Retta tangente e differenziale

Stefano Volpe, 2022

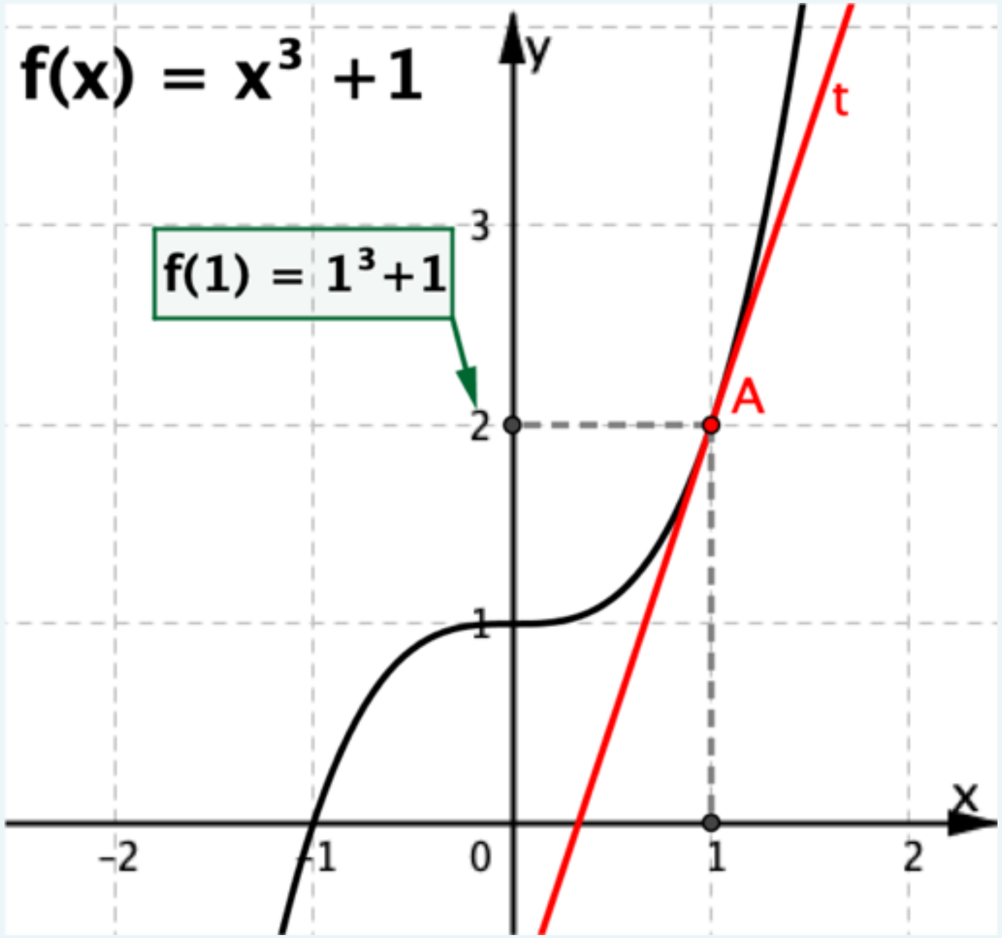
Pendenza della tangente e derivata. Esempio

Fisso l'attenzione su un punto, ad esempio A(1, 2) So calcolare la pendenza m_t della tangente *t* in A:

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$m_t = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$\boxed{m_t = 3}$



Come trovo l'equazione della tangente?

Equazione della retta tangente
Esempio

La retta che 'gira' attorno ad A(1; 2) ha equazione:

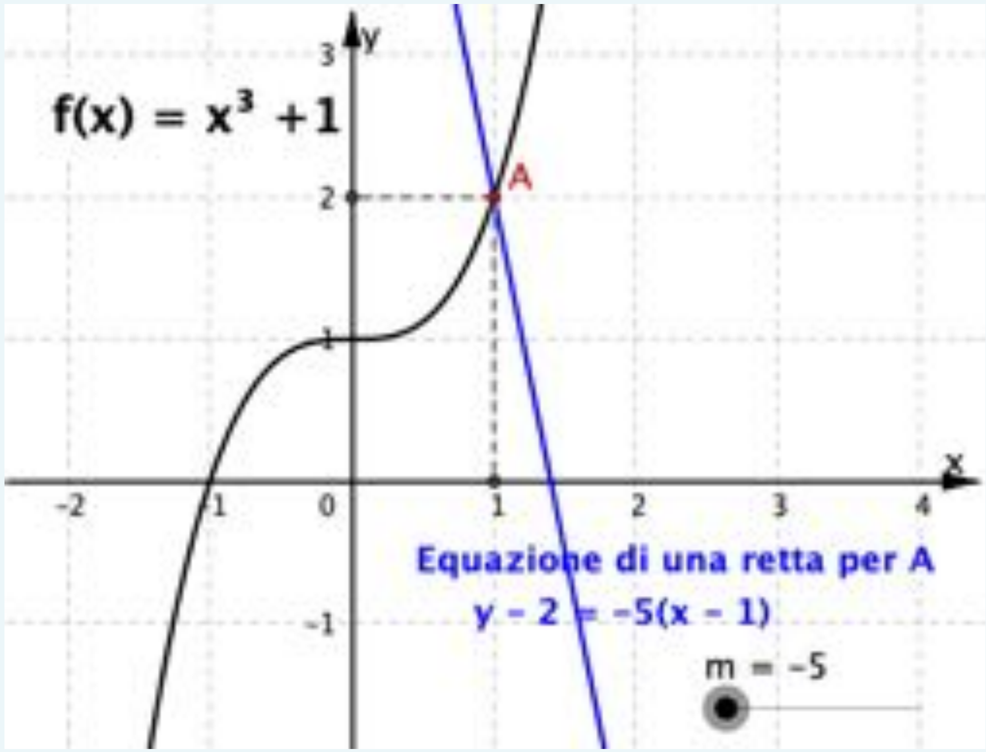
$$y - 2 = m(x - 1)$$

Per scegliere la tangente, debbo fissare la pendenza

$$m_t = f'(1) = 3$$

L'equazione della tangente è

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

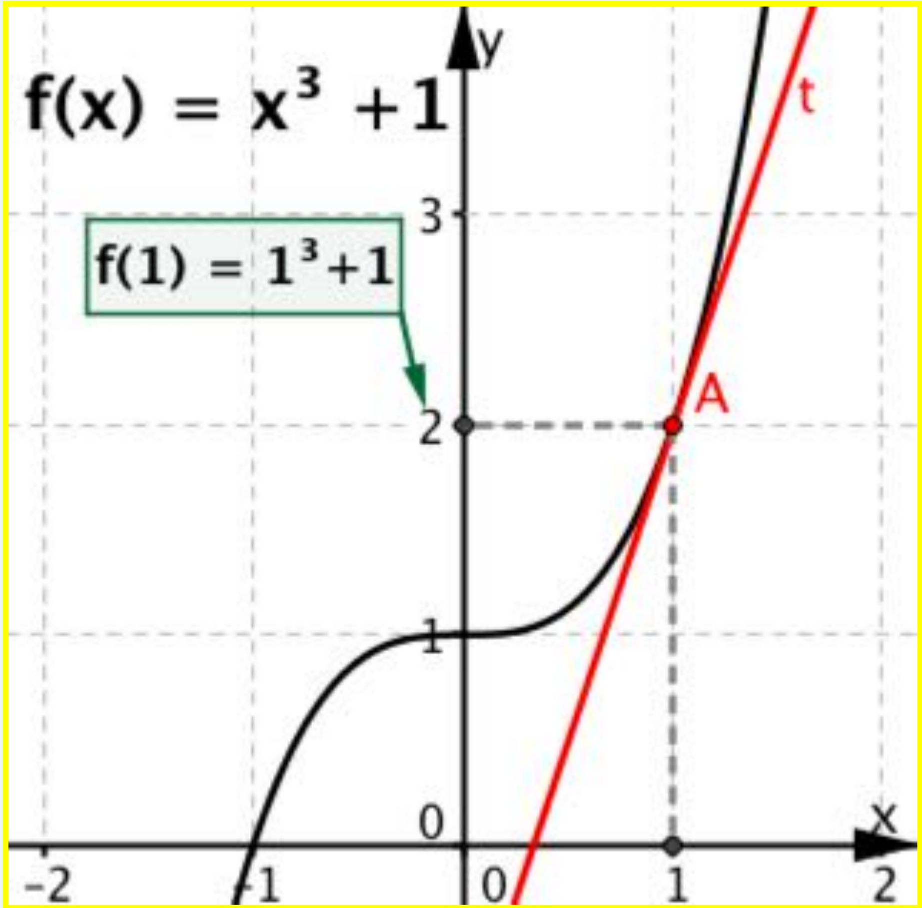


Equazione della retta tangente
Rifletto sull'esempio

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$f(1) = 2 \qquad\qquad f'(1) = 3$$

