5
Esercizi

1. Equazione della tangente ad una curva

Gli esercizi dall'1 al 19 conducono ad impadronirsi dell'equazione della retta t, tangente ad una curva d'equazione $y=f(x)$ in un suo punto A di ascissa a; ricordiamo che tale equazione è sempre data da

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a) \qquad (1)$$

Determinare la tangente alla curva di cui è data l'equazione negli esercizi dall'1 al 12. L'ascissa a del punto è indicata accanto ad ogni funzione. Visualizzare i risultati ottenuti sul piano cartesiano.

1. $y=\text{sen}\, x, \quad y=\text{sen}\, x+2, \quad y=-2\,\text{sen}\, x, \quad a=0$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, basta valersi della formula (1), in cui sono dati $f(x)=\text{sen}\, x$ e $a=0$. Perciò si calcola

$$f'(x)=\cos x, \qquad f'(0)=\cos 0=1, \qquad f(0)=\text{sen}\, 0=0;$$

sostituendo nella (1), si ottiene

$$\frac{y-0}{x-0}=1, \qquad \text{ossia} \qquad y=x$$

La fig. 1 visualizza il risultato ottenuto. Procedendo analogamente negli altri due casi, si ottengono le equazioni $y=x+2$ e $y=-2x$).

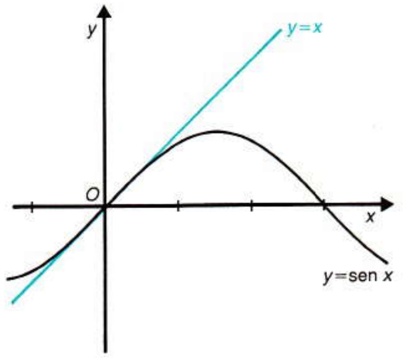


Fig. 1

2. $y=x^2, \quad y=x^3, \quad y=x^4, \quad a=0$ $\qquad [y=0]$

3. $y=x^3+1, \quad y=-2x^3, \quad y=x^3+x^2, \quad a=0$ $\qquad [y=1,\ y=0,\ y=0]$

4. $y=1-x^3, \quad y=-\frac{1}{4}x^4, \quad y=\frac{1}{3}x^3-x^2, \quad a=1$ $\qquad \left[y=-3x+3,\ y=-x+\frac{3}{4},\ y=-x+\frac{1}{3}\right]$

5. $y=\frac{1}{x}, \quad y=\frac{1}{2x}, \quad y=\frac{1}{x+2}, \quad a=1$ $\qquad \left[y=-x+2,\ y=-\frac{1}{2}x+1,\ y=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}\right]$

6. $y=\frac{1}{x^2}, \quad y=\frac{1}{x^3}, \quad y=\frac{1}{x^4}, \quad a=-1$ $\qquad [y=2x+3,\ y=-3x-4,\ y=4x+5]$

7. $y=\frac{x^3+1}{x}$, $y=\frac{x-1}{x^3}$, $y=\frac{1+x^3}{x^2}$, $a=-1$ $\qquad y=-3x-3,\ y=5x+7,\ y=3x+3]$

8. $y=\text{sen}\ x+\cos x$, $y=\text{sen}\ (2x)+\text{sen}\ x$, $y=\frac{1}{2}\text{sen}\ (2x)+\cos(2x)$, $a=0$

$[y=x+1,\ y=3x,\ y=x+1]$

9. $y=2\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $y=-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $a=0$

$\left[y=\sqrt{3}x+1,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4},\ y=x+\sqrt{3}\right]$

10. $y=\text{sen}\ x+\text{sen}^2 x$, $y=\cos^2 x-\cos x$, $y=\text{sen}^3 x+\cos^3 x$, $a=0$ $\qquad [y=x,\ y=0,\ y=1]$

11. $y=e^x$, $a=0$; $y=\ln x$, $a=1$ $\qquad [y=x+1,\ y=x-1]$

12. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $a=1$ $\qquad \left[y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right]$

Negli esercizi dal 13 al 19 sono date le equazioni di due curve; determinare per ogni curva le tangenti che hanno la pendenza m indicata.

13. $y=x^2-5x$, $y=\frac{1}{3}x^3-2$, $m=1$

(Per risolvere, per esempio il 1° esercizio, basta valersi della formula (1), in cui sono dati $f(x)=x^2-5x$ e $f'(a)=1$; perciò occorre calcolare a e f(a). Per determinare a, si calcola la derivata

$$f'(x)=2x-5$$

e si cerca il valore di x per cui risulta

$$2x-5=1;$$

si è così condotti a risolvere un'equazione nell'incognita x, ottenendo

$$x=3.$$

Dunque la tangente alla curva ha pendenza m=1 nel punto A che ha le coordinate seguenti

$$a=3,\quad f(a)=3^2-5\cdot 3=-6,\quad \text{cioè}\quad A(3,\ -6).$$

Sostituendo nella (1), si ottiene infine

$$\frac{y+6}{x-3}=1,\quad \text{ossia}\quad y=x-9$$

Procedendo analogamente nell'altro caso, si ottengono due tangenti che hanno le equazioni

$$y=x-\frac{8}{3}\quad e\quad y=x-\frac{4}{3}).$$

14. $y=x^3-2x^2+1$, $y=x^4-8x^2+2$, $m=0$ $\qquad \left[y=1\ \text{e}\ y=-\frac{5}{27};\ y=2,\ y=-14\right]$

15. $y=\frac{4x}{1+x^2}$, $y=\frac{x+1}{x^2}$, $m=0$ $\qquad \left[y=2\ \text{e}\ y=-2,\ y=-\frac{1}{4}\right]$

16. $y=\frac{1}{1+x}$, $y=\frac{1-x}{x+3}$, $m=-1$ $\qquad [y=-x+1\ \text{e}\ y=-x-3,\ y=-x\ \text{e}\ y=-x-5]$

17. $y=\text{sen}\ x$, $y=2\cos x$, $m=-1$

(Nel periodo [0, 2π] si ottengono le tangenti che hanno le seguenti equazioni:

$$y=-x+\pi;\quad y=-x+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\quad e\quad y=-x-\sqrt{3}+\frac{5}{6}\pi).$$

18. $y=\text{tg}\ x$, $y=\text{arctg}\ x$, $m=1$

(Per la prima funzione si ottiene nel periodo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ la tangente y=x; per la seconda funzione si ottiene la tangente y=x).

19. Spiegare, con opportuni esempi, perché sono sbagliate le seguenti affermazioni che riguardano la retta tangente ad una curva:
- «la tangente incontra la curva in un solo punto»;
- «la tangente non può attraversare la curva nel suo punto di contatto».

Equazione della normale ad una curva

Per scrivere l'equazione della normale n ad una curva d'equazione $y=f(x)$ nel suo punto A d'ascissa a, occorre prima di tutto ricordare che la retta n è la perpendicolare alla tangente t in A (fig. 2).

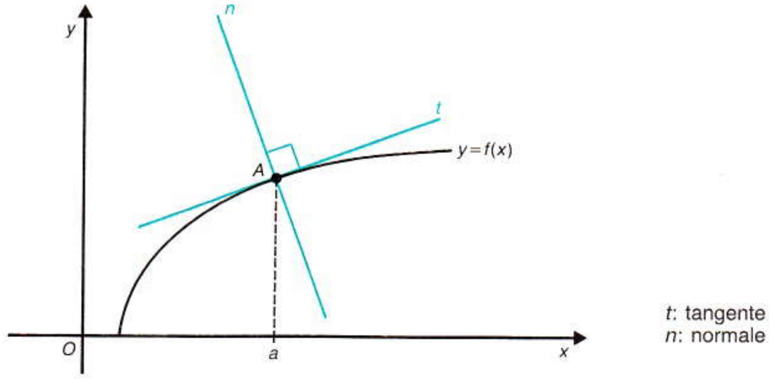


Fig. 2

Così è chiaro che la retta n passa per A, cioè fa parte del fascio di rette per A, descritto dall'equazione

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=m.$$

Per determinare la pendenza m, basta valersi della condizione di perpendicolarità di due rette: due rette sono perpendicolari se il prodotto delle loro pendenze vale -1. La retta n deve allora avere una pendenza m, tale che risulti

$$m\cdot f'(a)=-1, \qquad \text{ossia} \qquad m=-\frac{1}{f'(a)}.$$

L'equazione della normale n è dunque

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=\frac{-1}{f'(a)}. \tag{2}$$

La normale ad una curva si trova spesso associata alla tangente in varie questioni di fisica. Ecco due esempi.

I) Studiando il movimento di un corpo che percorre una data traiettoria, si esamina l'accelerazione, scomponendola in due vettori (fig. 3):
- *l'accelerazione tangenziale, che ha la direzione della tangente alla traiettoria e modifica la grandezza della velocità,*
- *l'accelerazione radiale, che ha la direzione della normale alla traiettoria e modifica la direzione della velocità.*

II) Un campo conservativo (gravitazionale o elettrico) può essere descritto:
- *mediante linee di forza e in tale caso la tangente alla linea di forza indica, in ogni punto, la direzione del vettore campo;*
- *mediante le superfici equipotenziali, che sono perpendicolari in ogni punto al vettore campo. Così, nei campi piani le superfici equipotenziali diventano linee equipotenziali e la normale alla linea equipotenziale indica, in ogni punto, la direzione del campo (fig. 4).*

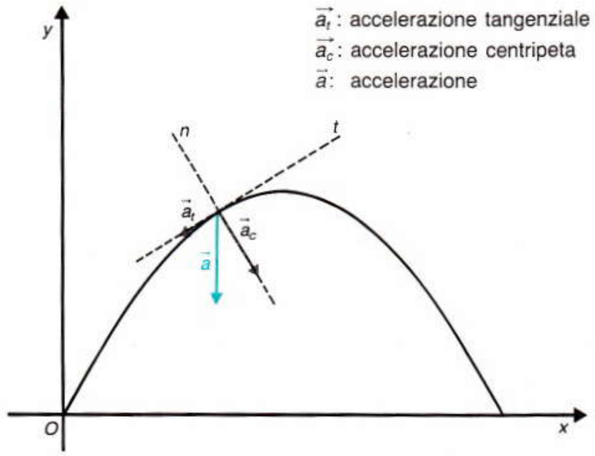


Fig. 3

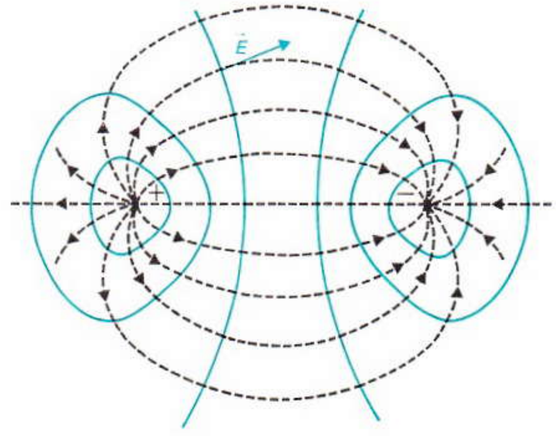


Fig. 4. Rappresentazione delle linee equipotenziali (in colore) nel caso di un campo generato da due cariche uguali in valore assoluto e di segno opposto. In grigio le linee di forza.

Scrivere le equazioni delle tangenti *t* e delle normali *n* alle curve di cui è data l'equazione negli esercizi dal 20 al 25 nel punto d'ascissa *a* indicata. Visualizzare i risultati ottenuti sul piano cartesiano.

20. $y=x^2, \quad y=x^3, \quad y=x^4, \quad a=1$

(Per risolvere, per esempio il 1° esercizio, basta valersi delle formule (1) e (2), in cui sono dati $f(x)=x^2$ e $a=1$. Perciò si calcola

$$f'(x)=2x, \qquad f'(1)=2\cdot 1=2, \qquad f(1)=1^2=1;$$

– sostituendo nella (2), si ottiene l'equazione della normale n, data da

$$\frac{y-1}{x-1}=-\frac{1}{2}, \qquad \text{ossia} \qquad y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$$

– sostituendo nella (1), si ottiene l'equazione della tangente t, data da

$$\frac{y-1}{x-1}=2, \qquad \text{ossia} \qquad y=2\cdot x-1$$

La fig. 5 visualizza i risultati ottenuti.
Procedendo analogamente negli altri due casi, si ottengono le seguenti equazioni:

$$n: y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \quad e \quad t: y=3x-2, \qquad n': y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \quad e \quad t': y=4x-3).$$

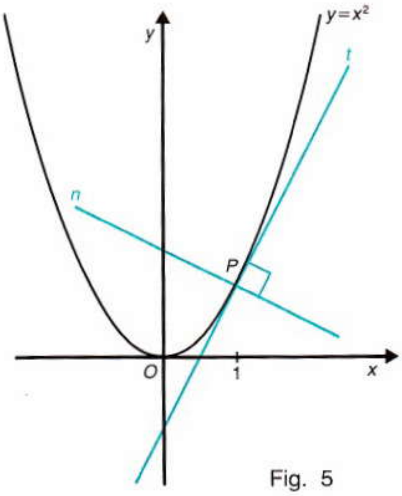


Fig. 5

21. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2, \quad a=2$ $\left[n: y=-\frac{1}{2}x+1, \ t: y=2x-4\right]$

22. $y=-\frac{2}{3}x^3+2x-\frac{4}{3}, \quad a=-2$ $\left[n: y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}, \ t: y=-6x-12\right]$

23. $y=\frac{-2}{x}, \quad y=\frac{1}{2-x}, \quad a=1$ $\left[n: y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \ e \ t: y=2x-4, \ n': y=-x+2 \ e \ t': y=x\right]$

24. $y=\frac{2x+1}{x}, \quad y=\frac{1-x}{x}, \quad a=-1$ $[n: y=x+2 \ e \ t: y=-x, \ n': y=x-1 \ e \ t': y=-x-3]$

25. $y=\text{sen } x-\cos x, \quad y=\text{sen}^2 x+\text{sen } x \cos x, \quad a=0$

$[n: y=-x-1 \text{ e } t: y=x-1, \ n': y=-x \text{ e } t': y=x]$

Curve tangenti

Date due curve d'equazione $y=f(x)$ e $y=g(x)$, si dice che le curve sono fra loro tangenti in un punto A di ascissa a, se si verificano le seguenti condizioni:

- *le curve si incontrano nel punto A, cioè risulta $f(a)=g(a)$,*
- *le curve toccano in A la stessa retta tangente, cioè risulta $f'(a)=g'(a)$.*

26. Sono date le due curve d'equazione

$$y=x^3-x \quad \text{e} \quad y=x^2-1.$$

Determinare i punti di intersezione fra le due curve e scrivere le equazioni delle tangenti a ciascuna curva nei punti di intersezione.
In quale punto le due curve sono tangenti?
Visualizzare i risultati ottenuti con un grafico cartesiano.

(Per determinare i punti di incontro fra le due curve si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due curve

$$f(x)=x^3-x \quad e \quad g(x)=x^2-1;$$

si ottengono i punti $A(1, 0)$ e $B(-1, 0)$.
Le tangenti richieste sono: $y=2x-2$, nel punto A; $y=2x+2$ e $y=-2x-2$, nel punto B. Perciò le curve risultano tangenti in A, fig. 6).

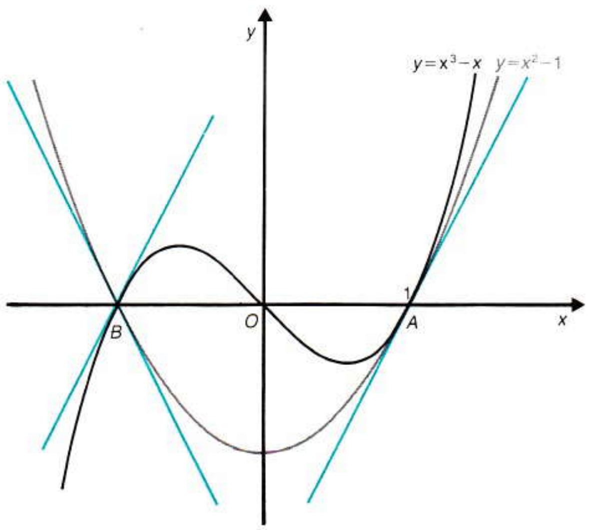


Fig. 6

27. Ripetere l'esercizio 26, a partire dalle seguenti coppie di curve

$$y=x^2+1 \quad \text{e} \quad y=x^3-x+2.$$

(Punti di intersezione $A(-1, 2)$ e $B(1, 2)$, tangenza in B).

28. Verificare che sono tangenti in un punto le due curve seguenti

$$f(x)=x^2 \quad \text{e} \quad g(x)=2\ln x+1.$$

Scrivere l'equazione della tangente comune e visualizzare i risultati ottenuti con un grafico cartesiano.

(Tenere presente che risulta $f'(x)=2x$, $g'(x)=\frac{2}{x}$ e quindi $f'(x)=g'(x)$... Le curve sono tangenti in $A(1, 1)$ con tangente t d'equazione $y=2x-1$).

29. Verificare che le due curve seguenti non sono tangenti, ma hanno tangenti parallele, di cui si chiedono le equazioni ed i punti di contatto.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2, \qquad g(x)=\frac{1}{x}.$$

(Si ha: $f'(x)=g'(x)$ per $x=-1$, ma $f(-1)=\frac{1}{2}$ e $g(-1)=-1$, fig. 7).

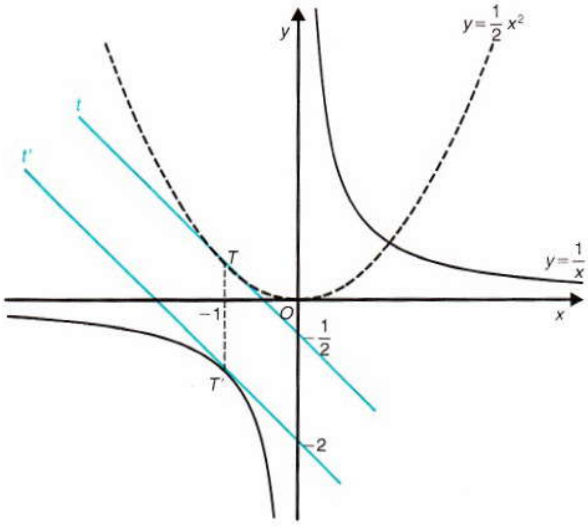


Fig. 7

30. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti coppie di curve

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}, \qquad g(x)=x^2-2x+7$$

(Le tangenti hanno equazione $y=-2x-1$ e $y=-2x+7$).

Inclinazione della tangente

Ricordiamo che, per una retta d'equazione

$$y=mx+q,$$

si ha (fig. 8):

$$m=\text{tg}\ \alpha;$$

dove m è la pendenza e α è l'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle x.
Ora, quando è data una curva d'equazione $y=f(x)$, la retta t, tangente alla curva nel suo punto A d'ascissa a, ha la pendenza data da

$$m=f'(a).$$

*Perciò è facile determinare **l'inclinazione della retta tangente**: basta calcolare l'angolo α che la retta t forma con la direzione positiva dell'asse delle x, risolvendo l'equazione*

$$\text{tg}\ \alpha=f'(a).$$

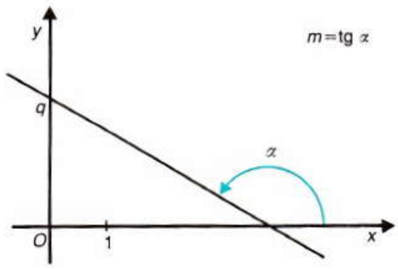


Fig. 8

Determinare l'inclinazione delle rette tangenti alle curve di cui è data l'equazione negli esercizi dal 31 al 36 nei punti di ascissa a indicata. Visualizzare i risultati ottenuti sul piano cartesiano.

