5

Alcune applicazioni di limiti e derivate

1. Equazione della tangente ad una curva

I risultati del capitolo precedente possono essere riassunti così:

1) data una funzione $y=f(x)$, il valore $f'(a)$ della derivata, calcolata per $x=a$, misura la rapidità di variazione di y, quando x vale a,
2) dal punto di vista geometrico, $f'(a)$ indica la pendenza della tangente al grafico della funzione nel punto d'ascissa $x=a$,
3) le regole del calcolo differenziale permettono di determinare le derivate delle funzioni ottenute componendo le funzioni elementari note.

Da questi risultati scaturisce uno straordinario numero di applicazioni nei settori più vari. In questo capitolo ci limiteremo a presentare le applicazioni più semplici nel campo della matematica e della fisica; negli Esercizi si può trovare qualche idea sulle applicazioni in altri settori.

Cominciamo dall'applicazione più diretta delle derivate: l'equazione della tangente ad una curva in un suo punto.

Partiamo da un esempio numerico: determinare l'equazione della retta t tangente alla curva d'equazione

$$y=\text{sen } x$$

nel suo punto A d'ascissa π (fig. 1).

Notiamo subito che l'ordinata del punto A vale 0, perché il punto si trova sulla curva d'equazione $y=\text{sen } x$ e risulta

$$\text{sen } \pi=0;$$

il punto assegnato è dunque $A(\pi, 0)$.

Ora è facile determinare l'equazione della retta t, tenendo presente che:

1) ***t* passa per *A***, perciò deve far parte del fascio di rette per A, descritto dall'equazione

$$\frac{y-0}{x-\pi}=m$$

dove la lettera m indica la pendenza, che varia al variare della retta nel fascio (fig. 2).

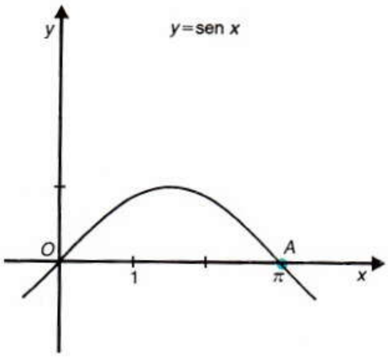


Fig. 1

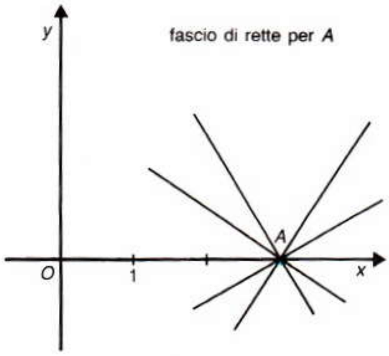


Fig. 2

2) **t ha la pendenza data dalla derivata della funzione**, calcolata nel punto $A(\pi, 0)$.

Ora, la derivata della funzione $y=\text{sen } x$ è $y'=\cos x$, perciò la pendenza cercata è data da

$$y'(\pi)=\cos \pi=-1.$$

Si conclude che l'equazione della tangente t è (fig. 3)

$$\frac{y-0}{x-\pi}=-1, \quad \text{ossia} \quad y=-x+\pi.$$

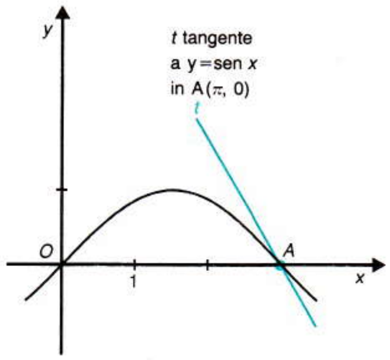


Fig. 3

Un'osservazione importante: nel problema trattato il punto $A(\pi, 0)$ è fisso, perciò la pendenza della retta t è un numero; questo numero si ottiene sostituendo ad x il valore π nell'espressione della funzione derivata $y'=\cos x$.

Il procedimento che abbiamo seguito ha carattere generale. Per scrivere l'equazione della retta t, tangente ad una curva d'equazione $y=f(x)$ nel suo punto d'ascissa a (fig. 4), si procede così:
- si determina l'ordinata del punto A, data da $f(a)$;
- si tiene presente che la retta t passa per il punto $A[a, f(a)]$ (fig. 5) e perciò fa parte del fascio di rette descritto dall'equazione

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=m;$$

- si calcola la pendenza della tangente t, data dalla derivata della funzione calcolata nel punto A; si fissa dunque (fig. 6)

$$m=f'(a).$$

Si ottiene allora che l'equazione della retta t è sempre data da:

$$\boldsymbol{\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)}$$

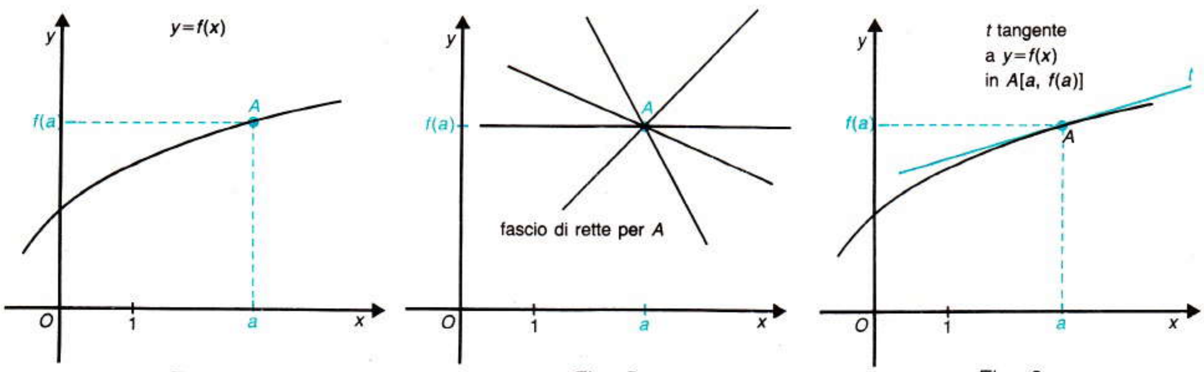


Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

Il problema ora discusso – ricercare la tangente ad una curva – sembra avere carattere strettamente geometrico; si tratta invece di un problema che trova varie applicazioni specialmente in fisica. Ecco due esempi.

1) Quando un corpo si muove percorrendo una traiettoria nota, la tangente alla traiettoria indica, in ogni istante, la direzione del vettore velocità (fig.7).
2) Quando si descrive un campo (gravitazionale, elettrico o magnetico) per mezzo delle linee di forza, la tangente ad una linea di forza indica, in ogni punto, la direzione del vettore campo (fig.8).

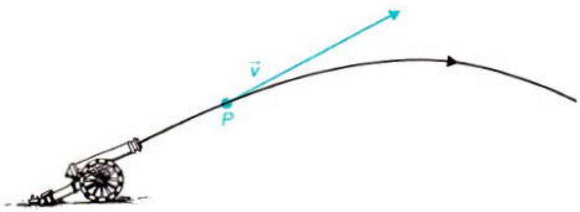


Fig. 7. Traiettoria parabolica di un proiettile. Il vettore $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria.

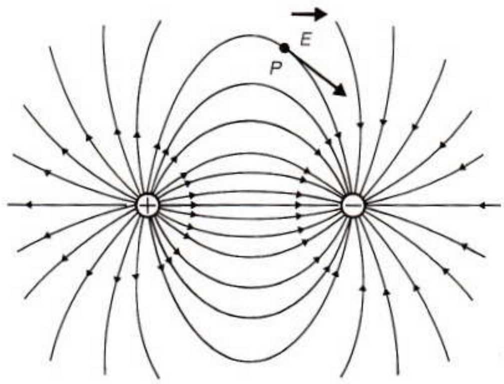


Fig. 8. I due dischetti indicano due cariche elettriche di segno opposto; le linee nere sono le linee di forza del campo; $\vec{E}$ è il vettore campo elettrico nel punto P.

2. Il differenziale

L'equazione della tangente ad una curva in un suo punto permette di affrontare un problema molto importante sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista applicativo: valutare in modo approssimato l'andamento di una curva nell'intorno di un dato punto.

È chiaro infatti che il modo più semplice di risolvere questo problema è quello di approssimare la curva con la sua tangente.

Vediamo come si può ragionare, basandosi sulla fig. 9.

Si considera una curva d'equazione $y=f(x)$, si fissa l'attenzione sul punto P d'ascissa a e si traccia la retta t tangente alla curva in P. È chiaro che il punto $P[a, f(a)]$ si trova contemporaneamente

– sulla curva d'equazione $y=f(x)$
– sulla retta t d'equazione $\dfrac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)$ ossia $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Proviamo ora a "muoverci" in un intorno di $P[a, f(a)]$.

Consideriamo un valore di x prossimo ad a, indichiamolo con $a+h$ ed esaminiamo due "percorsi possibili":

1) si percorre la curva, trovando il punto Q, che ha l'ordinata y_Q, data da:

$$y_Q=f(a+h);$$

in tal caso, quando si passa dal punto P al punto Q, l'ordinata subisce un incremento dato da

$$\overline{RQ}=f(a+h)-f(a)=\Delta f.$$

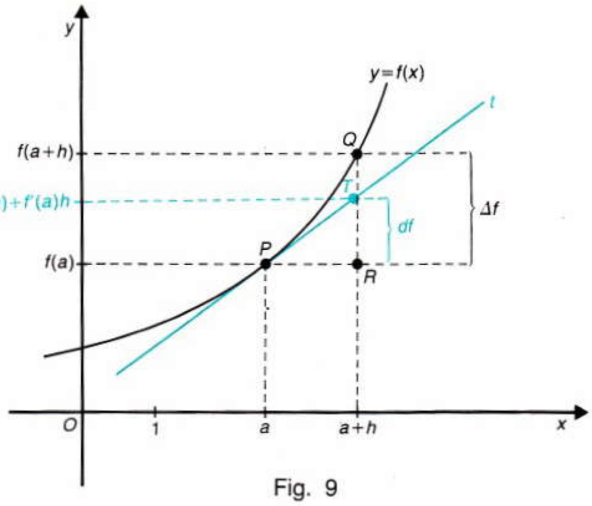


Fig. 9

2) si percorre la tangente t, trovando il punto T con l'ordinata y_T, data da:

$$y_T=f(a)+f'(a)h;$$

ora, quando si passa dal punto P al punto T, l'ordinata subisce un incremento dato da

$$\overline{RT}=f'(a)h.$$

È chiaro che, se h è molto piccolo, l'incremento

$$\overline{RQ}=\Delta f=f(a+h)-f(a)$$

può essere approssimato dal valore

$$\overline{RT}=f'(a)h,$$

più facile da calcolare, dato che è proporzionale ad h.

La quantità $f'(a)h$ prende il nome di **differenziale** e si indica con il simbolo ***df***; si scrive dunque:

$$\boldsymbol{f'(a)h=df}.$$

L'interesse applicativo del differenziale consiste nella possibilità di approssimare una funzione, anche molto complicata, con la sua tangente in un dato punto; in questo modo l'incremento della funzione nell'intorno del punto viene approssimato con il differenziale.

Questo tipo di approssimazione viene spesso chiamata **approssimazione lineare**, proprio perché consiste nell'approssimare una qualunque funzione con l'equazione di una retta.

Vediamo subito un esempio di applicazione di questo metodo: esaminiamo la curva d'equazione $y=x^3$ nell'intorno del suo punto $P(1, 1)$ (fig. 10).

Determiniamo prima di tutto l'equazione della tangente t; si ha:

$$y'=3x^2 \quad \text{e, quindi} \quad y'(1)=3.$$

La retta t ha dunque equazione

$$\frac{y-1}{x-1}=3, \quad \text{ossia} \quad y=3x-2.$$

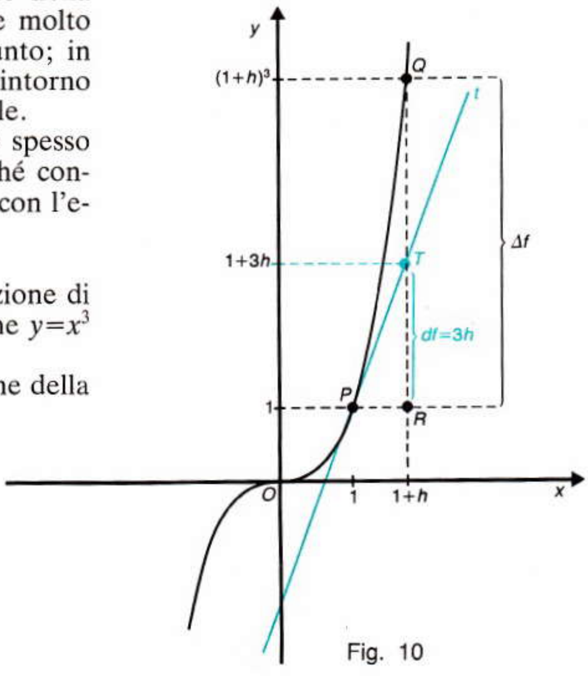


Fig. 10

Ora, assegnando ad x il valore $1+h$, si ottiene:

1) sulla curva il punto Q, che ha l'ordinata

$$y_Q=(1+h)^3.$$

Passando dunque dal punto P al punto Q, l'ordinata subisce un incremento dato da

$$\Delta f=(1+h)^3-1=3h+3h^2+h^3.$$

2) sulla tangente il punto T che ha l'ordinata

$$y_T=3(1+h)-2=3h+1.$$

Ora, passando dal punto P al punto T, l'ordinata subisce un incremento dato da

$$df=3h.$$

Si può dunque approssimare l'incremento

$$\Delta f=3h+3h^2+h^3$$

con il differenziale

$$df=3h.$$

È chiaro che con questa approssimazione si commette un errore dato da

$$\Delta f-df=3h^2+h^3;$$

ma questo errore, che varia al variare di h, diventa molto piccolo, se h assume valori molto vicini a 0.

Il risultato ottenuto ha una notevole importanza in molti problemi teorici ed applicativi; ecco un esempio di problema tecnico che si risolve agevolmente con il differenziale: una ditta deve produrre cubi con il volume di 1 cm^3 (può trattarsi di pesi campione o di cubetti di uranio da inserire nel nocciolo di un reattore nucleare, ...); deve quindi organizzare il controllo precisione dei cubi prodotti, sapendo che l'errore ammesso sul volume è, per esempio, di 0,001 cm^3.

Un modo semplice di organizzare il controllo è quello di misurare i lati del cubetto; ma, in tal caso, qual'è l'errore ammissibile sulla lunghezza del lato?

Si può ragionare così: il volume y è legato alla lunghezza x del lato dalla legge

$$y=x^3;$$

perciò, si avrebbe il volume $y=1$, se il lato fosse lungo $x=1$.

Se, invece, si ha un errore h misurando la lunghezza del lato, si trova un volume che indichiamo con y_e, dato da

$$y_e=(1+h)^3;$$

si commette quindi un errore nella misura del volume dato da

$$\Delta y=(1+h)^3-1.$$

Ora, per sapere l'errore h che si può commettere sul lato, si deve trovare h in modo che risulti

$$-0{,}001<\Delta y<0{,}001, \quad \text{ossia} \quad -0{,}001<(1+h)^3-1<0{,}001.$$

Il calcolo non è certo facile; diventa invece molto più agevole se si sostituisce l'incremento Δy con il differenziale dy.

Dal calcolo svolto prima risulta infatti:

$$dy=3h,$$

e si può dunque determinare h in modo che risulti

$$-0{,}001<dy<0{,}001, \quad \text{ossia} \quad -0{,}001<3h<0{,}001;$$

in questo modo, dividendo i membri per 3, si ottiene subito

$$-0{,}0003<h<0{,}0003.$$

3. Crescenza e decrescenza di una curva

In questo paragrafo cominciamo a vedere come si possono scoprire delle caratteristiche geometriche di una curva a partire da proprietà algebriche della funzione $y=f(x)$ che la descrive. Questa scoperta porta anche ad individuare un procedimento per tracciare il grafico di una curva a partire da opportuni calcoli svolti sulla funzione $y=f(x)$.

Cominciamo ad esaminare un'importante caratteristica di una curva: la crescenza o decrescenza.

Dire che un arco di curva è crescente equivale a dire che al crescere di x cresce anche y.

Questa proprietà geometrica può essere espressa in linguaggio algebrico quando l'arco crescente è il grafico di una funzione $y=f(x)$ in un dato intervallo (fig. 11): scelti comunque nell'intervallo due valori a e b, risulta

$$f(b)>f(a), \qquad \text{con } b>a,$$

ossia

$$f(b)-f(a)>0, \qquad \text{con } b-a>0.$$

In breve, dire che una funzione è crescente equivale a dire che le espressioni

$$f(b)-f(a) \quad \text{e} \quad (b-a)$$

hanno sempre segno concorde e, quindi, risulta sempre:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$$

Analogamente, dire che una curva d'equazione $y=f(x)$ è decrescente in un dato intervallo (fig. 12) equivale a dire che al crescere di x, decresce y e cioè, scelti comunque due valori a e b, si verifica sempre:

$$f(b)<f(a), \qquad \text{con } b>a$$

e perciò risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0.$$

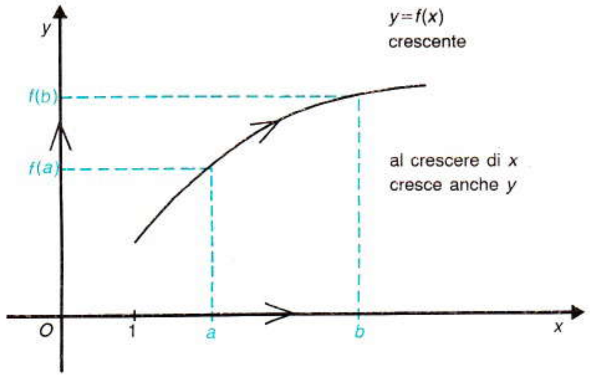


Fig. 11

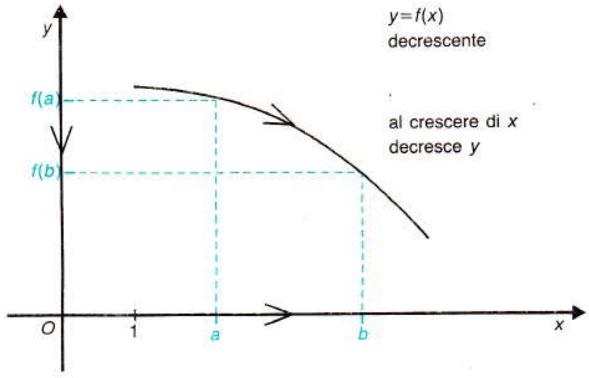


Fig. 12

In questo modo la caratteristica di essere crescente o decrescente in un intervallo è descritta in termini algebrici: basta scegliere nell'intervallo due qualunque valori a e b e studiare il segno dell'espressione

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Questo studio diventa particolarmente rapido se la funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo considerato; vale infatti il seguente **teorema**:

– **se risulta $f'(x)>0$, la funzione $y=f(x)$ è crescente;**
– **se risulta $f'(x)<0$, la funzione $y=f(x)$ è decrescente.**

È facile dimostrare questo teorema, basandosi sul teorema di Lagrange[1]. Il teorema di Lagrange garantisce infatti che, scelti comunque due numeri a e b, si può trovare nell'intervallo $[a, b]$ un valore c per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Se dunque la funzione $y'=f'(x)$ si mantiene positiva, si ha

$$f'(c)>0, \quad \text{quindi} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0 \quad \text{e perciò} \quad y=f(x) \text{ crescente.}$$

Analogamente, si dimostra che, se risulta $f'(x)<0$, la funzione è decrescente.

Due osservazioni importanti:
1) Il teorema ha un immediato significato geometrico, quando viene applicato alla funzione

$$y=mx+q,$$

che ha per grafico una retta (fig. 13). Si ha che la funzione è
– crescente, se risulta $f'(x)=m>0$ e cioè la retta ha pendenza positiva,
– decrescente, se si ha $f'(x)=m<0$ e cioè la retta ha pendenza negativa.