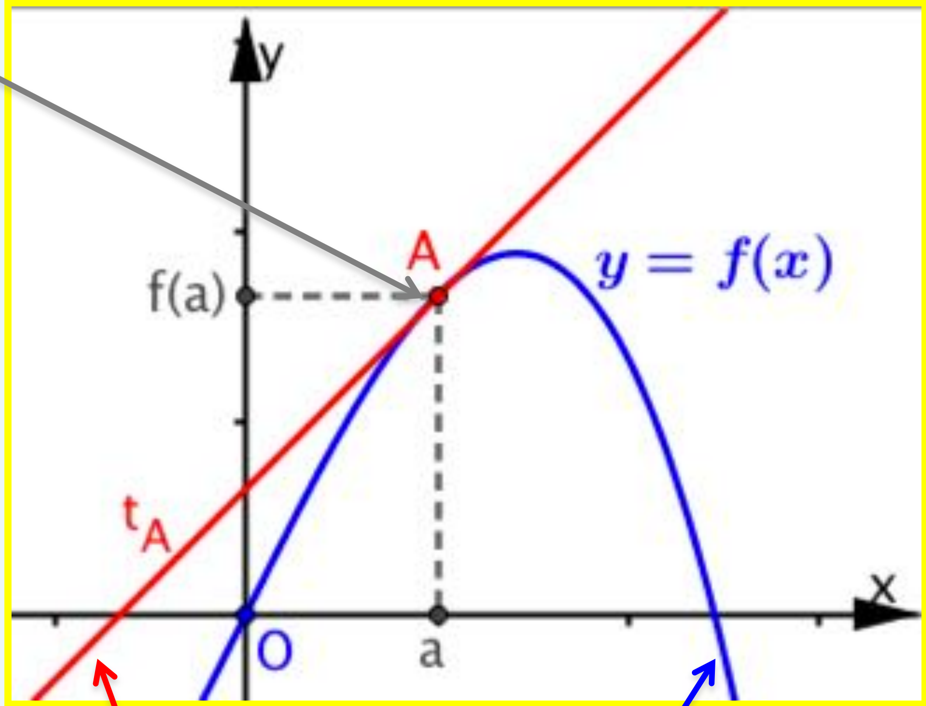
L'equazione della tangente nel punto A di ascissa 1 è

$$y - f(1) = \color{red}{f'(1)}(x - 1)$$



Equazione della retta tangente
Scrivo la formula generale

A punto della curva con:
- ascissa a;
- ordinata $f(a)$.



La retta tangente ha equazione

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Retta tangente alla curva in A

Grafico di una funzione y = f(x)

Formula generale. Significato dei simboli

Equazione della retta tangente nel punto A

y e x variabili

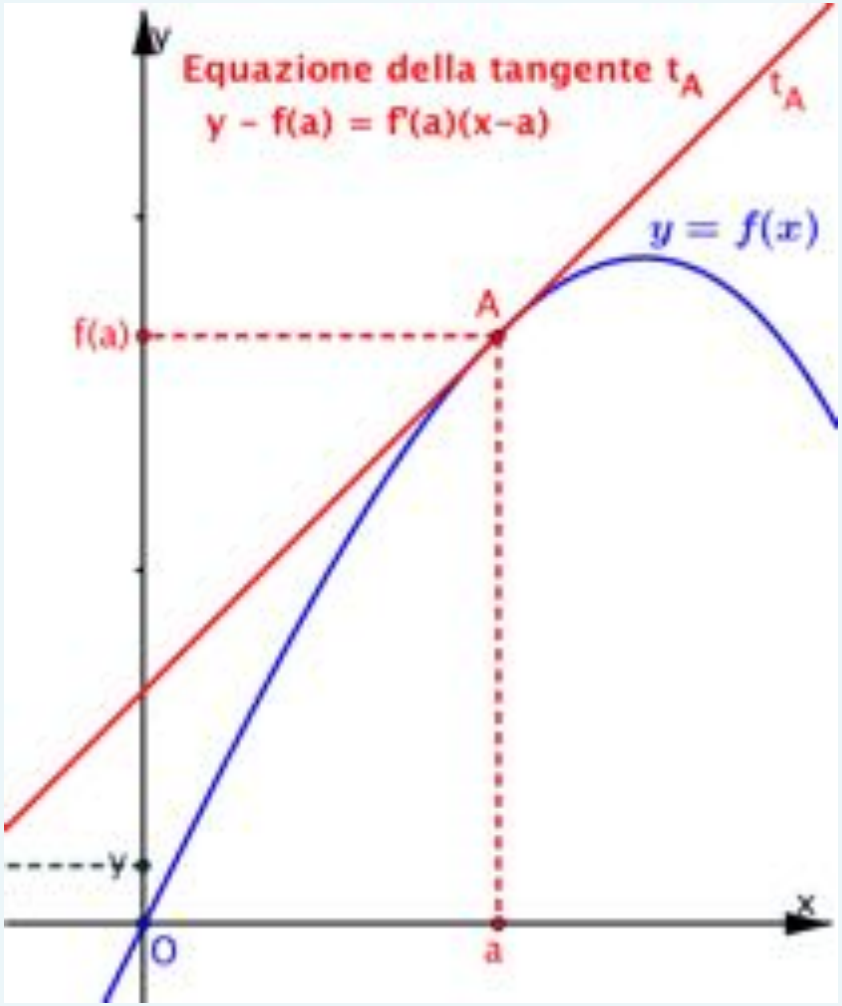
$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

a costante

Al posto di a posso scrivere altre lettere, ad esempio:

$$b\,,\ c,\ d\,,\ x_A\,,\ x_0$$

Ma **non** posso scrivere x.



