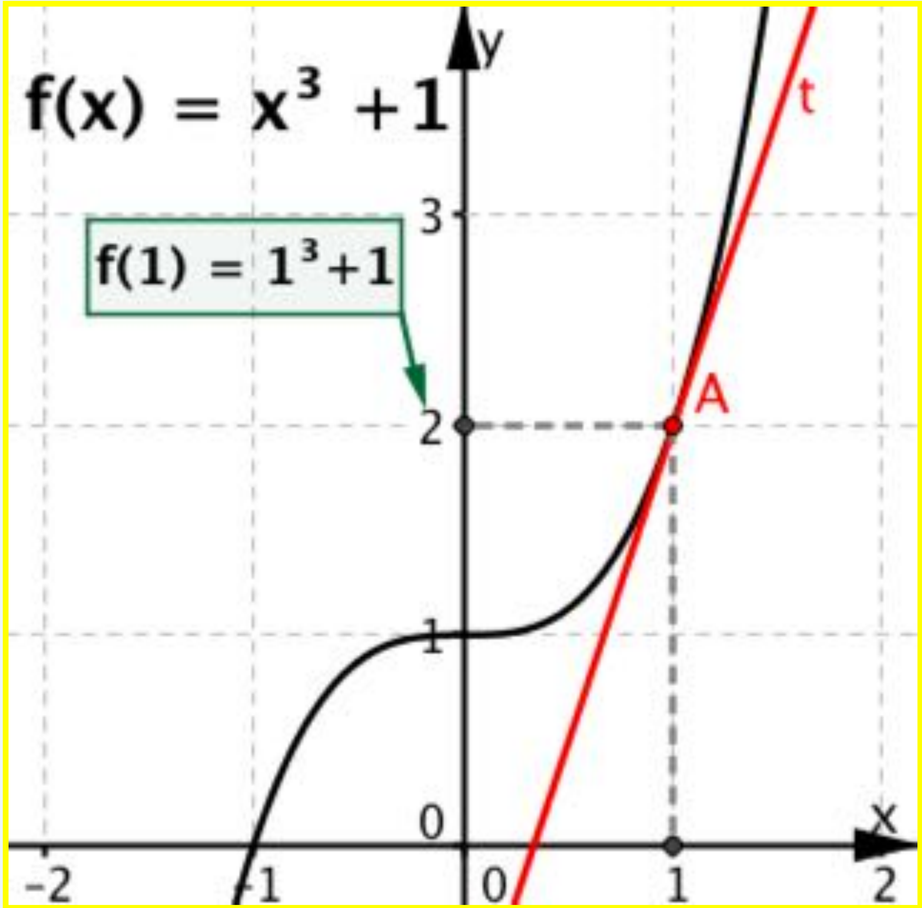
$$y - 2 = 3(x - 1)$$

Equazione della retta tangente
Rifletto sull'esempio

$$f(x) = x^3 + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$f(1) = 2 \qquad\qquad f'(1) = 3$$

