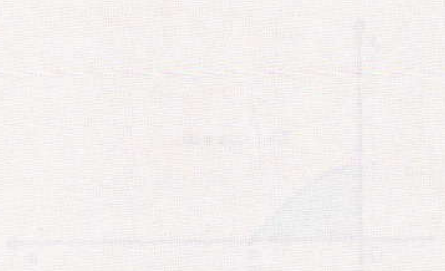


7

Alcune applicazioni degli integrali

- 
1. Calcolo dell'area racchiusa da una curva
 2. Calcolo dell'area racchiusa fra due curve
 3. Volume di un solido di rotazione
 4. Il calcolo integrale in fisica

1. Calcolo dell'area racchiusa da una curva

Nel capitolo precedente abbiamo visto come il calcolo integrale si è sviluppato a partire da un problema che ha origini antiche: determinare l'area racchiusa da un contorno curvilineo.

Ora, dopo aver introdotto le idee e le regole fondamentali del calcolo integrale, siamo in grado di applicare i risultati ottenuti per calcolare effettivamente le aree. Cominciamo a riflettere su due esempi.

1) Calcolare l'area T_1 della superficie racchiusa dall'asse delle x e dalla curva d'equazione $y = \cos x$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Osserviamo la fig. 1 che visualizza il problema ed esprimiamo l'area T_1 mediante un integrale definito¹; si ha:

$$T_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$$

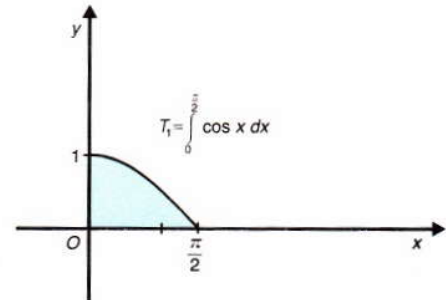


Fig. 1

Ora, per calcolare l'integrale indicato, occorre ricordare un risultato fondamentale (v. pag. 215): se è data la funzione $y=f(x)$, che si mantiene positiva nell'intervallo $[a, b]$, risulta

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dove $Y=F(x)$ è una delle primitive della funzione integranda, cioè è una funzione tale che

$$F'(x) = f(x).$$

Molto spesso la differenza $F(b) - F(a)$ si indica con un apposito simbolo; si scrive:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Per calcolare l'area richiesta si può dunque procedere nel modo seguente.

I) Si determinano le primitive della funzione integranda $y = \cos x$, calcolando

$$\int \cos x \, dx.$$

Si ottiene (v. tabella di pag. 216)

$$\int \cos x \, dx = \sin x + k.$$

II) Fra tutte queste primitive se ne sceglie una, per esempio quella che ha la forma più breve e cioè

$$F(x) = \sin x.$$

¹ Vedi cap. 6, paragrafo 2.

Così si ottiene subito l'area richiesta, dato che risulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}};$$

per arrivare al risultato, basta calcolare

$$[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Si ottiene allora¹

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.$$

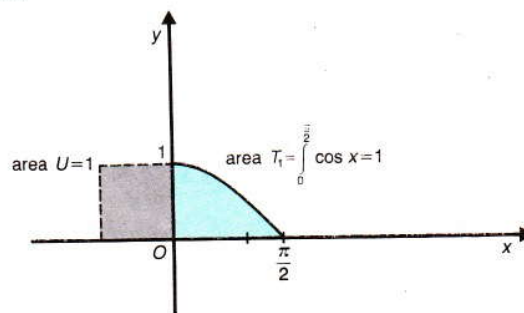


Fig. 2

La superficie S rappresentata in fig. 2 ha dunque l'area che vale 1; questo vuol dire che la superficie S è equivalente a un quadrato con il lato lungo 1. Si tratta di un risultato inaspettato: dalla figura si capisce che l'area della superficie S ha un valore vicino a 1, ma nulla fa prevedere che l'area valga **esattamente** 1!

2) Calcolare l'area T della superficie racchiusa dall'asse delle x e dalla curva d'equazione $y = \cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

La fig. 3 mette in rilievo la simmetria della cosinusoide: è evidente che l'area T è il doppio dell'area T_1 appena calcolata; deve dunque risultare

$$T_1 = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 2.$$

Ma se si calcola l'area ripetendo i calcoli eseguiti prima, si ottiene:

$$T = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Questo assurdo risultato si può spiegare riflettendo che nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, la cosinusoide si trova al disotto dell'asse delle x e, dunque risulta $\cos x < 0$.

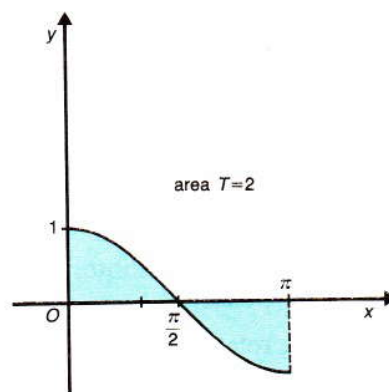


Fig. 3

¹ È facile capire che si arriva sempre allo stesso risultato se si parte da una diversa primitiva: la costante k "scompare" quando si svolge una sottrazione del tipo

$$[\sin x + k]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} + k - (\sin 0 + k) = \sin \frac{\pi}{2} + k - \sin 0 - k.$$

Invece, gli integrali definiti sono stati introdotti considerando solo funzioni $y=f(x)$, che non diventano mai negative nell'intervallo $[a, b]$ (fig. 4).

Vediamo allora che cosa accade quando si applica il procedimento richiamato in fig. 4 per calcolare l'area T_2 relativa all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: si divide l'intervallo in n parti di ampiezza h (fig. 5) e si calcola

$$A_n = \cos x_1 \cdot h + \cos x_2 \cdot h + \dots + \cos x_n \cdot h$$

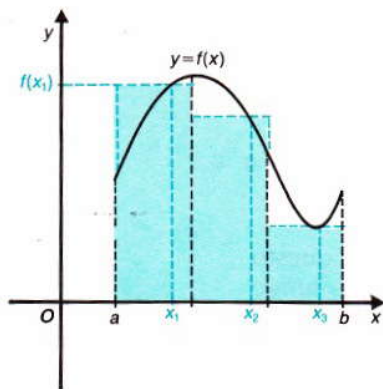


Fig. 4

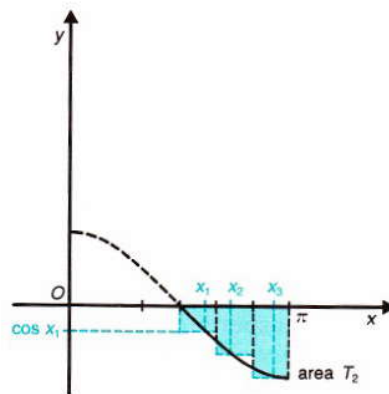


Fig. 5

È evidente che si ottiene un numero A_n certamente negativo; tuttavia il valore assoluto di A_n dà sempre una buona approssimazione dell'area T_2 . Si ha dunque:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\cos x_1 \cdot h + \cos x_2 \cdot h + \dots + \cos x_n \cdot h) = -T_2$$

ossia

$$T_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx.$$

Ora è chiaro che, per determinare l'area T racchiusa complessivamente dalla cosinusoide e dall'asse delle x nell'intervallo $[0, \pi]$, conviene calcolare separatamente le aree seguenti (fig. 6):