Formula generale. Una condizione importante

Equazione della tangente a una curva nel punto A

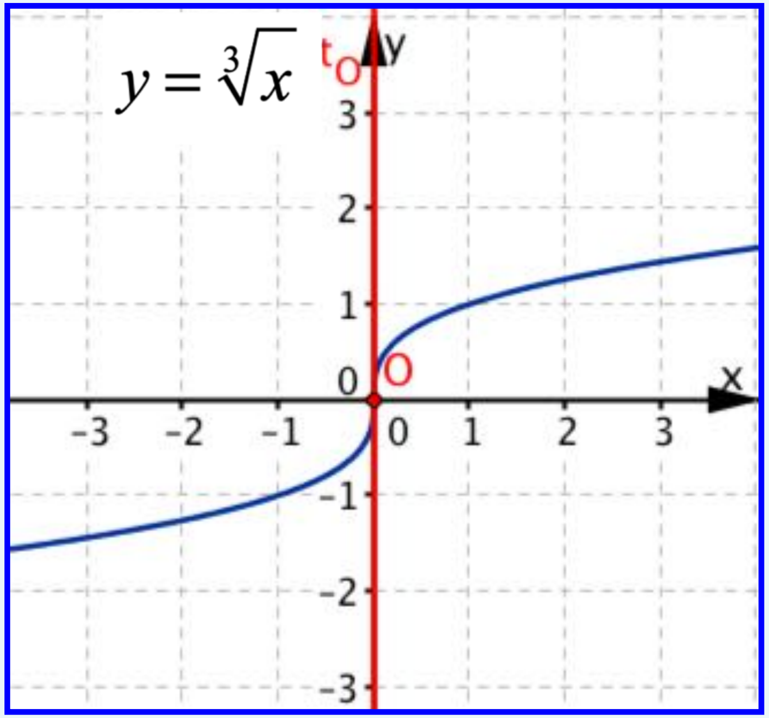
$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

La curva deve essere il grafico di una funzione derivabile in A.

ESEMPIO

$$y = \sqrt[3]{x}$$

NON è derivabile in O(0; 0).
Per trovare l'equazione di t_O NON posso applicare la formula generale perché non posso calcolare f'(0).



Retta tangente e approssimazione lineare

L'approssimazione lineare **risolve un problema importante in matematica e nelle applicazioni: *approssimare con una retta l'andamento di una curva nell'intorno di un suo punto P.***

Un procedimento semplice per risolvere il problema: approssimare la curva con la retta tangente in P.

Un esempio mostra come posso ragionare.

La retta tangente approssima una curva
Un esempio

La curva è il grafico della funzione $f(x) = x^3$

che ha derivata $f'(x) = 3x^2$

Il punto della curva è $P(1, 1)$

L'equazione della tangente t

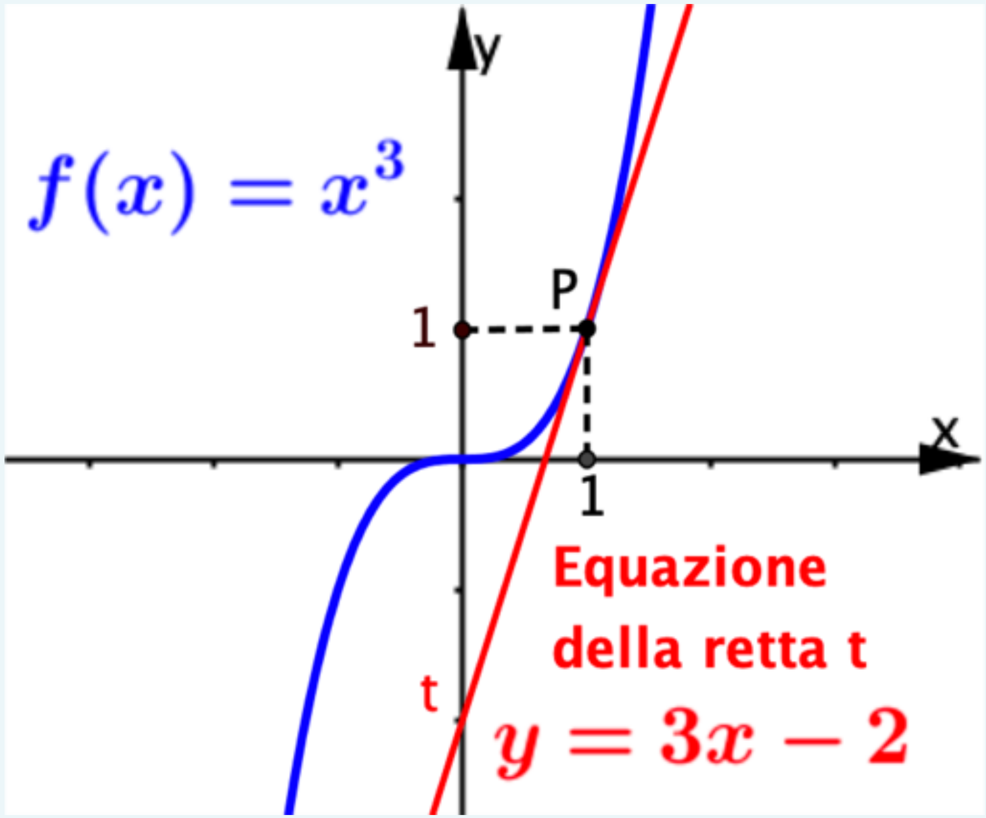
alla curva in $P(1, 1)$ è:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 2$$