31. $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $a=1$ $[\alpha_1\approx 63°,\ \alpha_2\approx 71°,\ \alpha_3\approx 76°]$

32. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$, $y=\frac{1}{x^4}$, $a=1$ $[\alpha_1\approx 116°,\ \alpha_2\approx 108°,\ \alpha_3\approx 104°]$

33. $y=x^3+x$, $y=x^3+x^2$, $y=x^4+x^2$, $y=x^4+x^3$, $a=-1$ $[\alpha_1\approx 76°,\ \alpha_2=45°,\ \alpha_3\approx 99°,\ \alpha_4=135°]$

34. $y=x+\frac{1}{x}$, $y=x-\frac{1}{x}$, $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, $y=x^2-\frac{1}{x^2}$, $a=1$ $[\alpha_1=0°,\ \alpha_2\approx 63°,\ \alpha_3=0°,\ \alpha_4\approx 76°]$

35. $y=e^x$, $y=\operatorname{sen} x$, $y=e^x+\operatorname{sen} x$, $y=e^x \operatorname{sen} x$, $a=0$ $[\alpha_1=45°,\ \alpha_2=45°,\ \alpha_3\approx 63°,\ \alpha_4=45°]$

36. $y=\ln x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}\ln x$, $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $a=1$ $[\alpha_1=45°,\ \alpha_2\approx 26°,\ \alpha_3=45°,\ \alpha_4=45°]$

37. Sono date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, ambedue derivabili per $x=a$, e si indicano con α e β le inclinazioni delle rispettive tangenti nei punti d'ascissa a. Descrivere i seguenti procedimenti:

- il procedimento per calcolare l'inclinazione γ della retta tangente alla curva d'equazione $y=f(x)+g(x)$ nel punto d'ascissa a; risulta $\gamma=\alpha+\beta$?
- il procedimento per calcolare l'inclinazione δ della retta tangente alla curva d'equazione $y=f(x)-g(x)$ nel punto d'ascissa a; risulta $\delta=\alpha-\beta$?

(Tenere presente che risulta

$$tg\ \alpha=f'(a), \quad tg\ \beta=g'(a), \quad tg\ \gamma=f'(a)+g'(a), \quad tg\ \delta=f'(a)-g'(a)\ \ldots).$$

Per le curve di cui è data l'equazione negli esercizi dal 38 al 43, determinare i punti in cui la retta tangente ha l'inclinazione α indicata.

38. $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=2x^2-x$, $\alpha=45°$

(Per determinare le ascisse dei punti richiesti si risolve l'equazione

$$f'(x)=tg\ \alpha.$$

Per svolgere, per esempio il primo esercizio, si procede dunque così:

- *si calcola la derivata $f'(x)=2x+2$;*
- *si calcola il valore di tg α, che è dato da tg $45°=1$;*
- *si risolve l'equazione $2x+2=1$.*

In questo caso si ha un'equazione di 1° grado che ha la soluzione $x=-\frac{1}{2}$. Si ottiene dunque un solo punto: $A\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$. Procedendo analogamente nel secondo caso, si ottiene il punto $B\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$).

39. $f(x)=x^2-x^3$, $g(x)=-x^4+\frac{3}{2}x^2$, $\alpha=135°$

(Si ottengono, per la prima curva $A(1,\ 0)$ e $B\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{27}\right)$; per la seconda curva $A'\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ e $B'\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)$).

40. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2+\frac{1}{x-1}$, $\alpha=135°$

(Si ottengono, per la prima curva $A(1,\ 1)$ e $B(-1,\ -1)$; per la seconda curva $A'(0,\ 1)$ e $B'(2,\ 3)$).

41. $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\alpha=30°$

(Si ottiene per la prima curva $A\left(\frac{3}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; nessun punto sulla seconda curva).

42. $y=\sqrt{1-2x}$, $y=2\operatorname{sen}^2 x$, $\alpha=120°$

(Si ottiene per la prima curva $A\left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; per la seconda curva si ottengono, nel periodo $[0,\ 2\pi]$ i punti $B\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$ e $C\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{3}{2}\right)$).

Angolo fra due curve

Date due curve d'equazione $y=f(x)$ e $y=g(x)$, che si incontrano in un punto A di ascissa a, l'angolo fra le due curve è l'angolo γ, fra le due rette t e t', tangenti alle curve nel punto A (fig. 9).
È facile determinare l'angolo γ, quando si conosce l'inclinazione α e β delle due rette t e t', dato che risulta (fig. 10)

$$\gamma=\beta-\alpha.$$

Così il problema è risolto, quando entrambe le funzioni sono derivabili in A, dato che si ha

$$tg\ \alpha=f'(a) \qquad e \qquad tg\ \beta=g'(a).$$

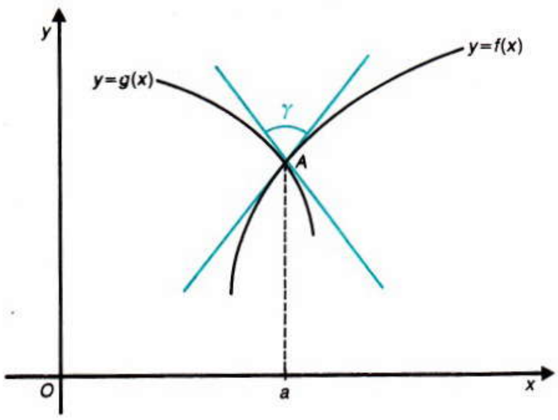


Fig. 9

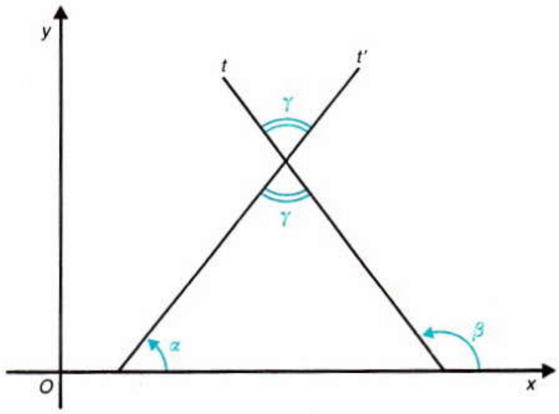


Fig. 10

Determinare i punti di intersezione delle coppie di curve, di cui è data l'equazione negli esercizi dal 43 al 47; determinare l'ampiezza dell'angolo γ formato fra le due curve in tali punti di intersezione.

43. $y=x^2-2x$ e $y=x$ [$\gamma\approx 71°$ in $O(0, 0)$; $\gamma'\approx 31°$ in $A(3, 3)$]

44. $y=x^2-x$ e $y=2x^3+3x^2-2x-3$ [$\gamma\approx 39°$ in $A(1, 0)$]

45. $y=x^2$ e $y=\dfrac{1}{x}$ [$\gamma\approx 72°$ in $A(1, 1)$]

46. $y=\sqrt{x+1}$ e $y=-x+1$ [$\gamma\approx 108°$ in $A(0, 1)$]

47. $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$
(Le due curve si incontrano in due punti $A(1, 1)$ e $O(0, 0)$. In A si calcola $\gamma\approx 37°$; ma in O si incontra una difficoltà, dato che la seconda funzione non è derivabile; tuttavia si può risolvere il problema per altra via, per esempio tenendo presente il grafico delle due curve...).

Problemi vari

48. Data la funzione $y=\dfrac{2x-1}{x}$, determinare

- la tangente t e la normale n alla curva nel punto d'ascissa $x=2$;
- le rette t_1 e t_2 tangenti alla curva e che hanno un'inclinazione di 45°.

Visualizzare sul piano cartesiano i risultati ottenuti.

($t: y=\frac{1}{4}x+1$, $n: y=-4x+\frac{19}{2}$; $t_1: y=x$, $t_2: y=x+4$).

49. Data la curva d'equazione

$$y=x^3+3x-4,$$

determinare l'ampiezza γ dell'angolo fra le tangenti alla curva nei punti di intersezione con gli assi cartesiani.
Dimostrare che tutte le rette tangenti alla curva formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse delle x.

($\gamma \approx 9°$; il segno di y' è positivo per qualunque x e perciò...).

50. Condurre dal punto $P(0, 3)$ le tangenti alla curva d'equazione

$$y=\frac{1}{x^2}.$$

(Tenere presente che il punto P non appartiene alla curva assegnata; perciò non è dato il punto A di tangenza. Si può allora procedere così:

– *si indica con a l'ascissa del punto A, e si calcolano f(a) e f'(a), date da*

$$f(a)=\frac{1}{a^2}, \qquad f'(a)=\frac{-2}{a^3}$$

– *si scrive l'equazione di una delle tangenti richieste, data da*

$$\frac{y-\frac{1}{a^2}}{x-a}=\frac{-2}{a^3}, \qquad \text{ossia} \qquad y-\frac{1}{a^2}=\frac{-2}{a^3}\cdot(x-a)$$

– *si ricorda che la tangente passa per P(0, 3), solo se le coordinate di P soddisfano l'equazione della retta; sostituendo le coordinate di P al posto di x e y nell'equazione, si ha:*

$$3-\frac{1}{a^2}=\frac{-2}{a^3}\cdot(0-a), \qquad \text{ossia} \qquad 3=\frac{3}{a^2}$$

– *l'equazione è soddisfatta dalle coordinate di P solo se risulta*

$$a^2=1, \qquad \text{da cui} \qquad a=\pm 1$$

– *si conclude che le tangenti richieste sono*

$t: y=-2x+3$, tangente in $A(1, 1)$ e $t': y=2x+3$, tangente in $A'(-1, 1)$).

51. Condurre dal punto $P(1, 1)$ le tangenti alla curva d'equazione

$$y=2x^3+5x-4$$

(Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente si ottiene

$$y=5x-4 \qquad e \qquad y=\frac{37}{2}x-\frac{35}{2}).$$

52. Condurre dal punto $P(1, 1)$ le tangenti alla curva d'equazione

$$y=e^x+1$$

(Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente si ottiene la tangente $y=e^2x+1-e^2$).

53. Data la funzione $y=\dfrac{2+x^2}{x}$, risolvere i seguenti quesiti.

1) Determinare l'equazione della tangente t e della normale n alla curva nel punto d'ascissa $x=2$; calcolare le coordinate del punto N, ulteriore intersezione della retta n con la curva.
2) Determinare le equazioni delle rette t' e t'', che sono tangenti alla curva ed hanno un'inclinazione di 135°, calcolando i punti di contatto.
3) Determinare le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla curva condotte dal punto $A(4, 0)$; scrivere l'equazione della retta r che unisce i punti di contatto e calcolare l'ampiezza degli angoli del triangolo determinato dalle rette t_1, t_2 ed r.
4) Tracciare il grafico della funzione, valendosi della composizione grafica di funzioni note; disegnare tutte le rette determinate prima.

($t: y=\frac{1}{2}x+2$, $n: y=-2x+7$, $t': y=-x+4$, $t'': y=-x-4$, $t_1=t'$, $t_2: y=\frac{1}{2}x-2$, $r: y=2x+1$).

54. Dato il fascio di curve d'equazione

$$y=kx^3-x,$$

risolvere i seguenti quesiti:

- indicare le condizioni affinché le curve intersechino l'asse delle x in punti distinti da O;
- verificare che, in tal caso, le tangenti nei punti di intersezione con l'asse delle x hanno tutte la stessa inclinazione γ di cui si chiede il valore;
- verificare che tutte le curve del fascio hanno un solo punto in comune nel quale sono tangenti.

(Deve essere $k>0$, risulta $\gamma\approx 63°$, ...).

55. Determinare i parametri h e k, in modo che la curva d'equazione

$$y=\frac{hx+k}{x^2}$$

passi per il punto $A(1, 3)$ e sia ivi tangente alla retta t d'equazione

$$y=-4x+7.$$

Visualizzare sul piano cartesiano i risultati ottenuti.

(Tenere presente che

- *la curva passa per $A(1, 3)$, se risulta $y(1)=3$, cioè $h+k=3$;*
- *la tangente in A ha pendenza $m=-4$, se risulta $y'(1)=-4$, cioè $-h-2k=-4$.*

Per determinare il valore di h e k occorre allora risolvere il seguente sistema di due equazioni

$$\begin{cases} h+k=3 \\ -h-2k=-4. \end{cases}$$

Si ottiene $h=2$, $k=1$ ...).

56. Determinare i parametri h e k, in modo che la curva d'equazione

$$y=\frac{x^2}{hx+k}$$

passi per il punto $A(2, -1)$ e abbia ivi come normale la retta n d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x-2$$

(Seguendo un procedimento analogo a quello indicato nell'esercizio precedente, si ottiene $h=4$ e $k=-12$).

57. Determinare il valore del parametro k in modo che la curva d'equazione

$$y=kx^3-x+4$$

abbia nel punto d'ascissa $x=1$ la tangente orizzontale.
Visualizzare sul piano cartesiano i risultati ottenuti.

(Si ottiene $k=\frac{1}{3}$).

58. Determinare le costanti a, b, c, in modo che le curve d'equazione

$$f(x)=x^2+ax+b \qquad \text{e} \qquad g(x)=x^3+c$$

siano tangenti nel punto $A(1, 2)$.
Determinare l'equazione della tangente comune e visualizzare sul piano cartesiano i risultati ottenuti.

(Per determinare le tre costanti a, b, c occorrono tre condizioni, che in questo caso sono le seguenti:

- *$y=f(x)$ passa per A, solo se risulta $f(1)=2$,*
- *$y=g(x)$ passa per A, solo se risulta $g(1)=2$,*
- *le due curve sono tangenti in A se risulta $f'(1)=g'(1)$.*

Risolvendo il sistema formato da queste tre condizioni, si ottiene

$$a=c=1, \qquad b=0.$$

La tangente comune ha equazione $y=3x-1$).

59. Determinare i coefficienti a, b, c, d, in modo che la curva d'equazione

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

sia tangente alla retta t d'equazione $y=3x-1$ in $A(1, 2)$, e alla retta t' d'equazione $y=10x-12$ in $A'(2, 8)$.
Visualizzare i risultati ottenuti sul piano cartesiano.

(Si ottiene $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=0$).

60. Riferirsi alla fig. 11, dove sono rappresentati:

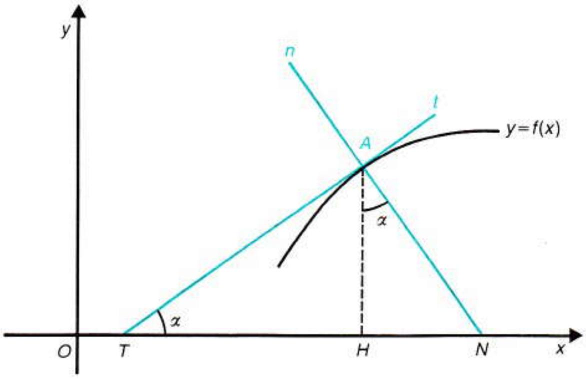
- una curva d'equazione $y=f(x)$, di cui si considera il punto $A[a, f(a)]$,
- la retta t, che è tangente alla curva in A ed incontra l'asse delle x in T,
- la retta n, che è normale alla curva in A ed incontra l'asse delle x in N,
- la retta p, che passa per A, è parallela all'asse delle y ed incontra l'asse delle x in H.

Verificare che risulta:

$$\overline{TH}=\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \qquad \overline{HN}=|f(a)\cdot f'(a)|$$

$$\overline{TA}=\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\cdot\sqrt{1+[f'(a)]^2}\right|, \qquad \overline{NA}=\left|f(a)\cdot\sqrt{1+[f'(a)]^2}\right|$$

Spesso il segmento TH prende il nome di ***sottotangente****, mentre il segmento HN prende il nome di* ***sottonormale****).*



$\overline{AH}=|f(a)|$, $\operatorname{tg}\alpha=f'(a)$

$\overline{TH}=\dfrac{\overline{AH}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\overline{HN}=\overline{AH}\cdot\operatorname{tg}\alpha$

Fig. 11

2. Il differenziale

61. Data la funzione $f(x)=x^2$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f\approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=(1+h)^2$; interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

(Si ottiene $\Delta f=2h+h^2$, $df=2h$, $(1+h)^2\approx 1+2h$; per l'interpretazione geometrica dell'approssimazione, basarsi sulla fig. 12).

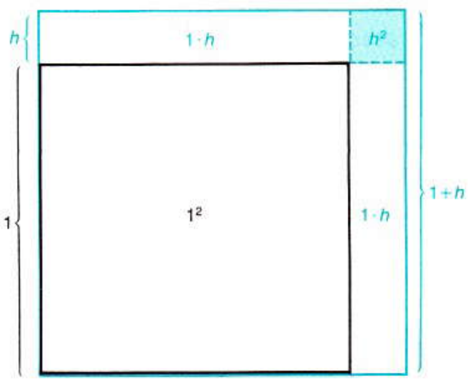


Fig. 12

62. Data la funzione $f(x)=x^3$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=(1+h)^3$; interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

(Si ottiene:

$\Delta f=3h+3h^2+h$, $df=3h$, $(1+h)^3 \approx 1+3h$;

per l'interpretazione geometrica dell'approssimazione, basarsi sulla fig. 13).

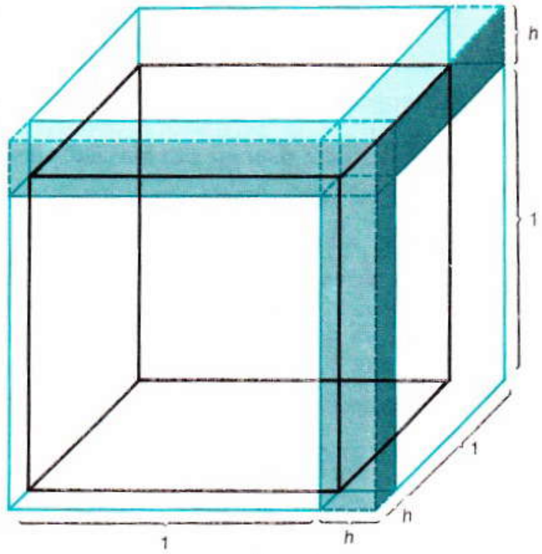


Fig. 13

63. Generalizzare i risultati ottenuti nei due esercizi precedenti:
considerare una funzione del tipo $f(x)=x^n$, fissare sempre l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti.

- Indicare l'incremento Δf e calcolare il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=(1+h)^n$.

(Si ottiene $\Delta f=(1+h)^n-1$, $df=nh$, $(1+h)^n \approx 1+nh$).

64. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x}$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf e calcolare il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=\dfrac{1}{1+h}$.

(Si ottiene $\Delta f=\dfrac{1}{1+h}-1$, $df=-h$, $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$).

65. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf e calcolare il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=\dfrac{1}{(1+h)^2}$.

(Si ottiene $\Delta f=\dfrac{1}{(1+h)^2}-1$, $df=-2h$, $\dfrac{1}{(1+h)^2} \approx 1-2h$).

66. Generalizzare i risultati ottenuti nei due esercizi precedenti:

considerare una funzione del tipo $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$, fissare sempre l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare l'incremento Δf e calcolare il differenziale df corrispondenti ad un dato incremento h;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=\dfrac{1}{(1+h)^n}$.

(Si ottiene $\Delta f=\dfrac{1}{(1+h)^n}-1$, $df=-nh$, $\dfrac{1}{(1+h)^n} \approx 1-nh$).

67. Data la funzione $f(x)=\text{sen } x$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=0$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento α dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(0+\alpha)=\text{sen } \alpha$; interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

(Si ottiene $\Delta f=\text{sen } \alpha$, $df=\alpha$, $\text{sen } \alpha \approx \alpha$; basarsi sulla fig. 14 per interpretare geometricamente l'approssimazione).

68. Data la funzione $f(x)=\cos x$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=0$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento α dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(0+\alpha)=\cos \alpha$; interpretare geometricamente l'approssimazione ottenuta.

(Si ottiene $\Delta f=\cos \alpha - 1$, $df=0$, $\cos \alpha \approx 1$; basarsi sulla fig. 15 per interpretare geometricamente l'approssimazione).

69. Data la funzione $f(x)=\text{tg } x$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=0$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento α dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(0+\alpha)=\text{tg } \alpha$.

(Si ottiene $\Delta f=\text{tg } \alpha$, $df=\alpha$, $\text{tg } \alpha \approx \alpha$; basarsi sulla fig. 16 per interpretare geometricamente l'approssimazione).

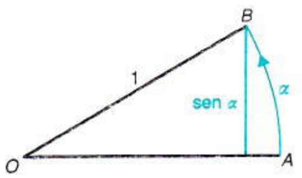


Fig. 14

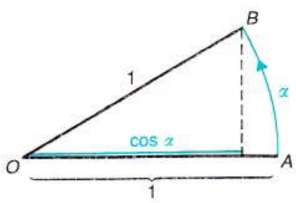


Fig. 15

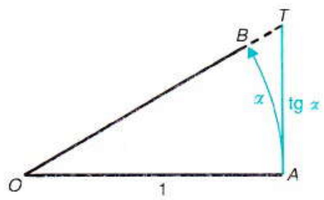


Fig. 16

70. Data la funzione $f(x)=e^x$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=0$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento h dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(0+h)=e^h$.

(Si ottiene $\Delta f=e^h-1$, $df=h$, $e^h \approx 1+h$).

71. Data la funzione $f(x)=\ln x$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento h dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- valersi dell'approssimazione $\Delta f \approx df$ per ricavare un valore approssimato dell'espressione $f(1+h)=\ln (1+h)$.