T_1 , relativa all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, in cui $y=\cos x$ mantiene il segno positivo,

T_2 , relativa all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, in cui $y=\cos x$ mantiene il segno negativo;

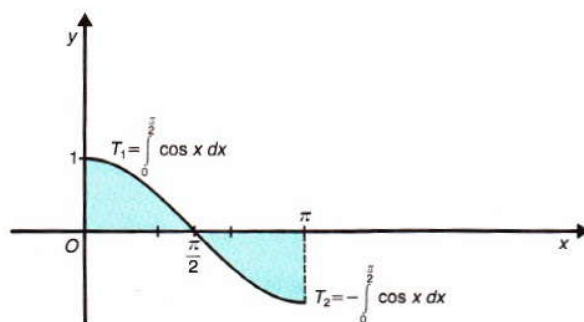


Fig. 6

così si ottiene

$$T = T_1 + T_2.$$

Si ha dunque:

$$T_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx, \quad T_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

e quindi

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

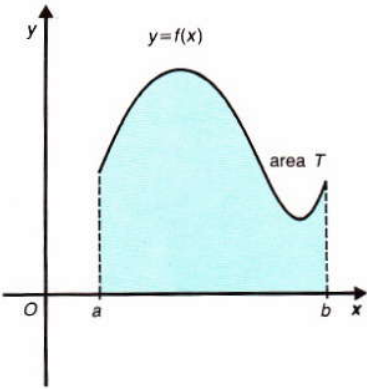
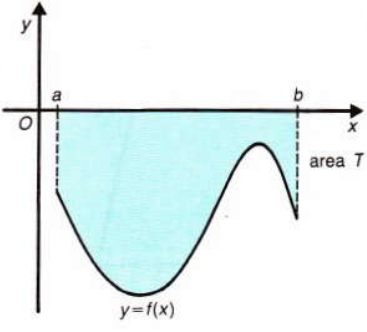
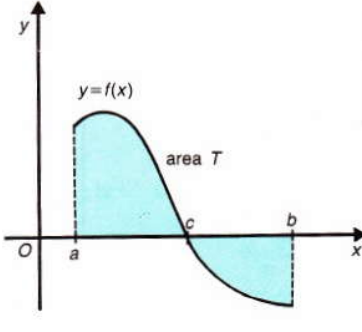
ossia

$$T = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 \right) - \left(\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 1 - 0 - (0 - 1) = 2$$

come avevamo già ottenuto per via geometrica.

I ragionamenti seguiti per sviluppare questi esempi hanno carattere generale e possono essere sempre ripetuti per calcolare l'area T racchiusa da una curva d'equazione $y=f(x)$ e dall'asse delle x ; i casi che si possono presentare sono riassunti nello schema seguente (figg. 7, 8, 9):

Area T sotto una curva d'equazione $y=f(x)$

$f(x) \geq 0$ in $[a, b]$	$f(x) \leq 0$ in $[a, b]$	$f(x) \geq 0$ in $[a, c]$, $f(x) \leq 0$ in $[c, b]$
$T = \int_a^b f(x) dx$	$T = - \int_a^b f(x) dx$	$T = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$
		
Fig. 7	Fig. 8	Fig. 9

2. Calcolo dell'area racchiusa fra due curve

Nel paragrafo precedente è esposto il procedimento per calcolare l'area T racchiusa fra una curva d'equazione $y=f(x)$ e l'asse delle x : abbiamo visto che, se risulta $f(x) \geq 0$ nell'intervallo $[a, b]$ (fig. 10), l'area T è data da

$$T = \int_a^b f(x) dx.$$

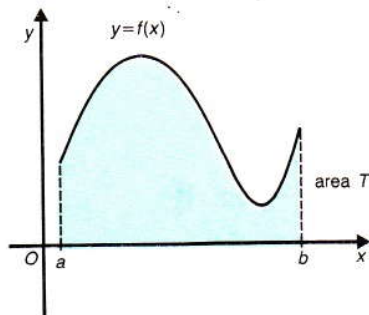


Fig. 10

Ora l'area T , visualizzata in fig. 10, può essere descritta anche così: T è l'area della superficie racchiusa dalla curva d'equazione $y=f(x)$ e dall'asse delle x , che ha equazione $y=0$.

In questo paragrafo estenderemo questo concetto al caso di aree racchiuse da due curve qualunque, d'equazione $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

Cominciamo a riflettere su un esempio. Si considera la superficie (in colore in fig. 11), racchiusa dalle due parabole p_1 e p_2 , che hanno le equazioni seguenti:

$$p_1) y=x^2-2x+2, \quad p_2) y=-x^2+6x-4;$$

si vuole determinare l'area T di questa superficie.

È chiaro che, per delimitare in modo preciso la zona indicata, si dovranno calcolare le coordinate dei punti A e B in cui le due curve si incontrano; risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due parabole, si ottiene

$$A(1, 1) \quad \text{e} \quad B(3, 5).$$

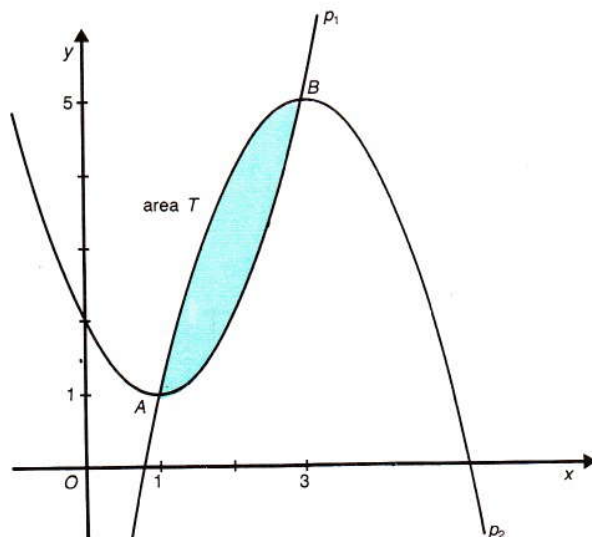


Fig. 11

La superficie da misurare è dunque la zona di piano cartesiano formata da tutti i punti $P(x, y)$ che soddisfano le seguenti disuguaglianze:

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad x^2 - 2x + 2 \leq y \leq -x^2 + 6x - 4.$$

A partire dalla fig. 12, è facile capire come si può calcolare l'area T fra le due curve: basta calcolare la differenza

$$T_2 - T_1,$$

dove

T_1 è l'area (in grigio) fra la curva p_1 e l'asse delle x nell'intervallo $[1, 3]$,

T_2 è l'area (in colore) fra la curva p_2 e l'asse delle x nell'intervallo $[1, 3]$.