Così (fig. 14) è chiaro che una funzione $y=f(x)$ è
– crescente in un suo punto A di ascissa a, se in quel punto "si appoggia" ad una tangente t che ha pendenza $f'(a)>0$,
– decrescente nel suo punto A, se "si appoggia" ad una tangente t che ha pendenza $f'(a)<0$.

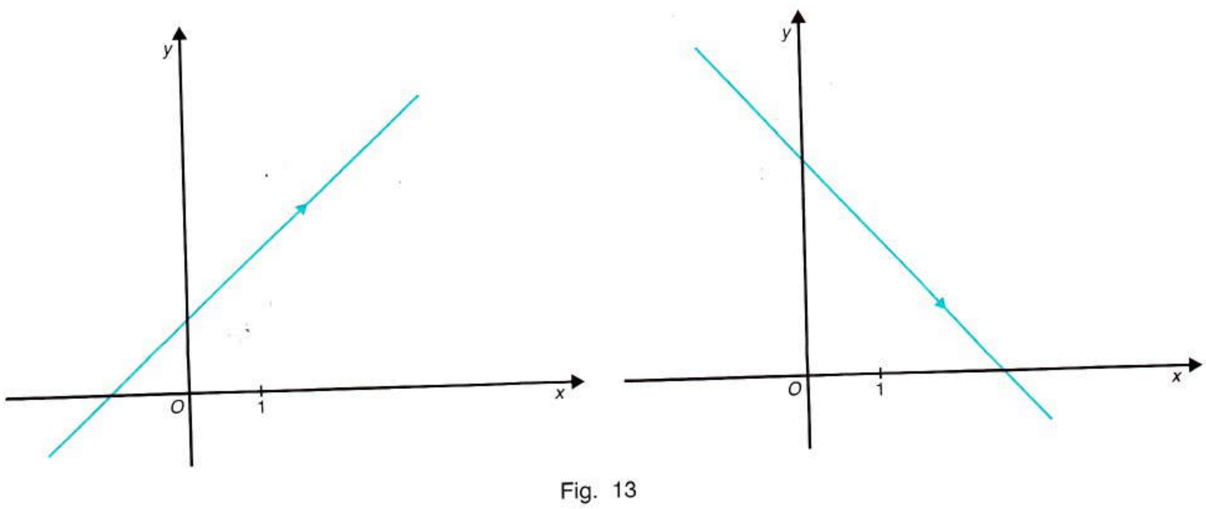


Fig. 13

1 Vedi cap. 4, paragrafo 8

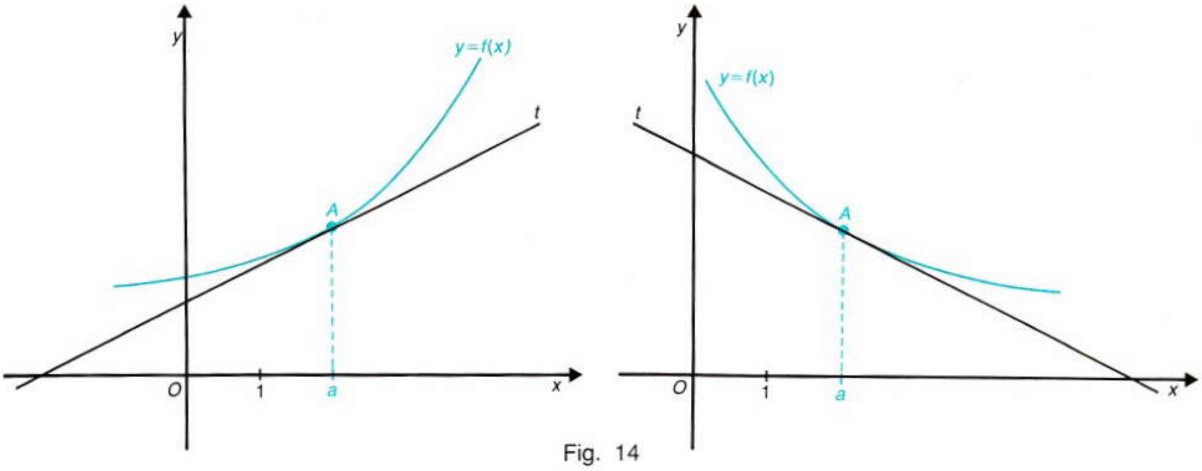


Fig. 14

2) Occorre qualche cautela nel considerare **il teorema inverso**: può essere infatti che una funzione sia crescente in un dato intervallo, senza che la derivata si mantenga positiva in tutto l'intervallo. Basta un esempio per rendersene conto.

Consideriamo la curva d'equazione

$$y=x^5,$$

rappresentata in fig. 15: si tratta di una curva sempre crescente.
Calcoliamo ora la derivata della funzione; si ottiene:

$$y'=5x^4.$$

Risulta perciò

$$y'>0 \text{ per qualunque } x\neq 0, \text{ ma } y'(0)=0.$$

Si ha dunque che il grafico della funzione è una curva crescente, ma la derivata $f'(x)$ non è sempre positiva: nel punto $O(0, 0)$ la derivata vale 0.

Analogamente, una funzione decrescente in un dato intervallo può anche non avere la derivata negativa in tutto l'intervallo (fig. 16).

Si osserva subito che in questi due esempi la derivata si annulla per un valore di x senza però cambiare segno.

$y=x^5$
sempre crescente
ma $y'(0)=0$

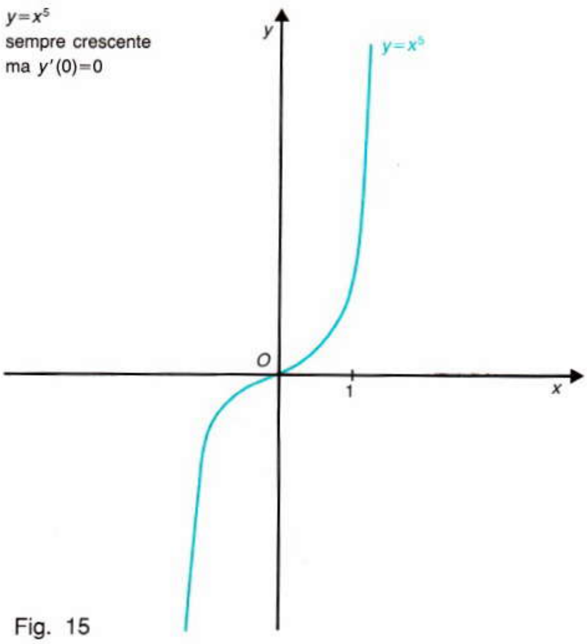


Fig. 15

$y=-x^3$
sempre decrescente
ma $y'(0)=0$

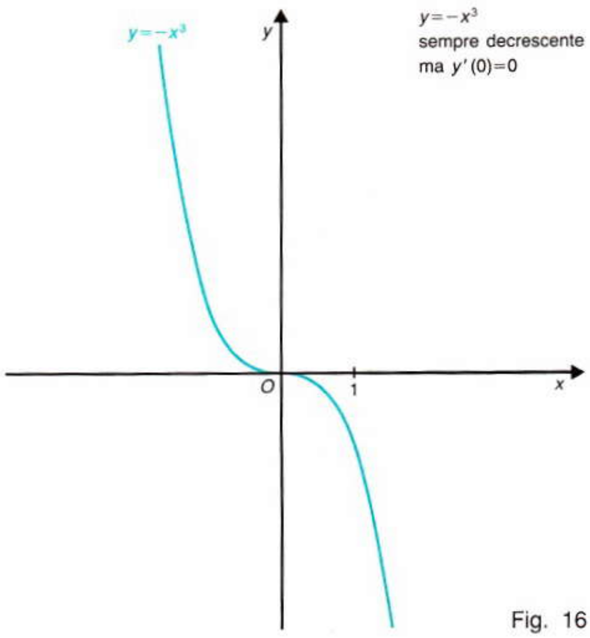


Fig. 16

Ecco un caso diverso: in fig. 17 è rappresentato il grafico della funzione

$$y=x^3-3x,$$

che abbiamo già esaminato nel cap. 1 paragrafo 6.
Per questa funzione risulta:

$$y'=3x^2-3;$$

si ha dunque (fig. 18)

$$y'>0 \quad \text{per} \quad x<-1, \quad y'=0 \quad \text{per} \quad x=-1, \quad y'<0 \quad \text{per} \quad -1<x<1.$$

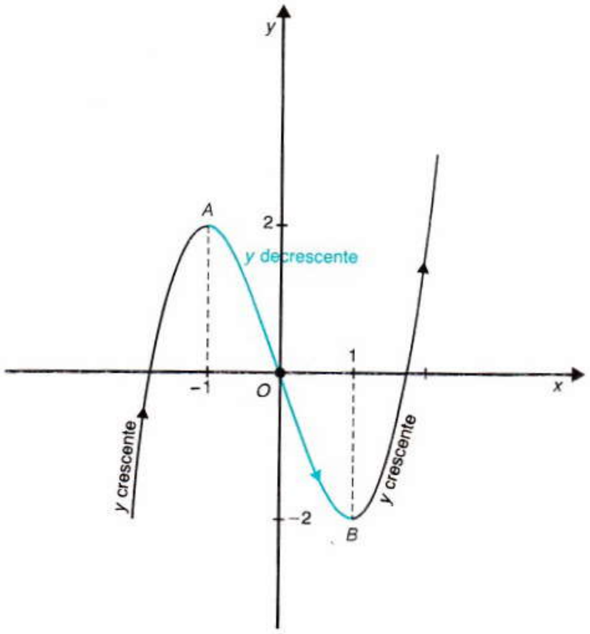


Fig. 17

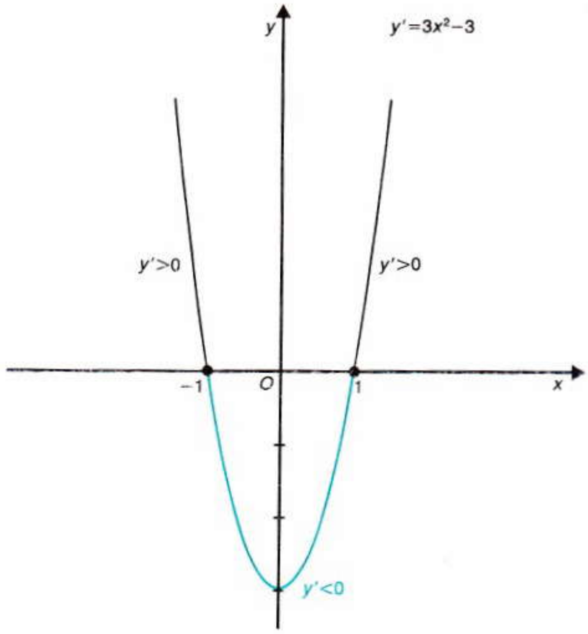


Fig. 18

È chiaro allora che la curva è crescente in corrispondenza a valori di x inferiori a -1, mentre è decrescente per valori di x maggiori di -1.

Nel punto $A(-1, 2)$ avviene dunque il passaggio da un andamento crescente ad uno decrescente; si ha un **punto di massimo relativo**.
Risulta inoltre

$$y'<0 \quad \text{per} \quad -1<x<1, \quad y'=0 \quad \text{per} \quad x=1, \quad y'>0 \quad \text{per} \quad x>1.$$

È chiaro allora che la curva è decrescente in corrispondenza a valori di x inferiori a 1, mentre è crescente per valori di x maggiori di 1.

In $B(1, -2)$ avviene il passaggio da un andamento decrescente ad uno crescente; si ha un **punto di minimo relativo**.

4. Punti di massimo e minimo relativo

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente, a partire da un esempio, possono essere facilmente generalizzate e permettono di cogliere il significato delle seguenti definizioni (fig. 19):

- un punto $A[a, f(a)]$ è un **punto di massimo relativo (o locale)**, se si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$f(x)<f(a);$$

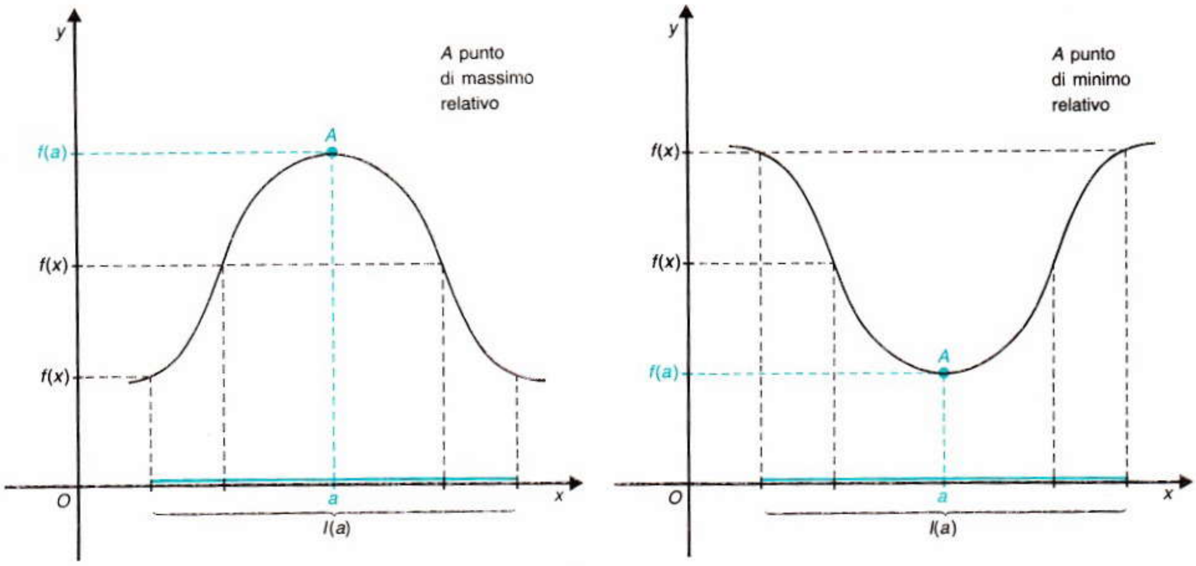


Fig. 19

– un punto $A[a, f(a)]$ è un **punto di minimo relativo (o locale)**, se si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$f(x)>f(a).$$

Si può dire, in breve, che un punto di massimo relativo è "il più alto fra i punti vicini", mentre un punto di minimo relativo è "il più basso fra i punti vicini"; in questo modo si capisce più facilmente il significato dell'aggettivo "relativo o locale".

Ora è facile dimostrare il teorema seguente:

se una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta nel punto A d'ascissa a un massimo o un minimo relativo, risulta $f'(a)=0$.

La dimostrazione è immediata: se, per esempio, $A[a, f(a)]$ è un punto di massimo relativo, risulta certamente

$$f(x)<f(a), \qquad \text{per } x \text{ variabile in un opportuno } I(a).$$

Ma allora, non può essere $f'(a)>0$, perché, in tal caso, la funzione sarebbe crescente nel punto A e, dunque risulterebbe

$$f(x)>f(a), \qquad \text{per } x>a;$$

e così non può essere $f'(a)<0$, perché la funzione sarebbe decrescente in A e, perciò, si avrebbe

$$f(x)>f(a), \qquad \text{per } x<a.$$

Deve allora risultare $f'(a)=0$.
Una dimostrazione analoga può essere ripetuta per un punto di minimo relativo.

Due importanti osservazioni:
1) Il teorema ha un immediato significato geometrico (fig. 20): la tangente t in un punto $A[a, f(a)]$ di massimo o minimo relativo ha sempre pendenza $f'(a)=0$ e dunque t è parallela all'asse delle x.

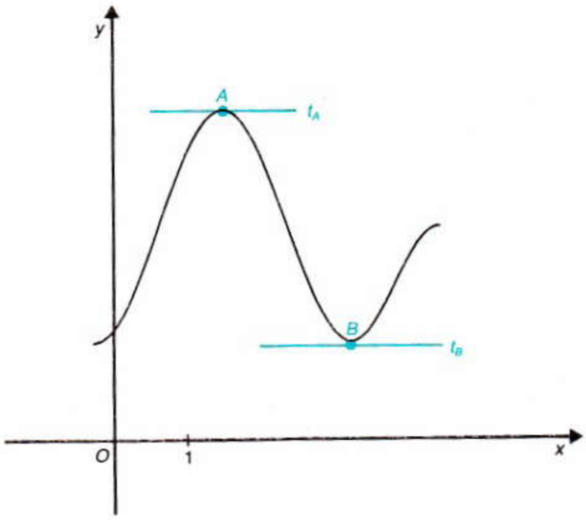


Fig. 20

2) **Non vale il teorema inverso**: non basta verificare che risulta $f'(a)=0$, per essere certi che il punto A d'ascissa a sia un punto di massimo o di minimo relativo. Le figg. 15 e 16 di pag. 153 mostrano appunto due esempi di curve che non presentano né massimo né minimo relativo in un punto in cui la derivata vale 0.

Per fissare meglio l'attenzione su questa osservazione, i punti con derivata nulla prendono il nome di **punti stazionari**. Questi punti possono essere anche individuati basandosi sulla seguente proprietà geometrica: la tangente alla curva in un punto stazionario è parallela all'asse delle x.

Risulta perciò chiaro che un punto di massimo o minimo relativo è certamente un punto stazionario, mentre un punto stazionario non è sempre un punto di massimo o minimo relativo (fig. 21).

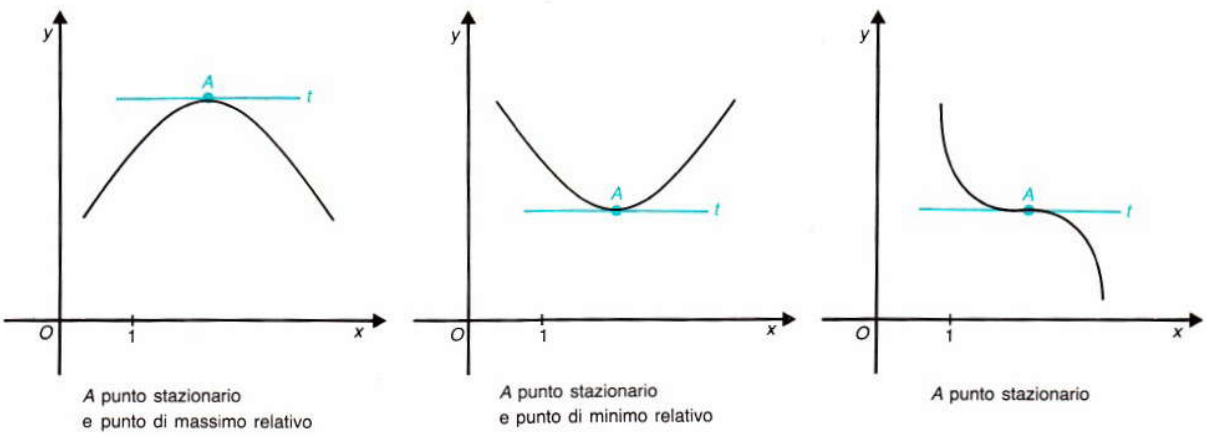


Fig. 21

È facile capire come, fra i punti stazionari, si può individuare un punto di massimo o minimo relativo: basta tener presente che in un punto di massimo o minimo la curva cambia andamento.