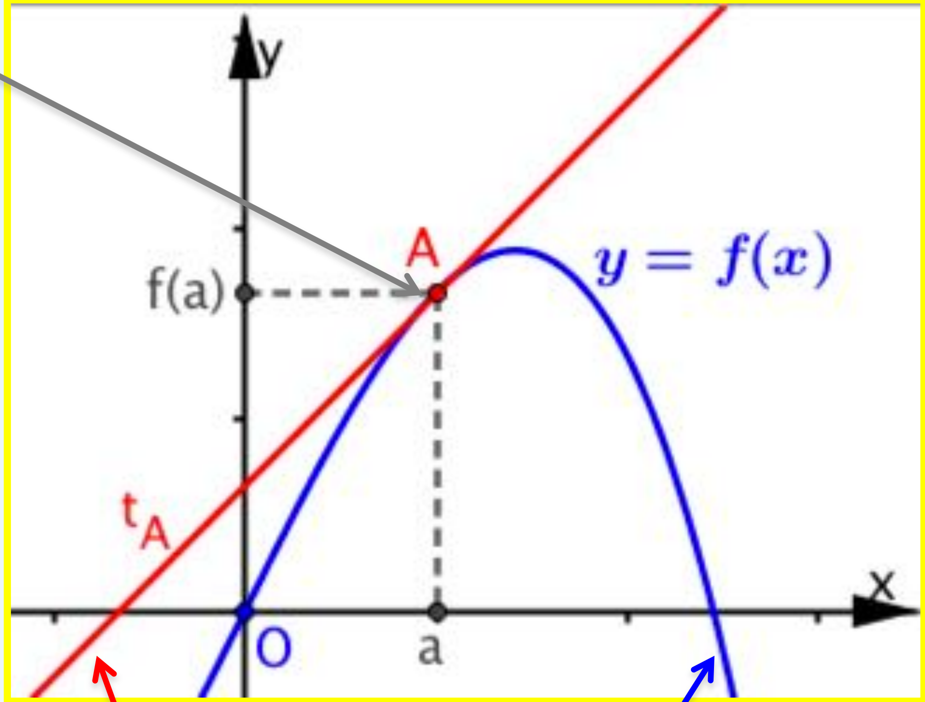
L'equazione della tangente nel punto A di ascissa 1 è

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$



Equazione della retta tangente
Scrivo la formula generale

A punto della curva con:
ascissa a;
ordinata $f(a)$.



La retta tangente ha equazione

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Retta tangente alla curva in A

Grafico di una funzione y = f(x)

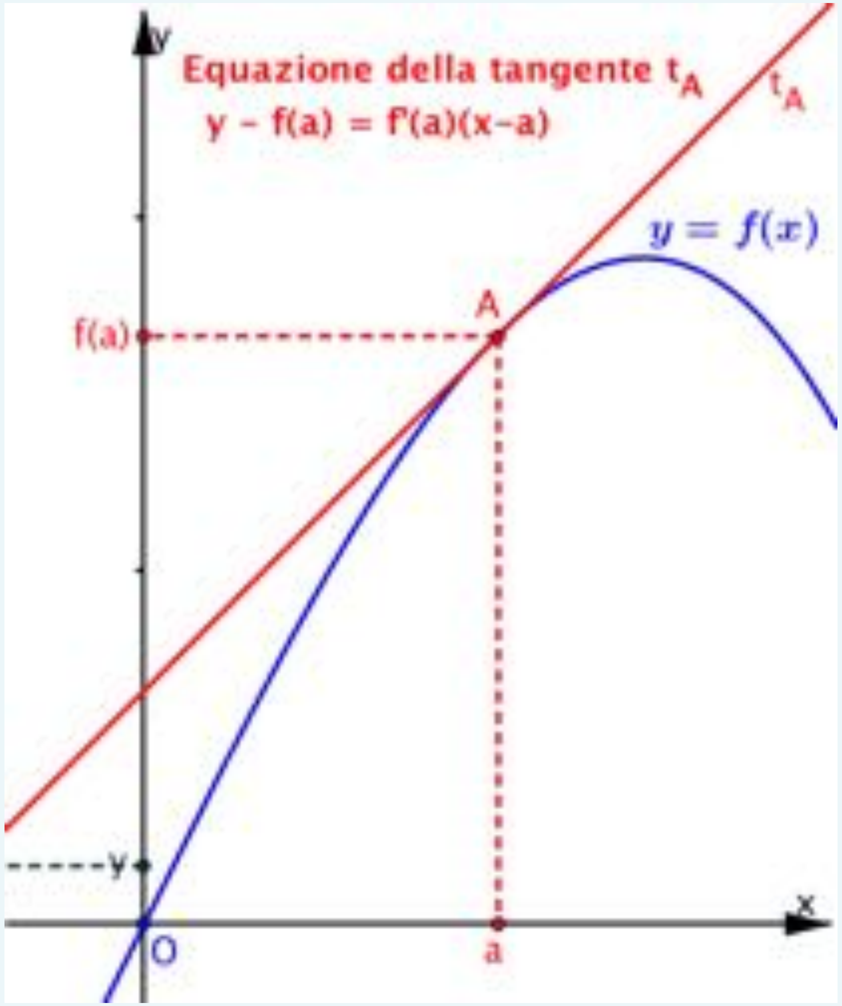
Formula generale: significato dei simboli