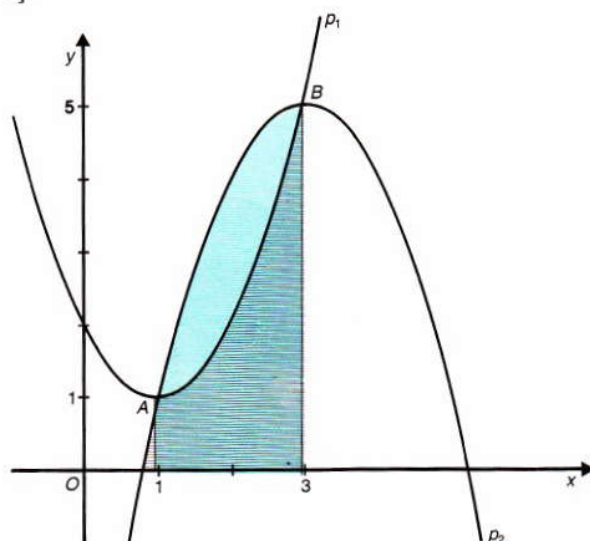


Fig. 12

Valendosi dei risultati ottenuti nel paragrafo precedente, si ha:

$$T_1 = \int_1^3 (x^2 - 2x + 2) dx \quad \text{e} \quad T_2 = \int_1^3 (-x^2 + 6x - 4) dx$$

e perciò risulta

$$T = \int_1^3 (-x^2 + 6x - 4) dx - \int_1^3 (x^2 - 2x + 2) dx.$$

Per svolgere più rapidamente i calcoli, conviene valersi delle proprietà (3) e (4) degli integrali definiti, espone nel cap. 6, paragrafo 3; si scrive:

$$\begin{aligned} & \int_1^3 (-x^2 + 6x - 4) dx - \int_1^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \\ & = \int_1^3 [(-x^2 + 6x - 4) - (x^2 - 2x + 2)] dx \end{aligned}$$

e si ottiene

$$T = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3 = \frac{8}{3}.$$

È facile rendersi conto che questo procedimento si può sempre seguire per calcolare l'area T racchiusa fra due curve d'equazione

$$y=f(x) \quad \text{e} \quad y=g(x),$$

quando si verificano le seguenti condizioni (fig. 13):

- I) le due curve si incontrano solo in due punti di ascisse a e b ,
- II) nell'intervallo $[a, b]$ risulta $f(x) \geq g(x)$,
- III) nell'intervallo $[a, b]$ risulta $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$.

In questi casi si ha dunque (fig. 14):

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (1)$$

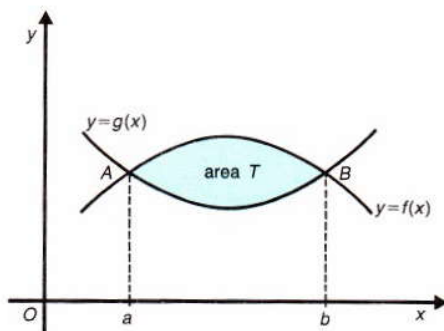


Fig. 13

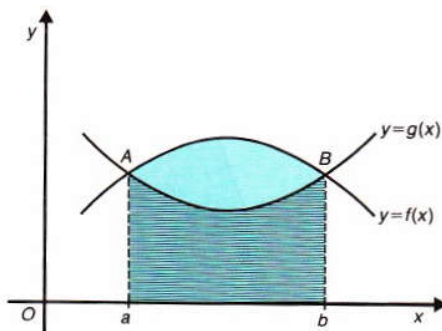


Fig. 14

$$T_1 = \int_a^b g(x) dx$$

$$T_2 = \int_a^b f(x) dx$$

$$T = T_1 - T_2$$

Vediamo ora come si può ragionare quando non si verifica l'ultima delle condizioni indicate prima e si deve calcolare l'area T di una superficie come quella rappresentata in colore in fig. 15: la superficie è racchiusa da due curve d'equazione

$$y=f(x) \quad \text{e} \quad y=g(x);$$

le curve si incontrano in due punti A e B , di ascisse a e b , ma nell'intervallo $[a, b]$ non si mantengono sempre al disopra dell'asse delle x .

Per ricondursi ad applicare la formula (1) basta operare una traslazione delle curve lungo l'asse delle y . Si ottiene così la stessa area T , delimitata però da due curve che si trovano entrambe al disopra dell'asse delle x (fig. 16).

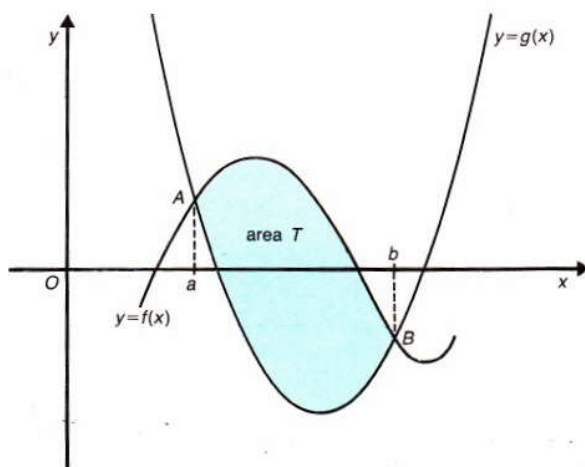


Fig. 15

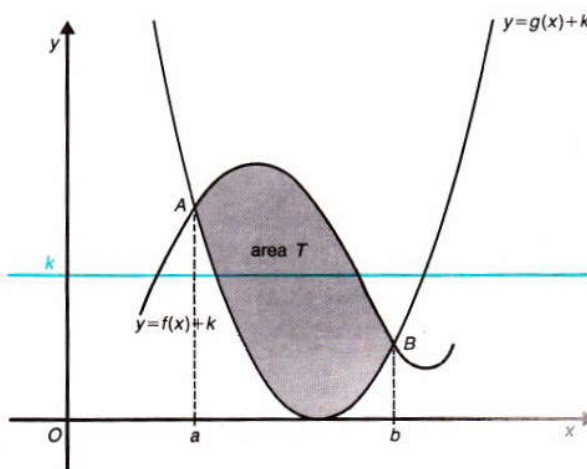


Fig. 16

Le equazioni delle due curve diventano allora

$$y=f(x)+k \quad \text{e} \quad y=g(x)+k$$

e l'area T si può calcolare mediante la formula (1); si ha:

$$T = \int_a^b [(f(x)+k) - (g(x)+k)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Si trova così un interessante risultato: per calcolare l'area T racchiusa fra le due curve ci si può valere sempre della formula (1), senza dover effettuare traslazioni. Si conclude che (fig. 17):

l'area T racchiusa fra due curve è data da

$$T = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

dove

- $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono le equazioni delle curve,
- a e b sono le ascisse dei punti di intersezione delle due curve,
- si ha $f(x) \geq g(x)$, mentre x varia nell'intervallo $[a, b]$.