(Si ottiene $\Delta f=\ln (1+h)$, $df=h$, $\ln (1+h) \approx h$).

72. Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento h dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- dall'approssimazione $\Delta f \approx df$, ricavare un valore approssimato di

$$f(1+h)=\sqrt{1+h}$$

(Si ottiene $\Delta f=\sqrt{1+h}-1,\ df=\frac{1}{2}\cdot h,\ \sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot h$*).*

73. Ripetere l'esercizio 72, fissando l'attenzione su un punto P d'ascissa a generica, in modo da ricavare il valore approssimato di

$$f(a+h)=\sqrt{a+h}$$

Valersi del risultato ottenuto, per calcolare un valore approssimato delle seguenti radici quadrate:

$$\sqrt{102}=\sqrt{100+2},\qquad \sqrt{903}=\sqrt{900+3},\qquad \sqrt{1601}=\sqrt{1600+1}$$

Confrontare i risultati ottenuti con quelli dati dal calcolatore.

(Si ottiene $\sqrt{a+h}\approx\sqrt{a}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot h$*).*

74. Data la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$, fissare l'attenzione sul punto P d'ascissa $a=1$ e risolvere i seguenti quesitit:

- calcolare l'incremento Δf ed il differenziale df corrispondente ad un incremento h dato all'ascissa;
- visualizzare Δf e df sul piano cartesiano;
- dall'approssimazione $\Delta f \approx df$, ricavare un valore approssimato di

$$f(1+h)=\sqrt[3]{1+h}$$

(Si ottiene $\Delta f=\sqrt[3]{1+h}-1,\ df=\frac{1}{3}\cdot h,\ \sqrt[3]{1+h}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot h$*).*

75. Ripetere l'esercizio 74, fissando l'attenzione su un punto P d'ascissa a generica, in modo da ricavare un valore approssimato di

$$f(a+h)=\sqrt[3]{a+h}$$

Valersi del risultato ottenuto, per calcolare il valore approssimato delle seguenti radici cubiche:

$$\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27+1},\qquad \sqrt[3]{1003}=\sqrt[3]{1000+3},\qquad \sqrt[3]{64006}=\sqrt[3]{64000+6}$$

Confrontare i risultati ottenuti con quelli forniti dal calcolatore.

(Si ottiene $\sqrt[3]{a+h}\approx\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot h$*).*

Problemi vari

76. Una ditta che deve produrre pannelli quadrati con la superficie di 1 m^2, organizza il controllo di qualità della produzione misurando i lati dei pannelli prodotti. Sapendo che l'errore ammissibile sulla superficie è di 0,01 m^2, determinare l'errore h ammissibile sulla lunghezza del lato.

(Basarsi sui risultati dell'esercizio 61, tenendo presente che

- *la superficie y è legata alla lunghezza x del lato dalla legge $y=x^2$,*
- *l'errore sulla superficie è Δy, che può essere approssimato con dy,*
- *la fig. 12 interpreta geometricamente la differenza $\Delta y-dy$).*

77. Mostrare che un errore relativo h commesso misurando la lunghezza del raggio di un cerchio comporta un errore relativo che vale circa $2h$ nella misura dell'area del cerchio.

(Basarsi sui risultati dell'esercizio 61, tenendo presente che la superficie y è legata alla lunghezza x del raggio dalla legge $y=\pi x^2$).

78. Mostrare che un dato errore relativo commesso misurando la lunghezza del raggio di una sfera comporta approssimativamente

- un errore relativo doppio nella misura della superficie della sfera,
- un errore relativo triplo nella misura del volume della sfera.

(Basarsi sui risultati degli esercizi 61 e 62, tenendo presente che

- *la superficie y è legata alla lunghezza x del raggio dalla legge $y=4\pi x^2$,*
- *il volume y è legato alla lunghezza x del raggio dalla legge $y=\frac{4}{3}\pi x^3$).*

79. Il raggio della Terra misura circa 6400 km, l'altezza dell'atmosfera è di circa 50 km; valutare approssimativamente il volume occupato dall'atmosfera (in km^3).

80. Esaminare la legge di Ohm

$$I=\frac{V}{R},$$

considerando la tensione V costante; mostrare che le piccole variazioni dell'intensità di corrente I, corrispondenti a piccole variazioni della resistenza R, si possono calcolare approssimativamente con la formula

$$\Delta I\approx\frac{-I}{R}\cdot\Delta R$$

(Tenere presente lo svolgimento dell'esercizio 64; se la resistenza varia di una quantità $\Delta R=h$, la corrente ha una variazione ΔI, data da

$$\Delta I=V\cdot\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)$$

mentre risulta

$$dI=V\cdot\left(\frac{-1}{R^2}\cdot h\right)$$

Approssimando ΔI con dI e applicando la legge di Ohm, ...)

81. Esaminare la legge

$$W=\frac{V^2}{R},$$

che lega la potenza W dissipata da un conduttore alla resistenza R e alla tensione V; considerare V costante e mostrare che le piccole variazioni della potenza W, corrispondenti a piccole variazioni di R, si possono calcolare approssimativamente basandosi sulla formula seguente

$$\Delta W\approx\frac{-W}{R}\cdot\Delta R$$

(Tenere presente lo svolgimento dell'esercizio precedente).

La notazione di Leibniz

Si può considerare il differenziale di una funzione non solo riferendosi ad un'ascissa fissata a, ma anche riferendosi ad una generica ascissa x, scelta nel campo di esistenza della funzione. In tal caso il differenziale diventa una funzione di due variabili (x ed h) e viene indicato con df(x).
Risulta dunque

$$df(x)=f'(x)h. \qquad (1)$$

Se, in particolare, si calcola il differenziale della funzione y=x, si ottiene

$$dx=1h, \qquad ossia \qquad h=dx;$$

si è dunque condotti a sostituire dx al posto di h nella (1), scrivendo il differenziale di una funzione y=f(x) nella forma seguente:

$$df(x)=f'(x)dx.$$

Da quest'ultima uguaglianza si può ricavare

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

si ritrova così il simbolo $\frac{df(x)}{dx}$ *scelto da Leibniz*[1] *per indicare la derivata.*
Valendosi di questa notazione, la derivata viene definita nel modo seguente

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Proprio su questo simbolo Leibniz ha basato un suo tentativo di "spiegare" la derivata: df(x) e dx venivano considerate come due "quantità infinitesime" e la derivata era il rapporto fra queste due quantità infinitesime.
Leibniz pensava dunque gli infinitesimi come nuovi numeri, che fossero più piccoli di qualunque numero reale positivo, senza però assumere il valore 0. Questo concetto di infinitesimo era estremamente sfuggente, perciò l'analisi resta una scienza oscura e misteriosa fino al XIX secolo, quando il concetto di limite sostituisce gli infinitesimi; si arriva così alla definizione più recente: la derivata è il limite del rapporto incrementale.
Cambia dunque il punto di vista, ma il simbolo di Leibniz rimane a sintetizzare l'elaborato processo di derivazione, che consiste nel costruire il rapporto incrementale e, quindi, nel calcolarne il limite.
Tuttavia molti trovano ancora utile considerare i differenziali come infinitesimi, per esprimere più rapidamente calcoli e risultati.

Gli esercizi seguenti conducono a svolgere qualche calcolo in cui si possono considerare i differenziali dal punto di vista di Leibniz.

82. Verificare che, date una costante k e una funzione derivabile $y=f(x)$, si ha:

$$dk=0, \qquad d[k\cdot f(x)]=k\cdot df(x), \qquad d\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{df}{f^2(x)}$$

83. Verificare che, per due funzioni derivabili $y=f(x)$ e $y=g(x)$, risulta

$$d[f(x)+g(x)]=df(x)+dg(x), \qquad d[f(x)\cdot g(x)]=f(x)\cdot dg(x)+g(x)\cdot df(x)$$

84. Verificare che, per la funzione $y=fg(x)$, composta da due funzioni derivabili $y=f(z)$ e $z=g(x)$, risulta $\frac{df(x)}{dx}=\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}$.

85. Verificare che, se $y=f(x)$ è una funzione derivabile e invertibile e $x=g(y)$ è la sua funzione inversa, risulta $\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}=1$.

[1] Leibniz (1646-1716) può essere ritenuto, insieme a Newton, "l'inventore" del calcolo infinitesimale; a lui si deve la maggior parte dei simboli e dei termini su cui si basa l'analisi.

3. Crescenza e decrescenza di una curva

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dall'86 al 97 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente o decrescente,
II) calcolare la derivata $y'=f'(x)$,
III) tracciare il grafico della derivata $y'=f'(x)$ e indicare gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva o negativa,
IV) confrontare i due grafici ottenuti e verificare che

- **se risulta $f'(x)>0$, allora $f(x)$ è crescente,**
- **se risulta $f'(x)<0$, allora $f(x)$ è decrescente.**

86. $y=2x$, $y=2x+3$, $y=2x-4$

87. $y=-3x$, $y=-3x+2$, $y=-3x-5$

88. $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=2x^3-1$

89. $y=-x^3$, $y=-\frac{1}{2}x^3$, $y=-\frac{1}{2}x^3+1$

90. $y=(x-1)^3$, $y=(x+1)^3$, $y=-(x-1)^3$

91. $y=x^3+3x$, $y=x^3+x^2+2x$

92. $y=-\frac{1}{3}x^3-x$, $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$

93. $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}-2$, $y=\frac{1}{x-2}$

94. $y=-\frac{1}{x}$, $y=2-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x+2}$

95. $y=x-\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}-x$

96. $y=e^x$, $y=-e^x$, $y=e^{-x}$

97. $y=\ln x$, $y=-\ln x$, $y=\ln(-x)$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 98 al 107 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente o decrescente,
II) calcolare la derivata $y'=f'(x)$,
III) studiare algebricamente il segno della derivata $y'=f'(x)$ e indicare gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva o negativa,
IV) confrontare i risultati ottenuti e verificare che

- **se risulta $f'(x)>0$, allora $f(x)$ è crescente,**
- **se risulta $f'(x)<0$, allora $f(x)$ è decrescente.**

98. $y=x^3-\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}-x^3$

99. $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$

100. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=1+\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{1+x}$

101. $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{arctg} x$

102. $y=\operatorname{arcsen} x$, $y=\arccos x$

103. Dimostrare che la retta tangente ad una curva crescente ha un'inclinazione $\alpha>90°$, mentre la retta tangente ad una curva decrescente ha un'inclinazione $\alpha<90°$.

(Vedi pag. 448 per l'inclinazione della tangente).

104. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se una funzione $y=f(x)$ è crescente in un intervallo, la funzione $y=-f(x)$ è decrescente nello stesso intervallo».

105. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se una funzione $y=f(x)$ è crescente in un intervallo, la funzione $y=\frac{1}{f(x)}$ è decrescente nello stesso intervallo».

106. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «la somma di due funzioni crescenti è ancora una funzione crescente».

107. È data una funzione $y=f(x)$ crescente; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ è ancora una funzione crescente.

4. Punti di massimo o minimo relativo

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 108 al 118 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare i punti di massimo o minimo relativo,
II) calcolare la derivata $y'=f'(x)$,
III) tracciare il grafico della derivata $y'=f'(x)$ e indicare i punti in cui risulta $f'(x)=0$,
IV) confrontare i due grafici ottenuti e verificare che

- **se una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta nel punto A d'ascissa a un massimo o un minimo relativo, allora risulta $f'(a)=0$,**
- **se risulta $f'(a)=0$, allora il punto A d'ascissa a è un punto stazionario.**

108. $y=x^2+1, \quad y=x^2-2x, \quad y=(x-1)^2$

109. $y=1-x^2, \quad y=-x^2+4x, \quad y=-(x-2)^2$

110. $y=x^2-4x+3, \quad y=x^2-4x+5, \quad y=-x^2+4x-3$

111. $y=x^4, \quad y=x^4-1, \quad y=(x-1)^4$

112. $y=-x^4, \quad y=1-x, \quad y=-(x-1)^4$

113. $y=x^3, \quad y=x^3-2, \quad y=(x-2)^3$

114. $y=\text{sen } x, \quad y=2 \text{ sen } x, \quad y=-\text{sen } x$

115. $y=\text{sen }(-x), \quad y=\text{sen }(2x), \quad y=\text{sen } \dfrac{x}{2}$

116. $y=\text{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right), \quad y=\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right), \quad y=\text{sen } x+2$

117. $y=\cos x, \quad y=3 \cos x, \quad y=-\cos x$

118. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), \quad y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), \quad y=\cos x-3$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 119 a 129 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche descritte nel cap. 1,
II) calcolare la derivata $y'=f'(x)$,
III) studiare[1] il segno della derivata $y'=f'(x)$, esaminando in particolare i valori di x cui risulta $f'(x)=0$,
IV) determinare le coordinate dei punti di massimo e minimo relativo.

119. $y=x^3-3x, \quad y=x^3-3x+1, \quad y=-x^3+3x$

120. $y=2x^3-3x^2, \quad y=2x^3-3x^2-1, \quad y=-2x^3+3x^2$

121. $y=\dfrac{1}{4}x^4+x^3, \quad y=\dfrac{1}{4}x^4+x^3+5, \quad y=-\dfrac{1}{4}x^4-x^3$

122. $y=x^4-2x^2, \quad y=x^4-2x^2+1, \quad y=x^4+2x^2$

123. $y=x^4+4x, \quad y=x^4+4x+2, \quad y=-x^4-4x$

124. $y=x+\dfrac{1}{x}, \quad y=x^2+\dfrac{2}{x}$

[1] Per la risoluzione di equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 671.

125. $y=2x+\frac{1}{x^2}$, $\quad y=x^2+\frac{1}{x^2}$

126. $y=x+2 \text{ sen } x$, $\quad y=x-2 \text{ sen } x$

127. $y=\text{sen } x+\cos x$, $\quad y=\text{sen } x-\cos x$

128. $y=\frac{1}{x^2}$, $\quad y=-\frac{1}{x^2}$

Riflettere su queste due funzioni: per esempio, per la prima funzione risulta $y'>0$ per $x<0$ e $y'<0$ per $x>0$, eppure la curva non presenta un massimo relativo nel punto d'ascissa $x=0$; perché?

129. $y=x-\ln x$, $\quad y=x+\ln x$

Riflettere in particolare sulla seconda funzione: risulta $f'(-1)=0$, eppure la curva non presenta punti stazionari; perché?

130. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo (o un minimo) relativo, anche la funzione $y=f(x)+k$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo (o un minimo) relativo, qualunque sia il valore della costante k».

131. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo relativo, la funzione $y=-f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un minimo relativo; viceversa, se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un minimo relativo, la funzione $y=-f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un massimo relativo».

132. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=k\,f(x)$ presenta un massimo o un minimo relativo.

133. Ripetere l'esercizio 132, a partire da una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo.

134. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=\frac{1}{f(x)}$ presenta un massimo o un minimo relativo.

135. Ripetere l'esercizio 134, a partire da una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo.

136. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di massimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ presenta certamente un massimo relativo nel punto d'ascissa $x=a$.

137. È data una funzione $y=f(x)$, che presenta nel punto d'ascissa a un punto di minimo relativo; stabilire in quali condizioni la funzione $y=[f(x)]^n$ presenta certamente un minimo relativo.

138. Sono date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, che hanno un punto stazionario in corrispondenza all'ascissa $x=a$; descrivere il comportamento della funzione $y=f(x)+g(x)$ in corrispondenza all'ascissa $x=a$.

139. Ripetere l'esercizio 138, descrivendo il comportamento delle funzioni $y=f(x)\cdot g(x)$ e $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

140. Dimostrare che una parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$ ha sempre un punto di massimo o minimo relativo.

(Si ha $y'=2ax+b$, perciò esiste sempre un numero reale x, per cui risulta $y'=0$ ...)

141. Stabilire quali casi si possono presentare per i punti stazionari di una funzione del tipo $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

(Si ha $y'=3ax^2+bx+c$, perciò l'equazione $y'=0$ può avere due, una o nessuna soluzione reale ...)

5. Concavità e convessità di una curva

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 141 al 156 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare gli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso,
II) calcolare la derivata seconda $y''=f''(x)$,
III) tracciare il grafico della derivata seconda e indicare gli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva o negativa,
IV) confrontare i due grafici ottenuti e verificare che

– se risulta $f''(x)>0$, il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto,
– se risulta $f''(x)<0$, il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità verso il basso.

141. $y=x^2$, $y=x^2-4x$, $y=x^2-4x+3$

142. $y=-x^2$, $y=-x^2+3x$, $y=-x^2+3x-3$

143. $y=x^3$, $y=x^3+1$, $y=(x+1)^3$

144. $y=-x^3$, $y=-x^3+1$, $y=-(x+1)^3$

145. $y=\frac{1}{4}x^4$, $y=\frac{1}{4}x^4-1$, $y=\frac{1}{4}(x-1)^4$

146. $y=x^3-3x^2$, $y=x^3-3x^2+x$

147. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2$, $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-1$

148. $y=x^4+2x^3$, $y=x^4+2x^3-2x$

149. $y=-\frac{1}{2}x^4+x^3$, $y=-\frac{1}{2}x^4+x^3+2$

150. $y=x^4-6x^2$, $y=x^4-6x^2+3x$

151. $y=-\frac{1}{3}x^4+2x^2$, $y=-\frac{1}{3}x^4+2x^2-2$

152. $y=\frac{1}{x}$, $y=x+\frac{1}{x}$, $y=2+\frac{1}{x}$

153. $y=-\frac{1}{x}$, $y=2x-\frac{1}{x}$, $y=3-\frac{1}{x}$

154. $y=e^x$, $y=-e^x$, $y=e^{-x}$

155. $y=x+e^x$, $y=e^x+e^{-x}$

156. $y=\ln x$, $y=-\ln x$, $y=\ln(-x)$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 157 al 160 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare gli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso,
II) calcolare la derivata seconda $y''=f''(x)$,
III) studiare algebricamente il segno della derivata seconda $y''=f''(x)$ e indicare gli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva o negativa,
IV) confrontare i risultati ottenuti e verificare che
– se risulta $f''(x(>0$, il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto,
– se risulta $f''(x)<0$, il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità verso il basso.

157. $y=x^3+\frac{3}{x}$, $y=3x^2+\frac{1}{x^2}$

158. $y=\sqrt{x}$, $y=x+\sqrt{x}$

159. $y=-\sqrt{x}$, $y=x-\sqrt{x}$

160. $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{2x-x^2}$

161. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:

– «la derivata $y'=f'(x)$ è crescente negli intervalli in cui il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità rivolta verso l'alto»;
– «la derivata $y'=f'(x)$ è decrescente negli intervalli in cui il grafico di $y=f(x)$ rivolge la concavità rivolta verso il basso».

162. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:
- «la retta tangente ad una curva ha pendenza crescente negli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso l'alto»;
- «la retta tangente ad una curva ha pendenza decrescente negli intervalli in cui la curva rivolge la concavità verso il basso».

163. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni, interpretandole anche dal punto di vista grafico:
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto, la funzione $y=-f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso»;
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità verso il basso, la funzione $y=-f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto».

164. È data una funzione $y=f(x)$ con il grafico che rivolge la concavità verso l'alto e si considera una funzione del tipo $y=k\,f(x)$; stabilire in quali condizioni la seconda funzione ha il grafico con la concavità verso l'alto o verso il basso.

165. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto, anche la funzione $y=f(x)+ax+b$ ha il grafico con la concavità rivolta verso l'alto»;
- «se una funzione $y=f(x)$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso, anche la funzione $y=f(x)+ax+b$ ha il grafico con la concavità rivolta verso il basso».

166. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni:
- «se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno il grafico con la concavità verso l'alto, anche la funzione $y=f(x)+g(x)$ ha il grafico con la concavità verso l'alto»;
- «se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno il grafico con la concavità verso il basso, anche la funzione $y=f(x)+g(x)$ ha il grafico con la concavità verso il basso».