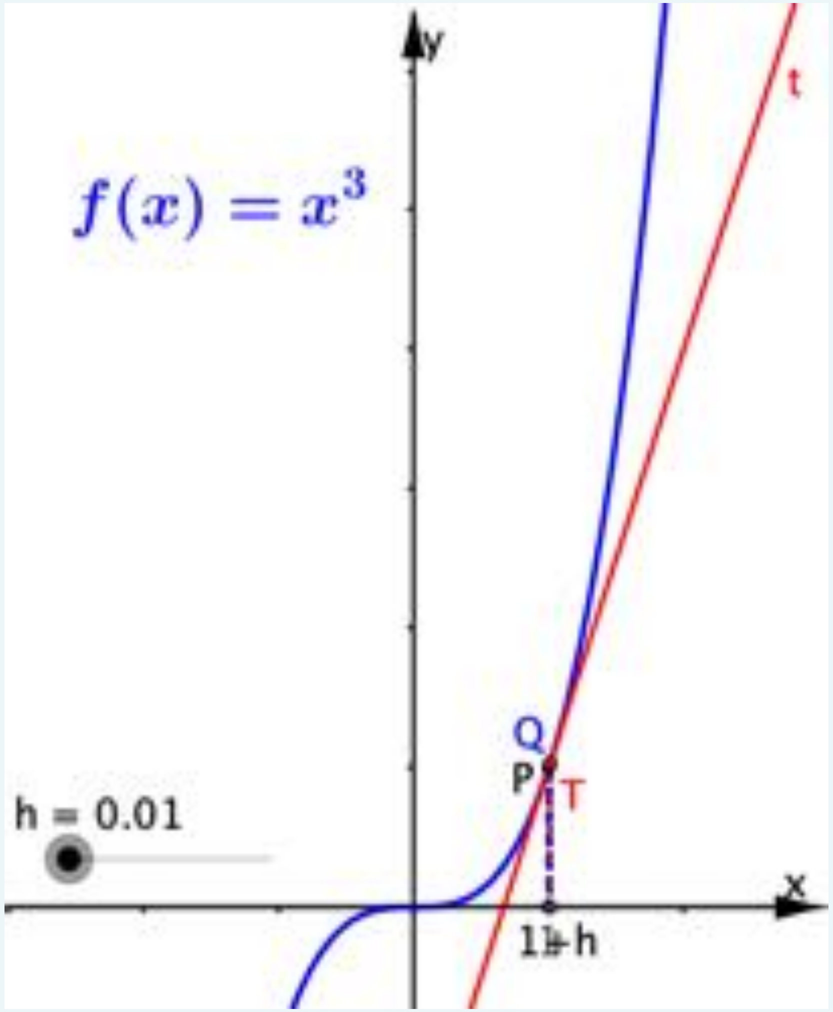
La tangente approssima una curva
Un esempio

P(1; 1) si trova:
- sulla curva d'equazione $y = x^3$;
- sulla tangente d'equazione $y = 3x – 2$.

Mi muovo in un intorno di P e trovo due punti con l'ascissa 1+h, vicina a 1:
- Q che percorre la curva;
- T che percorre la tangente.

T e Q sono vicini se h è piccolo:
la tangente approssima la curva in un intorno di P.

Come valuto l'errore di approssimazione?