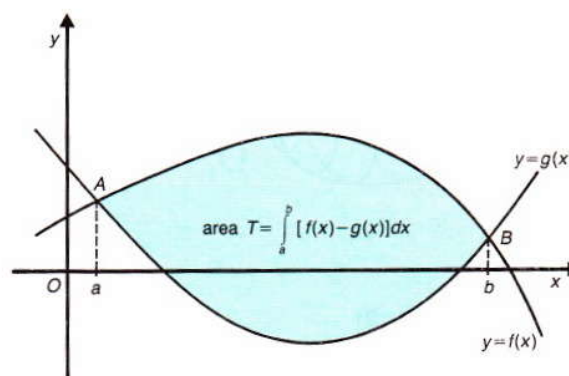


Fig. 17

3. Volume di un solido di rotazione

Il calcolo integrale permette di determinare non solo l'area di una superficie piana, ma anche il volume di un solido; il procedimento è particolarmente semplice nel caso dei solidi di rotazione.

Ecco gli esempi più noti di solidi di rotazione:

- si ha una **sfera** ruotando un semicerchio intorno al diametro (fig. 18);
- si ha un **cilindro** ruotando un rettangolo intorno ad un lato (fig. 19);
- si ha un **cono** ruotando un triangolo rettangolo intorno ad un cateto (fig. 20).

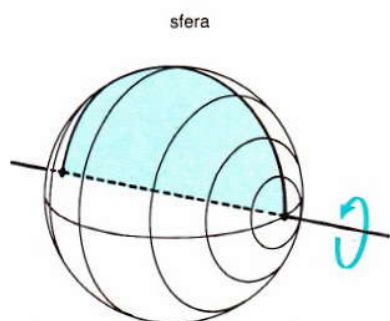


Fig. 18

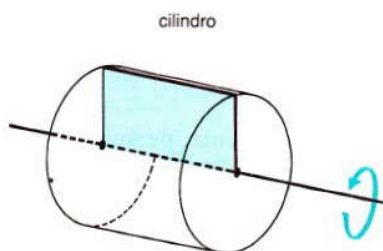


Fig. 19

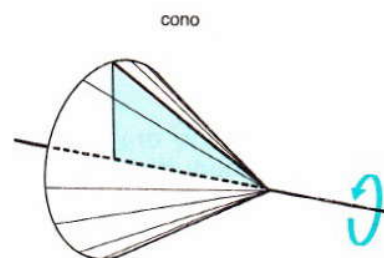


Fig. 20

Ecco altri solidi di rotazione che si possono ottenere a partire da figure piane note:

- ruotando una semiellisse intorno ad un asse di simmetria (fig. 21) si ha un **ellissoide**;
- ruotando una parabola intorno al suo asse di simmetria (fig. 22) si ha un **paraboloide**;
- ruotando un ramo di iperbole equilatera intorno ad un asintoto (fig. 23) si ha un **solido iperbolico**.

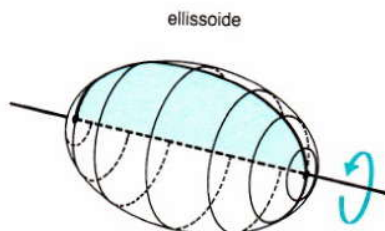


Fig. 21

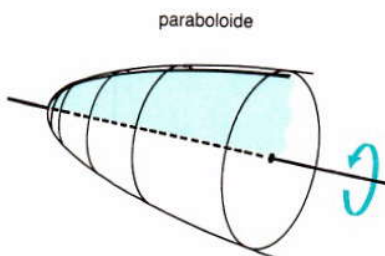


Fig. 22

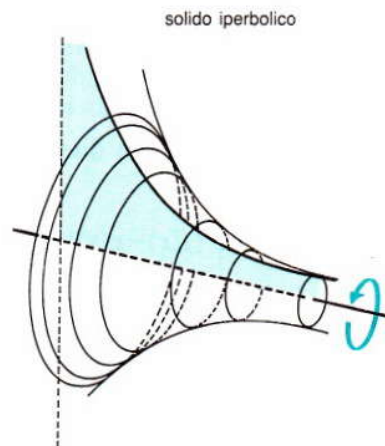


Fig. 23

Più in generale, si può ottenere un solido di rotazione in questo modo: sul piano cartesiano si disegna il grafico di una funzione $y=f(x)$, definita positiva in un intervallo $[a, b]$ (fig. 24); si fa poi ruotare intorno all'asse delle x il trapezoide delimitato dalla curva (fig. 25).

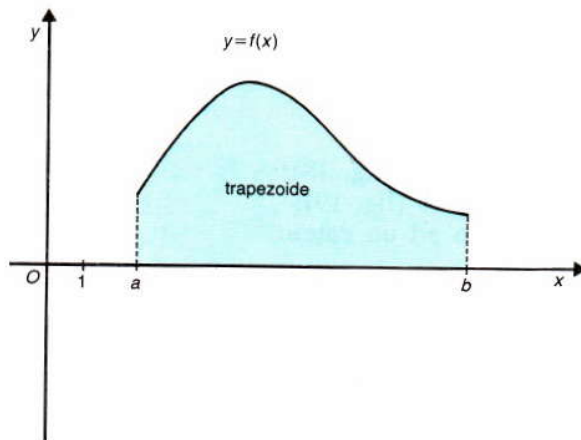


Fig. 24

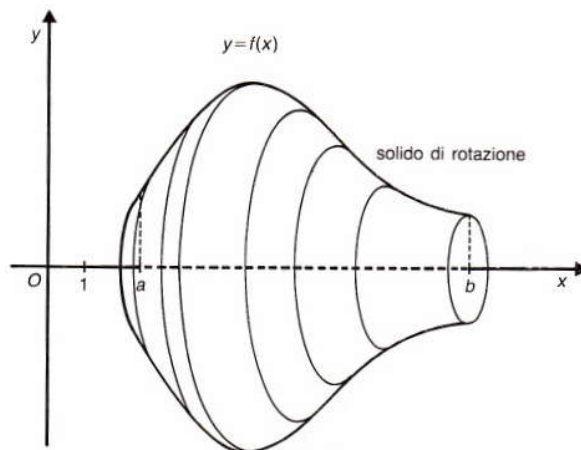


Fig. 25

Vediamo ora come il calcolo integrale permette di calcolare il volume dei solidi di rotazione che si possono generare in questo modo.