Si deve dunque verificare una delle seguenti situazioni:

1) La curva ha, nell'intorno del punto A, un andamento come quello di fig. 22: cresce a sinistra di a e decresce a destra di a; perciò **A è un punto di massimo relativo, se risulta**

$$y'(a)=0 \quad \text{con} \quad y'>0 \quad \text{per} \quad a-\delta<x<a \quad \text{e} \quad y'<0 \quad \text{per} \quad a<x<a+\delta.$$

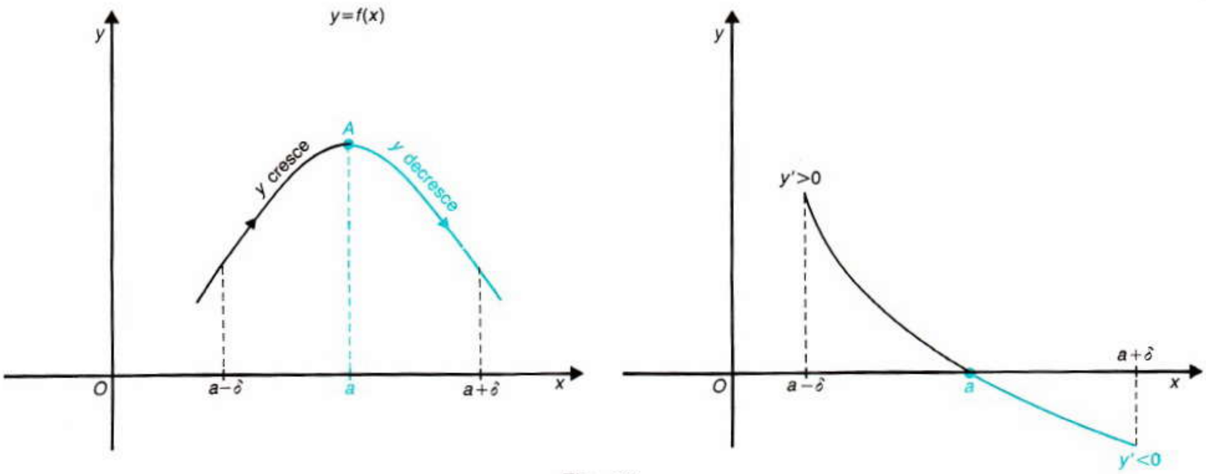


Fig. 22

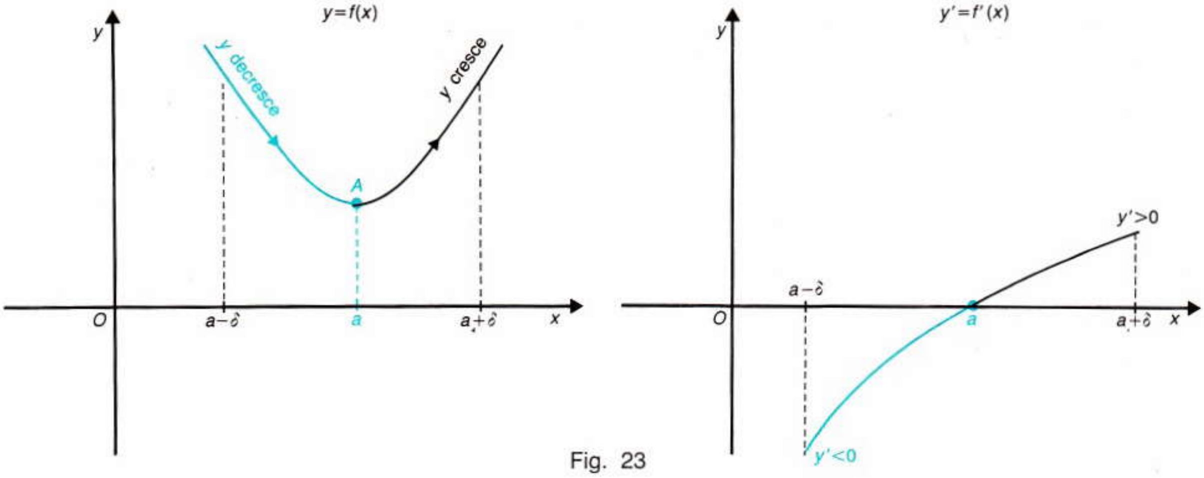


Fig. 23

2) La curva ha, nell'intorno del punto A un andamento come quello di fig. 23: decresce a sinistra di a e cresce a destra di a; perciò **A è un punto di minimo relativo se risulta**

$$y'(a)=0 \quad \text{con} \quad y'<0 \quad \text{per} \quad a-\delta<x<a \quad \text{e} \quad y'>0 \quad \text{per} \quad a<x<a+\delta.$$

5. Concavità e convessità di una curva in un punto

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come una caratteristica geometrica di una curva – essere crescente o decrescente – sia legata ad una proprietà algebrica della funzione $y=f(x)$ che descrive la curva: si possono determinare gli intervalli in cui una curva è crescente o decrescente, studiando il segno della derivata $y'=f'(x)$.

In questo paragrafo esaminiamo un'altra caratteristica geometrica di una curva: rivolgere la concavità verso l'alto o verso il basso.

Ecco un modo semplice per descrivere una curva che rivolge la concavità verso l'alto in un suo punto A (fig. 23): in un intorno del punto la curva si trova al disopra della tangente t.

Questo vuol dire che, se la curva è descritta da una funzione $y=f(x)$, si verifica la condizione illustrata in fig. 24: quando x varia in un intorno $I(a)$, risulta

$$y_P>y_T,$$

dove

$y_P=f(x)$ è l'ordinata del punto P,
$y_T=f(a)+f'(a)(x-a)$ è l'ordinata del punto T.

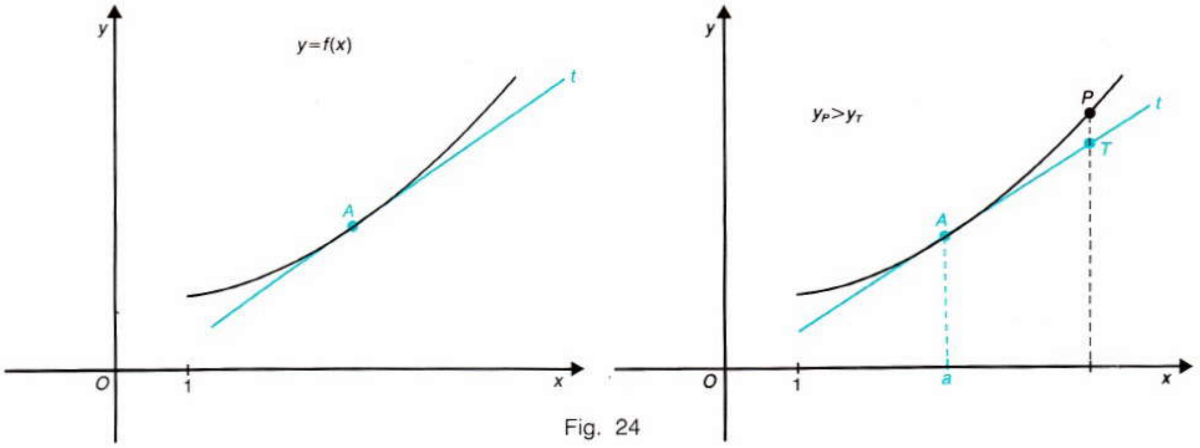


Fig. 24

In conclusione, dire che una curva rivolge la concavità verso l'alto significa dire che risulta

$$y_P - y_T > 0, \quad \text{ossia} \quad f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0.$$

Analogamente (fig. 25), una curva rivolge la concavità verso il basso in un suo punto A se si trova al disotto della tangente t in un intorno del punto A. Questo vuol dire (fig. 26) che, per x variabile in un intorno $I(a)$, risulta

$$y_P < y_T, \quad \text{cioè} \quad y_P - y_T < 0$$

e, perciò

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0.$$

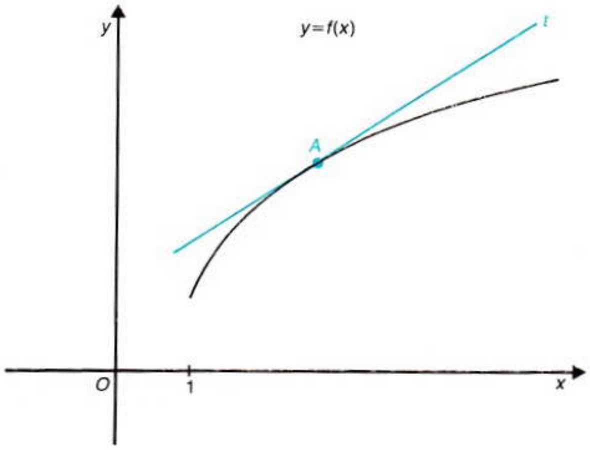


Fig. 25

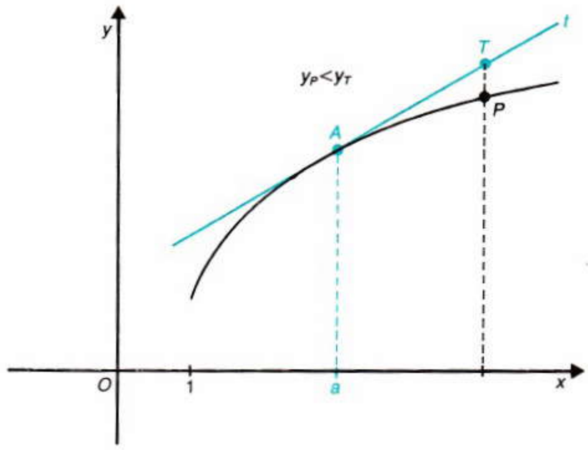


Fig. 26

Si comincia così ad intuire come si possa tradurre in termini algebrici anche la caratteristica di rivolgere la concavità verso l'alto (o verso il basso): basta studiare il segno dell'espressione

$$y_P - y_T = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]. \tag{1}$$

Si nota però che l'espressione è legata in modo piuttosto complicato alla funzione $y=f(x)$ e sembra quindi poco agevole da esaminare.

Si riesce tuttavia a studiare facilmente il segno dell'espressione (1), ripetendo due volte il procedimento di derivazione.

Si procede così: a partire dalla funzione $y=f(x)$, si calcola prima la derivata

$$y' = f'(x),$$

e poi la derivata della derivata e cioè **la derivata seconda** che si indica con il simbolo

$$y'' = f''(x).$$

Basandosi infatti sulla derivata seconda, si dimostra il seguente **teorema**:

- **se risulta $f''(x)>0$, la curva d'equazione $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto;**
- **se risulta $f''(x)<0$, la curva d'equazione $y=f(x)$ rivolge la concavità verso il basso.**

Per dimostrare questo teorema, si comincia con lo scrivere l'espressione (1) nella forma seguente:

$$[f(x) - f(a)] - f'(a)(x-a); \tag{2}$$

ci si vale poi del teorema di Lagrange.

Questo teorema garantisce infatti che si può trovare nell'intervallo $[a, x]$ un valore c per cui risulta

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a);$$

quindi si può modificare l'espressione (2) scrivendola nella forma

$$f'(c)(x-a)-f'(a)(x-a),$$

ossia

$$[f'(c)-f'(a)](x-a). \qquad (3)$$

Ora, molto spesso accade, anche nelle applicazioni, che la funzione $y'=f'(x)$ abbia a sua volta una derivata, che si indica con $y''=f''(x)$; in tal caso si può applicare il teorema di Lagrange una seconda volta, trovando nell'intervallo $[a, c]$ un valore d per cui risulta

$$f'(c)-f'(a)=f''(d)(c-a);$$

così si arriva a scrivere

$$y_P-y_T=f''(d)(c-a)(x-a). \qquad (4)$$

In quest'ultima espressione si nota che si ha sempre

$$(x-a)(c-a)>0,$$

dato che $(x-a)$ e $(c-a)$ sono due quantità di segno concorde (fig. 27); perciò l'espressione y_P-y_T ha lo stesso segno di $f''(d)$.

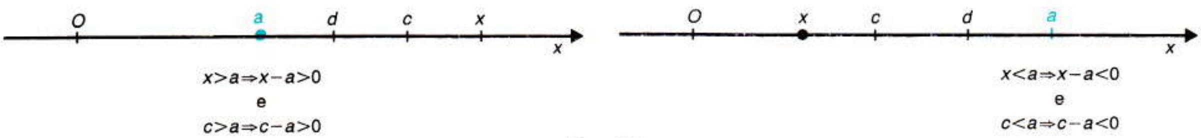


Fig. 27

Se dunque la funzione $y''=f''(x)$ si mantiene positiva, si ha:

$$f''(d)>0, \quad \text{quindi} \quad y_P-y_T>0$$

e perciò $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto.
In modo del tutto analogo, si dimostra che, se risulta $f''(x)<0$, la curva rivolge la concavità verso il basso.

È facile ora capire che, anche in questo caso, occorre qualche cautela nel considerare il **teorema inverso**: può accadere infatti che una curva rivolga la concavità verso il basso in un dato intervallo, senza avere la derivata seconda negativa in tutto l'intervallo. Basta un esempio per rendersene conto: la curva di fig. 28, che rivolge sempre la concavità verso l'alto. Si tratta del grafico della funzione

$$y=(x-1)^6,$$

che ha come derivate

$$y'=6(x-1)^5 \quad \text{e} \quad y''=30(x-1)^4;$$

si ha perciò:

$$y''>0 \text{ per qualunque } x\neq 1,$$

ma

$$y''(1)=0.$$

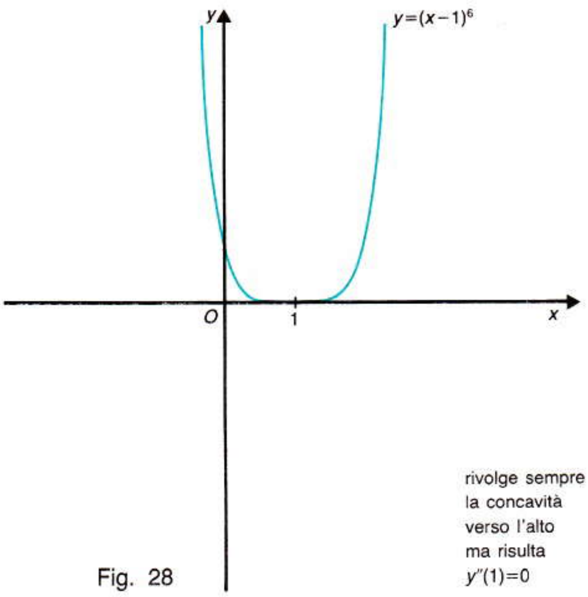


Fig. 28

Analogamente, una curva che rivolge la concavità verso il basso in un intervallo, può avere la derivata seconda che vale 0 in qualche punto dell'intervallo (fig. 29).

Si osserva subito che in questi due esempi la derivata seconda si annulla in un punto A senza però cambiare segno; si capisce dunque che non cambia il verso della concavità in un intorno del punto A.

Ecco un caso diverso (fig. 30): si tratta di nuovo del grafico della funzione

$$y=x^3-3x,$$

di cui ci siamo già occupati nel paragrafo precedente.

Per questa funzione risulta

$$y'=3x^2-3 \quad \text{e quindi} \quad y''=6x;$$

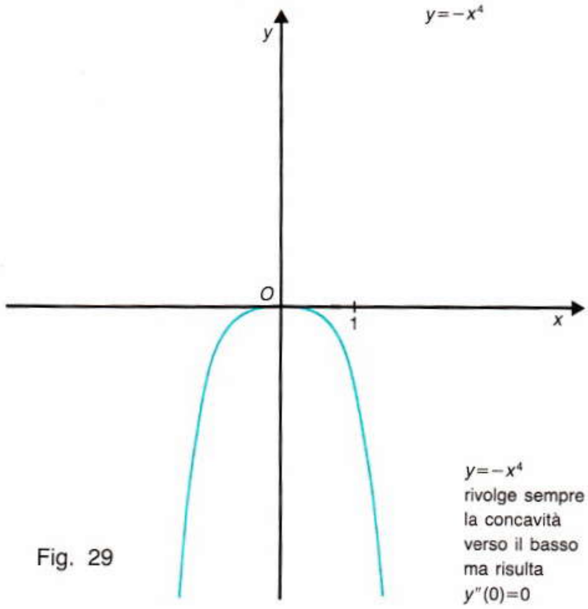


Fig. 29

si ha dunque (fig. 31):

$$y''<0 \quad \text{per} \quad x<0, \quad y''=0 \quad \text{per} \quad x=0, \quad y''>0 \quad \text{per} \quad x>0.$$

È chiaro che la curva rivolge la concavità verso il basso in corrispondenza a valori negativi di x, mentre rivolge la concavità verso l'alto in corrispondenza a valori positivi di x.

La curva cambia in O il verso della concavità; si ha in O **un punto di flesso o un punto inflessionale**.

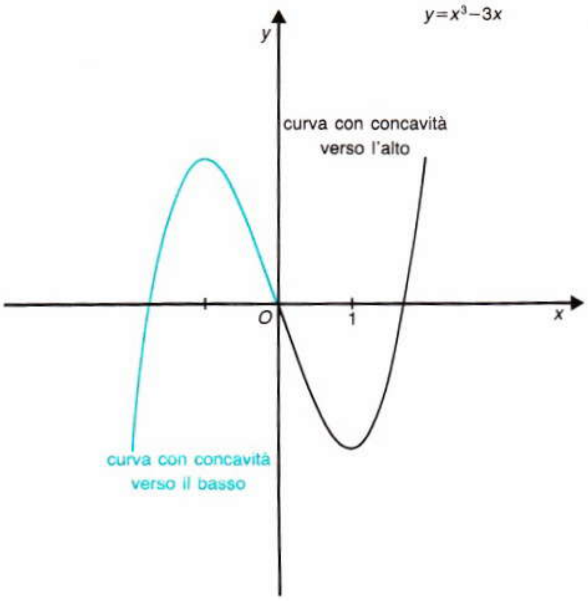


Fig. 30

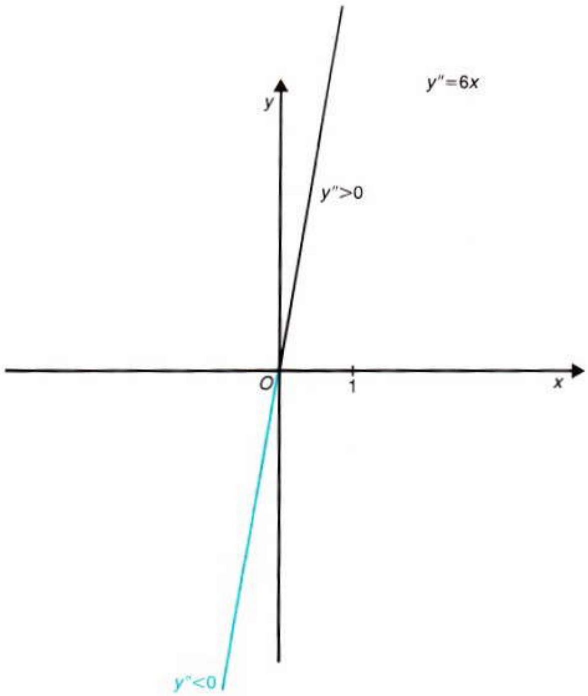


Fig. 31

6. Punti di flesso

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente a partire da un esempio numerico possono essere facilmente generalizzate: una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta un flesso nel punto A d'ascissa a, se la curva attraversa in A la sua tangente, ossia se cambia il verso della concavità nel punto A (fig. 32).

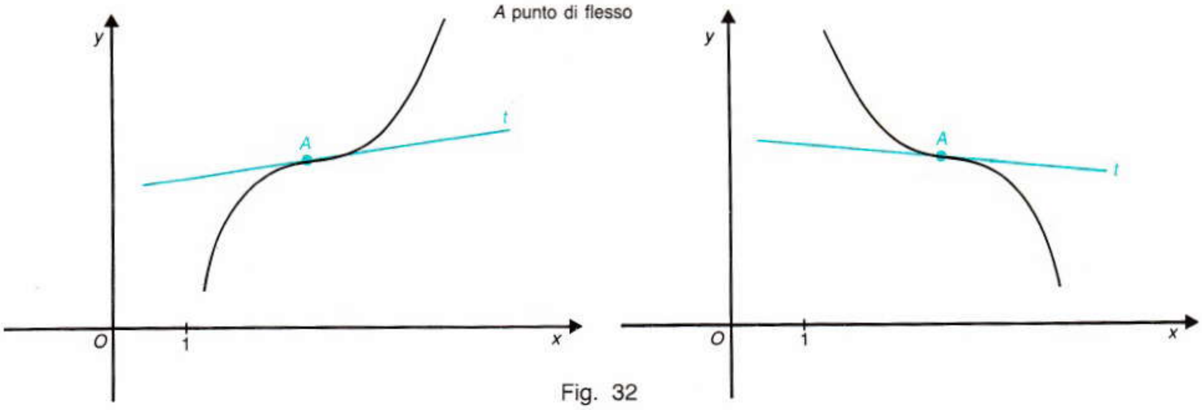


Fig. 32

Ora è facile dimostrare il seguente **teorema**:

se la curva d'equazione $y=f(x)$ presenta un flesso nel punto A d'ascissa a, risulta $f''(a)=0$.