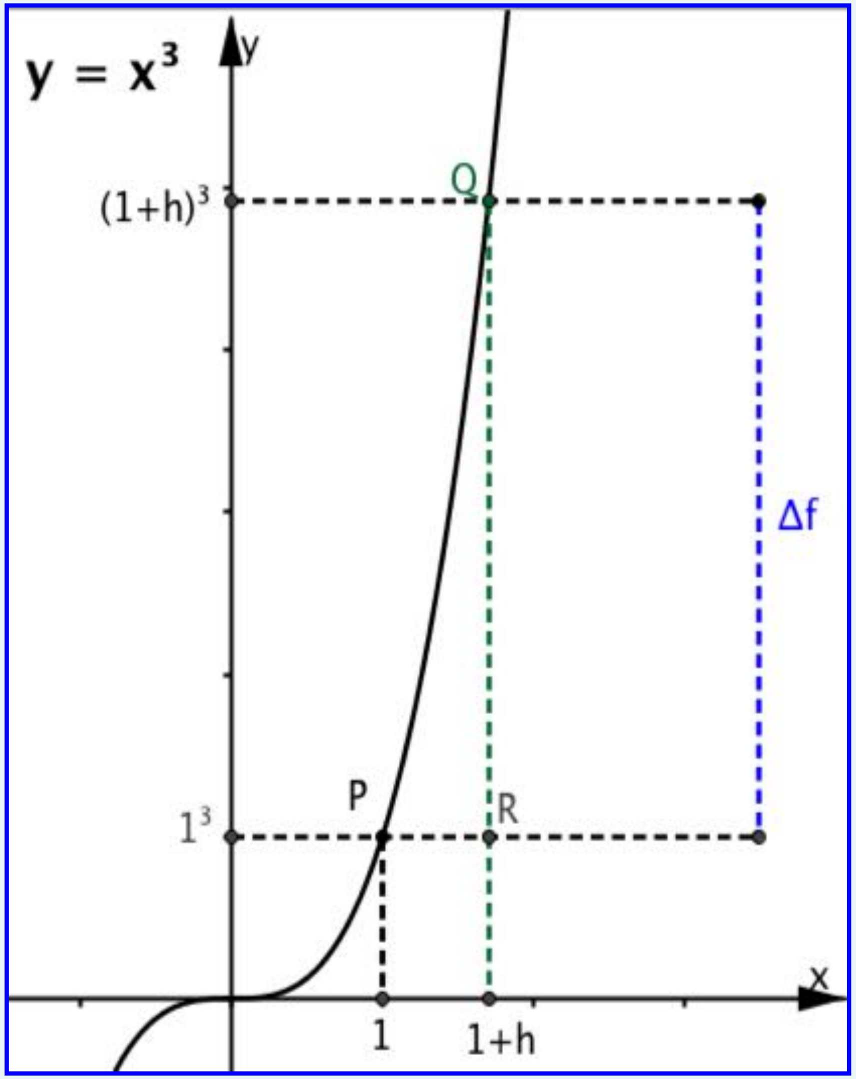


La tangente approssima una curva. Un esempio

Percorro la curva **nell'intorno di P:**

- **passo dal punto P al punto Q;**
- **l'ascissa passa da 1 a 1 + h;**
- **l'ordinata passa da 1 a $(1 + h)^3$.**
- **perciò l'ordinata subisce una variazione Δf data da:**

$$\boxed{\Delta f = (1 + h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3}$$