Il procedimento si basa sulla stessa idea che ha condotto a calcolare l'area del trapezoide¹: si divide l'intervallo $[a, b]$ in n parti lunghe h e si individua lo scaloide inscritto e quello circoscritto (figg. 26 e 27); si

¹ Vedi cap. 6, paragrafo 2.

opera quindi la rotazione intorno all'asse delle x . Si ottengono così tre solidi:

- I) il solido descritto dalla rotazione del trapezoide (fig. 25),
- II) il solido descritto dalla rotazione dello scaloide inscritto (fig. 28),
- III) il solido descritto dallo scaloide circoscritto (fig. 29).

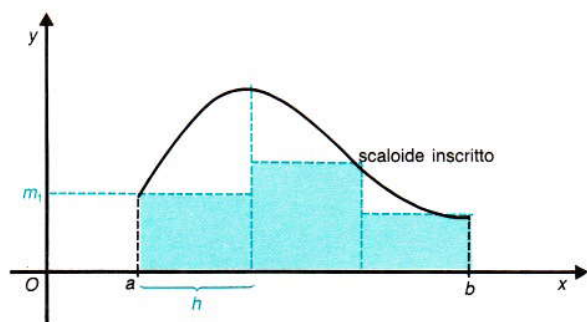


Fig. 26

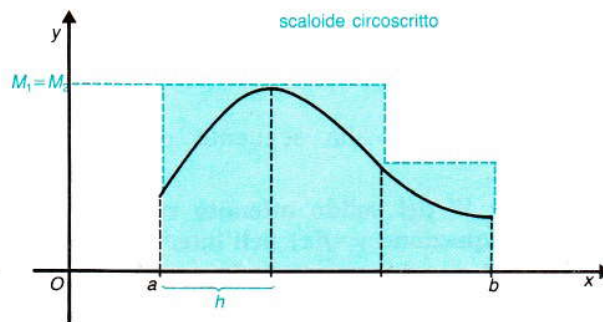


Fig. 27

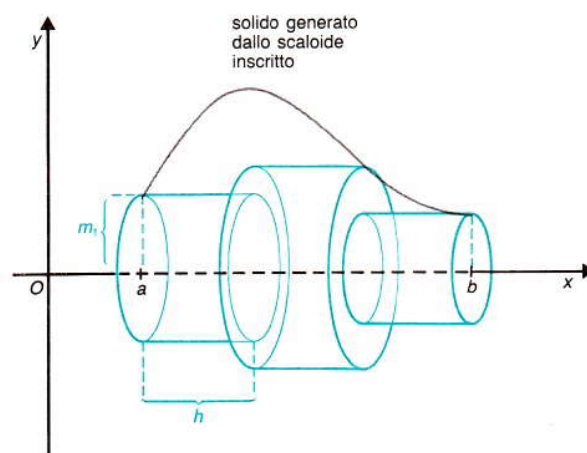


Fig. 28

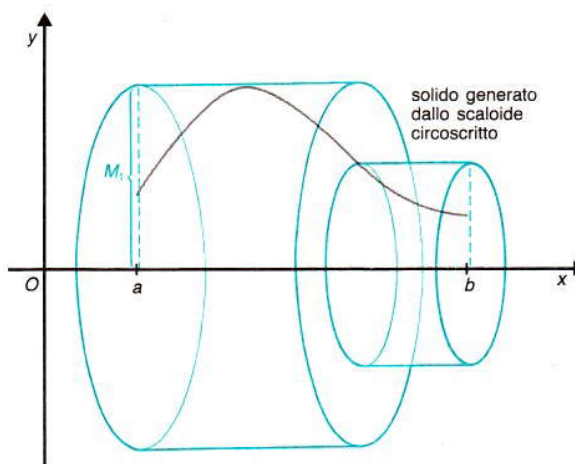


Fig. 29

Il primo solido ha un volume W che non conosciamo; mentre è facile calcolare il volume degli altri due solidi, che sono composti da n "cilindretti".

Ricordando che il volume di un cilindro di altezza h e raggio r è dato da

$$V = \pi r^2 h,$$

si ha che:

- il volume del solido generato dallo scaloide inscritto è dato da

$$v_n = \pi m_1^2 h + \pi m_2^2 h + \dots + \pi m_n^2 h$$

- il volume del solido generato dallo scaloide circoscritto è dato da

$$V_n = \pi M_1^2 h + \pi M_2^2 h + \dots + \pi M_n^2 h$$

- risulta, per ogni n ,

$$v_n \leq W \leq V_n.$$

Si è così condotti ad affermare che, per valutare il volume W del solido, basta calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = W.$$

Seguendo poi lo stesso ragionamento esposto nel cap. 6, paragrafo 2, si può arrivare al volume W anche calcolando il limite seguente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \pi[f(x_1)]^2 \cdot h + \pi[f(x_2)]^2 \cdot h + \dots + \pi[f(x_n)]^2 \cdot h \}$$

che conduce a scrivere

$$W = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Si arriva quindi alla seguente conclusione (fig. 30):

il volume W del solido ottenuto ruotando la curva d'equazione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è dato da:

$$W = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

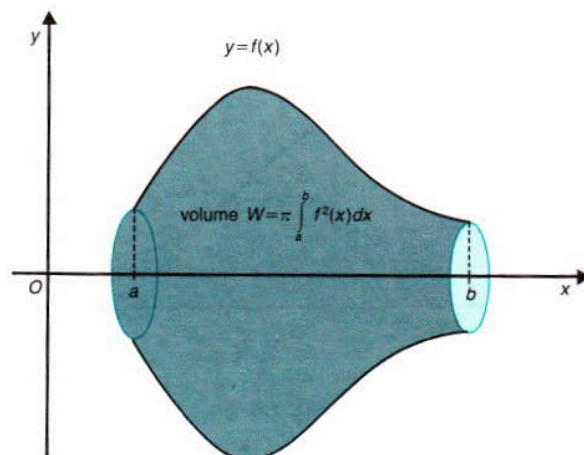


Fig. 30

Vediamo subito due applicazioni di questo procedimento.

A) Il volume del paraboloide

Si disegna sul piano cartesiano una parabola, disponendo il vertice in O e l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle x . Si considera quindi l'arco di curva che si trova nel primo quadrante; quest'arco è il grafico della seguente funzione (fig. 31):

$$y = \sqrt{x}.$$

Si opera una rotazione del piano intorno all'asse delle x , ottenendo il paraboloide di rotazione rappresentato in fig. 32.