La dimostrazione è immediata: non può risultare $f''(a)>0$, perché in tal caso la curva si manterrebbe al disopra della tangente in un intorno di A; analogamente non può essere $f''(a)<0$. Deve allora risultare $f''(a)=0$.

È importante notare che **non vale il teorema inverso**: non basta verificare che risulta $f''(a)=0$ per essere certi che il punto A d'ascissa a sia un flesso; le figg. 28 e 29 di pagg. 159-160 mostrano appunto due esempi di curve che non presentano un flesso in un punto in cui la derivata seconda vale 0.

Tuttavia è facile capire come si può individuare algebricamente l'ascissa a di un punto di flesso, tenendo presente che in un punto di flesso cambia il verso della concavità; si ha dunque che **A è un punto di flesso se si verifica una delle seguenti condizioni**:

1) La curva ha, nell'intorno del punto A, un andamento come quello di fig. 33: rivolge la concavità verso l'alto a sinistra di A, mentre rivolge la concavità verso il basso a destra di A; cioè risulta:

$$\mathbf{y''(a)=0 \quad con \quad y''>0 \quad per \quad a-\delta<x<a \quad e \quad y''<0 \quad per \quad a<x<a+\delta;}$$

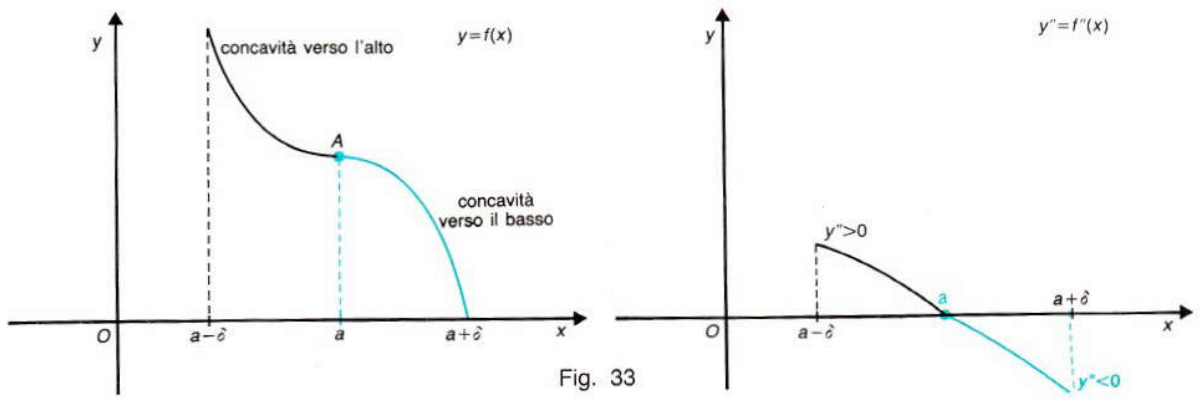


Fig. 33

2) La curva ha, nell'intorno del punto A un andamento come quello di fig. 34: rivolge la concavità verso il basso a sinistra di A, mentre rivolge la concavità verso l'alto a destra di A; cioè risulta:

$$y''(a)=0 \quad \textbf{con} \quad y''<0 \quad \textbf{per} \quad a-\delta<x<a \quad \textbf{e} \quad y''>0 \quad \textbf{per} \quad a<x<a+\delta.$$

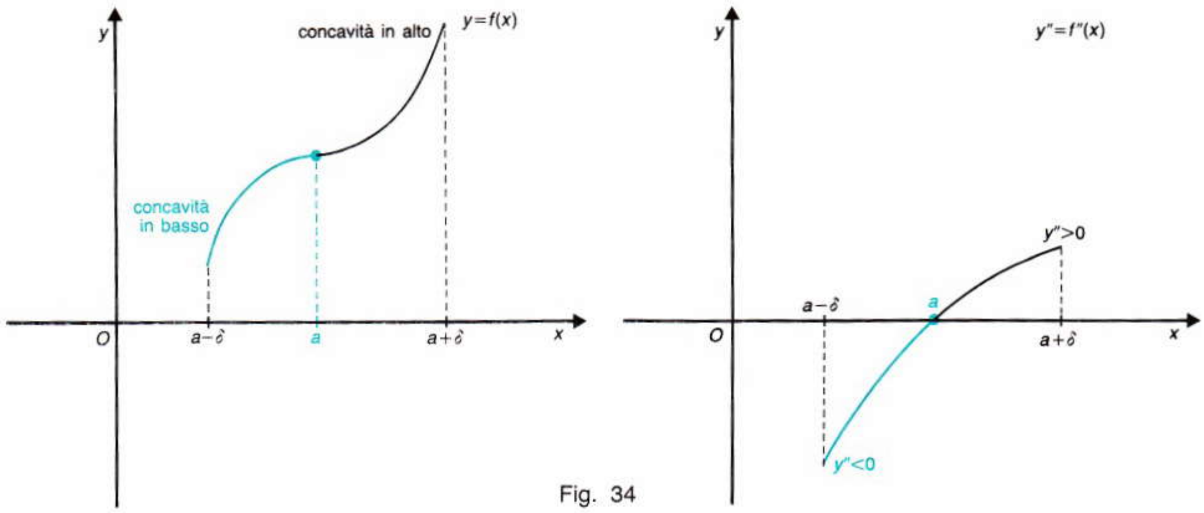


Fig. 34

Le figg. 33 e 34 conducono anche ad intuire un'interessante proprietà geometrica della tangente ad una curva in un punto A di flesso: una secante s, che congiunge A con un punto P prossimo ad A (fig. 35), interseca la curva non solo in A e P, ma anche in un terzo punto (Q), anch'esso vicino ad A.

Si capisce allora che, quando la secante s ruota intorno ad A, assumendo posizioni vicine a quella della tangente t, i punti P e Q si avvicinano sempre di più ad A (fig. 36); al limite la tangente t interseca la curva in tre punti coincidenti nel punto A.

Si intuisce così la seguente proprietà, caratteristica della tangente t ad una curva nel punto A di flesso (chiamata anche **tangente inflessionale**):

la tangente inflessionale tocca la curva in tre punti coincidenti nel punto di flesso.

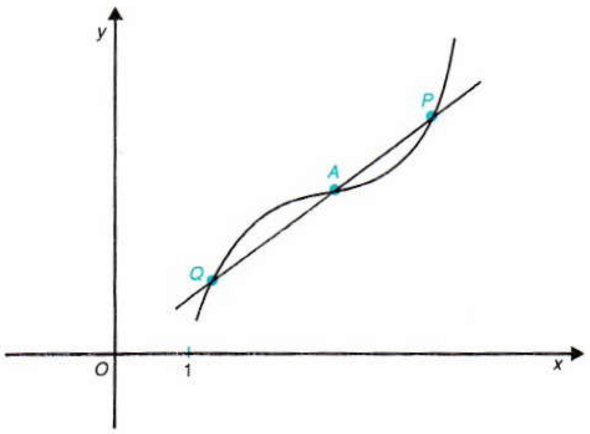


Fig. 35

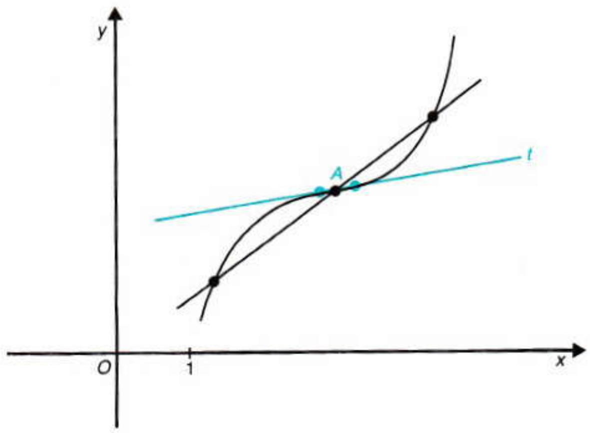


Fig. 36

7. Ricerca dei punti di massimo o minimo relativo con le derivate successive

Abbiamo visto, in questi ultimi due paragrafi, che si può conoscere l'andamento di una curva, grafico di una funzione

$$y=f(x),$$

studiando il segno delle sue derivate

$$y'=f'(x) \text{ e } y''=f''(x).$$

Si sono inoltre individuati i punti stazionari. Si è detto che un punto A d'ascissa a è stazionario, se risulta

$$f'(a)=0;$$

dal punto di vista geometrico, questo significa che la retta t, tangente alla curva in A, è parallela all'asse delle x. Così, fra i punti stazionari si possono trovare punti di massimo relativo (fig. 37), punti di minimo relativo (fig. 38) e anche flessi (fig. 39).

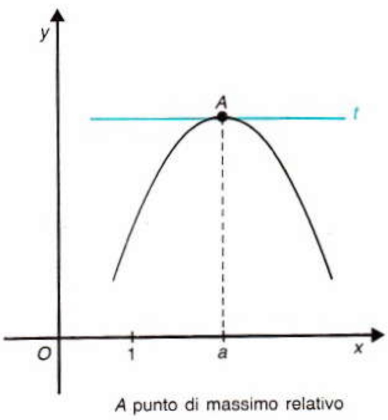


Fig. 37

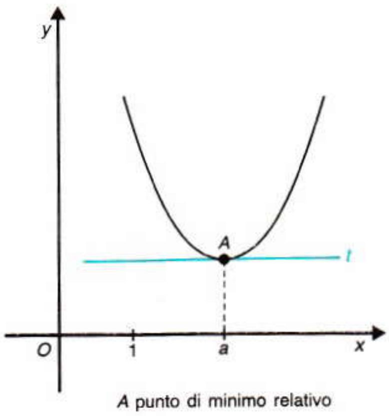


Fig. 38

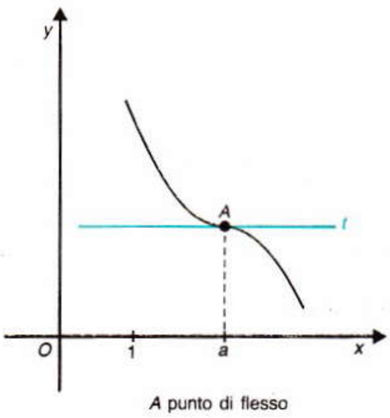


Fig. 39

Ora, sopratutto in vista delle applicazioni (vedi paragrafi 8 e 9), è importante individuare, fra i punti stazionari, i punti di massimo o minimo relativo. Nel paragrafo 3 si è indicato un procedimento sempre valido: studiare il segno della derivata $y'=f'(x)$ nell'intorno del punto stazionario; tuttavia questo procedimento può condurre in qualche caso a risolvere disequazioni molto complicate.

Allora, per evitare di studiare il segno della derivata $y'=f'(x)$, si può ragionare così: un punto A d'ascissa a è di massimo relativo, se si verificano le seguenti condizioni (fig. 37):

1) il punto A è stazionario, cioè risulta $f'(a)=0$,
2) la curva rivolge in A la concavità verso il basso, cioè risulta $f''(a)<0$.

E così, un punto A d'ascissa a è di minimo relativo, se si verificano le seguenti condizioni (fig. 38):

1) il punto A è stazionario, cioè risulta $f'(a)=0$,
2) la curva rivolge in A la concavità verso l'alto, cioè risulta $f''(a)>0$.

In conclusione,

se risulta $\begin{cases} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{cases}$ **allora** $A[a, f(a)]$ **è un punto di massimo relativo;**

se risulta $\begin{cases} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{cases}$ **allora** $A[a, f(a)]$ **è un punto di minimo relativo.**

Vediamo subito un'applicazione di questo procedimento. Consideriamo la funzione

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3$$

e cerchiamo di individuarne i punti di massimo o minimo relativo.
In base alle considerazioni svolte prima, calcoliamo la derivata della funzione assegnata; si ha:

$$y'=x^4-3x^3+2x^2, \qquad \text{ossia} \qquad y'=x^2(x^2-3x+2).$$

Risulta dunque

$$y'=0 \quad \text{per } x^2(x^2-3x+2)=0 \begin{cases} x^2=0, \text{ da cui } x=0. \\ x^2-3x+2=0, \text{ da cui } x=1 \text{ e } x=2. \end{cases}$$

La curva ha dunque tre punti stazionari:

$$A(1;\ 3{,}1),\ B(2;\ 2{,}7),\ O(0{,}0).$$

Per scoprire se questi punti sono punti di massimo o minimo relativo, calcoliamo la derivata seconda; si ha:

$$y''=4x^3-9x^2+4x.$$

Risulta dunque:

$$y''(1)=4-9+4=-1$$

e, dato che si è ottenuto

$$y''(1)<0,$$

il punto A è un massimo relativo. Si ha poi

$$y''(2)=4\cdot 2^3-9\cdot 2^2+4\cdot 2=4$$

e, dato che risulta

$$y''(2)>0,$$

il punto B è un minimo relativo. Si ottiene infine

$$y''(0)=0.$$

Ci si chiede: come si può classificare il punto $O(0, 0)$?

Per orientarci, fissiamo l'attenzione sull'andamento di alcune funzioni, di cui è già noto il grafico.

1) $y=x^4$

Per questa funzione, rappresentata in fig. 40, si ha:

$$f'(x)=4x^3 \quad \text{e} \quad f''(x)=12x^2;$$

perciò, relativamente al punto $O(0, 0)$, si ha che:

$f'(0)=0$, $f''(0)=0$ e il punto O è un punto di minimo relativo.

2) $y=-x^4$

Per questa funzione, rappresentata in fig. 41, si ha:

$$f'(x)=-4x^3 \quad \text{e} \quad f''(x)=-12x^2;$$

perciò, relativamente al punto $O(0, 0)$, risulta:

$f'(0)=0$, $f''(0)=0$ e il punto O è un punto di massimo relativo.

3) $y=x^3$

Per quest'ultima funzione (fig. 42), risulta:

$$f'(x)=3x^2 \quad \text{e} \quad f''(x)=6x;$$

perciò, relativamente al punto $O(0, 0)$, risulta:

$f'(0)=0$ e $f''(0)=0$ e il punto O è un flesso.

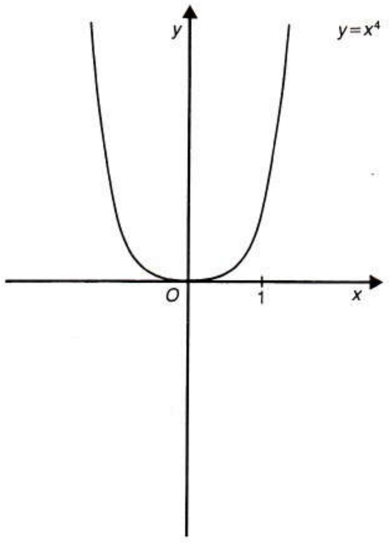


Fig. 40

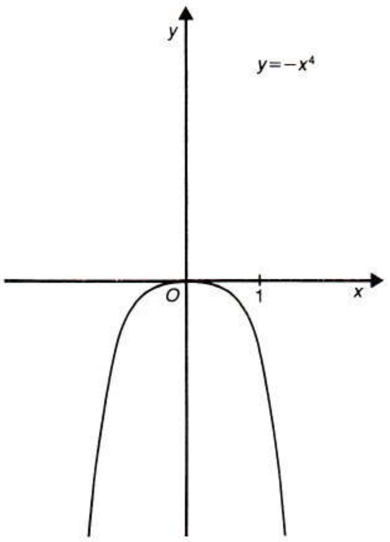


Fig. 41

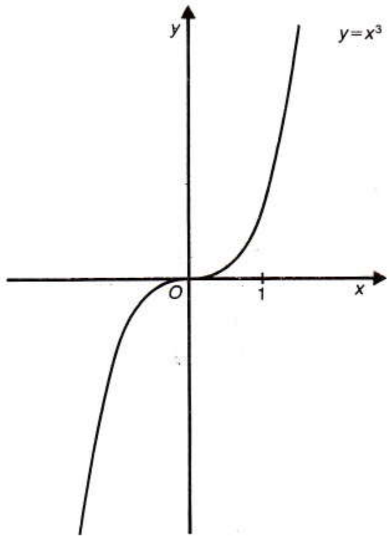


Fig. 42

Ci si rende dunque conto che, se in punto d'ascissa a si ha contemporaneamente

$$f'(a)=0 \quad \text{e} \quad f''(a)=0,$$

il punto può essere sia di massimo che di minimo relativo, ma anche di flesso. Perciò, per riconoscere di quale caso si tratta, occorre necessariamente studiare il segno di $f'(x)$ e $f''(x)$ nell'intorno del punto.

Tuttavia questo studio, che qualche volta risulta piuttosto laborioso, può essere sostituito dall'esame delle derivate successive della funzione. Vediamo meglio di che cosa si tratta, cominciando a lavorare sui tre esempi numerici esaminati prima.

Continuiamo a derivare ciascuna di quelle funzioni, fino ad incontrare una derivata diversa da 0 nel punto O; si ha:

$\boldsymbol{y=x^3}$

O(0, 0)
flesso

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= 6x \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= 6 \Rightarrow \boldsymbol{f'''(0)>0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y=x^4}$

O(0, 0)
minimo relativo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= 24x \Rightarrow f'''(0) = 0, \\ f^{IV}(x) &= 24 \Rightarrow \boldsymbol{f^{IV}(0)>0}, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y=-x^4}$

O(0, 0)
massimo relativo

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f'(x) &= -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -24x \Rightarrow f'''(0) = 0, \\ f^{IV}(x) &= -24 \Rightarrow \boldsymbol{f^{IV}(0)<0}. \end{aligned}$$

I risultati ottenuti suggeriscono delle osservazioni:
- quando il punto O è di minimo relativo, la prima derivata diversa da 0 è la derivata quarta e risulta $f^{IV}(0)>0$;
- quando il punto $O(0, 0)$ è di massimo relativo, la prima derivata diversa da 0 è ancora la derivata quarta, ma risulta $f^{IV}(0)<0$.

È come se si "decidesse il verso della concavità" mediante il segno di $f^{IV}(0)$, cioè a partire da una derivata di ordine pari come la $f''(x)$.

E così, quando il punto $O(0, 0)$ è di flesso, la prima derivata diversa da 0 è la derivata terza e risulta $f'''(0)>0$. Ora è come se "si leggesse la crescenza o decrescenza della curva" mediante il segno di $f'''(0)$, cioè a partire da una derivata di ordine dispari, come $f'(x)$.

Queste considerazioni di carattere geometrico-intuitivo possono essere confermate da uno studio più rigoroso effettuato negli esercizi 209-214 e conducono ad un risultato di carattere più generale:

Quando per una funzione $y=f(x)$, definita in un intorno I del valore a e derivabile n volte in $I(a)$, risulta

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \dots,\ f^{(n-1)}(a)=0 \text{ e } f^{(n)}(a)\neq 0,$$

si ha che:

– se n è dispari, il punto $A[a, f(a)]$ non è né di massimo, né di minimo;

– se n è pari $\left\langle \begin{array}{l} \textbf{se } f^{(n)}(a)>0\textbf{, il punto } A[a, f(a)] \textbf{ è di minimo relativo} \\ \textbf{se } f^{(n)}(a)<0\textbf{, il punto } A[a, f(a)] \textbf{ è di massimo relativo.} \end{array}\right.$

8. Gli asintoti di una curva

In questo paragrafo completiamo lo studio dell'andamento di una curva, esaminando una caratteristica già osservata nel cap. 2 paragrafi 2 e 5: un ramo della curva si avvicina indefinitamente ad una retta che prende il nome di **asintoto**.