Equazione della retta tangente nel punto A

y e x variabili

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

a costante



Al posto di a posso scrivere altre lettere, ad esempio:

$$b,\ c,\ d,\ x_A,\ x_0$$

Ma **non** posso scrivere x.

Formula generale. Due condizioni importanti

Equazione della tangente a una curva nel punto A

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

1. La curva deve essere il grafico di una funzione y = f(x).

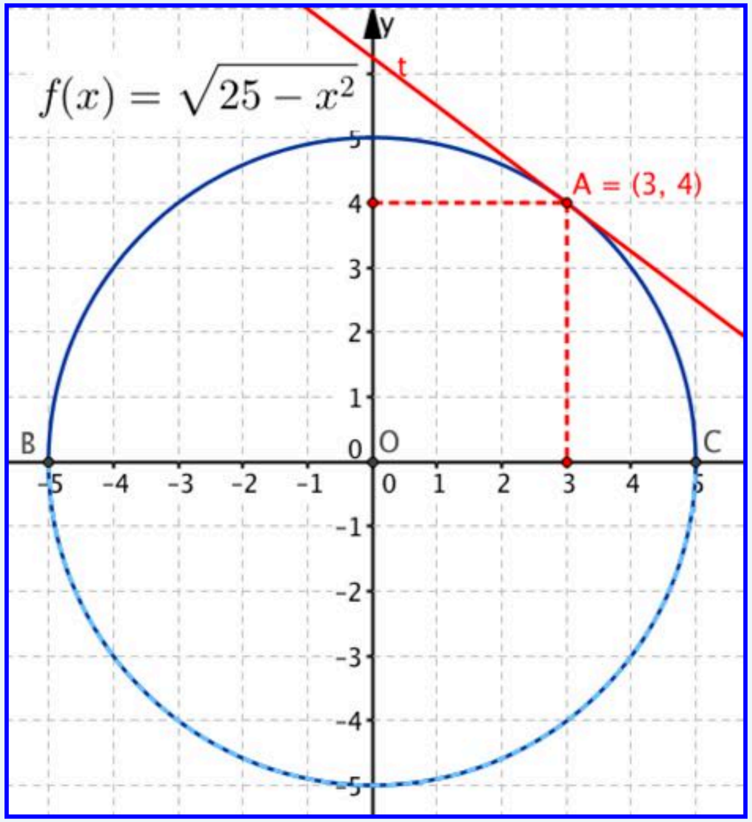
ESEMPIO

Circonferenza $x^2 + y^2 = 5^2$

NON è il grafico di una funzione.

Per applicare la formula trovo la funzione che descrive la semicirconferenza BAC.