Il solido si estende all'infinito, perciò ha un volume W che varia al variare del punto A , estremo dell'arco OA che ruota. Se si indica con a l'ascissa del punto A , il volume W è dato da:

$$W = \int_0^a \pi x dx$$

ossia

$$W = \left[\pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^a = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Si arriva dunque alla seguente conclusione (figg. 31 e 32):

il volume del paraboloide, generato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'arco di parabola d'equazione

$$y = \sqrt{x}$$

definito nell'intervallo $[0, a]$, è dato da

$$W = \frac{\pi}{2} a^2.$$

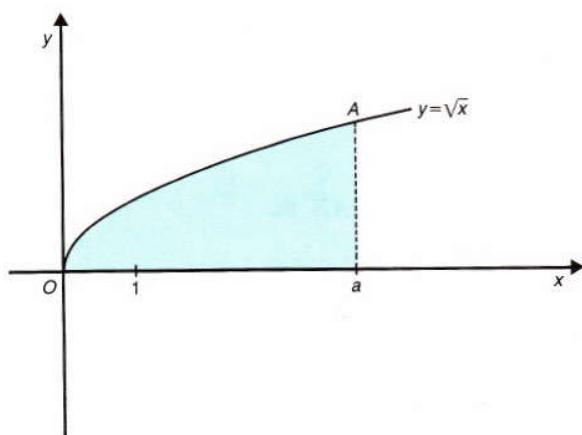


Fig. 31

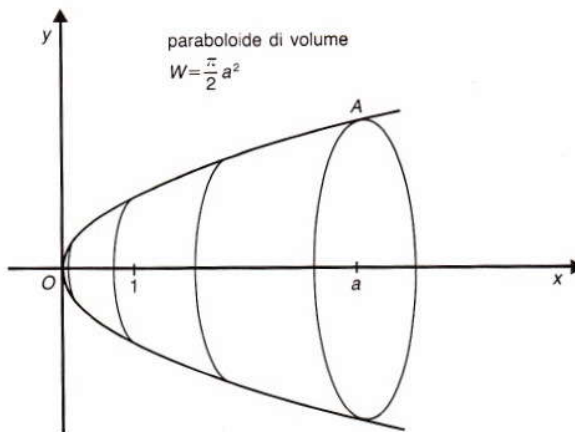


Fig. 32

Un'osservazione importante: se l'ascissa a assume valori sempre più grandi positivi, il volume W cresce sempre di più e risulta

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{\pi}{2} a^2 \right] = +\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} W = +\infty$$

Il paraboloido si estende dunque all'infinito, racchiudendo un volume che tende all'infinito.

B) Il volume del solido iperbolico

Si disegna sul piano cartesiano il ramo d'iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi cartesiani (fig. 33) ed è descritto dall'equazione

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{con} \quad x > 0;$$

si ruota la figura intorno all'asse delle x ottenendo un solido iperbolico (fig. 34). Anche questo solido si estende all'infinito e perciò avrà un volume W variabile al variare dei punti A e B estremi dell'arco che ruota.

Fissiamo per semplicità $A(1, 1)$ e indichiamo con b l'ascissa del punto B ; il volume W del solido è dato da:

$$W = \int_1^b \pi \frac{1}{x^2} dx$$

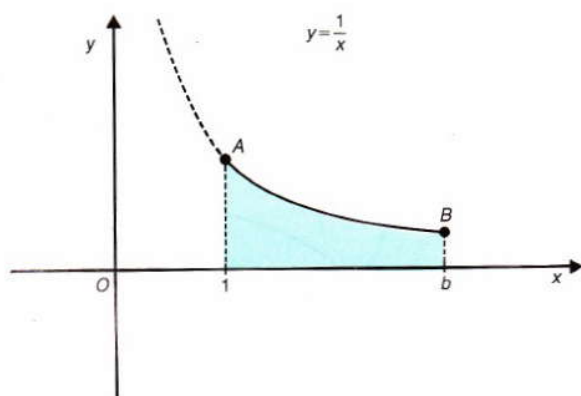


Fig. 33

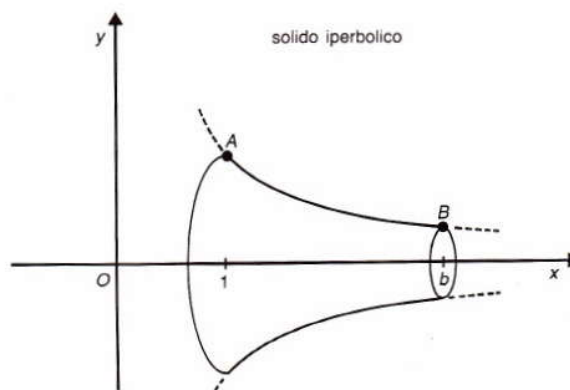


Fig. 34

ossia

$$W = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \pi \left(-\frac{1}{b} + 1 \right).$$

Si arriva dunque alla seguente conclusione (figg. 35 e 36):

il volume del solido iperbolico, generato dalla rotazione dell'arco AB di iperbole equilatera, che ha equazione

$$y = \frac{1}{x}$$

ed è delimitato dai punti d'ascissa 1 e b è dato da

$$W = \pi \left(-\frac{1}{b} + 1 \right).$$

Riflettiamo su questo risultato: quando l'ascissa b assume valori sempre più grandi positivi, il volume W aumenta, ma risulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} W = \pi$$

dato che si ha

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Questo risultato è davvero sorprendente: il solido iperbolico si estende all'infinito, ma racchiude un volume finito!

Il risultato diventa poi ancora più sorprendente se si calcola l'area T del trapezoide che genera il solido; si ha:

$$T = \int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b$$

e perciò

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} T = +\infty.$$

Si trova dunque (figg. 35 e 36) che il solido iperbolico, generato dalla rotazione di un trapezoide di area infinita¹, si estende all'infinito, racchiudendo però un volume che vale π !

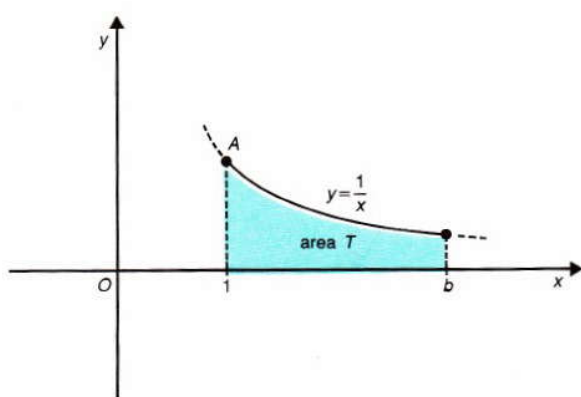


Fig. 35

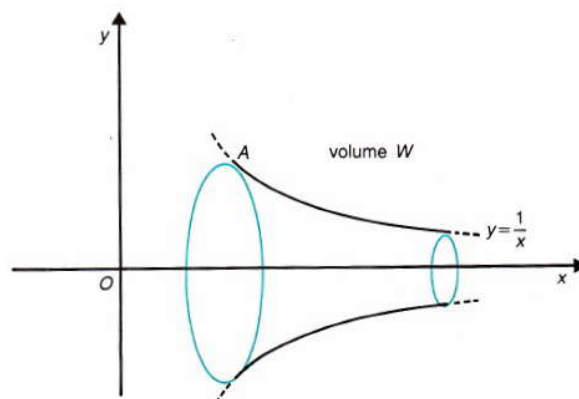


Fig. 36

¹ Per una trattazione più approfondita degli integrali estesi ad intervalli infiniti, vedi Complementi del cap. 6.