6. Punti di flesso

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 167 al 175 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare il grafico della funzione e indicare i punti di flesso,
II) calcolare la derivata $y''=f''(x)$,
III) tracciare il grafico di $y''=f''(x)$ e indicare i punti in cui risulta $f''(x)=0$,
IV) confrontare i due grafici ottenuti e verificare che
- **se una curva d'equazione $y=f(x)$ presenta nel punto A d'ascissa a un flesso, sempre risulta $f''(a)=0$,**
- **se risulta $f''(a)=0$, non sempre il punto A d'ascissa a è un flesso.**

167. $y=x^3$, $y=x^3$, $y=(x-1)^3$

168. $y=-x^3$, $y=1-x^3$, $y=-(x-1)^3$

169. $y=x^4$, $y=x^4+1$, $y=(x+1)^4$

170. $y=-x^4$, $y=1-x^4$, $y=-(x+1)^4$

171. $y=\operatorname{sen} x$, $y=-\operatorname{sen} x$, $y=2\operatorname{sen} x$, $y=\operatorname{sen} x-1$

172. $y=\operatorname{sen}(2x)$, $y=\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$, $y=\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

173. $y=\cos x$, $y=3\cos x$, $y=-\cos x$, $y=\cos x+2$

174. $y=\cos(2x)$, $y=\cos\dfrac{x}{2}$, $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

175. $y=e^x-e^{-x}$, $y=e^x+e^{-x}$, $y=\dfrac{1}{2}x^2-e^x$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 176 al 185 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione,
II) calcolare la derivata $y''=f''(x)$,
III) studiare[1] il segno di $y''=f''(x)$, esaminando i casi in cui si ha $f''(x)=0$,
IV) determinare le coordinate dei punti di flesso.

176. $y=x^3-3x$, $\quad y=-x^3+3x$, $\quad y=x^3-3x+1$

177. $y=2x^3-3x^2$, $\quad y=-2x^3+3x^2$, $\quad y=2x^3-3x^2-x$

178. $y=\frac{1}{4}x^4+x^3$, $\quad y=-\frac{1}{4}x^4-x^3$, $\quad y=\frac{1}{4}x^4+x^3-2x$

179. $y=x^4-6x^2$, $\quad y=-x^4+6x^2$, $\quad y=x^4-6x^2+4x$

180. $y=x^4+4x$, $\quad y=-x^4-4x$, $\quad y=x^4+4x+2$

Quali caratteristiche presenta il punto d'ascissa $x=0$?

181. $y=x^2+\frac{1}{x}$, $\quad y=x^2-\frac{1}{x}$

182. $y=\frac{1}{x^2}-3x^2$, $\quad y=3x^2-\frac{16}{x^2}$

183. $y=x+2 \text{ sen } x$, $\quad y=x-2 \text{ sen } x$

184. $y=\text{sen } x+\cos x$, $\quad y=\text{sen } x-\cos x$

185. $y=\frac{1}{x}$, $\quad y=-\frac{1}{x}$

Riflettere su queste due funzioni: per esempio, per la prima funzione risulta $y''>0$ per $x>0$ e $y''<0$ per $x<0$, eppure la curva non presenta un flesso nel punto d'ascissa $x=0$; perché?

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 186 al 191 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche descritte nel cap. 1,
II) determinare le coordinate dei punti di flesso, studiando il segno della funzione $y''=f''(x)$;
III) scrivere l'equazione della tangente in ogni punto di flesso;
IV) determinare i punti di intersezione fra la tangente inflessionale e la curva, verificando che la tangente inflessionale tocca la curva in tre punti coincidenti.

186. $y=x^3-2x+1$

(La curva presenta un flesso nel punto $A(0, 1)$, con tangente t d'equazione $y=-2x+1$. Per determinare i punti di intersezione fra la tangente e la curva si risolve il sistema formato dall'equazione della curva e dall'equazione della retta t; si trova come soluzione del sistema il solo punto $A(0, 1)$, contato tre volte).

187. $y=x^4-2x^3$

(La curva presenta due flessi:

– nel punto $O(0, 0)$, con tangente t_0 d'equazione $y=0$,
– nel punto $A(1, -1)$, con tangente t_A d'equazione $y=-2x+1$.

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della curva e dall'equazione della retta t_0, si trova come soluzione del sistema il punto O contato tre volte ed il punto $B(2, 0)$.
Dal sistema formato dall'equazione della curva e di t_A, si ottiene

$$\begin{cases} x^4-2x^3+2x-1=0 \\ y=-2x+1. \end{cases}$$

[1] Per la risoluzione di equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 671.

Ora, sapendo che A è un flesso, sappiamo che l'equazione di quarto grado ottenuta deve avere la soluzione $x=1$ contata tre volte. Perciò il polinomio x^4-2x^3+2x-1 deve essere divisibile tre volte per il binomio $(x-1)$, cioè deve essere divisibile per il polinomio

$$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1.$$

Eseguendo la divisione, si ottiene $(x^4-2x^3+2x-1):(x^3-3x^2+3x-1)=x+1$. Così il sistema diventa

$$\begin{cases} (x-1)^3(x+1)=0 \\ y=-2x+1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{matrix} x_1=-1, & x_2=x_3=x_4=1 \\ y_1=3, & y_2=y_3=y_4=-1. \end{matrix}$$

In definitiva si ottiene il punto A contato tre volte ed il punto $C(-1, 3)$).

188. $y=x^4+2x^3-x$

(Tenendo presenti le indicazioni dell'esercizio precedente si ottiene:

- *il flesso $O(0, 0)$, con tangente t_0, d'equazione $y=-x$, che incontra la curva in O, contato tre volte, e in $B(-2, 2)$;*
- *il flesso $A(-1, 0)$, con tangente t_A, d'equazione $y=x+1$, che incontra la curva in A, contato tre volte, e in $C(1, 2)$).*

189. $y=x^4-6x^2$

(Tenendo presenti le indicazioni dell'esercizio 187 si ottiene:

- *il flesso $A(1, -5)$, con tangente t_A, d'equazione $y=-8x+3$, che incontra la curva in A, contato tre volte, e in $C(-3; 27)$;*
- *il flesso $B(-1, -5)$, con tangente t_B, d'equazione $y=8x+3$, che incontra la curva in B, contato tre volte, e in $C(3; 27)$).*

190. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

(Ricordando le indicazioni dell'esercizio 187 si ottiene il flesso $A(-1, 0)$, con tangente t_A, d'equazione $y=-3x-3$, che incontra la curva solo in A).

191. $y=\dfrac{1}{x^2}-3x^2$

(Tenendo presenti le indicazioni dell'esercizio 187 si ottiene:

- *il flesso $A(1, -2)$, con tangente t_A, d'equazione $y=-8x+6$, che incontra la curva in A, contato tre volte, e in $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{26}{3}\right)$;*
- *il flesso $B(-1, -2)$, con tangente t_B, d'equazione $y=8x+6$, che incontra la curva in B, contato tre volte, e in $C\left(\frac{1}{3}; \frac{26}{3}\right)$).*

192. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso, anche la funzione $y=f(x)+hx+k$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso».

193. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se la funzione $y=f(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso, anche la funzione $y=kf(x)$ presenta nel punto d'ascissa a un flesso».

194. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «se le funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ presentano nel punto d'ascissa a un flesso, presenta nel punto d'ascissa a un flesso anche la funzione $y=f(x)+g(x)$».

195. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «la derivata $y'=f'(x)$ ha un punto stazionario nel punto in cui il grafico di $y=f(x)$ presenta un flesso».

196. Dimostrare che una parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$ non può avere flessi.

(Si ha $y''=2a$, ...).

197. Dimostrare che il grafico di una funzione del tipo $y=ax^3+bx^2+cx+d$ presenta le seguenti caratteristiche:

- ha sempre un punto di flesso F;
- la tangente inflessionale incontra la curva solo in F.

(Si ha $y''=6ax+2b$, ...).

198. Dimostrare che il grafico di una funzione del tipo $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ presenta le seguenti caratteristiche:

- ha al massimo due punti di flesso F;
- una tangente inflessionale incontra la curva in un altro punto oltre che nel flesso.

(Si ha $y''=2(6ax^2+3bx+c)$, ...)

7. Ricerca dei punti di massimo e minimo con le derivate successive

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 199 al 214 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche descritte nel cap. 1,

II) determinare le coordinate dei punti di massimo o minimo relativo con il metodo delle derivate successive.

199. $y=\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{5}$ $\left[\text{minimo } A\left(0, \frac{2}{5}\right), \text{ massimo } B\left(-1, \frac{1}{2}\right)\right]$

200. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}$ $\left[\text{massimo } A\left(0, -\frac{1}{5}\right), \text{ minimo } B\left(1, -\frac{1}{4}\right)\right]$

201. $y=-\frac{5}{6}x^6+x^5+\frac{5}{6}$ $\left[\text{massimo } B(1, 1), \text{ flesso } A\left(0, \frac{5}{6}\right)\right]$

202. $y=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5+\frac{8}{15}$ $\left[\text{massimo } B\left(1, \frac{1}{2}\right), \text{ flesso } A\left(0, \frac{8}{15}\right)\right]$

203. $y=x^6+x^4-1$ [minimo $A(0, -1)$]

204. $y=2x^6-3x^4$ [massimo $O(0, 0)$, minimi $A(-1, -1)$ e $B(1, -1)$]

205. $y=\frac{4}{5}(x-1)^5+(x-1)^4$ $\left[\text{minimo } A(1, 0), \text{ massimo } B\left(0, \frac{1}{5}\right)\right]$

(Attenzione: sviluppando le potenze indicate i calcoli diventano molto laboriosi. Conviene piuttosto procedere nel modo seguente:

$$y'=4(x-1)^4+4(x-1)^3=4(x-1)^3x$$
$$y'=0 \quad \text{se} \quad 4(x-1)^3x=0,$$

da cui si ottengono subito le soluzioni $x=1$ (contata tre volte) e $x=0$).

Svolgere gli esercizi dal 206 al 208 tenendo presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 205.

206. $y=(x+1)^5-\frac{5}{4}(x+1)^4$ $\left[\text{massimo } A(-1, 0), \text{ minimo } B\left(0, -\frac{1}{4}\right)\right]$

207. $y=(x-1)^6+(x-1)^4$ [minimo $A(1, 0)$]

208. $y=2(x+1)^6-3(x+1)^4$ [massimo $A(-1, 0)$, minimi $B(0, -1)$ e $B(-2, -1)$]

209. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=0 \quad \text{e} \quad f''(a)>0,$$

allora la funzione ha un punto di minimo relativo in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presente che (fig. 17)

- *se risulta $f''(a)>0$, esiste certamente un intorno $I(a)$ in cui risulta $f''(x)>0$;*
- *dal fatto che si ha $f''(x)>0$ in $I(a)$ segue che $f'(x)$ è crescente in $I(a)$, perciò, se x varia in $I(a)$, risulta:*

$$f'(x)<f'(a) \quad per \quad x<a \quad e \quad f'(x)>f'(a) \quad per \quad x>a$$

- *dato che risulta $f'(a)=0$, si ha:*

$$f'(x)<0 \quad per \quad x<a \quad e \quad f'(x)>0 \quad per \quad x>a$$

e quindi

$$f(x) \text{ decrescente per } x<a \quad e \quad f(x) \text{ crescente per } x>a.$$

L'ultima condizione assicura che il punto di ascissa a è di minimo relativo).

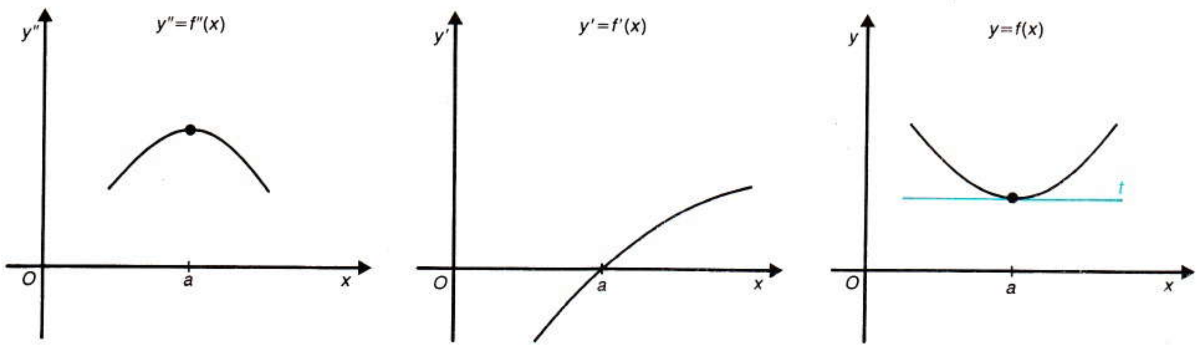


Fig. 17

210. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=f''(a)=0 \quad \text{e} \quad f'''(a)>0,$$

la funzione ha un flesso con tangente orizzontale in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presente che (fig. 18)

- *in base alla dimostrazione dell'esercizio 209, la funzione $y'=f'(x)$ ha un minimo relativo nel punto d'ascissa $x=a$ e quindi risulta*

$$f'(x)>f'(a) \quad \text{in un intorno } I(a);$$

- *dato che risulta $f'(a)=0$, si ha:*

$$f'(x)>0 \quad \text{in un intorno } I(a)$$

e quindi

$$f(x) \text{ crescente in un intorno } I(a) \ldots)$$

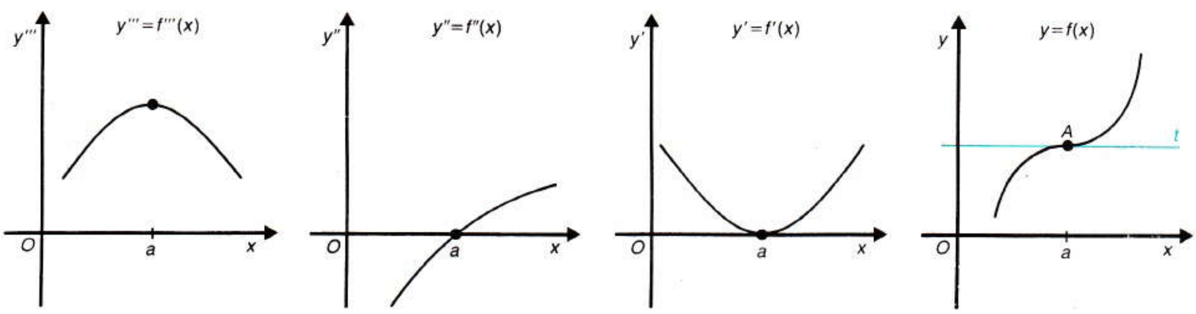


Fig. 18

211. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=0 \quad \text{e} \quad f''(a)<0,$$

allora la funzione ha un punto di massimo relativo in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio 209).

212. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=f''(a)=0 \quad \text{e} \quad f'''(a)<0,$$

la funzione ha un flesso con tangente orizzontale in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio 210).

213. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0 \quad \text{e} \quad f^{IV}(a)>0,$$

allora la funzione ha un punto di minimo relativo in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio 209).

214. Dimostrare che, se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0 \quad \text{e} \quad f^{IV}(a)<0,$$

allora la funzione ha un punto di massimo relativo in $A[a, f(a)]$.

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio 209).

8. Gli asintoti di una curva

Asintoti d'equazione $x=a$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 215 al 221 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche esposte nel cap. 1,

II) indicare gli asintoti d'equazione $x=a$,

III) verificare che una retta d'equazione $x=a$ è asintoto per una funzione $y=f(x)$ solo se sono verificate le seguenti due condizioni:

- **il valore $x=a$ è escluso dal campo d'esistenza;**
- **risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.**

215. $y=\frac{1}{x}$, $\quad y=\frac{1}{x-1}$, $\quad y=\frac{x}{x^2-x}$

(Attenzione all'ultima funzione che può essere scritta nella forma

$$y=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x}$$

la retta d'equazione $x=0$ ***non*** *è asintoto verticale per la curva, perché...)*

216. $y=\frac{-1}{x}$, $\quad y=\frac{x-1}{x}$, $\quad y=\frac{x^2-x}{x^2}$

217. $y=\frac{x+1}{x}$, $\quad y=\frac{x}{x+1}$, $\quad y=\frac{x^2}{x^2+x}$

218. $y=\frac{1}{x^2}$, $\quad y=\frac{1}{(x-1)^2}$, $\quad y=\frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}$

219. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, $\quad y=\frac{x^4-1}{x^2}$, $\quad y=\frac{x^4-x^2}{x^2}$

220. $y=\text{tg}\, x$, $\quad y=\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\quad y=\text{tg}\,(2x)$

221. $y=\ln x$, $\quad y=\ln(x-1)$, $\quad y=\ln|x|$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 222 al 227 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) determinarne il campo di esistenza,
II) indicarne gli asintoti d'equazione $x=a$.

222. $y=\dfrac{x^2+2x}{1-x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{x^3-x}$

223. $y=\dfrac{2x-1}{4x^3-x}$, $y=\dfrac{x+2}{4x^3-x}$

224. $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

225. $y=\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$, $y=\dfrac{x^2+1}{1-x^4}$

226. $y=\ln x$, $y=\dfrac{\ln x}{x}$

227. $y=\dfrac{\ln x}{x-1}$, $y=\dfrac{x-1}{\ln x}$

(Attenzione al calcolo del limite per $x \to 1$ delle due funzioni date nell'esercizio 227; si ha una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che si può risolvere mediante il teorema di de l'Hôpital).

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 228 al 231 e spiegare perché non possono ammettere asintoti d'equazione $x=a$.

228. $y=x^3+x^2+x$, $y=-x^4+x^3+3x^2$

229. $y=\dfrac{x^2-x}{x}$, $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

230. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, $y=\dfrac{2x-1}{x^2+x+3}$

231. $y=\dfrac{x-3}{x^4+1}$, $y=\dfrac{x}{x^4+3x^2+2}$

232. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno l'asse delle y come asintoto verticale.

233. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno come asintoti verticali le rette d'equazione $x=1$ e $x=2$.

(Un esempio immediato è la funzione $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$, ...)

234. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che non hanno asintoti d'equazione $x=a$.

235. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere, motivando la scelta:
- «una curva non può attraversare un suo asintoto d'equazione $x=a$»,
- «una curva non può avere più di un asintoto verticale»,
- «una funzione razionale fratta ha un asintoto verticale in corrispondenza di ogni valore di x che annulla il denominatore»,
- «una funzione razionale fratta ha un asintoto verticale in corrispondenza di ogni valore di x che annulla il denominatore, ma non il numeratore».

Asintoti d'equazione $y=n$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 236 al 239 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche esposte nel cap. 1,
II) indicare gli asintoti d'equazione $y=n$,
III) verificare che una retta d'equazione $y=n$ è asintoto per una funzione $y=f(x)$ solo se sono verificate le seguenti due condizioni:
- **il campo d'esistenza della funzione è illimitato;**
- **risulta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=n$**

236. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x}+1$, $y=\dfrac{1}{x}-2$

237. $y=\frac{2x-1}{x}$, $y=\frac{2x-1}{2x}$, $y=\frac{1-2x}{4x}$

238. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{x^2-1}{x^2}$, $y=\frac{1-x^2}{x^2}$

239. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=\text{arctg}\, x$

(Attenzione alle funzioni date nell'esercizio 239 che hanno un comportamento diverso per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$...).

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 240 al 245 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) determinarne il campo di esistenza,
II) indicarne gli asintoti d'equazione $y=n$.

240. $y=\frac{2x^3+3x-2}{x^2+1}$, $y=\frac{2x^2+3x-2}{x^3+1}$

(Il limite di queste funzioni per $x \to \infty$ è una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, che si può risolvere in almeno tre modi diversi:
- *valendosi dei risultati indicati nello schema di pag. 666,*
- *seguendo il procedimento esposto a pag. 101,*
- *valendosi del teorema di de l'Hôpital esposto a pag. 141).*

241. $y=\frac{x^3-4x+3}{2x^3}$, $y=\frac{x^3-4x+3}{x^4}$

242. $y=\frac{3x^4-1}{x^4+1}$, $y=\frac{3x^2}{x^4+1}$

243. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(Prestare attenzione al campo di esistenza di queste funzioni, per decidere se si può calcolare il limite per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$).

244. $y=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

(Prestare attenzione all'ultima funzione, che ha come campo d'esistenza l'intervallo $[-1, 1]$ e dunque non può avere asintoti orizzontali, perché...).

245. $y=\frac{e^x}{x}$, $y=x \cdot e^x$, $y=\frac{\ln x}{x}$

(Tenere presente che
- *per le funzioni $y=e^x$ e $y=\ln x$ occorre distinguere il limite per $x \to +\infty$ da quello per $x \to -\infty$,*
- *per risolvere i limiti che si presentano nella forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, occorre valersi del teorema di de l'Hôpital).*

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 246 al 250 e spiegare perché non possono ammettere asintoti d'equazione $y=n$.

246. $y=x^3+2x-1$, $y=x^5+3x^4-4x^3+5$

247. $y=\frac{x^2+3}{x}$, $y=\frac{1-x^4}{2x+1}$

248. $y=\text{sen}\, x$, $y=\text{arcsen}\, x$

(Attenzione alla differenza fra le due funzioni:
- *per la funzione $y=\text{sen}\, x$, il campo di esistenza è illimitato, si può dunque calcolare il limite per $x \to +\infty$, ma tale limite è indeterminato...;*
- *per la funzione $y=\text{arcsen}\, x$ il campo d'esistenza è l'intervallo $[-1, 1]$, ...).*

249. $y=\cos x,\qquad y=\operatorname{tg} x$

250. $y=\sqrt{4-x^3},\qquad y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

251. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno l'asse delle x come asintoto orizzontale.

252. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno come asintoto la retta d'equazione $y=2$.

(Un esempio immediato è la funzione $y=2+\dfrac{1}{x}$*).*

253. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che non hanno asintoti d'equazione $y=n$.

254. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere, motivando la scelta:

- «una curva non può attraversare un suo asintoto d'equazione $y=n$»,
- «una curva non può avere più di un asintoto orizzontale»,
- «una curva che è grafico di una funzione non può avere più di un asintoto orizzontale».

255. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «una funzione razionale fratta ha un asintoto orizzontale se il grado del numeratore non supera quello del denominatore».

256. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «una funzione $y=f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y=n$, se sono verificate le seguenti condizioni:

- è possibile scrivere la funzione nella forma $y=n+g(x)$,
- risulta $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$».

Asintoti d'equazione $y=mx+n$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 257 al 260 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) tracciare un grafico approssimativo della funzione, basandosi sulle operazioni grafiche esposte nel cap. 1,
II) indicare gli asintoti d'equazione $y=mx+n$,
III) verificare che una retta d'equazione $y=mx+n$ è asintoto per una funzione $y=f(x)$ solo se sono verificate le seguenti condizioni:

- **il campo d'esistenza della funzione è illimitato;**
- **risulta $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ e $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=n$**

257. $y=2x+\dfrac{1}{x},\qquad y=2x-\dfrac{1}{x},\qquad y=\dfrac{1}{x}-2x$

258. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x^2},\qquad y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2},\qquad y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x}{2}$

259. $y=2x-3+\dfrac{1}{x},\qquad y=x+1+\dfrac{2}{x-1},\qquad y=x-1+\dfrac{2}{x+1}$

260. $y=x+e^x,\qquad y=x-e^x,\qquad y=2x+e^{-x}$

(Attenzione alle funzioni date nell'esercizio 260 che hanno un comportamento diverso per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$ ...)

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 261 al 265 e risolvere, per ciascuna funzione $y=f(x)$, i seguenti quesiti:

I) determinarne il campo di esistenza,
II) indicarne gli asintoti d'equazione $y=mx+n$.

261. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$, $y=\frac{x^2+x-4}{x-1}$

(Calcolando i richiesti limiti per $x \to \infty$, si ottengono delle forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, che si possono risolvere in almeno tre modi diversi:

- *valendosi dei risultati indicati nello schema di pag. 666,*
- *seguendo il procedimento esposto a pag. 101,*
- *valendosi del teorema di de l'Hôpital esposto a pag. 141).*

262. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$, $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

263. $y=\frac{2x^3+3x^2}{x^2+1}$, $y=\frac{x^3}{x^2+x}$

264. $y=\frac{x^4+2x}{x^3-2}$, $y=\frac{x^4-1}{x^3+x}$

265. $y=x+2+\frac{x}{e^x}$, $y=\frac{e^x-x^2}{x}$

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 266 al 269 e spiegare perché non possono ammettere asintoti d'equazione $y=mx+n$.

266. $y=x^3-3x^2-1$, $y=2x^5-3x^4+2x^3-x$

267. $y=\frac{x^3+1}{x}$, $y=\frac{x^4+3}{x^2+1}$

268. $y=\text{arcsen}\, x$, $y=\arccos x$

269. $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

270. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno la retta d'equazione $y=x$ come asintoto obliquo.

(Un esempio immediato è $y=x+\frac{1}{x}$).

271. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo.

(Si possono costruire tanti esempi, scrivendo funzioni del tipo

$$y=mx+n+\frac{1}{x}).$$

272. Scrivere l'equazione di almeno due funzioni razionali che non hanno asintoti d'equazione $y=mx+n$.

273. Dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni relative ad una funzione razionale fratta, cioè una funzione del tipo

$$y=\frac{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_p\cdot x^p}{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_q\cdot x^q}$$

- «se risulta $q>p$, la funzione ha come asintoto l'asse delle x, d'equazione $y=0$»;
- «se risulta $q=p$, la funzione ha come asintoto la retta d'equazione $y=\frac{a_p}{b_q}$»;
- «se risulta $p=q+1$, la funzione ha un asintoto obliquo con pendenza $m=\frac{a_p}{b_q}$»;
- «se risulta $p>q+1$, la funzione non ha asintoti d'equazione $y=mx+n$».

274. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «una funzione $y=f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y=mx+n$, se sono verificate le seguenti condizioni:

- è possibile scrivere la funzione nella forma $y=mx+n+g(x)$,
- risulta $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$».

275. Dimostrare che è vera la seguente affermazione: «una funzione $y=f(x)$ ha un asintoto d'equazione $y=mx+n$, se sono verificate le seguenti condizioni:

- il campo di esistenza è illimitato,
- risulta $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=m$ e $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]=n$.

(Dalla condizione $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=m$ *applicando il teorema di de l'Hôpital, ...)*

276. Basandosi sui risultati dell'esercizio precedente, esaminare le seguenti affermazioni:

I) gli asintoti d'equazione $y=mx+n$ sono "rette tangenti all'infinito",
II) la condizione $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=m$ è sufficiente, ma non necessaria per decidere se una funzione ammette un asintoto obliquo.

277. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere, motivando la scelta:

- «una curva non può attraversare un suo asintoto d'equazione $y=mx+n$»,
- «una curva non può avere più di un asintoto obliquo»,
- «una curva che è grafico di una funzione non può avere più di un asintoto obliquo».

Schema riassuntivo di vari metodi per determinare gli asintoti d'equazione $y=mx+n$

Lo svolgimento degli esercizi dal 273 al 276 conduce ad individuare vari metodi per determinare gli asintoti d'equazione $y=mx+n$ di una funzione $y=f(x)$; riassumiamo qui varie alternative possibili

I) calcolare $m=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $n=\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]$;

II) calcolare $m=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ e $n=\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]$;

III) scrivere la funzione nella forma $y=mx+n+g(x)$, con $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

Per le funzioni razionali fratte, cioè del tipo

$$y=\frac{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_p\cdot x^p}{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_q\cdot x^q}$$

si hanno in particolare i seguenti risultati:

IV) se risulta $q>p$, la funzione ha come asintoto l'asse delle x, d'equazione $y=0$;

V) se risulta $q=p$, la funzione ha come asintoto la retta d'equazione $y=\dfrac{a_p}{b_q}$;

VI) se risulta $p=q+1$, la funzione ha un asintoto obliquo con pendenza $m=\dfrac{a_p}{b_q}$;

VII) se risulta $p>q+1$, la funzione non ha un asintoto d'equazione $y=mx+n$.

Esercizi riassuntivi sugli asintoti

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 278 al 291 e, per ogni funzione $y=f(x)$, risolvere i seguenti quesiti:

I) determinarne il campo d'esistenza,
II) determinare gli eventuali asintoti d'equazione $x=a$,
III) determinare gli eventuali asintoti d'equazione $y=mx+n$, scegliendo il metodo più conveniente.

278. $y=x^3-3x^2+4x$, $\quad y=x^4+2x^3-x+4$ [nessun asintoto]

280. $y=\dfrac{x^4}{x^2+1}$, $\quad y=\dfrac{x^5+x^2}{x^2+x+3}$ [nessun asintoto]

281. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ [asintoti $x=1$, $y=1$]

282. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$, $y=\dfrac{x^2+4}{x^4-1}$ [asintoti $x=1$, $x=-1$, $y=0$]

283. $y=\dfrac{3-x^2}{x^2-4x+4}$, $y=\dfrac{3x^2-2}{4x^2+4x+1}$ $\left[x=2 \text{ e } y=-1,\ x=-\dfrac{1}{4} \text{ e } y=\dfrac{3}{4}\right]$

284. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}$ [$x=1$ e $y=x$]

285. $y=\dfrac{x^2+2}{x+1}$, $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ [$x=-1$ e $y=x-1$]

286. $y=\dfrac{x^3-x^2+x}{1-x^2}$, $y=\dfrac{-x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$ [$x=-1$, $x=-1$ e $y=1-x$]

287. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $y=\dfrac{x^3+3x^2-9x}{(1-x)^2}$ [$x=1$ e $y=x+5$]

288. $y=x+\sqrt{x^2-1}$ [$y=0$ a sinistra e $y=2x$ a destra]

289. $y=\sqrt{x^2-6x+7}$ [$y=-x+3$ a sinistra e $y=x-3$ a destra]

290. $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ [$x=0$, $y=0$ a sinistra e $y=1$ a destra]

291. $y=\dfrac{e^x-x^2}{x}$ [$x=0$, $y=-x$ a sinistra]

292. Scrivere almeno due funzioni razionali fratte che abbiano per asintoti le rette d'equazioni $x=1$ e $y=2$.

(Gli esempi più facili sono tutte le funzioni del tipo $y=2+\dfrac{k}{x-2}$*).*

293. Scrivere almeno due funzioni razionali fratte che abbiano per asintoti le rette d'equazione $x=1$, $x=-1$ e $y=x$.

(L'esempio più facile è $y=x+\dfrac{k}{x^2-1}$ *...).*

294. Scrivere almeno due funzioni razionali fratte che abbiano per asintoti le rette che hanno le seguenti equazioni: $x=2$, $x=3$ e $y=2x-1$.

(Gli esempi più facili sono del tipo $y=2x-1+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$, *...).*

295. Determinare la curva che ha per asintoti le rette d'equazione $x=1$ e $y=2$, fra le curve d'equazione

$$y=\frac{ax}{x+b}.$$ [$a=2$ e $b=-1$]

296. Determinare la curva che ha come asintoto la retta d'equazione $y=5x+1$, fra le curve d'equazione

$$y=\frac{2kx^3+x^2}{x^2+3k}.$$ $\left[k=\dfrac{5}{2}\right]$

297. Determinare la curva che ha come asintoto la retta d'equazione $y=2x+2$, fra le curve d'equazione

$$y=\frac{ax^2}{x+b}.$$ [$a=2$ e $b=-1$]

298. Determinare la curva che ha come asintoto la retta d'equazione $y=3x-1$, fra le curve d'equazione

$$y=\frac{ax^3+bx^2+1}{x^2}.$$ [$a=3$ e $b=-1$]

9. Studio del grafico di una funzione

Studio del grafico di funzioni razionali intere (polinomi)

Gli esercizi dal 299 al 324 propongono di studiare il grafico di funzioni razionali intere, cioè di polinomi. Per queste funzioni già sappiamo che

– il campo di esistenza è l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali;
– il grafico non presenta asintoti.

Perciò, si può procedere nel modo seguente:

1) fare delle considerazioni geometriche preliminari (simmetrie rispetto agli assi o rispetto all'origine, possibilità di valersi delle operazioni grafiche, ...),
2) studiare il segno della funzione $y=f(x)$,
3) studiare il segno della derivata $y'=f'(x)$,
4) studiare il segno della derivata seconda $y'=f''(x)$,
5) calcolare le coordinate dei punti notevoli (massimi o minimi relativi e flessi) e di qualche altro punto interessante (eventuale intersezione con l'asse delle y, ...).

Quando si risolvono equazioni e disequazioni, può essere utile consultare lo schema di pag. 671; per interpretare rapidamente i risultati dei calcoli, ci si può basare sullo schema di pag. 670.

Studiare il grafico delle funzioni razionali intere di 3° grado proposte negli esercizi dal 299 al 308.

299. $y=x^3-6x^2+9x$

(Si ottiene $y=x(x-3)^2$, $y'=3(x^2-4x+3)$, $y''=6(x-2)$; per il grafico vedi fig. 19).

300. $y=-x^3+3x^2-4$

(Si ottiene $y=-(x-2)^2(x+1)$, $y'=3x(2-x)$, $y''=6(1-x)$; per il grafico vedi fig. 20).

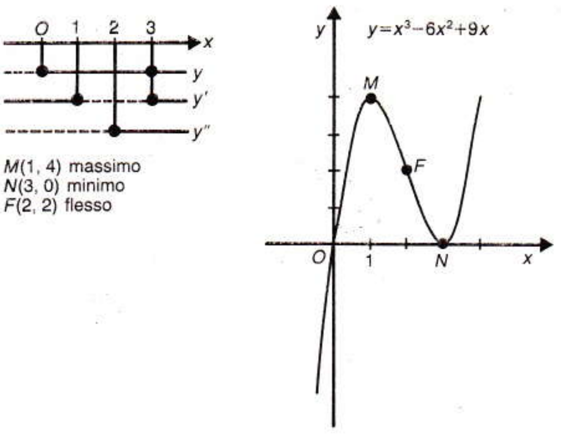


Fig. 19

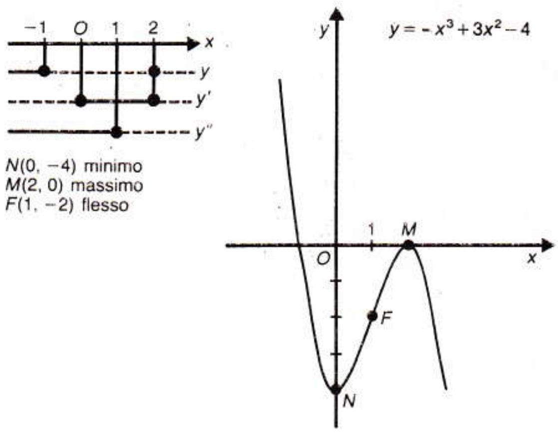


Fig. 20

301. $y=x^3+3x^2+3x+1$ $[y=(x+1)^3,\ F(-1, 0)]$

302. $y=1-\frac{1}{2}x^3$ $[F(0, 1)]$

303. $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2$ $[M=O(0, 0),\ F(2, -2),\ N(4, -4)]$

304. $y=-\frac{1}{2}x^3+6x$ $[M(2, 8),\ F=O(0, 0),\ N(-2, -8)]$

305. $y=4x^3-3x-1$ $\left[M\left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\ F(0,\ -1),\ N\left(\frac{1}{2},\ -2\right)\right]$

306. $y=x^3+3x^2+8x-2$ $[F(-1,\ -8)]$

307. $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-3x-\frac{5}{2}$ $\left[M(-2,\ 1),\ N\left(4,\ -\frac{25}{2}\right),\ F\left(1,\ -\frac{23}{4}\right)\right]$

308. $y=x^3+3x^2+4x+2$ $[F(-1,\ 0)]$

Studiare il grafico delle funzioni razionali intere di 4° grado proposte negli esercizi dal 309 al 318.

309. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{4}$

(Si ottiene $y=\frac{1}{4}(x^2-1)(x^2-9)$, $y'=x(x^2-5)$, $y''=3x^2-5$, *per il grafico vedi fig. 21.)*

310. $y=2x(x-2)^3$

(Si ottiene $y'=4(x-2)^2(2x-1)$, $y''=24(x-2)(x-1)$, *per il grafico vedi fig. 22.)*

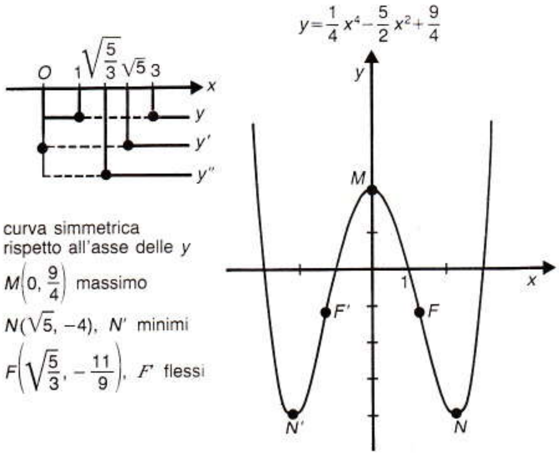


Fig. 21

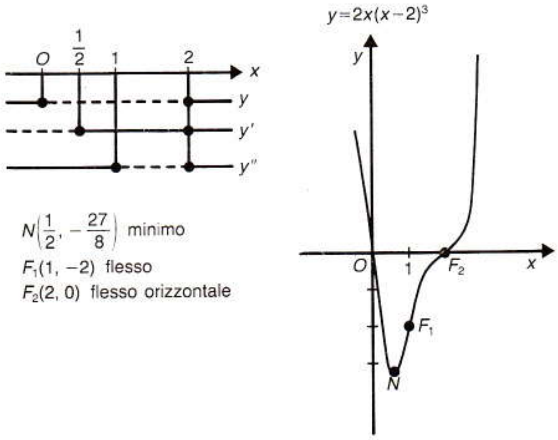


Fig. 22

311. $y=\frac{1}{4}x^4+x^3$ $\left[N\left(-3,\ -\frac{27}{4}\right),\ F_1(-2,\ -4),\ F_2=O(0,\ 0)\right]$

312. $y=x^4-6x^3+9x^2$ $\left[N_1=O(0,\ 0),\ N_2(3,\ 0),\ M\left(\frac{3}{2},\ \frac{81}{16}\right),\ \dots\right]$

313. $y=x^4-5x^2+4$ $\left[N_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\ -\frac{9}{4}\right),\ N_2\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ -\frac{9}{4}\right),\ M(0,\ 4),\ \dots\right]$

314. $y=-\frac{1}{8}x^4+x^2+\frac{9}{8}$ $\left[M_1\left(-2,\ \frac{25}{8}\right),\ M_2\left(2,\ \frac{25}{8}\right),\ N\left(0,\ \frac{9}{8}\right),\ \dots\right]$

315. $y=32x(x-1)^3$ $\left[N\left(\frac{1}{4},\ -\frac{27}{8}\right),\ F_1\left(\frac{1}{2},\ -2\right),\ F_2(1,\ 0)\right]$

316. $y=16x^3(2-3x)$ $\left[M\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ F_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{16}{27}\right),\ F_2=O(0,\ 0)\right]$

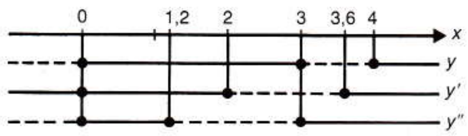
317. $y=2x^4-8x^2+5$ $[N_1(-\sqrt{2},\ -3),\ N_2(\sqrt{2},\ -3),\ M(0,\ 5),\ \dots]$

318. $y=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2-2$ $[N(0,\ -2)]$

Studiare il grafico delle funzioni razionali intere di grado superiore al 4° proposte negli esercizi dal 319 al 324.

319. $y=\frac{1}{4}x^5-\frac{7}{4}x^4+3x^3$

(Si ottiene $y=\frac{1}{4}x^3(x^2-7x+12)$, $y'=\frac{1}{4}x^2(5x^2-28x+36)$, $y''=x(5x^2-21x+18)$*; per il grafico, vedi fig. 23).*



$M(2, 4)$ massimo
$N(3,6; -2,8)$ minimo
$O(0, 0)$, $F_1(1,2; 2,2)$, $F_2(3, 0)$ flessi

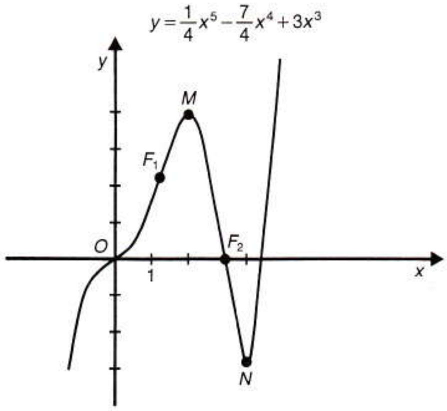


Fig. 23

320. $y=\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{10}$ $\left[N(1, -1),\ M\left(0, -\frac{9}{10}\right),\ F\left(\frac{3}{4}, \approx 1\right)\right]$

321. $y=(x^2-1)^3$ $[N(0, -1),\ F_1(-1, 0),\ F_2(1, 0),\ \ldots]$

322. $y=x^3(x-2)^2$ $\left[N(2, 0),\ M\left(\frac{6}{5}, \approx 1\right),\ \ldots\right]$

323. $y=\frac{2}{9}x^5-\frac{5}{9}x^4-\frac{5}{9}x^2+\frac{20}{9}x$ $\left[M\left(1, \frac{4}{3}\right),\ N\left(2, \frac{4}{9}\right),\ \ldots\right]$

324. $y=x^5-5x^3+10x-2$ $M_1(-\sqrt{2}, \approx -7{,}7),\ N_1(-1, -8),\ N_2(\sqrt{2}, \approx 3{,}7),\ M_2(1, 4),\ \ldots]$

Grafico di funzioni razionali fratte (quozienti di polinomi)

Gli esercizi dal 325 al 366 propongono di studiare il grafico di funzioni razionali fratte, cioè quozienti di polinomi. Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni può essere schematizzato nel modo seguente:

1) *calcolare il campo di esistenza, che è costituito dall'insieme dei reali, esclusi i numeri che rendono zero il polinomio denominatore,*
2) *considerazioni geometriche preliminari (simmetrie rispetto agli assi o rispetto all'origine, possibilità di valersi delle operazioni grafiche, ...),*
3) *calcolare gli eventuali asintoti,*
4) *calcolare il segno della funzione* $y=f(x)$,
5) *studiare il segno della derivata* $y'=f'(x)$,
6) *studiare il segno della derivata seconda* $y''=f''(x)$,
7) *calcolare le coordinate dei punti notevoli (massimi o minimi relativi e flessi) e di qualche altro punto interessante (eventuale intersezione con l'asse delle y, ...).*

Per derivare le funzioni assegnate, tenere presente lo schema di pag. 667.
Per risolvere equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 670.
Per interpretare i risultati dei calcoli, tenere presente lo schema di pag. 671.