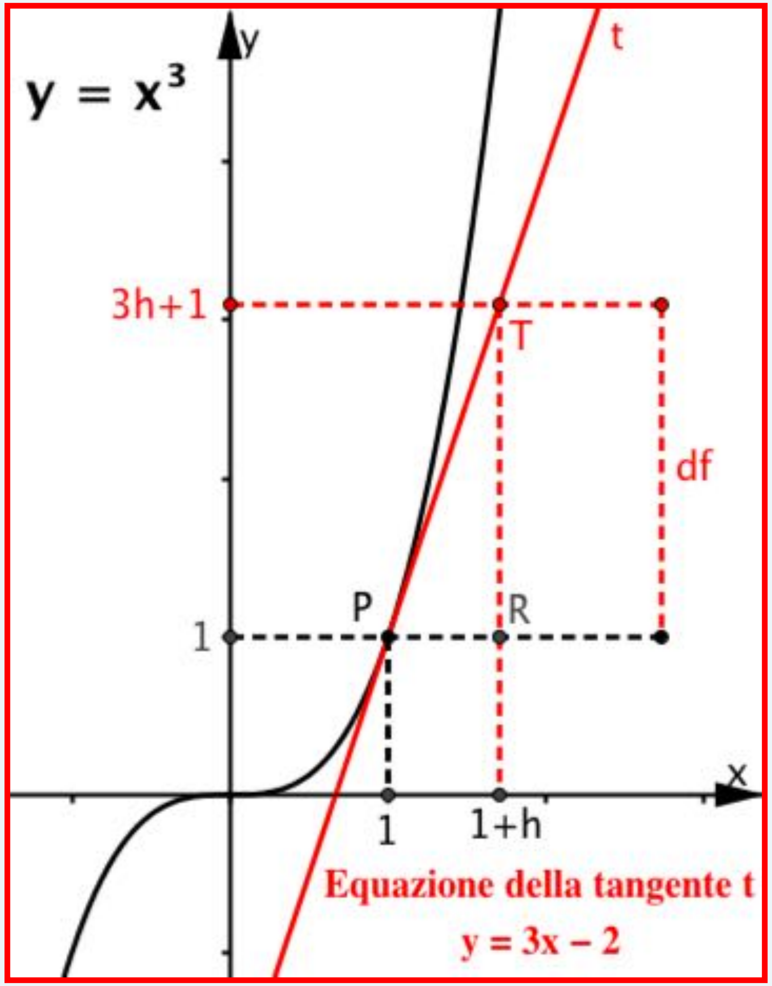


La tangente approssima una curva. Un esempio

Percorro la tangente t nell'intorno di P passo dal punto P al punto T.

- l'ascissa passa da 1 a 1 + h;
- l'ordinata passa da 1 a 3h + 1;
- perciò l'ordinata subisce una variazione d*f* data da

$$df = 3h + 1 - 1 = 3h$$



$$y_T = 3(h + 1) - 2 = 3h + 3 - 2 = 3h + 1$$

La tangente approssima una curva. Un esempio

Approssimare la curva con la tangente nell'intorno di P porta ad approssimare la variazione **Δf** con **df**.

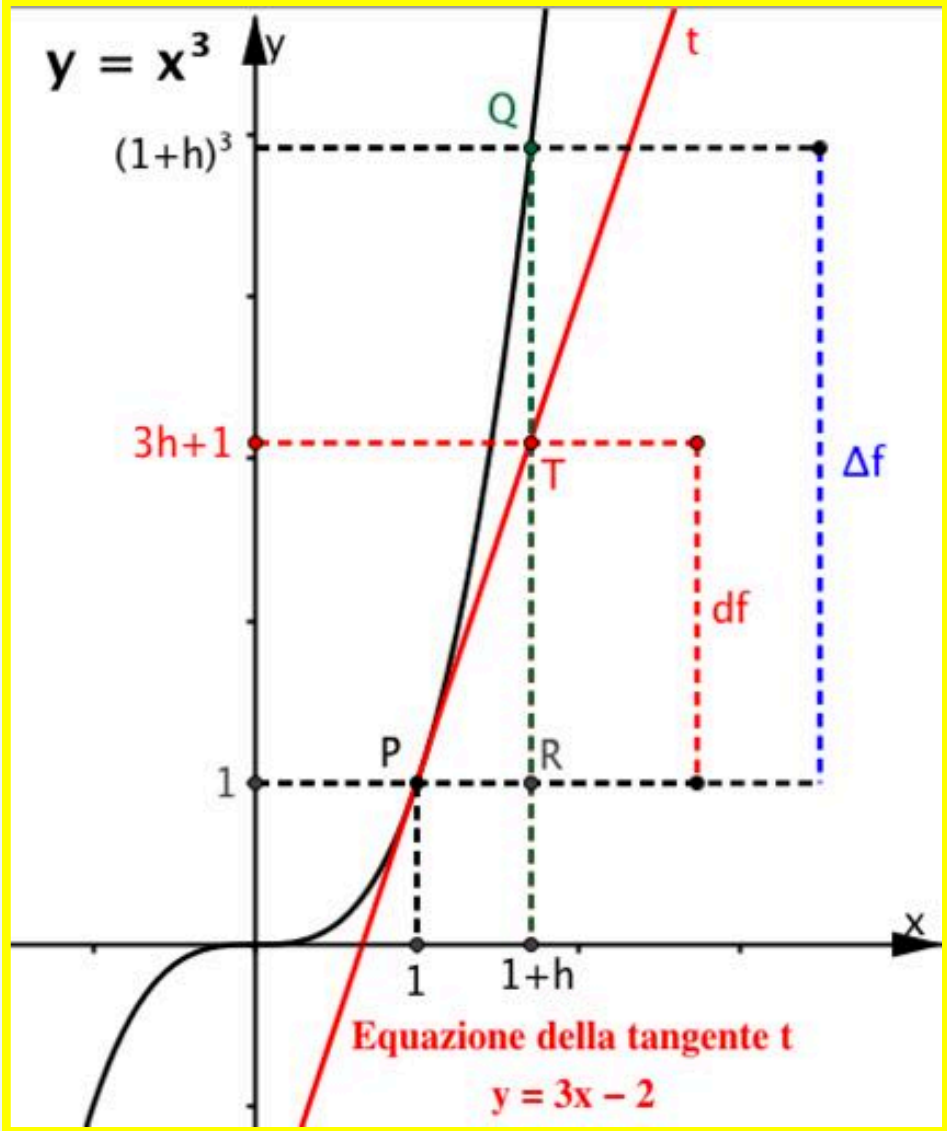
$$\Delta f = 3h + 3h^2 + h^3$$

$$df = 3h$$

L'errore che si commette con questa approssimazione è

$$\Delta f - df = 3h^2 + h^3$$

L'errore dipende da *h* ed è molto piccolo, se *h* è molto vicino a 0.