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$



Stefano Volpe, 2022

Formula generale. Due condizioni importanti

Equazione della tangente a una curva nel punto A

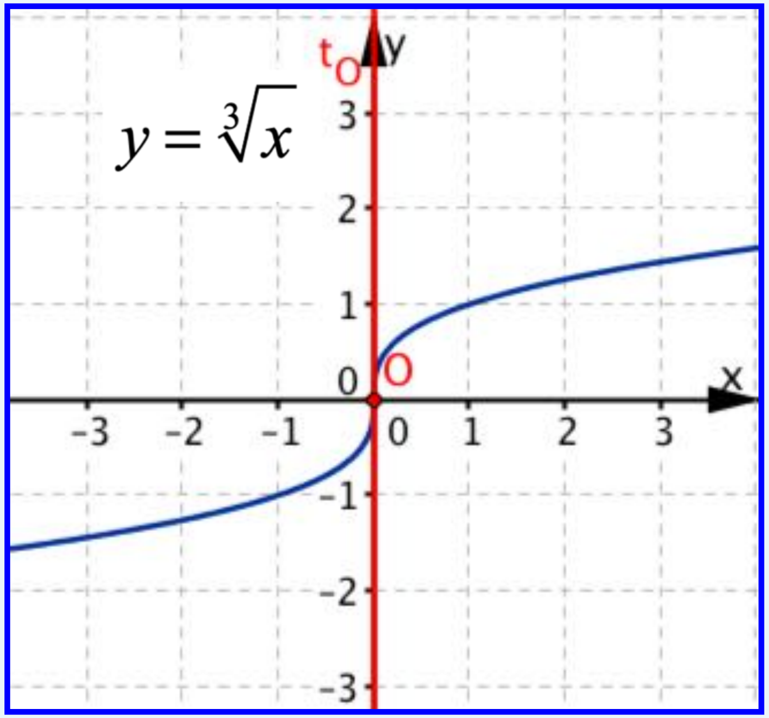
$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

2. La funzione deve essere derivabile nel punto A.

ESEMPIO

$$y = \sqrt[3]{x}$$

NON è derivabile in O(0; 0).
Per trovare l'equazione di t_O **NON posso applicare la formula generale** perché non posso calcolare f'(0).



Attività

Completa la scheda di lavoro per risolvere vari problemi che richiedono di scrivere l'equazione della tangente ad una curva

Risultati ottenuti

Problema 1

Quesito a

1. È data la funzione $y = 1 - x^3$, con il grafico disegnato qui a fianco. Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

a. Scrivi l'equazione della retta t_A, tangente al grafico della funzione nel punto A di ascissa 1. Traccia il grafico della retta t_A nella figura qui a fianco.

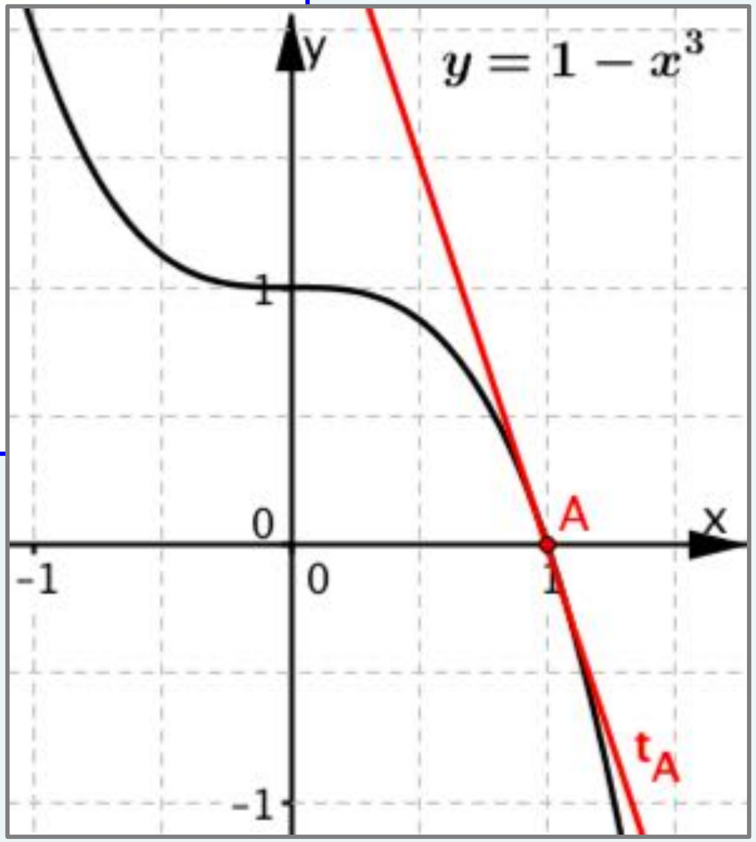
Nel problema assegnato sono dati:

$f(x) = 1 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2$

$a = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1^3 = 0 \quad f'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$

L'equazione della tangente t_A è

$$y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3$$



Problema 1

Quesito b

1. È data la funzione $y = 1 - x^3$, con il grafico disegnato qui a fianco. Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

b. Scrivi l'equazione della retta t_B, tangente al grafico della funzione nel punto B di ascissa 0. Traccia il grafico della retta t_B nella figura qui a fianco.