Studiare il grafico delle funzioni razionali fratte di 2° grado[1] proposte negli esercizi dal 325 al 344, tenendo presente che si otterrà sempre un'iperbole.

325. $y=\dfrac{3x}{3x-2}$

(C.E.: $x\neq\frac{2}{3}$, asintoti: $x=\frac{2}{3}$ e $y=1$; $y'=\dfrac{-6}{(3x-2)^2}$ e $y''=\dfrac{36}{(3x-2)^3}$.
Per il grafico vedi fig. 24).

326. $y=\dfrac{2x^2+x+2}{x}$

(C.E.: $x\neq 0$, asintoti: $x=0$ e $y=2x+1$; $y'=\dfrac{2(x^2-1)}{x^2}$ e $y''=\dfrac{4}{x^3}$.
Per il grafico vedi fig. 25).

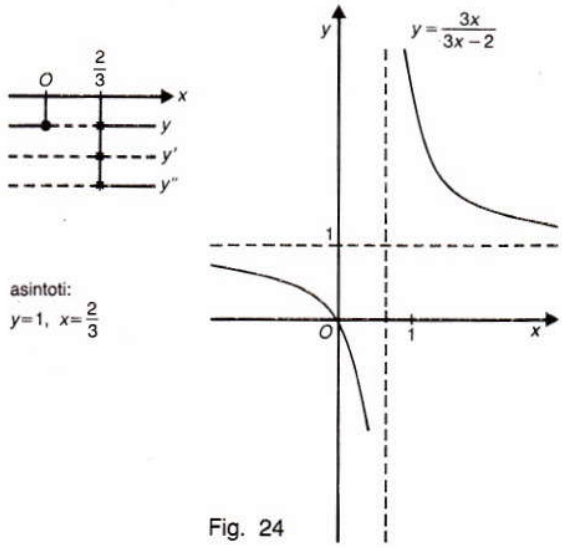


Fig. 24

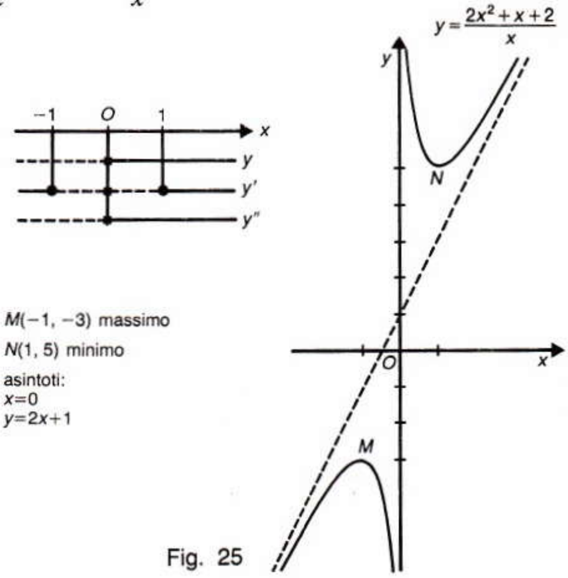


Fig. 25

327. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ [asintoti: $x=-1$ e $y=x-1$; $M(-2,\,-4)$, $N=O(0,\,0)$]

328. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ [asintoti: $x=2$ e $y=1$; sempre decrescente]

329. $y=\dfrac{x^2-9}{x-1}$ [asintoti: $x=1$ e $y=x+1$; sempre crescente]

330. $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ $\left[\text{asintoti: } x=-\dfrac{1}{2} \text{ e } y=\dfrac{3}{2}\text{; sempre crescente}\right]$

331. $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$ [asintoti: $x=1$ e $y=x-1$; sempre crescente]

332. $y=\dfrac{4}{1-2x}$ $\left[\text{asintoti: } x=\dfrac{1}{2} \text{ e } y=0\text{; sempre crescente}\right]$

333. $y=\dfrac{x^2-8x+19}{x-5}$ [asintoti: $x=5$ e $y=x-3$; $M(3,\,-2)$, $N(7,\,6)$]

[1] Per valutare il grado di una funzione, basta scriverla in forma intera e tenere presente che, oltre ai monomi del tipo hx^2, sono di 2° grado anche i monomi del tipo kxy.

334. $y=\dfrac{2x-3}{x}$ [asintoti: $x=0$ e $y=2$; sempre crescente]

335. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ [asintoti: $x=0$ e $y=x$; $M(-2, -4)$, $N(2, 4)$]

336. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ [asintoti: $x=1$ e $y=x-1$; $M(0, -2)$, $N(2, 2)$]

338. $y=\dfrac{x^2+6x+4}{2x}$ $\left[\text{asintoti: } x=0 \text{ e } y=\dfrac{x}{2}+3;\ M(-2, 1),\ N(2, 5)\right]$

339. $y=\dfrac{5-x^2}{2(3-x)}$ $\left[\text{asintoti: } x=3 \text{ e } y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2};\ M(1, 1),\ N(5, 5)\right]$

340. $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}$ $\left[\text{asintoti: } x=0 \text{ e } y=\dfrac{x}{3};\ \text{sempre crescente}\right]$

341. $y=\dfrac{x^2-4x}{2(2x+1)}$ $\left[\text{asintoti: } x=-\dfrac{1}{2} \text{ e } y=\dfrac{x}{4}-\dfrac{9}{8};\ M(-2, -2),\ N\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

342. $y=\dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$ [asintoti: $x=1$ e $y=x-6$; $M(-1, -9)$, $N(3, -1)$]

343. $y=\dfrac{x^2-4x}{1-x}$ [asintoti: $x=1$ e $y=-x+3$, sempre decrescente]

344. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ [asintoti: $x=5$ e $y=x$; $M(3, 1)$, $N(7, 9)$]

Studiare il grafico delle funzioni razionali fratte di grado superiore al secondo[2] proposte negli esercizi dal 345 al 366.

345. $y=\dfrac{3x^2-3x+1}{x^2}$

(C.E.: $x\neq 0$, asintoti $x=0$ e $y=3$, $y'=\dfrac{3x-2}{x^3}$, $y''=\dfrac{6(1-x)}{x^4}$. Per il grafico, vedi fig. 26).

346. $y=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$

(C.E.: $x\neq 0$, asintoti: $x=0$ e $y=x$, $y'=\dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{x^4}$, $y''=\dfrac{4(3-x^2)}{x^5}$. Per il grafico, vedi fig. 27).

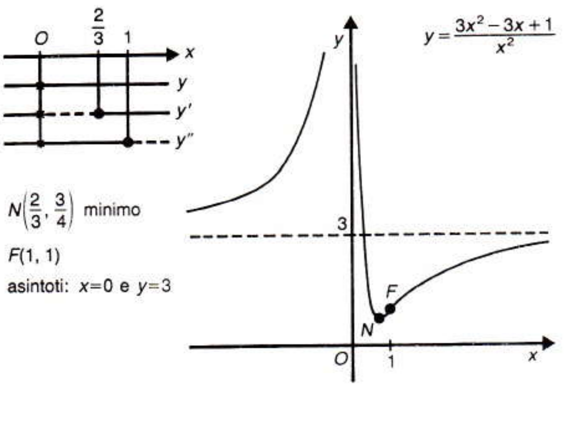


Fig. 26

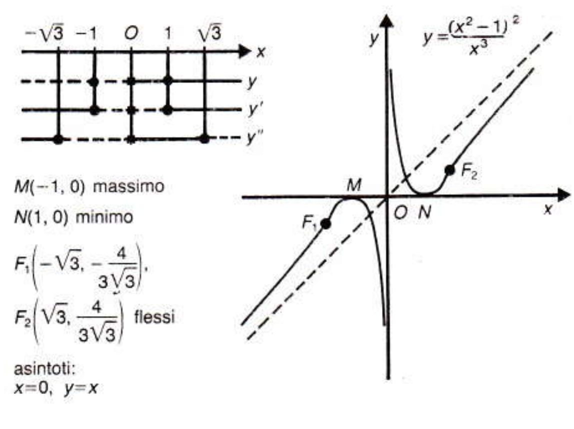


Fig. 27

2 Per valutare il grado di una funzione, basta scriverla in forma intera e tenere presente che, per esempio, sono di 3° grado, oltre ai monomi del tipo hx^3, anche i monomi del tipo kx^2y.

347. $y=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}$ [asintoti: $x=0$ e $y=x-3$; $N(2, 0)$]

348. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ [asintoti: $x=0$ e $y=x$; $N(2, 3)$]

349. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ [asintoti: $x=2$, $x=-2$, $y=x$; $M(-\sqrt{12}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $N(\sqrt{12}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $F=0$]

350. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$ $\left[\text{asintoti: } x=2,\ x=3,\ y=1;\ N\left(\frac{5}{2}, 9\right)\right]$

351. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ [asintoti: $x=1$, $x=-1$, $y=0$; $F=0$]

352. $y=\dfrac{x^3+2}{x}$ [asintoto: $x=0$; $N(1, 3)$, $F(-\sqrt[3]{2}, 0)$]

353. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\left[\text{asintoto: } y=0;\ M(0, 1),\ F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right);\ F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)\right]$

354. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[\text{asintoto: } y=0;\ M\left(1, \frac{1}{2}\right),\ N\left(-1, -\frac{1}{2}\right),\ F_1=0,\ F_2\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ F_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

355. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ [asintoti: $x=1$, $x=-1$, $y=1$; $M(0, -1)$]

356. $y=\dfrac{1+x}{x^2}$ $\left[\text{asintoti: } x=0 \text{ e } y=0;\ N\left(-2, -\frac{1}{4}\right),\ F\left(-3, -\frac{2}{9}\right)\right]$

357. $y=\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ $\left[\text{asintoti: } x=2 \text{ e } y=1;\ N=O,\ F\left(-1, \frac{1}{9}\right)\right]$

358. $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ $\left[\text{asintoto: } y=2;\ N\left(0, \frac{1}{2}\right),\ F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{5}{4}\right),\ F_2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{5}{4}\right)\right]$

359. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}$ [asintoti: $x=1$, $x=-1$, $y=1$; $F(0, 1)$]

360. $y=\dfrac{3+8x-3x^2}{1+x^2}$ $\left[\text{asintoto: } y=-3;\ M\left(\frac{1}{2}, 5\right),\ N(-2, -5), \ldots\right]$

361. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$ $\left[\text{asintoto: } y=1;\ M\left(-2, \frac{5}{3}\right),\ N(0, -1), \ldots\right]$

362. $y=\dfrac{4x(2-x)}{(x-3)^2}$ $\left[\text{asintoti: } x=3 \text{ e } y=-4;\ M\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right), \ldots\right]$

363. $y=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ [asintoti: $x=1$, $x=-1$, $y=0$; $F=O$]

364. $y=\dfrac{6x-3x^2}{(3-x)^2}$ $\left[\text{asintoti: } x=3 \text{ e } y=-3;\ M\left(\frac{3}{2}, 1\right),\ F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{9}\right)\right]$

365. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left[\text{asintoti: } x=1 \text{ e } y=1;\ F_1(0, 1),\ F_2\left(\frac{-\sqrt[3]{2}}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right]$

366. $y=\dfrac{(3-x^2)^2}{4-2x^2}$ $\left[\text{asintoti: } x=\sqrt{2} \text{ e } x=-\sqrt{2};\ M_1(-\sqrt{3}, 0),\ M_2\left(0, \frac{9}{4}\right),\ M_3(\sqrt{3}, 0),\ N_1(-1, 2),\ N_2(1, 2)\right]$

Grafico di funzioni algebriche irrazionali

Gli esercizi dal 367 al 380 propongono di studiare il grafico di funzioni irrazionali, cioè di funzioni espresse da una formula costruita valendosi anche dell'operazione irrazionale di estrazione di radice.
Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni è analogo a quello seguito per le funzioni razionali con le seguenti modifiche:

A) quando si calcola il campo di esistenza di funzioni irrazionali, occorre ricordare che $\sqrt{N}$ ha risultato reale solo se $N \geq 0$;
B) prima di calcolare gli asintoti, occorre valutare attentamente il campo di esistenza, che può anche essere limitato;
C) per derivare una funzione irrazionale occorre valersi anche della regola di derivazione di funzione composta (vedi schema di pag. 667). Pertanto la derivazione può condurre a scrivere funzioni dall'espressione molto complicata; in tal caso si tralascia lo studio del segno della derivata seconda.

Per risolvere equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 671.
Per interpretare i risultati dei calcoli, tenere presente lo schema di pag. 670.

Studiare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal 367 al 380.

367. $y = x\sqrt{1-x^2}$ $\left[\text{C.E.: } -1 \leq x \leq 1,\ y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},\ y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ \text{vedi fig. 28}\right]$

368. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\left[\text{C.E.: } x>1,\ y' = \dfrac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}},\ y'' = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2(x-1)^3} \cdot \left(2-\dfrac{1}{2}x\right),\ \text{vedi fig. 29}\right]$

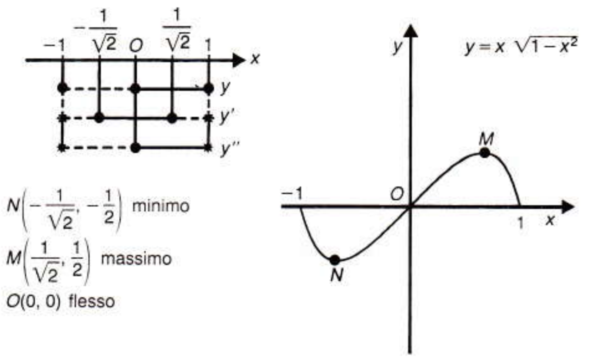


Fig. 28

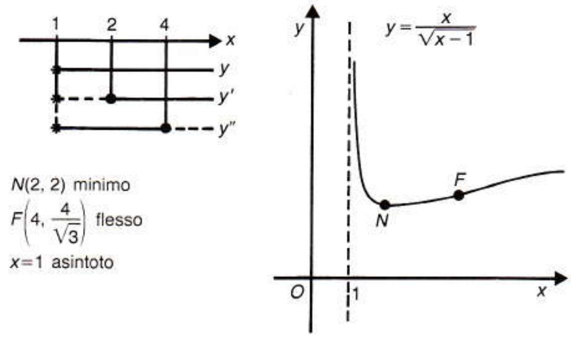


Fig. 29

369. $y = x^2\sqrt{2-x}$ $\left[\text{C.E.: } x \leq 2,\ M\left(\dfrac{8}{5}, \approx 1{,}6\right),\ N = O(0, 0)\right]$

370. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ [C.E.: $x > -1$, asintoto $x = -1$, sempre crescente, ...]

371. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ $\left[\text{C.E.: } x>0,\ \text{asintoto } x=0,\ N(1, 2),\ F\left(3, \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)\right]$

372. $y = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$ [C.E.: $x \geq -1$ con $x \neq 0$, sempre decrescente, ...]

373. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ [C.E.: $x>0$, asintoto $x=0$, sempre crescente, ...]

374. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ $\left[\text{C.E.: } x>1,\ \text{asintoto } y=0,\ M\left(2, \dfrac{1}{2}\right), \ldots\right]$

375. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ [C.E.: $-1<x<1$, asintoti: $x=-1$, $x=1$; $F(0, 0)$]

376. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\left[\text{C.E.: } -1\le x\le 1 \text{ asintoto } x=0\text{, decrescente, } F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), F_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ldots\right]$

377. $y=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ $\left[\text{C.E: } 0\le x\le 2 \text{ asintoto } x=2\text{, crescente, } F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

378. $y=2\sqrt{x+1}-x$ [C.E.: $x\ge -1$, $M(0, 2)$]

379. $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$ $\left[\text{C.E.: } -1\le x\le 1,\ M\left(\frac{3}{5}, 5\right)\right]$

380. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ [C.E.: $1\le x\le 3$, $M(2, 2)$]

Grafico di funzioni trigonometriche

Gli esercizi dal 381 al 413 propongono di studiare il grafico di funzioni trigonometriche, cioè ottenute a partire dalla funzione y=sen x.
Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni è analogo a quello seguito finora con le seguenti modifiche:

I) occorre tener conto del fatto che le funzioni trigonometriche sono periodiche;
II) quando si calcolano gli asintoti, occorre ricordare che non esiste il limite per $x\to\infty$ della funzione y=sen x;
III) spesso una funzione dall'espressione complicata può diventare più semplice, se ci si vale opportunamente delle formule trigonometriche. In particolare è utile tenere presente che:

A) valendosi delle formule di addizione del seno, è possibile esprimere qualunque funzione del tipo y=a sen x+b cos x+c nella forma

$$y=r\cdot \text{sen}\,(x+\varphi)+c, \quad \text{con} \quad r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad \varphi=\text{arctg}\,\frac{b}{a};$$

B) valendosi delle formule di duplicazione si può scrivere

$$\text{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \text{sen}\,x\cos x=\frac{1}{2}\text{sen}\,2x.$$

Per risolvere equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 672.
Per interpretare i risultati dei calcoli, tenere presente lo schema di pag. 670.

Studiare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal 381 al 413.

381. $y=\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x-2$

(In base al procedimento A, la funzione diventa $y=2\,\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$; vedi fig. 30).