Un esempio di curva che presenta questa caratteristica è dato dal grafico della seguente funzione

$$y=x+2+\frac{1}{x^2}.$$

Per tracciare la curva, ci si può basare sulla somma grafica[1] (fig. 43), rappresentando sullo stesso riferimento cartesiano
- la retta d'equazione $y_1=x+2$ (in nero),
- la curva d'equazione $y_2=\frac{1}{x^2}$ (in grigio).

In corrispondenza ad un valore di x si indica il punto che ha l'ordinata y, data dalla somma delle ordinate y_1 e y_2 "lette" su ciascuna curva; ripetendo questo procedimento si ottengono tanti punti (in colore). Raccordando questi punti, si ottiene la curva richiesta (fig. 44).

[1] Vedi anche cap. 1, paragrafo 6.

Il procedimento grafico suggerisce due osservazioni:

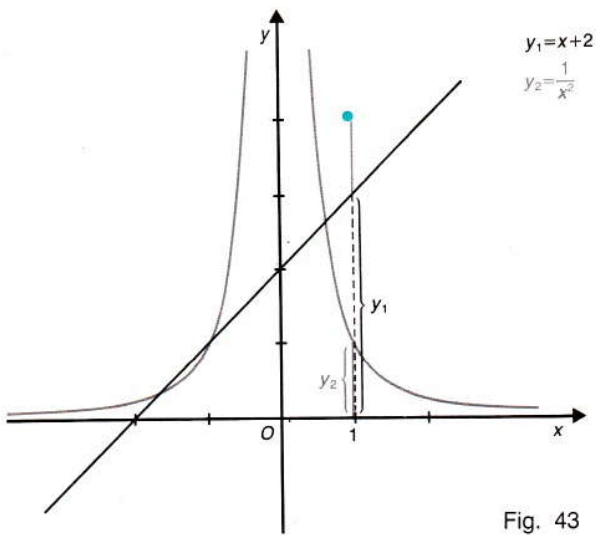


Fig. 43

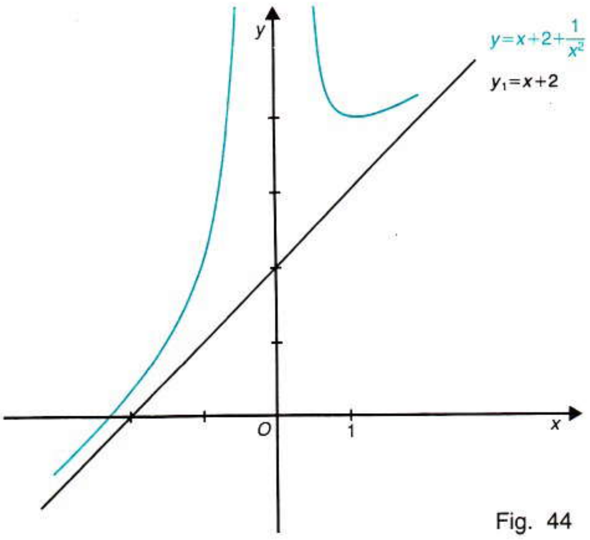


Fig. 44

1) Il valore 0 è escluso dal campo di esistenza della funzione; inoltre, quando x assume valori prossimi a 0, l'ordinata

$$y_2=\frac{1}{x^2}$$

diventa sempre più grande, mentre l'ordinata

$$y_1=x+2$$

assume valori sempre più vicini a 2.
In corrispondenza (fig. 45), l'ordinata

$$y=y_1+y_2$$

diventa sempre più grande, mentre la curva si avvicina sempre di più all'asse delle y.
In questo caso si dice che la curva ha **un asintoto verticale** d'equazione

$$x=0.$$

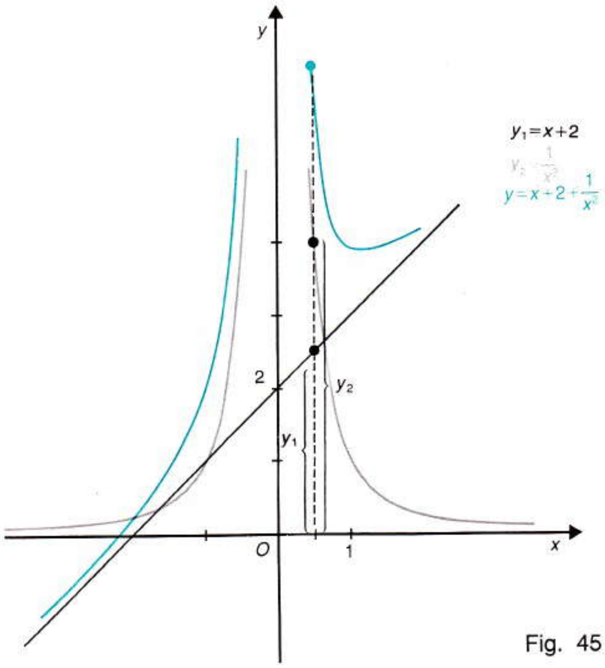


Fig. 45

2) Quando x assume valori sempre più grandi in modulo, l'ordinata

$$y_2=\frac{1}{x^2},$$

diventa sempre più piccola, perciò, calcolando l'ordinata di un punto P della curva, data da

$$y=y_1+y_2,$$

"si aggiunge sempre di meno" all'ordinata y_1 di un punto Q che percorre la retta (fig. 46).
Si capisce così che, quando $x\to\infty$, la curva "tende ad adagiarsi" sulla retta r d'equazione

$$y=x+2.$$

La retta r è dunque un asintoto per la curva. Per mettere in evidenza che r non è parallela agli assi cartesiani, si parla di **asintoto obliquo**. Se invece l'asintoto e parallelo all'asse delle x, si dice che è **asintoto orizzontale**.

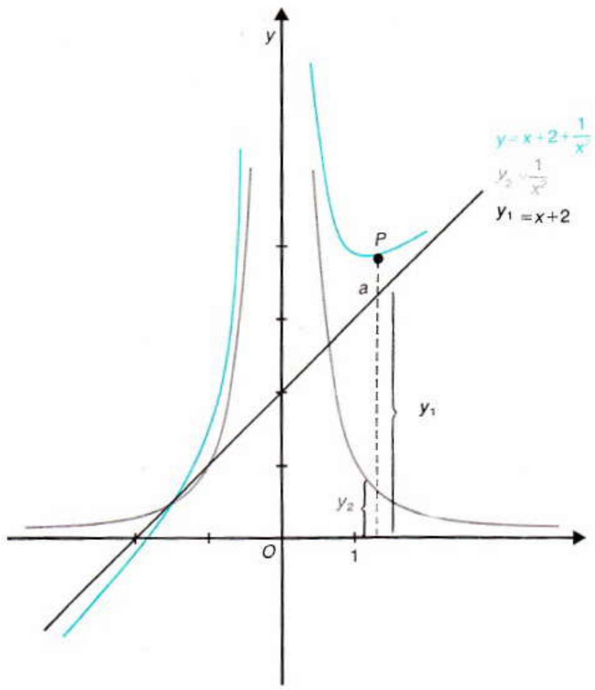


Fig. 46

Ora è chiaro che queste considerazioni grafico-intuitive non sono sempre possibili nel caso di curve dall'espressione analitica complicata. Eppure, è proprio in questi casi più complicati che la conoscenza degli asintoti di una curva è indispensabile per descrivere in modo preciso "il comportamento all'infinito" e il "comportamento nelle vicinanze dei punti singolari"[1].

Occorre dunque un procedimento di carattere più strettamente algebrico, che indichi i calcoli da svolgere per determinare gli asintoti. È proprio di questo che ora ci occuperemo.

[1] Vedi anche cap. 2, paragrafi 1 e 4.

Prima di tutto si tiene presente che l'equazione di una retta si presenta sempre in una di queste due forme:

$x=a$ che descrive le rette parallele all'asse delle y;
$y=mx+n$ che descrive sia le rette oblique, sia le parallele all'asse delle x nel caso $m=0$.

Divideremo perciò il lavoro in due parti:

A) relativa agli asintoti d'equazione $x=a$,
B) relativa alla ricerca degli asintoti d'equazione $y=mx+n$.

A) Asintoti d'equazione $x=a$

Basta riprendere le nozioni esposte nel cap. 2 (paragrafi 5 e 6) per arrivare alle seguenti conclusioni (fig. 47):

Una curva d'equazione $y=f(x)$ ammette un asintoto d'equazione $x=a$ se si verificano le seguenti condizioni:
1) il numero a è escluso dal campo d'esistenza,
2) $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$.

Un'osservazione importante. Il fatto che il numero a deve essere escluso dal campo di esistenza della funzione ha un'intuitiva interpretazione geometrica: sul grafico della funzione non si può trovare un punto che ha per ascissa il numero a, e questo vuol dire che **una curva non può mai incontrare un suo asintoto verticale**.

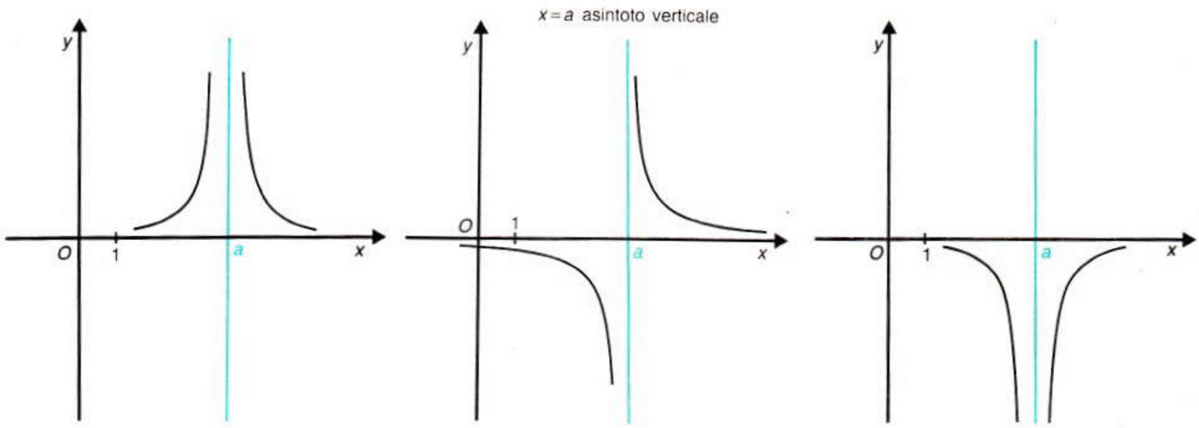


Fig. 47

Applichiamo ora le condizioni indicate a qualche esempio numerico.

1) Determinare gli asintoti verticali della funzione

$$y=\frac{x^3-1}{x^2-x}.$$

I valori da escludere dal campo d'esistenza di questa funzione razionale sono solo quelli per cui risulta

$$x^2-x=0, \quad \text{ossia} \quad x(x-1)=0;$$

si tratta dunque dei valori

$$x=0 \text{ e } x=1.$$

Risulta poi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{x^2-x}=\infty,$$

e perciò la retta d'equazione **$x=0$ è un asintoto verticale** della curva. Calcolando poi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-x}$$

si trova invece una forma indeterminata[1] del tipo $\frac{0}{0}$. Tuttavia si arriva facilmente a calcolare il risultato del limite, applicando la regola di de l'Hôpital[2]; si trova:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1} \frac{3\cdot x^2}{2x-1}=3.$$

Non si verifica dunque la 2ª condizione, e perciò la retta d'equazione **$x=1$ non è un asintoto della curva**.

2) Determinare gli eventuali asintoti verticali di un polinomio del tipo:

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ \dots\ +a_n\cdot x^n$$

È immediato verificare che nessun numero reale è escluso dal campo di esistenza di questa funzione; viene dunque a mancare la 1ª condizione, e perciò la curva non ammette asintoti verticali.

3) Determinare gli asintoti verticali della funzione

$$y=\operatorname{tg} x.$$

Dato che la funzione è periodica con periodo π (fig. 48), basta esaminarla in un periodo, per esempio l'intervallo $[0, \pi]$. Ricordando che risulta:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \text{e} \quad \cos x=0 \quad \text{per} \quad x=\frac{\pi}{2},$$

si trova che il valore $x=\frac{\pi}{2}$ è escluso dal campo di esistenza I; risulta inoltre:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\infty.$$

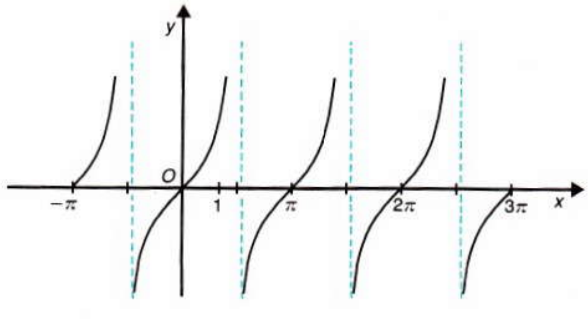


Fig. 48

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.
[2] Vedi cap. 4, paragrafo 8.

Si conclude dunque che la retta d'equazione $x=\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale della curva. Se ora si considera la funzione in tutto il suo campo di esistenza, ci si rende conto che il grafico ha **infiniti asintoti verticali**.

Quest'ultimo esempio fa capire che **una curva grafico di una funzione può avere molti asintoti verticali**.

B) Asintoti d'equazione $y=mx+n$

Riprendiamo (fig. 49) il grafico della funzione

$$y=x+2+\frac{1}{x^2}$$

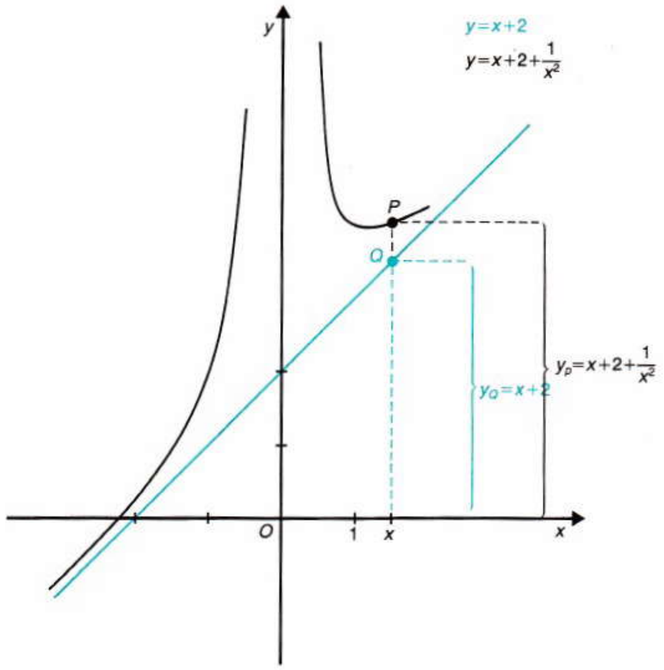


Fig. 49

per tradurre in termini analitici le considerazioni geometriche svolte prima a proposito degli asintoti obliqui.

Cominciamo dall'affermazione più significativa: «la retta r d'equazione $y=x+2$ è un asintoto della curva, dato che la curva si avvicina sempre di più alla retta, quando $x \to \infty$».

Prima di tutto, si può esprimere algebricamente il fatto che «la curva si avvicina alla retta» dicendo che la distanza fra la retta e la curva tende a 0.

Si è condotti allora a valutare la distanza retta-curva, che può essere calcolata così: si considera un punto P che percorre la curva e un punto Q, di uguale ascissa, che percorre la retta r; si valuta quindi la distanza retta-curva mediante la distanza $\overline{PQ}$. Si ha:

$$\overline{PQ}=y_P-y_Q=x+2+\frac{1}{x^2}-(x+2)$$

e quindi

$$\overline{PQ}=\frac{1}{x^2}.$$

Si ottiene dunque che la distanza $\overline{PQ}$ è una funzione di x che presenta una caratteristica notevole:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}=0.$$

Così la frase «la retta r è un asintoto della curva, dato che la curva si avvicina sempre di più alla retta r, quando $x\to\infty$» può essere espressa mediante il linguaggio dei limiti: r è un asintoto della curva perché risulta

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PQ}=0.$$

Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate (fig. 50): una retta r d'equazione

$$y=mx+n$$

è un asintoto per una curva d'equazione

$$y=f(x),$$

se risulta

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PQ}=0.$$

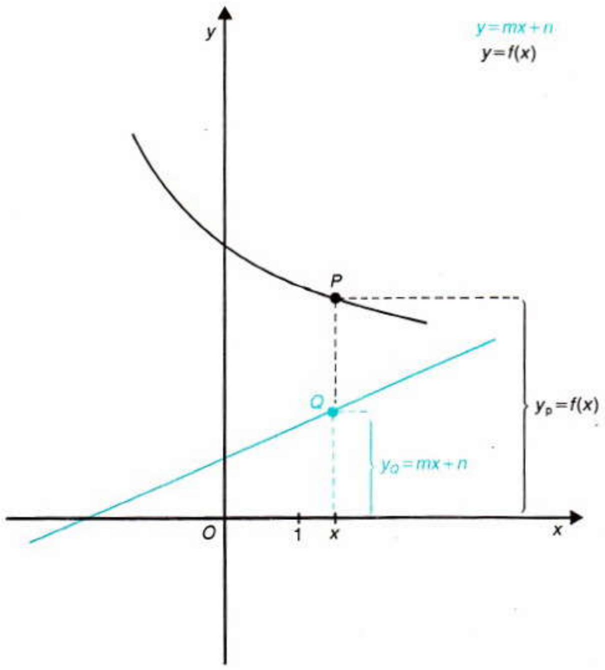


Fig. 50

In questo modo si ha una condizione algebrica per determinare un eventuale asintoto obliquo di una data funzione $y=f(x)$. La condizione può essere meglio scritta, indicando con $h(x)$ la distanza $\overline{PQ}$, che è una funzione di x; si ha:

$$\overline{PQ}=h(x)=f(x)-(mx+n), \tag{1}$$

e si può dire che la retta r è asintoto della curva se risulta

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx-n]=0.$$

Ora si capisce che quest'unica condizione non può determinare i due coefficienti m ed n che compaiono nell'equazione della retta r.
Al più si può scrivere che deve risultare

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx]=n \tag{2}$$

si osserva così che, per determinare il termine noto n, bisogna conoscere la pendenza m.

Occorre dunque un'altra condizione che permetta di determinare m; per ricavare questa condizione si può ragionare così: se deve risultare

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=0$$

a maggior ragione deve essere[1].

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}=0 \tag{3}$$

Quindi, oltre alla (1), si considera la funzione seguente

$$\frac{h(x)}{x}=\frac{f(x)-(mx+n)}{x}$$

ossia

$$\frac{h(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x} \tag{4}$$

Ricordando poi che per questa funzione (4) deve valere la relazione (3), si ricava appunto la seconda condizione cercata; si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x}\right]=0 \tag{5}$$

infine, dato che risulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n}{x}=0,$$

la condizione (5) diventa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=m \tag{6}$$

Considerando insieme la (2) e la (6) si arriva alla seguente conclusione: **una retta d'equazione $y=mx+n$ è un asintoto della curva d'equazione $y=f(x)$, se risulta**

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad n=\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx].$$

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.

Due osservazioni importanti:

- **il grafico di una funzione non può avere più di un asintoto obliquo**, e questo per il teorema dell'unicità del limite[1]. D'altra parte è facile capire che una curva come quella di fig. 51, che ammette due diversi asintoti obliqui, non può essere il grafico di una funzione, dato che ad una x corrispondono due valori di y.
- **il grafico di una funzione può intersecare anche più volte un suo asintoto obliquo**, dato che non è stabilita alcuna condizione che impedisca questo. La fig. 52 mostra appunto una curva che si avvicina asintoticamente ad una retta obliqua, dopo averla intersecata più volte.