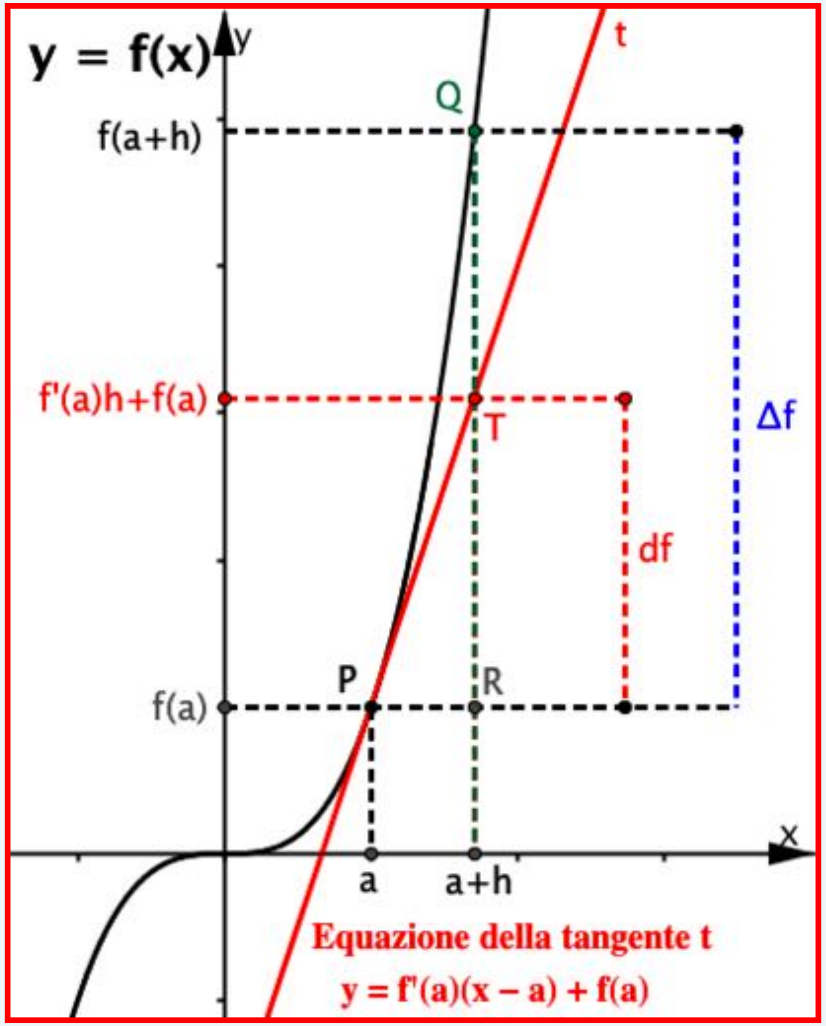
La tangente approssima la curva
Il differenziale

In generale, approssimare la curva con la tangente nell'intorno di P porta ad approssimare la **variazione Δf** con **df**.

$$\Delta f = f(a+h) - f(a)$$

$$df = f'(a)h$$

df prende il nome di differenziale



$$y_T = f'(a)(a + h - a) + f(a) =$$
$$= f'(a)h + f(a)$$

Differenziale per qualunque ascissa x

Posso calcolare il differenziale df di una funzione non solo in corrispondenza ad un'ascissa fissata *a*, ma per una qualunque ascissa *x*.

Esempi

1. $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$

$a = 2$ $\quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ $\quad df = 12h$

$a = x$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad dx^3 = 3x^2h$

2. $f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$

$a = 2$ $\quad f'(2) = 1$ $\quad df = h$

$a = x.$ $\quad f'(x) = 1$ $\quad dx = h$

$$\boxed{dx^3 = 3x^2dx}$$

La notazione di Leibniz

Esamino il differenziale df di una funzione in corrispondenza a qualunque ascissa *x*.

Esempio

$$\boxed{dx^3 = 3x^2 dx}$$

$$\boxed{3x^2 = \frac{dx^3}{dx}}$$

In generale

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$$

Ritrovo il simbolo scelto da Leibniz per indicare la derivata