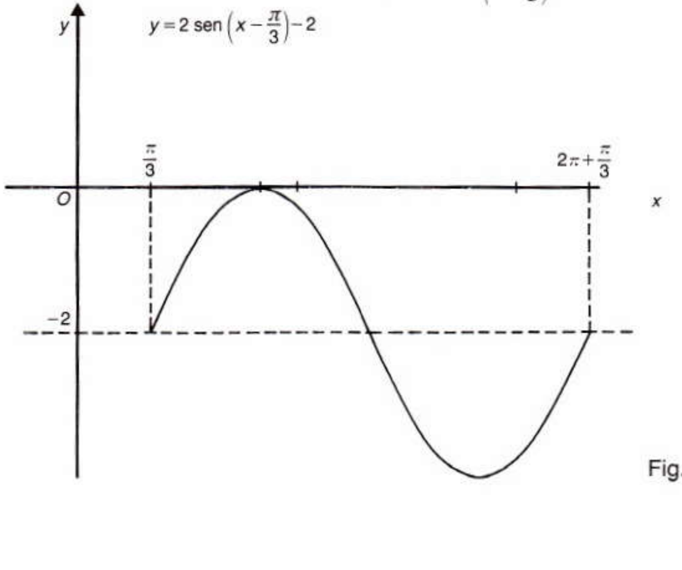


Fig. 30

382. $y=\text{sen}\ x+\cos x-1$ $\left[y=\sqrt{2}\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$

383. $y=\sqrt{3}\ \text{sen}\ x+\cos x+2$ $\left[y=2\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\right]$

384. $y=\text{sen}\ x-\cos x$ $\left[y=\sqrt{2}\ \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

385. $y=\text{sen}\ x+\sqrt{3}\cos x+1$ $\left[y=2\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1\right]$

386. $y=\sqrt{3}\ \text{sen}\ x-\cos x-2$ $\left[y=2\ \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\right]$

387. $y=2\cos^2 x-4\cos x$

(Per avere una prima idea del grafico, ci si può basare sul procedimento B, per scrivere la funzione nella forma $y=1+\cos(2x)-4\cos x$ (fig. 31). Studiando poi il segno della funzione e delle sue derivate, si ottiene:

$$y=2\cos x(\cos x-2),\quad y'=-4\ \text{sen}\ x(\cos x-1),\quad y''=-4(\cos x-1)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right),\ \textit{vedi fig. 32).}$$

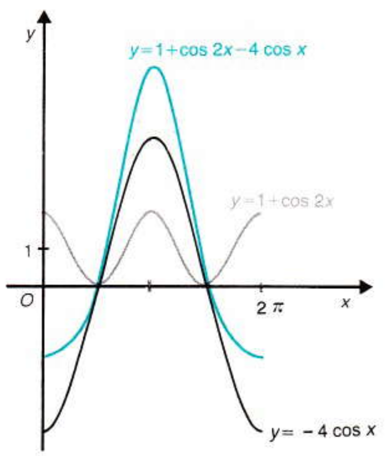


Fig. 31

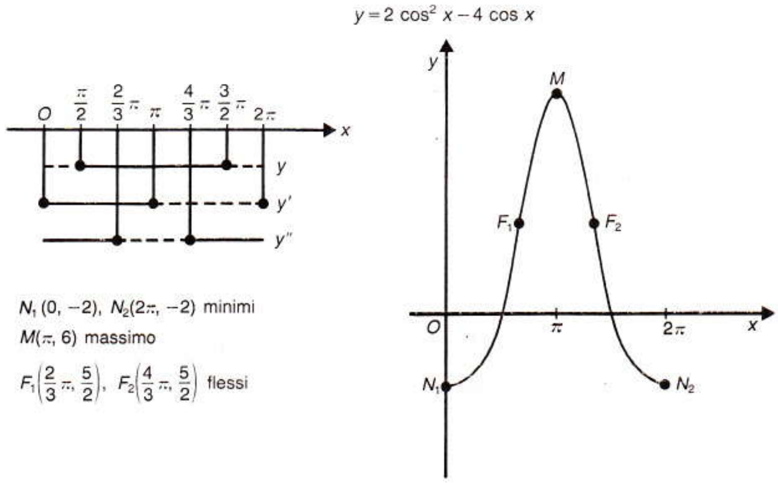


Fig. 32

388. $y=4\ \text{sen}^2 x-8\ \text{sen}\ x+3$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ 2\pi]\text{: } N\left(\frac{\pi}{2},\ -1\right),\ M\left(\frac{3}{2}\pi,\ 15\right),\ \ldots\right]$

389. $y=4\ \text{sen}^2 x-1$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ \pi]\text{: } M\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right),\ N_1(0,\ -1),\ N_2(\pi,\ -1),\ \ldots\right]$

390. $y=\text{sen}^2 x-2\ \text{sen}\ x$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ 2\pi]\text{: } N\left(\frac{\pi}{2},\ -1\right),\ M\left(\frac{3}{2}\pi,\ 3\right),\ \ldots\right]$

391. $y=4\cos^2 x-8\cos x+3$ [nel periodo $[0,\ 2\pi]$: $M(\pi,\ 15)$, $N_1(0,\ -1)$, $N_2(2\pi,\ -1)$, ...]

392. $y=-\text{sen}^2 x-2\ \text{sen}\ x+3$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ 2\pi]\text{: } N\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ M\left(\frac{3}{2}\pi,\ 4\right),\ \ldots\right]$

393. $y=-\cos^2 x+\cos x+1$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ 2\pi]\text{: } N(\pi,\ -1),\ M_1\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{4}\right),\ M_2\left(5\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{4}\right),\ \ldots\right]$

394. $y=\text{sen}^2 x-\text{sen}\ x+1$ $\left[\text{nel periodo } [0,\ 2\pi]\text{: } N_1\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{4}\right),\ M_1\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ N_2\left(5\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{4}\right),\ M_1\left(3\frac{\pi}{2},\ 3\right)\right]$

395. $y = \text{sen } x + \text{sen } x \cos x$ $\left[\text{nel periodo } [0, 2\pi]\text{: } M\left(\frac{\pi}{3}, \approx 1{,}3\right), N\left(5\frac{\pi}{3}, \approx -1{,}3\right), \dots\right]$

396. $y = 2 \text{ sen } x \cos x - 2 \text{ sen}^2 x$

(Applicando il procedimento B, si arriva a scrivere la funzione nella forma $y = \text{sen } (2x) + \cos (2x) - 1$, di cui si può tracciare il grafico con l'addizione grafica (fig. 33). Si può migliorare il risultato, applicando il procedimento A, in modo da scrivere la funzione nella forma $y = \sqrt{2} \text{ sen } \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$; vedi fig. 34).

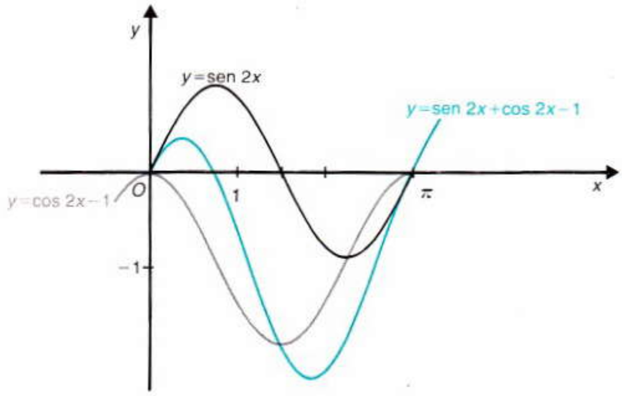


Fig. 33

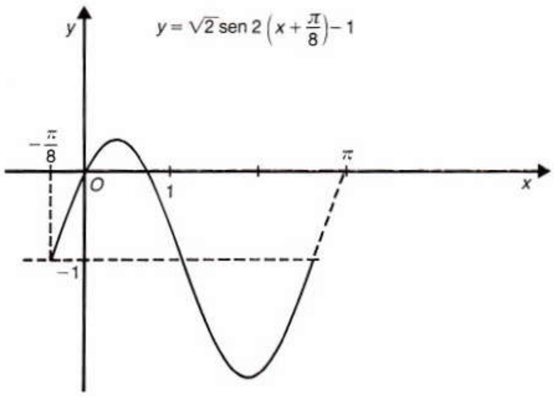


Fig. 34

397. $y = \text{sen}^2 x + 2\sqrt{3} \text{ sen } x \cos x - \cos^2 x + 1$ $\left[y = 2 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right]$

398. $y = \text{sen}^2 x + 3 \cos^2 x$ $[y = \cos (2x) + 2]$

399. $y = 3 \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $[y = 2 \cos (2x) + 1]$

400. $y = 2 \text{ sen}^2 x + 2\sqrt{3} \text{ sen } x \cos x$ $\left[y = 2 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right]$

401. $y = \cos^2 x + 2 \text{ sen } x \cos x - \text{sen}^2 x$ $\left[y = \sqrt{2} \text{ sen } \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

402. $y = \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x + \text{sen}^2 x$ $[y = 1 - \text{sen } (2x)]$

403. $y = 2 \text{ sen } (3x) \cos x$

(Con le formule di prostaferesi la funzione diventa $y = \text{sen } (4x) + \text{sen } (2x)$, facile da disegnare con l'addizione grafica).

404. $y = 2 \text{ sen } x \cos (3x)$

(Con le formule di prostaferesi la funzione diventa $y = \text{sen } (4x) - \text{sen } (2x)$, facile da disegnare con l'addizione grafica).

405. $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

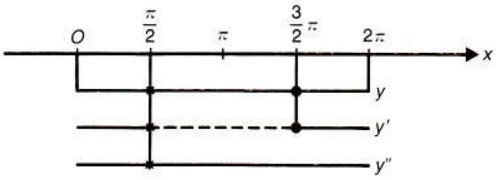
(Con le formule di prostaferesi la funzione diventa $y = -2 \text{ sen } \left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, immediata da disegnare).

406. $y = \text{sen } \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \text{sen } \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(Con le formule di prostaferesi la funzione diventa $y = \sqrt{3} \cos x$, immediata da disegnare).

407. $y=\dfrac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen x}}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$, C.E.: $x\neq\frac{\pi}{2}$, $y'=\dfrac{2\cos x}{(1-\text{sen }x)^2}$, $y''=\dfrac{2(-\text{sen}^2x-\text{sen }x+2)}{(1-\text{sen }x)^3}$; vedi fig. 35).



$N\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$ minimo

$x=\frac{\pi}{2}$ asintoto

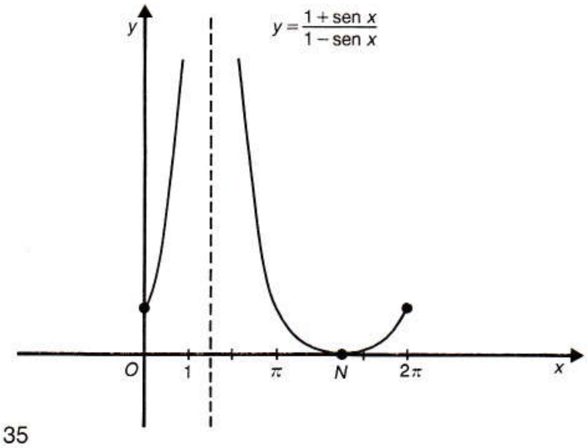


Fig. 35

408. $y=\dfrac{1-\text{sen }x}{\cos x}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$, asintoto $x=\frac{3}{2}\pi$, decrescente, ..., discontinuità eliminabile nel punto d'ascissa $x=\frac{\pi}{2}$).

409. $y=\dfrac{\cos x-\text{sen }x}{\cos x+\text{sen }x}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$, asintoti $x=\frac{3}{4}\pi$ e $x=\frac{7}{4}\pi$, decrescente, ...)

410. $y=\dfrac{4\cos x}{2\cos^2 x+1}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$: $M_1\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$, $M_2\left(\pi,\ -\frac{4}{3}\right)$, $M_3\left(\frac{7}{4}\pi,\ \sqrt{2}\right)$, $N_1\left(\frac{3}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $N_2\left(\frac{5}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$).

411. $y=\dfrac{2\,\text{sen}^2 x+1}{2\,\text{sen }x}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$: $M_1\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $M_3\left(\frac{7}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $N_1\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$, $N_2\left(\frac{3}{4}\pi,\ \sqrt{2}\right)$, $N_3\left(\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\right)$, ...)

412. $y=\dfrac{2\cos^2 x+1}{2\cos x}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$: $M_1\left(\frac{3}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $N_1\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$, $N_2\left(\frac{7}{4}\pi,\ \sqrt{2}\right)$, $N_3\left(\pi,\ -\frac{3}{2}\right)$, ...)

413. $y=\dfrac{\text{sen }x+\cos x}{2\,\text{sen }x\cos x}$

(Nel periodo $[0,\ 2\pi]$: $M\left(\frac{5}{4}\pi,\ -\sqrt{2}\right)$, $N\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$, ...)

Grafico di varie funzioni trascendenti

Gli esercizi dal 414 al 420 propongono di studiare il grafico di funzioni esponenziali, cioè di funzioni ottenute a partire dalla funzione

$$y=e^x.$$

Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni è analogo a quello seguito per le funzioni irrazionali con le seguenti modifiche:

A) quando si calcolano gli asintoti, occorre ricordare che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

B) quando si studia il segno delle funzioni, occorre ricordare che

$$e^x>0 \quad \text{per qualunque } x,$$

C) quando si derivano le varie funzioni, occorre valersi anche della regola di derivazione di funzione composta (vedi schema di pag. 667). Pertanto la derivazione può condurre a scrivere funzioni dall'espressione molto complicata; quando si verifica questo, si tralascia lo studio del segno della derivata seconda.

Per risolvere equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 672.
Per interpretare i risultati dei calcoli, tenere presente lo schema di pag. 670.

Studiare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal 414 al 421.

414. $y=e^{-x^2}$
(Si ottiene $y'=-2x\cdot e^{-x^2}$, $y''=2(2x^2-1)\cdot e^{-x^2}$, $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$, *vedi fig. 36).*

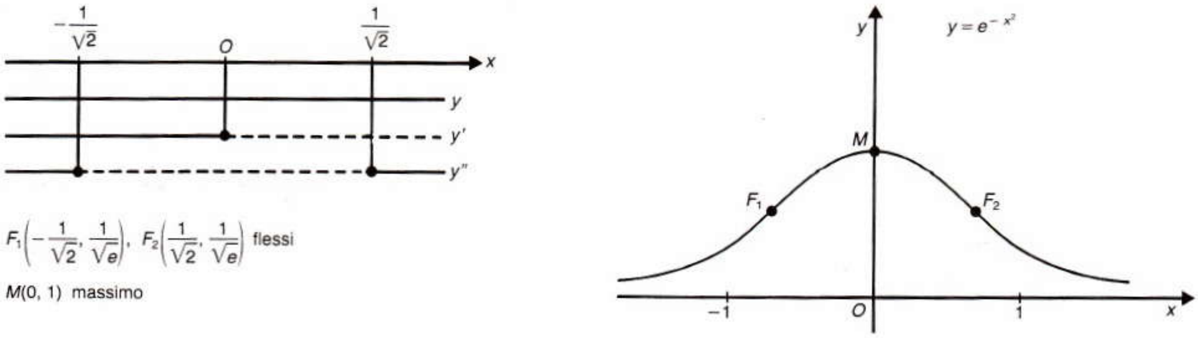


Fig. 36

415. $y=\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{x+1}$ $\left[\text{asintoti: } x=-1 \text{ e } y=0 \text{ a sinistra; } N\left(2, \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{3}\right)\right]$

416. $y=xe^{-x}$ [asintoto: $y=0$ a destra; $M(1, e^{-1})$, $F(2, 2e^{-2})$ ...]

417. $y=x^2e^{-x}$ [asintoto: $y=0$ a destra; $N=O(0, 0)$, $M(2, 4e^{-2})$, ...]

418. $y=e^{\frac{1}{x^2}}$ [asintoti: $x=0$, $y=1$, ...]

419. $y=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ [*C.E.*: $x>0$, $N(2, \sqrt{2e})$, ...]

420. $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ $\left[y'=\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \ y''=-2e^{-x}\cos x, \ ...\right]$

421. $y=\dfrac{K}{1+e^{(a-rx)}}$

(Questa funzione è stata già introdotta (pag. 54) per studiare la crescita di una popolazione: in tal caso la variabile x indica il tempo e la variabile y il numero di individui che compone una popolazione; le costanti K, a ed r, generalmente positive, caratterizzano la popolazione esaminata e possono essere individuate in base a rilevazioni statistiche.
Siamo ora in grado di tracciare un grafico accurato di questa funzione: si otterrà la curva logistica, che era stata solo abbozzata a pag. 54.
Si hanno come asintoti orizzontali:
– la retta d'equazione $y=K$, per $x \to +\infty$,
– la retta d'equazione $y=0$, per $x \to -\infty$.

Si ha poi

$$y'=Kr\frac{e^{(a-rx)}}{[1+e^{(a-rx)}]^2}, \qquad y''=\frac{Kr^2e^{(a-rx)}}{[1+e^{(a-rx)}]^3}\cdot[e^{(a-rx)}-1]$$

Dal grafico (fig. 37) si traggono delle chiare indicazioni sull'andamento di un fenomeno di accrescimento descritto dalla curva logistica:
– la popolazione tende a raggiungere il numero di K individui;
– si ha "un'inversione di tendenza" nella crescita, quando la popolazione raggiunge il valore $\frac{K}{2}$, che è la metà del valore asintotico).

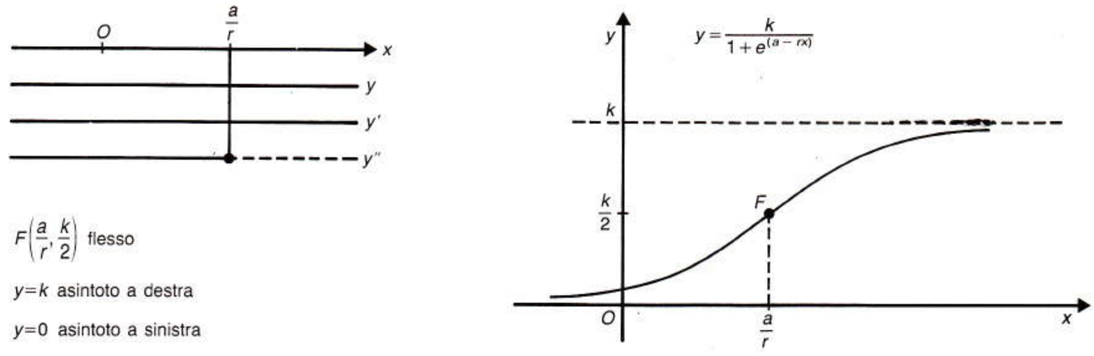


Fig. 37

Gli esercizi dal 422 al 427 propongono di studiare il grafico di funzioni logaritmiche, cioè di funzioni ottenute a partire dalla funzione

$$y=\ln x.$$

Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni è analogo a quello seguito per le funzioni irrazionali con le seguenti modifiche:

A) quando si calcola il campo di esistenza, occorre ricordare che la funzione $y=\ln x$ è definita per $x>0$,
B) quando si calcolano gli asintoti, occorre ricordare che

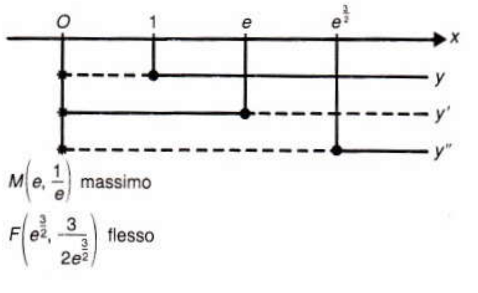
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$$

C) quando si derivano le varie funzioni, occorre valersi anche della regola di derivazione di funzione composta (vedi schema di pag. 667). Pertanto la derivazione può condurre a scrivere funzioni dall'espressione molto complicata; quando si verifica questo, si tralascia lo studio del segno della derivata seconda.

Per risolvere equazioni e disequazioni, basarsi sullo schema di pag. 672.
Per interpretare i risultati dei calcoli, tenere presente lo schema di pag. 671.

Studiare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal 422 al 427.

422. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ $\left[\text{asintoti } x=0 \text{ e } y=0,\ y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ y''+\dfrac{2\ln x-3}{x^3},\ \text{vedi fig. 38}\right]$



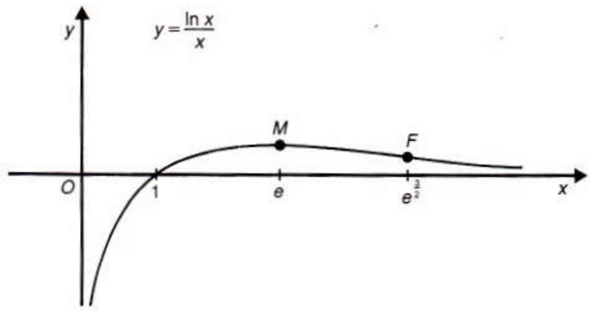


Fig. 38

423. $y=\dfrac{x}{\ln x}$ [asintoto $x=1$, discontinuità eliminabile in $x=0$, $N(e, e)$, ...]