4. Il calcolo integrale in fisica

I risultati esposti in questo capitolo e nel precedente conducono ad individuare nel calcolo integrale due settori di studio ed applicazione:

- 1) **l'integrale definito**, che è un numero, introdotto a partire dal limite di un'opportuna somma di infiniti termini;
- 2) **l'integrale indefinito**, che è un insieme di funzioni, introdotto a partire dall'operazione inversa di derivazione;

Tutti e due questi settori hanno numerose applicazioni in fisica; in questo paragrafo ne vedremo due esempi.

1) L'integrale definito per calcolare il lavoro di una forza variabile

Cominciamo ad esaminare un caso particolare che suggerisce conclusioni di carattere generale.

Consideriamo un meteorite di massa m , che si trova in un punto B a distanza r_B dal centro della Terra, e che cade liberamente fino a raggiungere un punto A sulla superficie della Terra (fig. 37).

Trascurando la resistenza dell'aria, si può dire che il meteorite percorre uno spostamento lungo $s = r_B - r_A$, sotto l'azione della forza gravitazionale \vec{F} ; questa forza ha l'intensità data da:

$$F = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

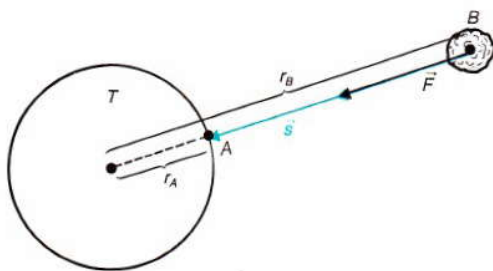


Fig. 37

dove

G è la costante della gravitazione universale,

M è la massa della Terra,

r è la distanza del meteorite dal centro della Terra.

Si vuole calcolare il lavoro L compiuto dalla forza F per far cadere il meteorite.

Osserviamo subito che la forza F e lo spostamento s hanno la stessa direzione e verso; perciò basterebbe valersi della formula

$$L = F s.$$

Si incontra però una notevole difficoltà: la forza F che agisce sul meteorite varia al variare di r durante la caduta secondo la legge (1) visualizzata in fig. 38; non si capisce perciò quale valore di F deve essere moltiplicato per lo spostamento s .

Si può superare la difficoltà ragionando così (fig. 39): si divide lo spostamento s in n tratti lunghi h e, in ogni tratto, si considera la forza F costante e data dal valore che assume, per esempio al centro del segmento.

Si può così calcolare il lavoro relativo ad ogni trattino e, quindi, calcolare il lavoro L sommando i contributi relativi a tutti gli intervalli. Si ottiene:

$$L \approx \frac{GMm}{r_1^2} h + \frac{GMm}{r_2^2} h + \dots + \frac{GMm}{r_n^2} h.$$

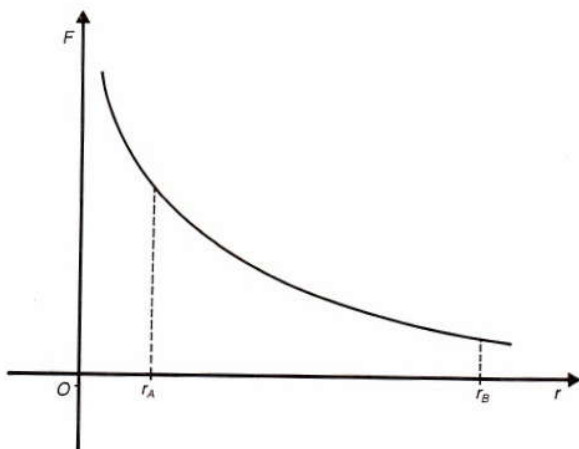


Fig. 38

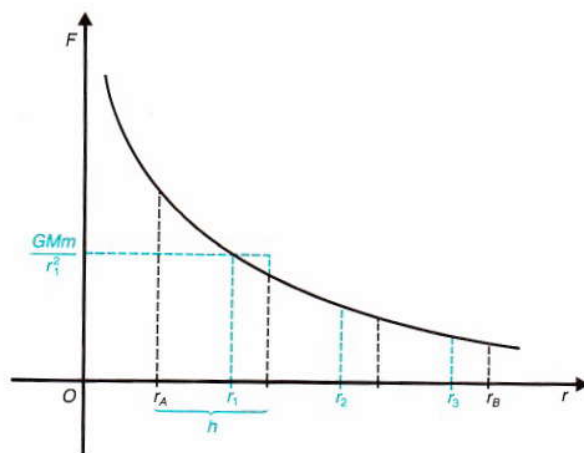


Fig. 39

È chiaro che in questo modo si ottiene solo un valore approssimato del lavoro richiesto, ma l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccola è l'ampiezza h degli intervallini; risulta dunque:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{GMm}{r_1^2} h + \frac{GMm}{r_2^2} h + \dots + \frac{GMm}{r_n^2} h \right)$$

ossia

$$L = \int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2} dr.$$

Svolgendo quindi il calcolo indicato si ottiene:

$$L = GMm \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Il procedimento ora seguito ha carattere generale e può essere ripetuto per calcolare il lavoro compiuto da una forza che ha la stessa direzione dello spostamento, ma intensità variabile $F=f(r)$ (fig. 40): se la forza F è applicata ad un corpo che si sposta da un punto $A(r_A)$ ad un punto $B(r_B)$, con $r_A < r_B$, si ha:

$$L = \int_{r_B}^{r_A} f(r) dr.$$



Fig. 40

2) L'integrale indefinito nella meccanica

Nel cap. 5, paragrafo 9, abbiamo considerato un punto materiale che si muove secondo la legge

$$s=f(t),$$

ed abbiamo ottenuto la legge che fornisce la velocità istantanea al variare del tempo t data da

$$v=f'(t).$$

È chiaro che se, viceversa, è data la legge

$$v=f'(t),$$

si può ricavare

$$s=\int v \, dt$$

ossia

$$s=f(t)+k.$$

È facile capire il significato fisico della costante k : un corpo può muoversi con una data velocità a partire da tante posizioni iniziali diverse; quindi la costante k indica la posizione iniziale del corpo e viene spesso indicata con il simbolo s_0 .