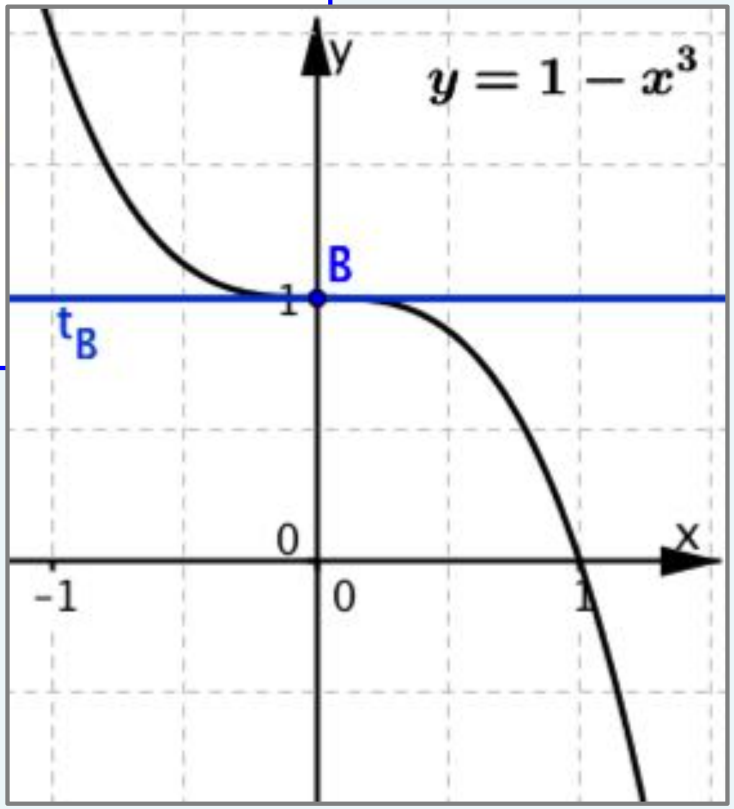
Nel problema assegnato sono dati:

$f(x) = 1 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2$

$a = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - 0^3 = 1 \quad f'(1) = -3 \cdot 0^2 = 0$

L'equazione della tangente è

$y - 1 = 0(x - 0)$ ossia $y = 1$.



t_B è parallela all'asse delle x e passa per B(0; 1); posso scrivere direttamente l'equazione y = 1. Applicare la formula generale è un procedimento corretto, ma più lungo.

Problema 2

Quesito a

2. È data la funzione $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, con grafico a fianco.
Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

a. In quali punti la curva ha tangente ha pendenza $m = 0$?

Nel quesito sono dati:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2,$ *e* $f'(a) = 0$.

Devo calcolare a e f(a)

- *Calcolo* $f'(x) = -3x^2 + 6x$.
- *Cerco il valore* ***a*** *per cui risulta* $f'(\boldsymbol{a}) = 2$

Perciò risolvo l'equazione $-3a^2 + 6a = 0$

$$3a(-a+2) = 0 \begin{cases} 3a = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ -a + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases}$$

Ottengo: $a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 2.$

Calcolo: $f(0) = 2 \quad , \quad f(2) = -8 + 12 + 2 = 6$

I punti richiesti sono:

$B_1(0, 2)$ e $B_2(2, 6)$

L'ascissa *a* del punto di contatto ora è incognita

Problema 2

Quesiti a , b

2. È data la funzione $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, con grafico a fianco. Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

a. In quali punti la curva ha tangente ha pendenza $m = 0$?