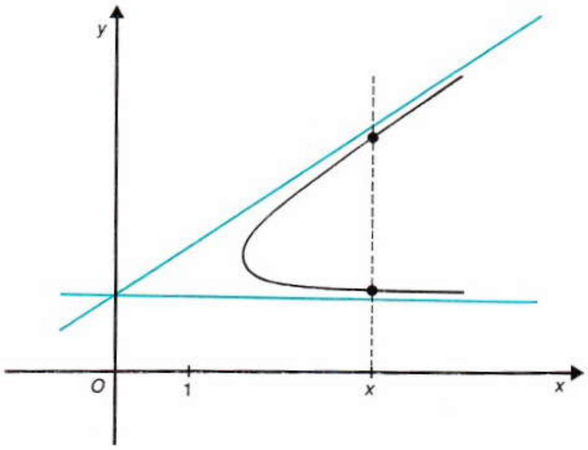


Fig. 51. Una curva con due asintoti obliqui non può essere il grafico di una funzione.

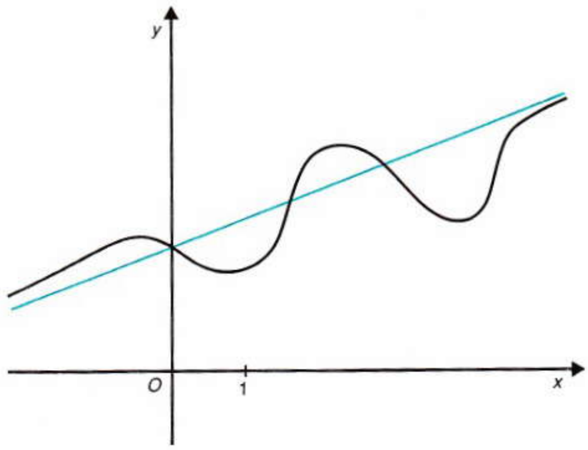


Fig. 52. Una curva può attraversare il suo asintoto obliquo.

Vediamo ora qualche applicazione dei risultati ottenuti.

1) Determinare gli asintoti d'equazione $y=mx+n$ della funzione

$$y=\frac{x^3-1}{x^2-x}.$$

Si comincia col calcolare la pendenza m, data da

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

nel nostro caso si ottiene[2]:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3-x^2}=1.$$

Si calcola successivamente il termine noto n, dato da

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

si ha:

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2-x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1-x^3+x^2}{x^2-x}$$

[1] Vedi cap. 2, paragrafo 8.

[2] Vedi cap. 3, paragrafo 6.

ossia

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}=1.$$

Si conclude che la curva ha l'asintoto obliquo d'equazione $y=x+1$.

È importante osservare che avevamo studiato a pag. 169 la funzione ora esaminata, trovando che aveva un asintoto verticale d'equazione $x=0$. Quest'esempio conduce dunque a fissare l'attenzione su un fatto: **una curva può avere più asintoti verticali e un asintoto obliquo**.

2) Calcolare gli eventuali asintoti d'equazione $y=mx+n$ della curva che ha l'equazione seguente

$$y=\frac{2\cdot x^4}{x^4+x^3+5}.$$

In questo caso si ottiene:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^3}{x^4+x^3+5}=0, \qquad n=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^4}{x^4+x^3+5}=2.$$

Si conclude che la curva ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=2$.

Questo esempio conduce a fissare l'attenzione sugli asintoti orizzontali. Una curva d'equazione $y=f(x)$ ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=n$, se si verificano le seguenti condizioni:

$$\text{(I)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \quad \text{e} \quad \text{(II)}\ \lim_{x\to\infty}f(x)=n.$$

Ora è chiaro che dalla prima condizione non segue necessariamente la seconda; invece[1], se risulta

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]=n,$$

risulta anche

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Arriviamo dunque alla seguente conclusione:

una curva d'equazione $y=f(x)$ ammette un asintoto orizzontale d'equazione $y=n$, se risulta

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=n.$$

3) Determinare gli eventuali asintoti d'equazione $y=mx+n$ di un polinomio del tipo:

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ \dots\ +a_n\cdot x^n$$

Quando si prova a calcolare la pendenza m si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}\right)=\infty.$$

Si conclude così che questo tipo di curve, che, come abbiamo visto prima, non ha asintoti verticali, non ha neanche asintoti d'equazione $y=mx+n$.

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.

9. Studio del grafico di una funzione

Negli ultimi tre paragrafi abbiamo scoperto in quale modo alcune proprietà geometriche di una curva siano legate a caratteristiche algebriche della funzione $y=f(x)$ che rappresenta la curva; e precisamente:

- la crescenza o decrescenza della curva in un intervallo è legata al segno della derivata $y'=f'(x)$ in quell'intervallo;
- la concavità o convessità della curva in un intervallo è legata al segno della derivata seconda $y''=f''(x)$ in quell'intervallo;
- mediante il calcolo di opportuni limiti, si può determinare l'equazione di eventuali asintoti.

Si può aggiungere che:

- se in un intervallo risulta $f(x)>0$, la curva occupa il semipiano al disopra dell'asse delle x,
- se in un intervallo risulta $f(x)<0$, la curva occupa il semipiano al disotto dell'asse delle x,
- se in un punto risulta $f(x)=0$, la curva taglia l'asse delle x.

I risultati ottenuti possono essere applicati per studiare l'andamento di una funzione, fino ad arrivare a tracciare un grafico dettagliato, in cui sono indicati gli asintoti, i punti di massimo o minimo relativo e i flessi. Il procedimento da seguire può essere schematizzato nel modo seguente:

1) **calcolo del campo di esistenza della funzione**[1]**;**
2) **considerazioni geometriche (simmetrie rispetto agli assi o rispetto all'origine, possibilità di valersi della somma grafica, ...);**
3) **calcolo degli eventuali asintoti;**
4) **studio del segno della funzione $y=f(x)$;**
5) **studio del segno della derivata $y'=f'(x)$;**
6) **studio del segno della derivata seconda $y''=f''(x)$;**
7) **calcolo delle coordinate dei punti notevoli (massimi o minimi relativi, flessi) e di qualche altro punto interessante (eventuale intersezione con l'asse delle y, ...).**

Per interpretare rapidamente i risultati dei calcoli eseguiti ci si può basare sugli schemi presentati alla fine del testo, dove sono riassunte in breve varie nozioni indispensabili.

Impadroniamoci ora del procedimento indicato, lavorando su un esempio che è interessante non solo dal punto di vista matematico, ma anche dal punto di vista applicativo, dato che lo studio delle reti elettriche è largamente basato sul grafico dei quozienti di polinomi.

Studiamo l'andamento della seguente funzione

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}.$$

Si tratta di un quoziente di polinomi, che è definito per tutti i valori reali di x, escluso quelli che rendono 0 il polinomio al denominatore; possiamo dunque svolgere facilmente il primo passo del procedimento.

[1] Vedi cap. 1, paragrafo 3.

1) Calcolo del campo di esistenza

Si determinano i valori di x per cui risulta

$$1-x^2=0$$

si ottiene

$$x^2=1, \quad \text{da cui} \quad x=-1 \quad \text{o} \quad x=1.$$

Si ha dunque che il campo di esistenza della funzione è l'insieme dei reali, esclusi i numeri -1 e 1 (fig. 53). Tale insieme può essere descritto più brevemente con uno dei seguenti simboli:

$$\boldsymbol{x \neq \pm 1},$$

oppure[1]

$$(-\infty, \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{-1}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, +\infty).$$

Fig. 53

2) Considerazioni geometriche

Si osserva subito che la funzione data è una funzione razionale fratta di 3° grado; la curva corrispondente incontra una retta del piano al massimo in tre punti e, perciò, può avere dei punti di flesso[2].

Inoltre, la funzione data è dispari, cioè, sostituendo $-x$ ad x, y cambia segno; questo vuol dire che la curva è simmetrica rispetto all'origine O[3].

3) Calcolo degli eventuali asintoti

Osserviamo prima di tutto che i numeri 1 e -1 sono esclusi dal campo di esistenza della funzione; perciò esaminiamo il comportamento della funzione in prossimità di questi punti critici per determinare eventuali asintoti verticali. Si ha:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3}{1-x^2}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1} \frac{x^3}{1-x^2}=\infty.$$

Si conclude che la curva ammette due asintoti verticali r ed r', che hanno le equazioni seguenti (fig. 54):

$$r) \ x=-1, \quad r') \ x=1.$$

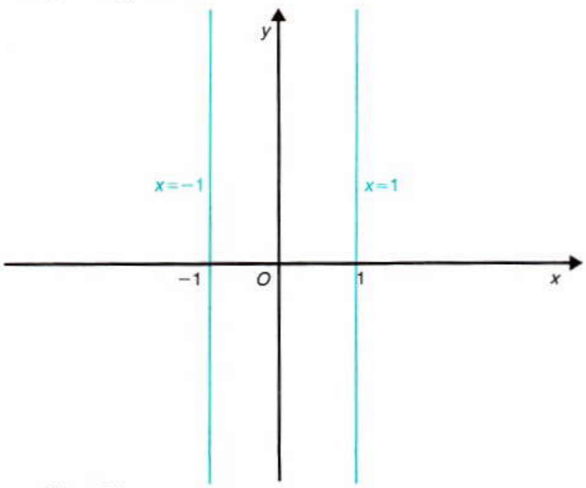


Fig. 54

[1] Il simbolo$(-\infty, -1)$ indica l'insieme dei numeri reali x per cui risulta $x<-1$, analogamente, $(-1, 1)$ indica l'insieme dei numeri reali x per cui risulta $-1<x<1$, e $(1, +\infty)$ l'insieme dei numeri reali x per cui si ha $x>1$. Il simbolo $\cup$ è il simbolo di unione insiemistica.

[2] Vedi paragrafo 6.

[3] Vedi cap. 1, paragrafo 7.

Esaminiamo ora il comportamento della curva all'infinito, per determinare eventuali asintoti obliqui. Ricordiamo che una retta d'equazione $y=mx+n$ è asintoto per la curva, se risulta:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=n.$$

Cominciamo dunque col calcolare

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=-1$$

e, successivamente

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}-(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=0.$$

Si ottiene in definitiva

$$m=-1 \text{ e } n=0;$$

quindi la curva ha un asintoto d'equazione (fig. 55):

$$y=-x.$$

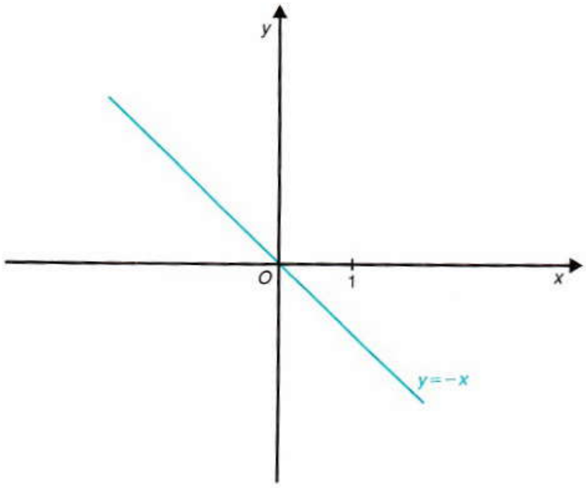


Fig. 55

4) Studio del segno della funzione $y=f(x)$

Dato che la funzione è un quoziente di polinomi, per studiarne il segno esaminiamo separatamente il segno del numeratore N e del denominatore D; si ha, in particolare:

$N=x^3=0$ per $x=0$ (contato tre volte),
$D=1-x^2=0$ per $x=-1$ o $x=1$.

Il segno della funzione è indicato schematicamente in fig. 56.

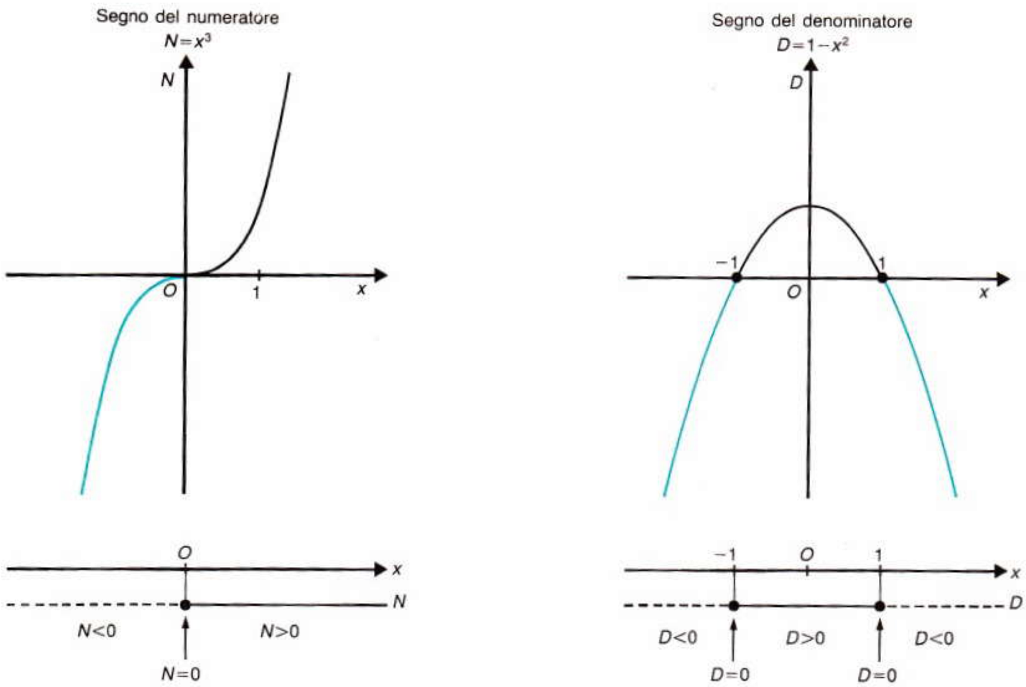


Fig. 56

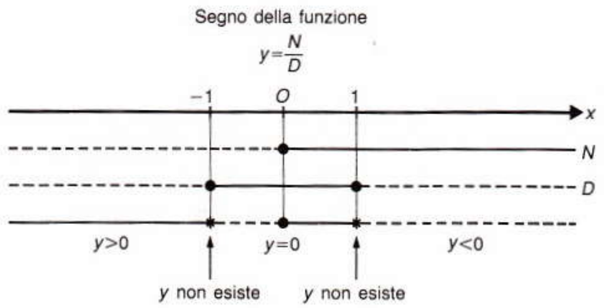


Fig. 56

5) Studio del segno della derivata prima $y'=f'(x)$

Valendosi della regola di derivazione del quoziente di funzioni[1], si ottiene:

$$y'=\frac{3x^2\cdot(1-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

Per studiare rapidamente il segno di y', basta scrivere in questo modo:

$$y'=(3-x^2)\cdot\frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Ci si rende così conto che y' è data dal prodotto del trinomio $(3-x^2)$, moltiplicato per un fattore che si mantiene sempre positivo e vale 0 solo per $x=0$. Perciò y' mantiene lo stesso segno di $(3-x^2)$ e si ha:

$$(3-x^2)=0, \quad \text{per} \quad x=-\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x=\sqrt{3}.$$

Il segno della derivata y' è descritto schematicamente nella fig. 57.

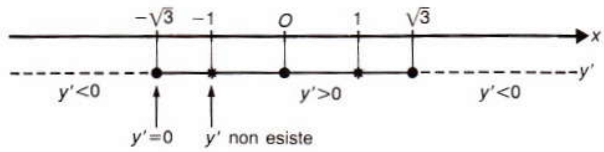


Fig. 57

6) Studio del segno della derivata seconda $y''=f''(x)$

Per derivare la funzione

$$y'=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$$

occorre valersi anche della regola di derivazione di funzione composta; si ottiene[2]:

$$y''=\frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)^2-(3x^2-x^4)\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}.$$

[1] Vedi cap. 4, paragrafo 6.
[2] Vedi cap. 4, paragrafo 6.

Ora, dato che si deve studiare il segno di questa funzione, non è certo opportuno svolgere le potenze o i prodotti indicati; conviene invece scrivere il numeratore di y'' sotto forma di prodotto.

Si ottiene:

$$y''=\frac{2x\cdot(1-x^2)\cdot[(3-2x^2)\cdot(1-x^2)+2\cdot(3x^2-x^4)]}{(1-x^2)^4},$$

da cui

$$y''=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Dato che y'' è un quoziente di polinomi, per studiarne il segno esaminiamo separatamente il segno del numeratore N e del denominatore D; si ha:

$D=(1-x^2)^3$, che ha il segno di $(1-x^2)$;

$N=2x(x^2+3)=0$ — $2x=0$, ossia $x=0$; $x^2+3=0$, che non ha soluzioni reali.

Il segno di y'' è rappresentato schematicamente nella fig. 58.

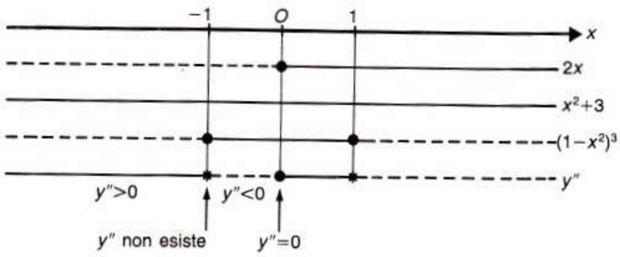


Fig. 58

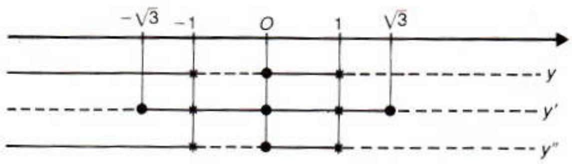


Fig. 59

7) Calcolo delle coordinate dei punti notevoli

Possiamo ora riunire i risultati dei calcoli eseguiti in uno schema come quello di fig. 59, dal quale si capisce che hanno particolare importanza nel grafico i punti in cui valgono zero la funzione o le sue derivate.
Calcoliamo dunque le coordinate di questi punti notevoli, in modo da poterli individuare sul riferimento cartesiano; si ha, sostituendo nell'espressione della funzione al posto di x le ascisse indicate:

- per $x=0$, $y=0$, cioè il punto $O(0, 0)$, che è un flesso stazionario;
- per $x=-\sqrt{3}\approx-1{,}7$, $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx2{,}6$, cioè il punto $A(-1{,}7; 2{,}6)$, che è un minimo relativo.

Dato poi che la curva è simmetrica rispetto ad O, si avrà anche il punto $B(1{,}7; -2{,}6)$ di massimo relativo.

Ora, esaminando la fig. 59, si ricava una dettagliata descrizione dell'andamento della funzione: basta percorrere lo schema nel verso delle x crescenti, fermando l'attenzione sui valori che annullano la funzione o le sue derivate. In questo modo si costruisce il grafico "per passi successivi" come è mostrato nelle figg. 60-63. In fig. 64 sono infine presentati affiancati il grafico definitivo della funzione ed una sintesi dei calcoli che hanno permesso di tracciare tale grafico.