Si può ragionare in modo analogo a proposito dell'accelerazione: se è data la legge

$$v=f(t),$$

risulta che l'accelerazione istantanea a è data da

$$a=f'(t).$$

Se invece è data la legge

$$a=f'(t),$$

si ricava

$$v=\int a \, dt$$

ossia

$$v=f(t)+k.$$

Anche in questo caso la costante k ha un intuitivo significato fisico: la velocità di un corpo può variare con una data rapidità, a partire da diverse velocità iniziali. Quindi la costante k descrive la velocità iniziale del corpo e viene spesso indicata con il simbolo v_0 .

Il faticoso sviluppo dell'analisi matematica

*Al termine dello studio dell'analisi è interessante osservare che un corso così ampio si riassume in pochi concetti, e cioè i concetti di **funzione**, **limite**, **derivata** e **integrale**.*

Ma di questi concetti non si capisce il valore se, da una parte, non si scoprono le connessioni che li legano, dall'altra, non si dà un'idea delle loro applicazioni nei più diversi campi. Ed è proprio in vista delle applicazioni che abbiamo dovuto sviluppare le varie tecniche di calcolo; la trattazione è diventata, pertanto, lunga e dettagliata.

Nella storia, i concetti fondamentali dell'analisi non si sono sviluppati nell'ordine seguito nel testo: le tecniche per la derivazione e l'integrazione, spesso motivate da questioni di geometria e di fisica, si sono sviluppate e spesso "accavallate" nel Seicento e nel Settecento, prima che i concetti base di funzione e di limite fossero stati sufficientemente chiariti. Ad un assetto organico dell'analisi si arriva solo nell'Ottocento. Per dare un'idea delle vie percorse, riportiamo dei passi tratti dagli scritti di Isaac Newton (1601-1665) e Gottfried Leibniz (1642-1727), i più famosi fra i fondatori dell'analisi.

*Molte delle teorie sull'analisi matematica si trovano nel trattato di Newton *Philosophiae naturalis principia mathematica* del 1687. Questo trattato contiene, oltre alle leggi della dinamica e della gravitazione universale, una parte dedicata all'analisi che Newton aveva elaborato parecchi anni prima.*

La definizione di limite che si trova in queste pagine si basa sulla seguente asserzione: «Delle quantità o dei rapporti di quantità, che in qualunque intervallo di tempo finito convergono con continuità verso l'uguaglianza, e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l'una all'altra in tal modo che la loro differenza sia minore di qualunque differenza data, finiscono per diventare uguali».

Newton illustra poi questa sua asserzione dicendo che «se voi negate che avvenga così, e cioè se supponete che da ultimo non siano uguali, risulterebbe che le due grandezze non potrebbero avvicinarsi più di una data differenza, e questo è contrario all'ipotesi».

A questa definizione di limite fanno seguito le regole del calcolo infinitesimale: «Il momento di qualsiasi genitum è uguale ai momenti di ciascuno dei lati generatori, moltiplicati continuamente per gli indici delle potenze di quei lati e per i loro coefficienti». Questa regola sembra davvero sibillina, ma è lo stesso Newton a chiarire il significato dei termini "genitum" e "momento": «il genitum è una quantità variabile, fluente, e il momento è un cambiamento infinitamente piccolo subito dalla variabile, e può essere chiamato flussione della quantità».

Sembra impossibile, ma con queste frasi contorte ed oscure è espressa la regola di derivazione del prodotto di due funzioni!

Subito dopo la regola che abbiamo riportato, Newton trova anche le regole di derivazione delle potenze e del quoziente; ma la lettura continua ad essere estremamente difficoltosa.

Dalle poche frasi che abbiamo riportato dagli scritti di Newton, si capisce perché ben pochi matematici del suo tempo riuscissero a capire il suo linguaggio e, quindi, ad impadronirsi delle prime, fondamentali regole del calcolo infinitesimale. Del resto anche noi, oggi, incontriamo grandi difficoltà nel capire una regola quando questa è espressa solo con un lungo discorso.

Maggior fortuna hanno avuto, per la loro chiarezza, le opere di Leibniz. E la chiarezza è dovuta, appunto, all'invenzione di un opportuno simbolismo. Leibniz è assolutamente consapevole di questo fatto quando scrive: «Ai simboli si deve richiedere che essi si prestino alla ricerca; ciò succede principalmente quando essi esprimono in modo conciso e quasi dipingono l'intima natura della cosa, perché, allora, essi risparmiano mirabilmente lo sforzo del pensiero».

Leibniz ha l'intuizione di indicare con dx e dy «le minime differenze possibili di x e y », arrivando a scrivere le regole di derivazione del prodotto e del quoziente di due funzioni in una forma molto vicina a quella usata oggi.

Mentre le teorie di Newton e di Leibniz si diffondevano nel mondo intero e sempre nuove scoperte nel campo applicativo venivano a rafforzare le regole da loro introdotte, una parte del mondo matematico si sollevava: come si poteva avere fiducia in teorie che non avevano solide fondamenta? Ci si rendeva infatti conto che derivazione e integrazione erano basate sul concetto di limite, e questo concetto non era chiaramente definito. E le critiche si estendevano anche fuori dell'ambiente matematico: in un teatro di Parigi fu rappresentata una commedia burlesca sugli infinitesimi; si diceva, fra l'altro: «o gli infinitesimi sono zero, e allora il calcolo infinitesimale è illusorio; o non lo sono, e allora non è un metodo di precisione!». E Voltaire (1694-1778) definiva l'analisi come «l'arte di calcolare e misurare una cosa di cui non si può concepire l'esistenza».

Per la serietà dell'ambiente matematico si doveva una volta per tutte rispondere a questo dilemma: come mai da concetti non precisati si possono dedurre tante importanti applicazioni?

Ma bisognava attendere ancora: è solo nel 1821 che il matematico A. Cauchy pone la seguente definizione: «Quando i valori successivi attribuiti ad una variabile si avvicinano indefinitamente ad un dato valore, così che finiscono per differirne di una quantità piccola a piacere, quel valore viene detto il limite di tutti gli altri».

Ma anche questa definizione si prestava a delle critiche: infatti in quella definizione erano contenute delle frasi come «avvicinarsi indefinitamente» e «quantità piccola a piacere», espressioni che non rispondono al rigido linguaggio della matematica. È proprio per evitare queste espressioni che potevano portare ad ambiguità che si è «quantificata» la piccolezza da accettare: si è indicata con ε la differenza fra il limite ed il valore della funzione. Si è arrivati così alla definizione data in questo testo e cioè:

Data una funzione $y=f(x)$, si dice che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero ε , positivo e piccolo a piacere, si può trovare un intorno $I(a)$, tale che risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

per qualunque x appartenente ad $I(a)$.

La definizione è statica: non si parla di quantità fluenti o di punti che si muovono; il linguaggio preciso e freddo con cui viene fissato il concetto di limite bandisce dall'analisi ogni riferimento alla variabilità. L'epoca del rigore è arrivata e ha sostituito ai vecchi strumenti di scoperta e alle brillanti intuizioni un'impeccabile e inattaccabile logica.