Nel quesito sono dati:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, *e* $f'(a) = 0$.

Devo calcolare a e f(a)

- *Calcolo* $f'(x) = -3x^2 + 6x$.
- *Cerco il valore* ***a*** *per cui risulta* $f'(\boldsymbol{a}) = 2$

Perciò risolvo l'equazione $-3a^2 + 6a = 0$

$$3a(-a+2) = 0 \begin{cases} 3a = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ -a + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases}$$

Ottengo: $a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 2$.

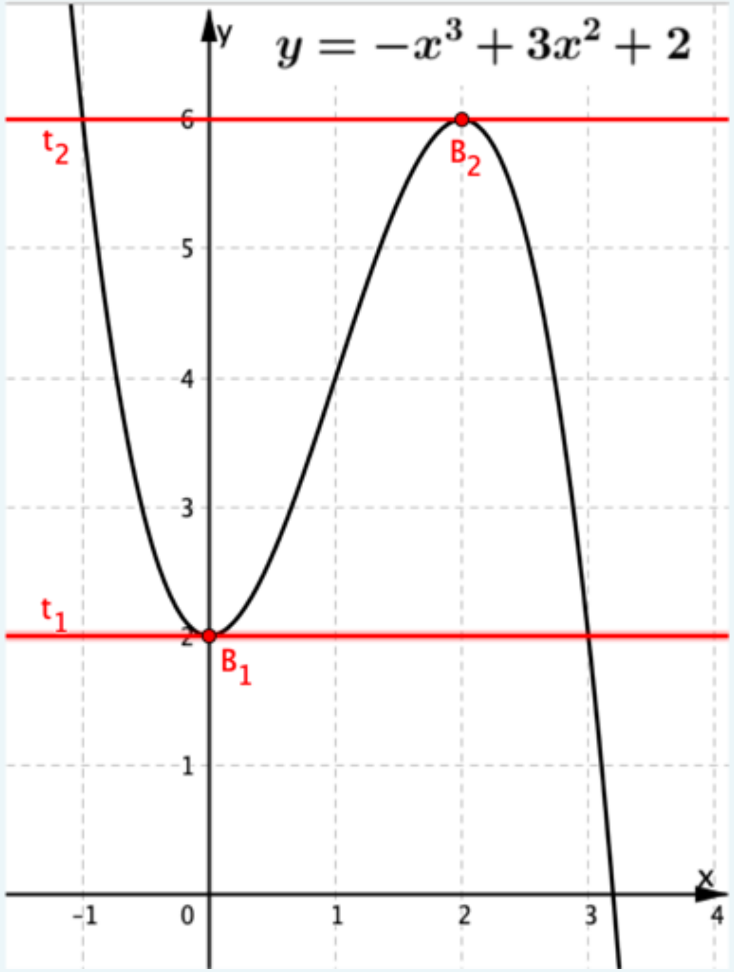
Calcolo: $f(0) = 2 \quad , \quad f(2) = -8 + 12 + 2 = 6$

I punti richiesti sono:

$B_1(0, 2)$ e $B_2(2, 6)$

b. Scrivi le equazioni delle tangenti e tracciane il grafico.

t_1 *ha equazione* $y = 2$, t_2 *ha equazione* $y = 6$



Problema 2

Quesito c

2. È data la funzione $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, con grafico a fianco.
Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

c. Determina le coordinate del punto C, ulteriore intersezione della curva con t_1.

Dal grafico ricavo C(3, 2).

Verifico algebricamente che C appartiene a t_1.

C ha ordinata 2, perciò appartiene alla retta d'equazione $y = 2$

Verifico algebricamente che C appartiene alla curva.

La curva ha equazione $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ ed è vera l'uguaglianza

$$2 = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2$$

Perciò C appartiene alla curva.