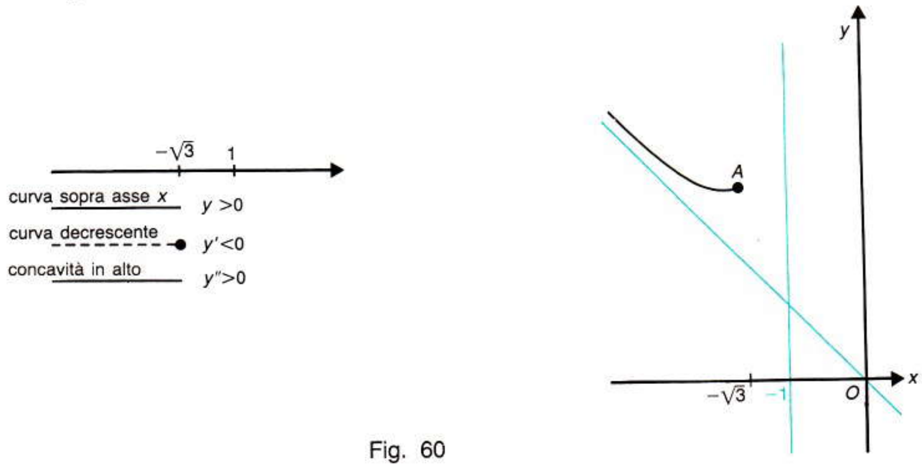


Fig. 60

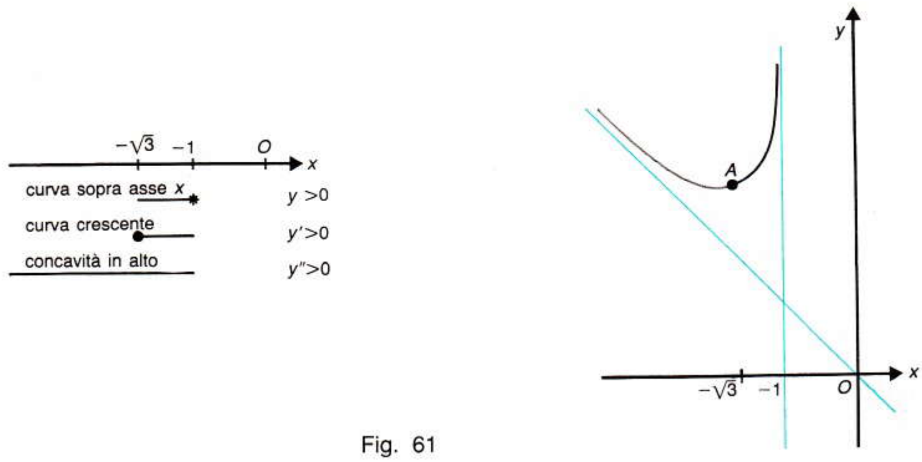


Fig. 61

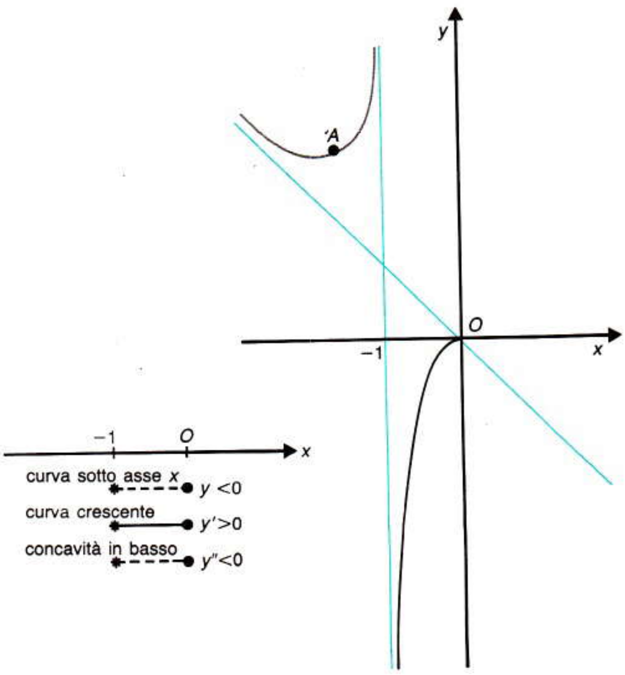


Fig. 62

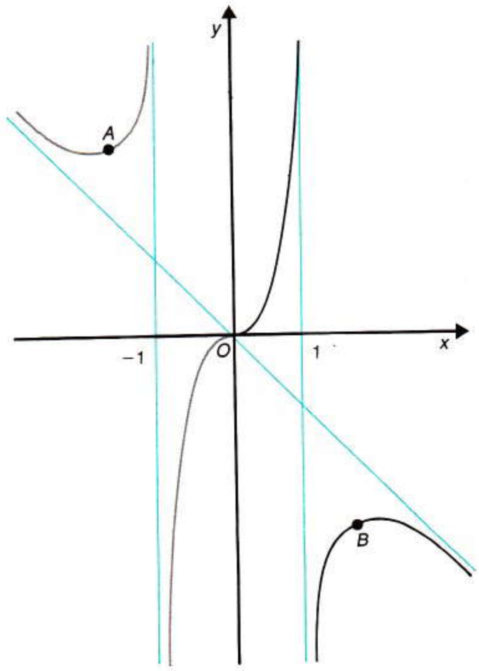
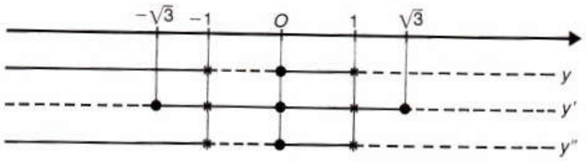


Fig. 63. Si completa il grafico basandosi sulla simmetria rispetto ad O.



$O(0, 0)$ punto di flesso stazionario

$A\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ punto di minimo relativo

$B\left(\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ punto di massimo relativo

asintoti: $x=-1$, $x=1$, $y=-x$

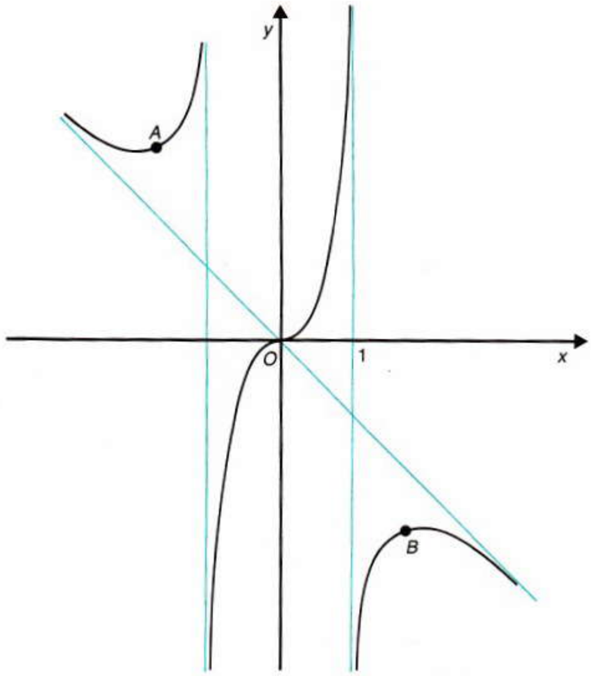


Fig. 64

10. Problemi di massimo e minimo

Sotto il nome di "problemi di massimo e minimo" si possono riunire molti problemi che provengono dai più vari settori di ricerca. In questo paragrafo esamineremo uno di questi problemi che suggerirà considerazioni di carattere generale.

Problema

Per costruire dei contenitori, si utilizza un quadrato di cartone con il lato lungo 30 cm e si procede così (fig. 65): si ritagliano dai vertici quattro quadratini uguali e si ripiegano le strisce ottenute, realizzando una scatola senza coperchio. Ci si chiede: in quale caso il contenitore ha volume massimo?

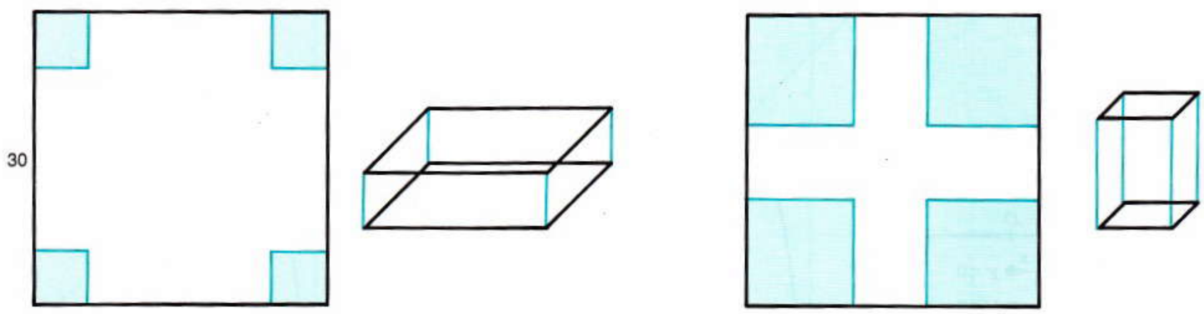


Fig. 65

Si osserva subito che, per cambiare il volume del contenitore, si può variare un'unica grandezza: il lato dei quadratini ritagliati; si ottengono tanti contenitori diversi, come quelli di fig. 65.

Indichiamo dunque con x la lunghezza del lato variabile. È facile esprimere il volume V dei contenitori in funzione di x. Infatti, i contenitori hanno forma di parallelepipedo con le caratteristiche seguenti (fig. 66):
– base, un quadrato con il lato lungo $30-2x$,
– altezza lunga x.
Il volume V è dunque dato da:

$$V(x)=(30-2x)^2x.$$

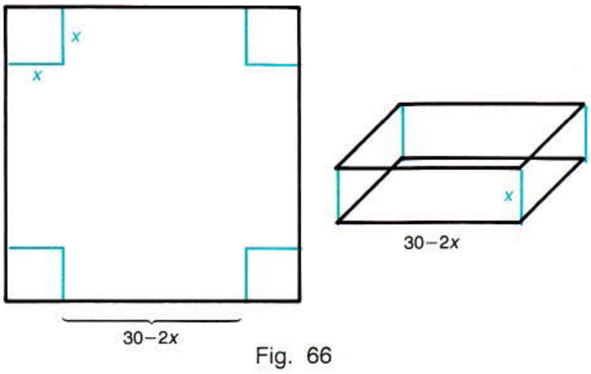


Fig. 66

Il problema chiede di trovare quale contenitore ha il massimo volume V.

Prima di inoltrarci nello studio analitico, facciamo qualche osservazione di carattere intuitivo.

Se il lato del quadratino da togliere è lungo $x=15$, è chiaro che il contenitore ha volume zero: il parallelepipedo si è ridotto alla sola altezza. E il volume è anche zero se si ritaglia un quadratino con il lato lungo $x=0$: l'altezza è 0 e il parallelepipedo "si appiattisce" sulla base.

Fra questi due casi limite ci deve dunque essere un massimo. Non si riesce però ad individuare intuitivamente in quale caso si ottiene questo volume massimo. Occorre dunque passare allo studio analitico. Per orientarci, tracciamo il grafico della funzione

$$y=V(x),$$

scegliendo come dominio l'intero campo di esistenza, cioè l'insieme dei reali. Si ha:

$$y=[2(15-x)]^2x,$$

ossia

$$y=4x(15-x)^2.$$

Seguiamo dunque il procedimento illustrato nel paragrafo precedente.

1) Segno di y

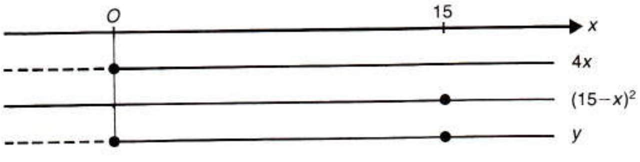
Risulta

$$y=0,$$

se $$4x(15-x)^2=0 \begin{cases} 4x=0 \Rightarrow x_1=0 \\ (15-x)^2=0 \Rightarrow x_2=x_3=15. \end{cases}$$

La fig. 67 mostra schematicamente come varia il segno di y.

Fig. 67



2) Segno di y'

Valendosi della regola di derivazione relativa al prodotto di funzioni e alle funzioni composte, si ottiene:

$$y'=4[(15-x)^2+x\cdot 2(15-x)(-1)],$$

ossia

$$y'=4(15-x)(15-3x).$$

Risulta dunque:

$$y'=0,$$

se $$4(15-x)(15-3x)=0 \begin{cases} 15-x=0 \Rightarrow x_1=15 \\ 15-3x=0 \Rightarrow x_2=5. \end{cases}$$

Il segno di y' è indicato in fig. 68.

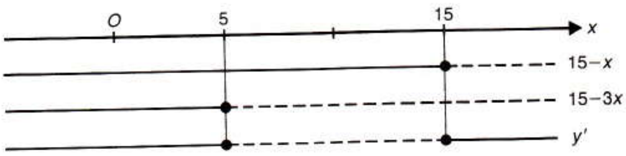


Fig. 68

3) Segno di y''

Valendosi ancora della regola di derivazione relativa prodotto di funzioni, si ottiene:

$$y''=4[(-1)(15-3x)+(15-x)(-3)],$$

ossia

$$y''=4(6x-60).$$

Risulta dunque

$$y''=0, \quad \text{se} \quad 6x-60=0 \Rightarrow x=10.$$

Il segno di y'' è indicato in fig. 69.

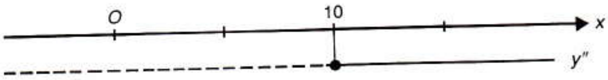


Fig. 69

In fig. 70 si trovano infine affiancati i risultati dei calcoli e il grafico della funzione, che è stato tracciato dopo aver determinato le coordinate dei seguenti punti notevoli:

$O(0, 0)$	intersezione con l'asse delle x,
$B(5, 2000)$	massimo relativo,
$C(10, 1000)$	flesso,
$D(15, 0)$	minimo relativo e intersezione con l'asse delle x.

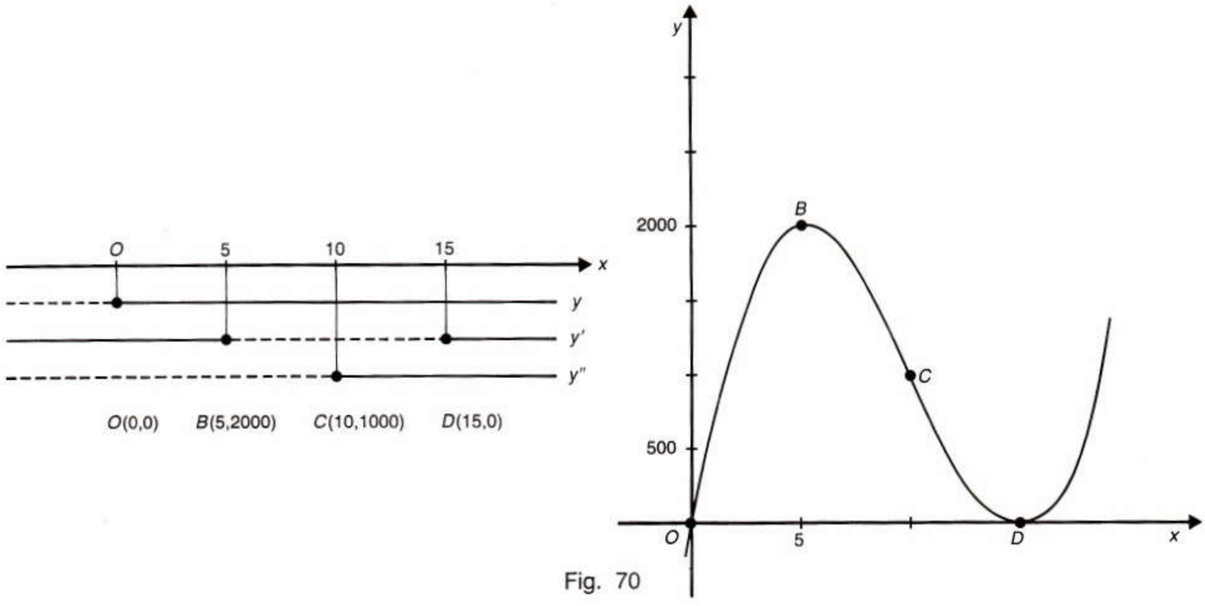


Fig. 70

Torniamo ora al problema geometrico da cui siamo partiti: siccome la variabile x indica la lunghezza del lato del quadratino ritagliato (fig. 71), non può assumere qualunque valore reale; deve risultare

$$0 \leq x \leq 15.$$

Dunque la funzione considerata ha come dominio l'intervallo chiuso [0, 15] ed il corrispondente grafico è quello di fig. 72.

È facile ora calcolare il valore massimo del volume: è 2000; questo valore è raggiunto nel punto di massimo relativo B che ha ascissa 5.

Si conclude che fra tutti i contenitori ha volume massimo quello disegnato in fig. 73 ed ottenuto ritagliando quadratini con il lato lungo 5 cm. Si tratta di un risultato che non era certamente prevedibile prima di svolgere i calcoli!

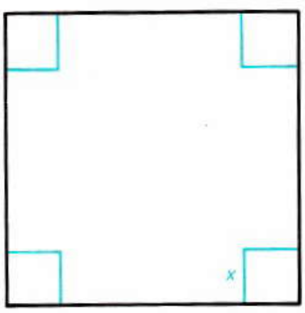


Fig. 71

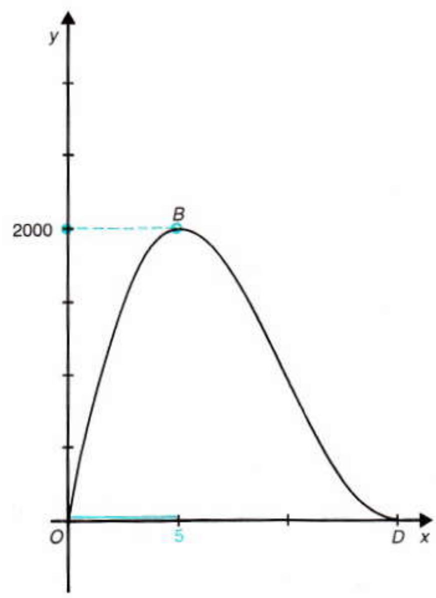


Fig. 72

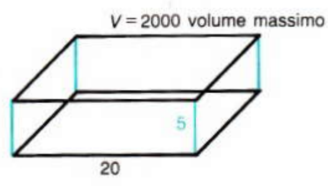


Fig. 73

È ora interessante considerare anche i casi in cui il volume raggiunge il valore minimo. Il valore minimo è 0 e viene raggiunto, come si era detto all'inizio, in due casi: per $x=0$ e per $x=15$.

Possiamo facilmente ritrovare questi due casi sul grafico di $y=V(x)$ (fig. 74): il valore minimo 0 viene raggiunto dalla y nei due punti O e D.

Si nota subito un'importante differenza fra i due punti: D è un punto di minimo relativo, cioè un punto stazionario; invece, ***O* non è un punto stazionario**, ossia la tangente in O non è parallela all'asse delle x.

Queste osservazioni portano l'attenzione sulla differenza fra due caratteristiche di una funzione:
- punto di minimo relativo,
- minimo assoluto.

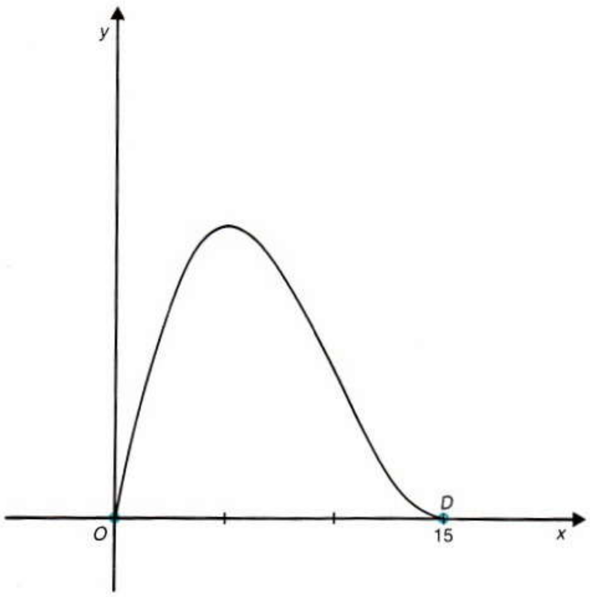


Fig. 74

Più in generale, il **minimo assoluto** è il più piccolo valore che raggiunge y, quando x varia nel dominio fissato per la funzione $y=f(x)$.

Un **punto di minimo relativo (o minimo locale)** è invece un punto in cui y ha valore più piccolo "rispetto ai punti immediatamente vicini".

Per riassumere l'idea con un'immagine intuitiva, possiamo pensare che il grafico della funzione rappresenti il profilo di un terreno: in un giorno di pioggia troveremo le pozzanghere nei punti di minimo relativo; ma, ... se piove molto, l'acqua straripa dalle pozzanghere e scorre giù verso il minimo assoluto.

Un analogo ragionamento conduce a distinguere fra **massimo assoluto** e **punto di massimo relativo (o massimo locale)**.

Si possono visualizzare facilmente le considerazioni svolte: basta lasciare il problema dei contenitori ed esaminare il grafico della funzione

$$y=4x(15-x)^2,$$

fissando come dominio l'intervallo $[-1, 21]$ (fig. 75).

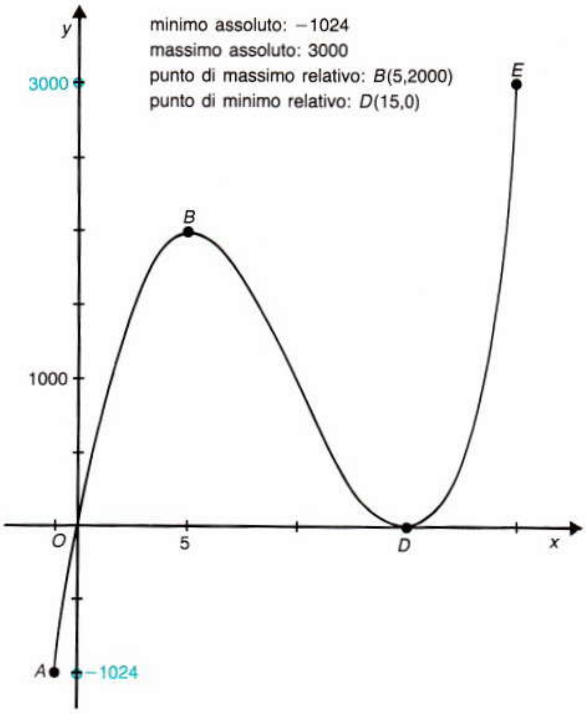


Fig. 75

Il grafico è ora un arco di curva delimitato dai punti seguenti:

$$A(-1, -1024), \qquad E(21, 3024).$$

Si ha dunque che:

- il massimo assoluto è il valore 3024, raggiunto nel punto E, che non è stazionario,
- il minimo assoluto è il valore -1024, raggiunto nel punto A, che non è stazionario,
- il punto $B(5, 2000)$ è un punto di massimo relativo,
- il punto $D(15, 0)$ è un punto di minimo relativo.

Si arriva dunque alla seguente conclusione:

- **il minimo (o il massimo) assoluto può essere raggiunto in un punto non stazionario**
- **un punto di minimo (o di massimo) relativo può avere un'ordinata che non è il minimo (o il massimo) assoluto.**

L'esempio studiato ha mostrato alcuni aspetti abbastanza riposti dei problemi di massimo e minimo, ma conduce anche ad indicare un procedimento generale per determinare il massimo o il minimo assoluto di una funzione $y=f(x)$, definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nello stesso intervallo.

Per calcolare il **massimo assoluto**:

1) si determinano i punti di massimo relativo $M[m, f(m)]$,
2) si calcolano le ordinate dei punti estremi dell'arco di curva $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$,
3) il massimo assoluto è il più grande fra i valori $f(a)$, $f(b)$, $f(m)$.

Per calcolare il **minimo assoluto**

1) si determinano i punti di minimo relativo $N[n, f(n)]$,
2) si calcolano le ordinate dei punti estremi dell'arco di curva $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$,
3) il minimo assoluto è il più piccolo fra i valori $f(a)$, $f(b)$, $f(n)$.

Concludiamo con due importanti osservazioni:

1) Il procedimento ora descritto non richiede più di tracciare il grafico della funzione, ma solo di individuare i punti di massimo o minimo relativo. Questa parte del procedimento può essere svolta seguendo due metodi diversi:

- il metodo indicato nel paragrafo 4, che si basa sullo studio del segno della derivata prima $y'=f'(x)$;
- il metodo indicato nel paragrafo 7, che si basa sul calcolo delle derivate successive.

È chiaro che la scelta dipende dal caso che di volta in volta si presenta; negli Esercizi si trovano vari esempi di problemi, che permettono di confrontare adeguatamente i due metodi.

2) Nello svolgimento di questi problemi di massimo e minimo hanno un ruolo teorico fondamentale due teoremi: il teorema di Weierstrass[1] e il teorema di Rolle[2].

– Il teorema di Weierstrass garantisce che una funzione $y=f(x)$ continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ ammette un massimo ed un minimo assoluti, che possono anche cadere agli estremi a o b dell'intervallo (fig. 76). Perciò, quando un problema di massimo o minimo si traduce in una funzione continua in un intervallo chiuso, si ha la certezza che il problema è risolubile.

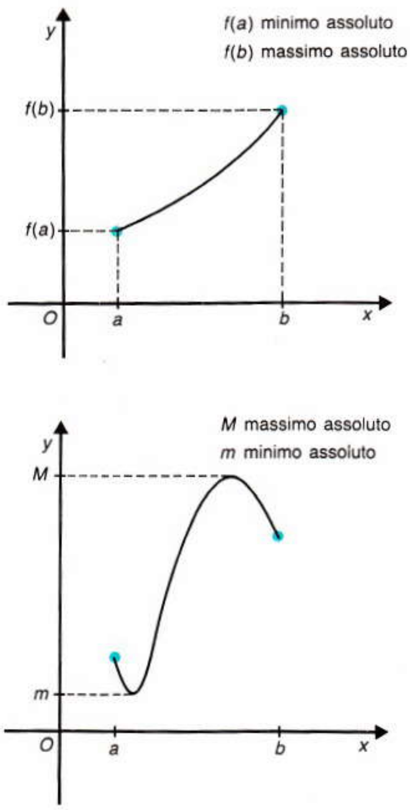


Fig. 76

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 8.
[2] Vedi cap. 4, paragrafo 8.

– Il teorema di Rolle tratta una situazione molto frequente: il problema si traduce in una funzione $y=f(x)$ che è derivabile (e quindi continua) all'interno di un intervallo (a,b) ed assume valori uguali $f(a)=f(b)$ agli estremi a e b, dove è continua.

In queste condizioni, il teorema garantisce l'esistenza di almeno un punto stazionario all'interno dell'intervallo (fig. 77).

Ora, ci si rende subito conto che in questi casi vale anche il teorema di Weierstrass, ma il massimo ed il minimo assoluti non possono cadere ambedue agli estremi dell'intervallo, altrimenti la funzione avrebbe valore costante in tutto l'intervallo.

Questo porta a concludere che uno dei punti stazionari deve essere un punto di massimo (o di minimo) relativo; in questo punto la funzione assumerà necessariamente il valore massimo (o minimo).

Il teorema di Rolle permette dunque di risolvere più brevemente un problema di massimo o minimo quando la funzione $y=f(x)$ considerata assume valori uguali agli estremi dell'intervallo: basta esaminare le ordinate dei punti stazionari.

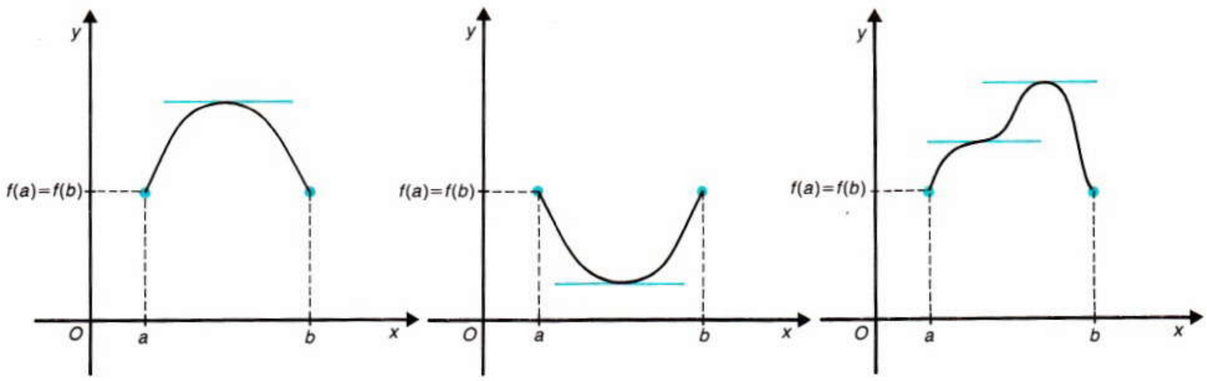


Fig. 77

11. Le derivate in fisica

I risultati esposti in questi ultimi due capitoli possono essere riassunti in poche frasi:

1) **data una funzione $y=f(x)$, il valore della derivata $f'(c)$ indica quanto rapidamente varia y, quando x vale c;**
2) **mediante le derivate si possono risolvere problemi di massimo e minimo.**

Le radici storiche di questi risultati si trovano soprattutto in due grandi filoni di ricerca: la geometria, di cui ci siamo occupati finora, e la fisica, che, a partire dal XVII secolo, ha stimolato in modo determinante lo sviluppo del calcolo del differenziale.

Ancora oggi, basta sfogliare un libro di fisica per notare che le derivate si presentano nei più vari argomenti; non si può certo esaurire l'argomento in questo paragrafo. Ci limitiamo perciò ad esaminare tre casi particolarmente espressivi.

1) Le derivate per indicare velocità ed accelerazione

Cominciamo col completare un discorso avviato all'inizio del cap. 4.
Si considera un punto materiale che si muove secondo la legge

$$s=f(t),$$

dove s indica la distanza percorsa e t indica il tempo durante il quale si esamina il moto.

La rapidità con cui varia s al passare del tempo t indica la velocità istantanea v del punto materiale; si ha dunque che:

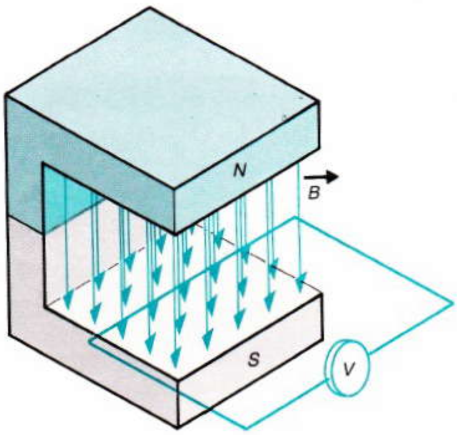
$s=f(t)$ è la legge oraria,
$v=f'(t)$ indica la velocità istantanea al variare del tempo t,
$f'(c)$ indica la **velocità istantanea**, al tempo $t=c$ secondi.

Si può ora estendere questo concetto, esaminando la rapidità con cui varia la velocità istantanea al passare del tempo t: si ottiene l'accelerazione istantanea a del punto materiale; si ha dunque che:

$s=f(t)$ è la legge oraria,
$v=f'(t)$ indica la velocità istantanea al variare del tempo t,
$a=f''(t)$ indica l'accelerazione istantanea al variare del tempo t,
$f''(c)$ indica **l'accelerazione istantanea**, al tempo $t=c$ secondi.

2) La legge dell'induzione magnetica

Nelle figg. 78-80 sono schematicamente descritti gli esperimenti sulle correnti indotte condotti da M. Faraday in Inghilterra e, quasi contemporaneamente, da J. Henry negli Stati Uniti durante la prima metà del 1800.



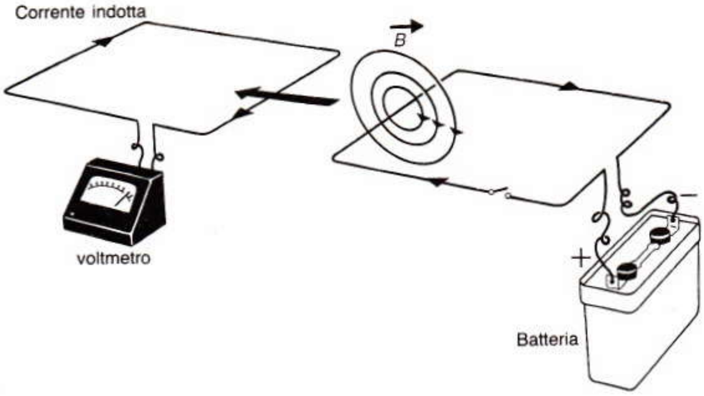


Fig. 78. Una spira metallica viene fatta entrare e uscire da un campo magnetico $\vec{B}$: varia l'area S della superficie immersa in $\vec{B}$ e si genera ai capi della spira una f.e.m. indotta E.

Fig. 79. Aprendo e chiudendo l'interruttore si genera un campo $\vec{B}$ variabile nel tempo; ai capi della spira immersa in questo campo variabile si genera una f.e.m. indotta E.

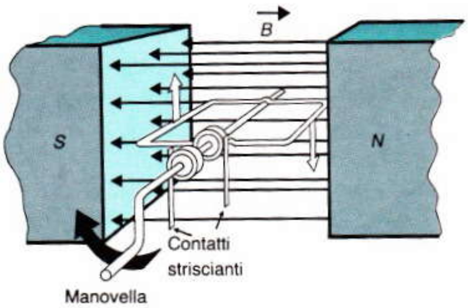


Fig. 80. Una spira viene fatta ruotare in un campo magnetico. Cambia l'inclinazione della spira rispetto $\vec{B}$ e si genera ai capi delle spira una f.e.m. indotta E.

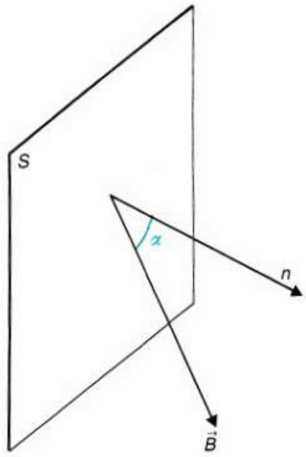


Fig. 81.
$\phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$
ϕ: flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie S.

Faraday aveva osservato che in tutti gli esperimenti vi era un dato comune (fig. 81): quando varia nel tempo il flusso ϕ del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso la superficie S di una spira metallica, si crea ai capi della spira una forza elettromotrice E: è la forza elettromotrice indotta.

Studi successivi portarono poi a scoprire che la forza elettromotrice E è legata alla rapidità di variazione del flusso $\phi(t)$ dalla legge

$$E = -\phi'(t).$$

Nella legge la presenza del segno "$-$" indica il fatto seguente: il verso di E sarà tale da opporsi, con i suoi effetti magnetici, alla variazione di flusso che l'ha generata.

Con questa semplice legge matematica si riesce a riassumere un gran numero di risultati sperimentali e anche a prevedere molte applicazioni: gli alternatori, i trasformatori, i motori elettrici e molti strumenti di misura delle grandezze elettriche sono basati proprio su questa legge.

3) Le derivate nei principi di massimo o minimo

Durante il XVII e il XVIII secolo nasce e si sviluppa un nuovo modo di concepire lo studio della fisica: ricercare grandi principi generali che possano spiegare varie leggi sperimentali fino ad allora trovate. Si tratta di una delle grandi idee-guida della fisica, in cui le derivate hanno avuto un'importanza determinante.

Vediamo meglio di che cosa si tratta, esaminando uno di questi principi. Fermat aveva enunciato nel 1650 il **principio di tempo minimo**, che stabiliva una proprietà molto intuitiva della luce:

un raggio di luce, propagandosi da un punto *A* ad un altro *B*, segue il cammino che richiede il minimo tempo per essere percorso.

Con questo unico principio si riescono a prevedere e a spiegare le varie leggi sperimentali dell'ottica geometrica.

Vediamo, per esempio, come si riesce a ricavare la legge della riflessione.

Ricordiamo che la riflessione avviene quando la luce incontra una superficie speculare; in tal caso (fig. 82), il raggio di luce "rimbalza" sullo specchio, formando un angolo di incidenza i e di riflessione r, legati dalla legge

$$\hat{i}=\hat{r}.$$

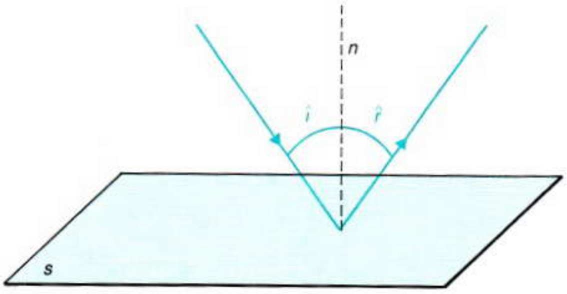


Fig. 82

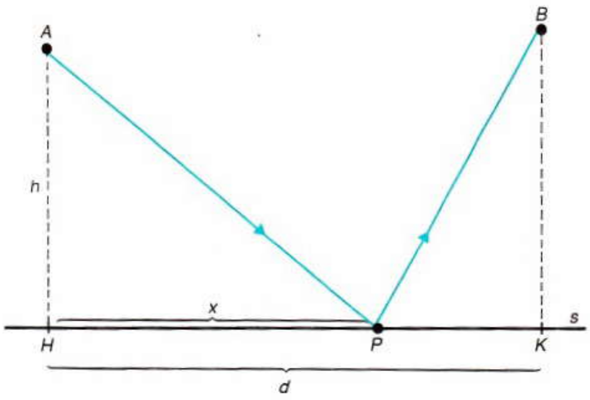


Fig. 83

Ora, questa legge può essere ricavata dal principio di Fermat, ragionando nel modo seguente (fig. 83): si considerano due punti A e B, che si trovano a distanza h dallo specchio s e si traccia un immaginario raggio di luce che colleghi i due punti, incontrando lo specchio in P; si ottiene la linea in colore APB. I punti H e K, che si trovano a distanza d, sono le proiezioni di A e B sullo specchio, mentre x indica la posizione del punto P; deve dunque essere: $0 \leq x \leq d$.

Si osserva subito che la lunghezza l del percorso APB varia al variare di x (cioè della posizione di P) ed è chiaro che il percorso che richiede il tempo minimo è, in questo caso, quello che ha la lunghezza minima.

Ora, per individuare, fra i vari percorsi APB, quello che ha lunghezza minima, scriviamo la legge che lega la lunghezza l ad x. Si ha:

$$l(x)=\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+(d-x)^2}$$

che assume agli estremi dell'intervallo $[0, d]$ i seguenti valori:

$$l(0)=l(d)=h+\sqrt{h^2+d^2}.$$

Il teorema di Rolle assicura dunque che $l(x)$ ha un massimo o un minimo che cade all'interno dell'intervallo $[0, d]$; si tratta ora di individuare gli eventuali punti di minimo relativo della funzione $l(x)$.

Per ottenere questo cominciamo col calcolare la derivata prima della funzione $l(x)$; si ottiene:

$$l'(x)=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{h^2+(d-x)^2}}.$$

Ci si rende subito conto che non sarebbe affatto agevole individuare eventuali punti di minimo relativo studiando il segno di questa derivata prima; conviene allora individuare prima di tutto i punti stazionari e catalogarli successivamente basandosi sulla derivata seconda.
Si trova che si ha $l'(x)=0$, quando risulta:

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{h^2+(d-x)^2}} \tag{1}$$

inoltre la derivata seconda, data da

$$l''(x)=\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}}+\frac{h^2}{\sqrt{[h^2+(d-x)^2]^3}}$$

si mantiene sempre positiva e perciò la condizione (1) determina proprio il percorso di lunghezza minima.

Ora, mediante la trigonometria, si ricava (fig. 84) che questa condizione (1) può essere scritta nella forma

$$\text{sen } i=\text{sen } r,$$

da cui si ricava, appunto, la legge della riflessione

$$\hat{i}=\hat{r}.$$

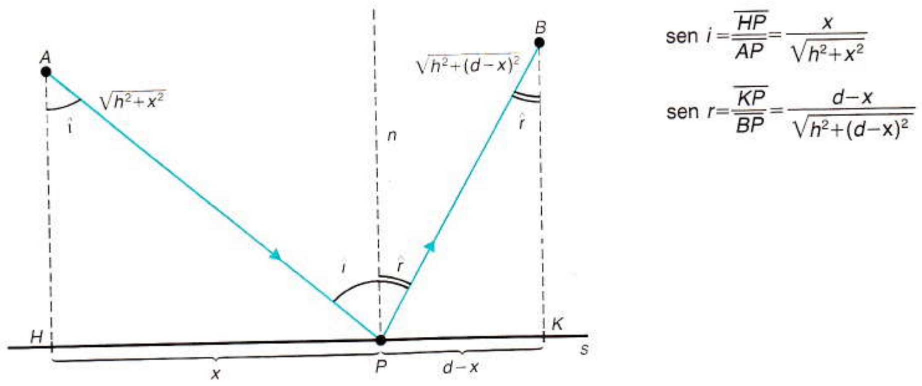


Fig. 84