424. $y=x \ln x$ $\left[\text{discontinuità eliminabile in } x=0,\ N\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)\right]$

425. $y=\ln^2 x+\ln x$ $\left[\text{asintoto } x=0,\ N\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, -\dfrac{1}{4}\right),\ F\left(\sqrt{e}, \dfrac{3}{4}\right)\right]$

426. $y=x^2-\ln x$ $\left[\text{asintoto } x=0,\ N\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \approx 0{,}85\right)\right]$

427. $y=\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ $\left[\text{nel periodo } \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \text{ asintoti } x=\pm\dfrac{\pi}{2},\ N=O(0, 0)\right]$

Gli esercizi dal 428 al 446 propongono di studiare il grafico ***di funzioni in cui compaiono valori assoluti****.*
Il procedimento per studiare il grafico di queste funzioni è analogo a quello seguito finora; occorre solo ricordare la definizione di valore assoluto e cioè

$$|a|= \begin{array}{ll} a, & \textit{se risulta } a>0 \\ -a, & \textit{se risulta } a<0 \end{array}$$

428. $y=|(x-1)^3|$

(Si ha: $y= \begin{array}{lll} (x-1)^3, & \textit{se} & x>1 \\ -(x-1)^3, & \textit{se} & x<1 \end{array}$ *; vedi fig. 39).*

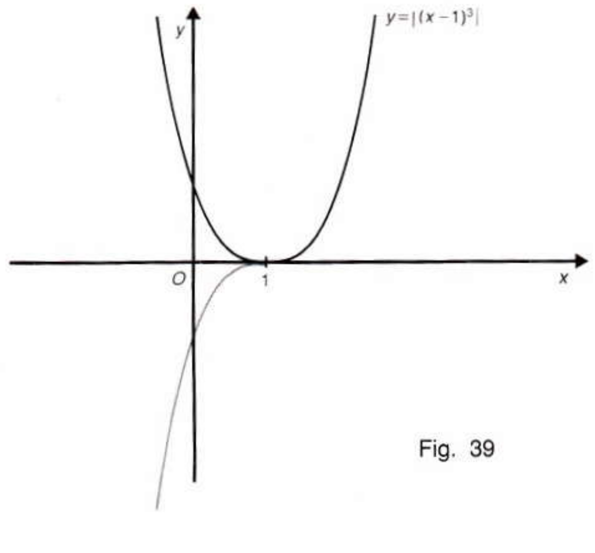


Fig. 39

429. $\dfrac{|x-1|}{x}$

$\left(\textit{Si ha: } |x-1|= \begin{cases} x-1, & \textit{se } x>1 \\ -(x-1), & \textit{se } x<1 \end{cases} \quad \textit{perciò} \quad y= \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}, & \textit{se } x>1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x}, & \textit{se } x<1 \end{cases} \textit{; vedi fig. 40}\right).$

430. $y=|x^2-1|$

$\left(\textit{Si ha: } y= \begin{cases} x^2-1 & \textit{per } x\leq -1 \textit{ o } x\geq 1 \\ -(x^2-1) & \textit{per } -1<x<1 \end{cases}\right).$

431. $y=|x-x^2|$

$\left(\textit{Si ha: } y= \begin{cases} x-x^2 & \textit{per } 0\leq x\leq 1 \\ -(x-x^2) & \textit{per } x<0 \textit{ o } x>1 \end{cases}\right).$

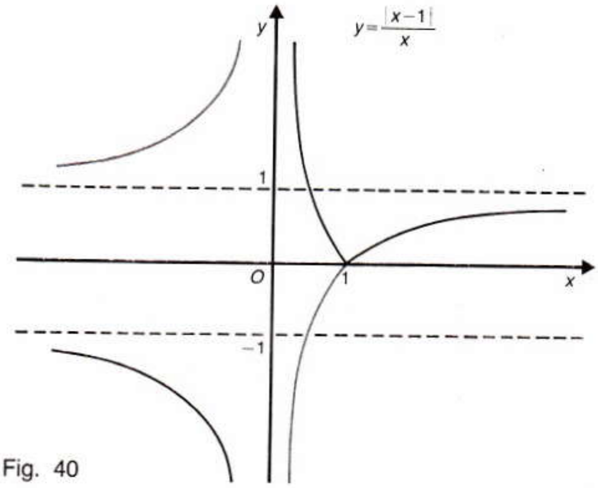


Fig. 40

432. $y=|x^3-1|$ **433.** $y=|x^3-3x|$ **434.** $y=|x^4-x^2|$

435. $y=\dfrac{x+1}{|x-1|}$ **436.** $y=\dfrac{|x+1|}{x-1}$ **437.** $y=\dfrac{|x+1|}{|x-1|}$

438. $y=\sqrt{|x-2|}$ **439.** $y=\sqrt{|1-x^2|}$ **440.** $y=\sqrt{|x^2-1|}$

441. $y=|\operatorname{sen} x+\cos x|$ **442.** $y=\operatorname{sen} x+|\cos x|$ **443.** $y=|\operatorname{sen} x|+\cos x$

444. $y=e^{|x|}$ **445.** $y=e^x+|x|$ **446.** $y=e^{|x|}+|x|$

10. Problemi di massimo e minimo

Gli esercizi dal 447 al 526 conducono a risolvere problemi di massimo e minimo tratti da vari settori teorici ed applicativi. Per risolvere questi problemi, basandosi sul calcolo differenziale, si segue sempre lo stesso procedimento, che possiamo schematizzare nel modo seguente.

Per calcolare il massimo assoluto:

1) si traduce il problema in una funzione $y=f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$,
2) si calcolano le ordinate $f(a)$ e $f(b)$ dei punti di ascissa a e b,
3) si determinano i punti $M[m, f(m)]$ di massimo relativo della funzione, nel modo seguente:

A) si determinano i punti stazionari, calcolando i valori m per cui risulta $f'(m)=0$,
B) si verifica se i punti stazionari sono di massimo relativo; per questo si hanno due alternative:

I) studiare il segno di $f'(x)$,
II) verificare se risulta $f''(m)<0$,

4) si trova il massimo assoluto, cioè il più grande fra i valori $f(m)$, $f(a)$, $f(b)$.

Per calcolare il minimo assoluto:

1) si traduce il problema in una funzione $y=f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$,
2) si calcolano le ordinate $f(a)$ e $f(b)$ dei punti di ascissa a e b,
3) si determinano i punti $N[n, f(n)]$ di minimo relativo della funzione, nel modo seguente

A) si determinano i punti stazionari, calcolando i valori n per cui risulta $f'(n)=0$,
B) si verifica se i punti stazionari sono di minimo relativo; per questo si hanno due alternative:

I) studiare il segno di $f'(x)$,
II) verificare se risulta $f''(n)>0$,

4) si trova il minimo assoluto, cioè il più piccolo fra i valori $f(n)$, $f(a)$, $f(b)$.

È importante notare che molti problemi di massimo o minimo possono essere rapidamente risolti senza valersi del calcolo differenziale e basandosi sui procedimenti esposti nel Complemento A (pag. 511).

Problemi di geometria piana

447. Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno costante la somma dei cateti, determinare quello di ipotenusa d minima.

(Indicati con x ed y i cateti si ha $d^2=x^2+y^2$, $x+y=s$.
Il problema si può risolvere in tre modi:

I) per via elementare, vedi Complemento A;
II) valendosi della geometria analitica, vedi Complemento A;
III) indicando $d^2=z$, $y=s-x$ e valendosi del grafico della parabola $z=2x^2-2sx+s^2$.

Si ottiene che il triangolo richiesto è quello isoscele).

448. Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa fissa, determinare quello che ha somma dei cateti massima.

(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 447; si ottiene ancora il triangolo isoscele).

449. Fra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa fissa, trovare quello di area massima.

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 447; si ottiene ancora il triangolo isoscele).

450. Fra tutti i triangoli rettangoli di area fissa, trovare quello di ipotenusa minima.

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 447; si ottiene ancora il triangolo isoscele).

451. Fra tutti i trapezi isosceli circoscritti ad un dato cerchio (fig. 41) determinare quello di area S minima.

(Indicate con x ed y le semibasi, si ha $S=2r(x+y)$, $xy=r^2$.
Il problema si può risolvere in due modi:

I) per via elementare, vedi Complemento A;
II) esprimendo $S=2r\left(x+\frac{r^2}{x}\right)$ e valendosi del calcolo differenziale.

Si ottiene che il trapezio richiesto è il quadrato).

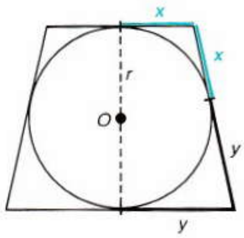


Fig. 41

452. Fra tutti i trapezi isosceli circoscritti ad un dato cerchio determinare quello di perimetro $4p$ minimo.

(Indicate con x ed y le semibasi, si ha $p=x+y$, $xy=r^2$.
Il problema si può risolvere in tre modi:

I) valendosi del principio di dualità (vedi Complemento A);
II) per via elementare, vedi Complemento A;
III) esprimendo $p=x+\frac{r^2}{x}$ e valendosi del calcolo differenziale.

Si ottiene che il trapezio richiesto è il quadrato).

453. Fra i trapezi che sono inscritti in un semicerchio di diametro $2r$ ed hanno il diametro come base maggiore, determinare quello con l'area S massima.

(Indicando con $2x$ la base minore, si ha $S=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}$. Per semplificare i calcoli, si può determinare il massimo di $y=S^2$; si ottiene l'area massima per $x=\frac{r}{2}$).

454. Fra i trapezi che sono inscritti in un semicerchio di diametro $2r$ ed hanno il diametro come base maggiore, determinare quello con il perimetro P massimo.

*(Indicando con $2x$ la base minore, si ha $P=2[r+x+\sqrt{2r(r-x)}]$, massimo per $x=r$.
In questo caso ci si può anche valere della geometria analitica, indicando con y il lato obliquo e basandosi sulle intersezioni di un fascio di rette e di una parabola).*

455. Fra tutti i triangoli isosceli di perimetro $2p$ costante, determinare quello di area S massima.

(Indicando con $2x$ la lunghezza della base, si ottiene $S=x\sqrt{p^2-2px}$, massima per $x=\frac{p}{3}$. Il triangolo cercato è quello equilatero).

456. Fra tutti i triangoli isosceli di area S costante, determinare quello di perimetro $2p$ minimo.

(Il modo più rapido per risolvere il problema è quello di basarsi sul principio di dualità (vedi Complemento A) per affermare che, in base ai risultati dell'esercizio precedente, il triangolo equilatero risolve il problema. Altrimenti, indicando di nuovo con $2x$ la lunghezza della base, si debbono eseguire calcoli abbastanza complicati).

457. Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio r, determinare quello di area S massima.

(Indicando con $2x$ uno dei lati, si ha $S=4x\sqrt{r^2-x^2}$, massima per $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$).

458. Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio r, determinare quello di perimetro P massimo.

(Indicando con $2x$ uno dei lati, si ha $P=4x+4\sqrt{r^2-x^2}$, massuma per $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$).

459. Fra tutti i triangoli isosceli circoscritti ad un dato semicerchio di raggio r, determinare quello di area S minima.

(Indicando con $2x$ la base del triangolo, si ha $S=r\frac{x^2}{\sqrt{x^2-r^2}}$, minima per $x=r\sqrt{2}$).

460. Fra tutti i triangoli rettangoli circoscritti ad un dato cerchio di raggio r determinare quello di area minima.

(È il triangolo isoscele).

461. Fra tutti i triangoli rettangoli circoscritti ad un dato cerchio di raggio r determinare quello di perimetro minimo.

(È il triangolo isoscele).

462. È dato un triangolo equilatero di lato 1 e la circonferenza ad esso circoscritta. Tagliare la figura con una retta parallela ad un lato del triangolo, in modo che sia massima la differenza D fra il quadrato della corda intercettata dalla circonferenza ed il quadrato del segmento intercettato dal triangolo.

(Indicando con x la distanza della retta dal centro e con r il raggio del cerchio, si ha $D=\frac{8}{3}(-2x^2+rx+r^2)$; perciò il problema si può risolvere basandosi sul grafico della parabola. Ricordando poi che $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$, si ottiene che il massimo richiesto si realizza per $x=\frac{\sqrt{3}}{12}$).

463. Data una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si conduce la corda CD perpendicolare ad AB e si considerano i triangoli seguenti:

- ACD che contiene il centro ed ha area S_1,
- BCD che ha area S_2.

Determinare la distanza di CD dal centro, in modo che sia massima la differenza $S=S_1-S_2$.

(Indicando con x la distanza della corda dal centro, si ha $S=2x\sqrt{r^2-x^2}$, massima per $x=\frac{\sqrt{2}}{2}r$).

464. Data una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si fissa la tangente t alla circonferenza in A; condurre una corda MN, parallela a t, in modo che, proiettando M ed N perpendicolarmente su t, si ottenga un rettangolo con una delle seguenti caratteristiche:

I) massima diagonale d,
II) massima area S,
III) massimo perimetro P.

(Si ottiene che i massimi richiesti sono: $d_M=\frac{4}{3}\sqrt{3}r$, $S_M=\frac{3}{2}\sqrt{3}r^2$, $P_M=2r(2+\sqrt{5})$*).*

Problemi di geometria solida

465. Inscrivere in una sfera di raggio R il cilindro di superficie laterale S massima.

(Indicando con x il quadrato del raggio del cilindro e con y il quadrato dell'area S, la funzione di cui si cerca il massimo è

$$y=16\pi^2(-x^2+R^2x) \qquad \text{con} \qquad 0\leq x\leq R^2.$$

Perciò il problema si può risolvere, basandosi sul grafico della parabola (vedi Complementi A). Si ottiene che le dimensioni del cilindro debbono essere $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$ *e* $h=\sqrt{2}R$*).*

466. Inscrivere in una sfera di raggio R il cilindro di volume V massimo.

(Indicando con x il raggio di base del cilindro, si ha $V=2\pi x^2\sqrt{r^2-x^2}$*, massimo per* $x=r\sqrt{\frac{2}{3}}$*).*

467. Inscrivere in una sfera di raggio R il cilindro di superficie totale S massima.

(Indicando con x il raggio di base del cilindro, si ha $S=2\pi x^2+4\pi x\sqrt{r^2-x^2}$*, massimo per* $x=r\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$*).*

468. Fra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r determinare quello di superficie laterale S minima.

(Indicando con x l'altezza del cono, si ottiene $S=\pi r\left(x+r+\frac{2r^2}{x-2r}\right)$*, minima per* $x=r(2+\sqrt{2})$*).*

469. Fra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r determinare quello di volume V minimo.

(Indicando con x l'altezza del cono, si ottiene $V=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{x^2}{x-2r}$*, minimo per* $x=4r$*).*

470. Fra i cilindri inscritti in un cono di diametro $2R$ ed altezza h determinare quello che ha la massima superficie laterale S.

(Indicando con x il diametro di base e con y l'altezza del cilindro, si ha $S=\pi xy$; basandosi sulla similitudine di opportuni triangoli, risulta $x=\frac{2R}{h}(h-y)$*.*

Il problema si può risolvere in due modi:

I) per via elementare, vedi Complemento A;
II) valendosi del grafico della parabola.

Si ottiene che il cilindro richiesto ha altezza metà di quella del cono).

471. Fra i cilindri inscritti in un cono di diametro $2R$ ed altezza h determinare quello che ha il massimo volume V.

(Indicando con x il raggio di base e con y l'altezza del cilindro, si ottiene $V=\pi\frac{R^2}{h^2}(h-y)^2y$*; massimo per* $y=\frac{h}{3}$*).*

472. Ad un cilindro equilatero, che ha raggio di base unitario, circoscrivere il cono con la base complanare a quella del cilindro e volume minimo.

(Indicando con x il raggio di base del cono, si ottiene $V=2\pi\frac{x^3}{x-1}$*; massimo per* $x=\frac{3}{2}$*).*

473. È data una semisfera di raggio r. Determinare il cono che sia ad essa circoscritto, con la base sul piano diametrale, ed abbia superficie laterale S minima.

(Indicando con x l'altezza del cono, si ottiene $S=\pi r\frac{x^3}{x^2-r^2}$*, minima per* $x=\sqrt{3}r$*).*

474. Un cono ed un cilindro, che hanno la base in comune, sono inscritti in una sfera di raggio r. Calcolare a quale distanza dal centro della sfera deve essere la base comune, per ottenere che sia massima la somma S fra il volume del cilindro ed il triplo del volume del cono.

(Indicando con x la distanza esaminata, si ottiene $S=\pi(r^2-x^2)(r+x)$*, massima per* $x=\frac{r}{3}$*).*

475. Due coni retti sono inscritti in una sfera di raggio r con base comune e disposti da parti opposte. Calcolare a quale distanza dal centro della sfera deve essere la base comune per ottenere che sia massima la differenza V fra i loro volumi.

(Indicando con x la distanza esaminata, si ottiene $V=\frac{2}{3}\pi(r^2-x^2)x$*, massimo per* $x=\frac{r}{\sqrt{3}}$*).*

476. Fra le piramidi rette che hanno base quadrata e superficie laterale fissa, determinare quella di volume massimo.

(Le facce sono triangoli equilateri).

477. Inscrivere in un tetraedro regolare il prisma triangolare a basi parallele che ha la base sul piano di base del tetraedro ed il volume V massimo.

(Il prisma deve avere altezza uguale ad $\frac{1}{3}$ *dell'altezza del tetraedro).*

478. Fra i triangoli rettangoli di ipotenusa a, determinare quello che ruotando intorno ad uno dei suoi cateti genera il cono di volume V massimo.

(Indicando con x il cateto intorno al quale avviene la rotazione, si ottiene $V=\frac{1}{3}\pi(a^2-x^2)x$*, massimo per* $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$*).*

479. Fra i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato, determinare quello che, ruotando intorno ad uno dei lati, genera il cilindro di volume V massimo.

(Indicando con x il lato intorno al quale avviene la rotazione, si ottiene $V=\pi(p-x)^2x$*, massimo per* $x=\frac{p}{3}$*).*

480. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in un cerchio di centro O e raggio r, determinare quello che, ruotando intorno alla sua base, genera il solido di volume V massimo.

(Indicando con x la distanza della base dal centro O, si ottiene $V=\frac{2}{3}\pi(r+x)^2\sqrt{r^2-x^2}$*, massimo per* $x=\frac{2}{3}r$*).*

481. Calcolare a quale distanza dal centro di un cerchio di raggio r si deve condurre una corda affinché sia massima la superficie S generata dalla corda in una rotazione completa intorno al diametro ad essa parallelo.

(Indicando con x la distanza esaminata, si ottiene $S=4\pi x\sqrt{(r^2-x^2)}$*, massima per* $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$*).*

482. In una circonferenza di centro O e raggio r condurre una corda MN parallela al diametro AB, in modo che il solido generato dal quadrilatero $OMNB$ in una rotazione intorno alla retta AB abbia volume massimo.

(Indicando con 2x la corda MN, si ottiene $V=\frac{\pi}{3}(r^2-x^2)(4x+r)$*, massimo per* $x=\frac{r}{2}$*).*

483. Fra tutti i triangoli isosceli di lato a ed altezza variabile determinare quello che genera il solido di volume V massimo, ruotando intorno ad una retta parallela alla base e passante per il vertice opposto.

(Indicando con x l'altezza variabile, si ottiene $V=\frac{4}{3}\pi x^2\sqrt{a^2-x^2}$, *massimo per* $x=r\sqrt{\frac{2}{3}}$*).*

484. È dato un triangolo equilatero ABC con il lato lungo a e si considera un punto M, variabile sul lato AB. Da M si conduce la parallela al lato BC, che incontra il lato AC in P, e la perpendicolare al lato BC, che incontra BC stesso in Q; si fa ruotare il quadrilatero $CPMQ$ intorno alla retta BC, ottenendo un solido di volume V. Determinare la posizione di M per cui il volume V è massimo.

(Indicando $x=MB$, *si ottiene* $V=\frac{3}{4}\pi x^2\left(a-\frac{5}{6}x\right)$, *massimo per* $x=\frac{4}{5}a$*).*

Problemi basati sulla trigonometria

485. Data una semicirconferenza di diametro $AB=2r$, si traccia una corda AC e si considerano i seguenti punti:

M, medio di AC,
H, proiezione ortogonale di M su AB.

Determinare l'angolo $B\hat{A}C=x$, in modo che sia massimo il segmento MH.

(Si ottiene $\overline{MH}=r$ *sen cos x, massimo per* $x=45°$*).*

486. Sull'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, determinare un punto P, in modo che, detto C il punto medio di OA, il quadrilatero $OBPC$ abbia area massima.

(Indicato $C\hat{O}P=x$, *si ottiene* $S=\frac{1}{4}r^2(2\cos x+\operatorname{sen} x)$, *massimo per* $x=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$*).*

487. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ si traccia una corda AD e, detto C il punto medio dell'arco BD, si considera il quadrilatero $ABCD$, che ha area S. Determinare l'angolo $B\hat{A}D$, in modo che S risulti massima.

(Indicato $B\hat{A}D=2x$, *si ottiene* $S=r^2\operatorname{sen} 2x(\cos 2x+1)$, *massimo per* $x=30°$*).*

488. In una circonferenza di raggio r si fissa la corda AB che dista $\frac{r}{2}$ dal centro. Considerare nel maggiore degli archi AB un punto C e prolungare AC di un segmento $CD=AC$; determinare per quale posizione di C è massima l'area S del triangolo CDB.

(Indicato $C\hat{A}B=x$, *si ottiene* $S=\sqrt{3}r^2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(120°-x)$, *massimo per* $x=60°$*).*

489. Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC con il cateto AB lungo a, condurre per il vertice C una retta r non secante il triangolo e considerare i segmenti di perpendicolare AM e BN condotte su r. Determinare la posizione di r per cui è massima la somma $S=AM+BN$.

(Indicato con x l'angolo che r forma con il cateto AC, si ottiene $S=a[\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(45°+x)]$, *massimo per* $x=\operatorname{arctg} 2$*).*

490. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$ si traccia la corda AC che forma con AB l'angolo $B\hat{A}C=\frac{\pi}{4}$ e si considerano sulla semicirconferenza due punti D ed E, in modo che AC sia la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}E$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $D\hat{A}E$, in modo che sia massima l'area S del quadrilatero $ADCE$.

(Indicato $D\hat{A}E=2x$, *si ha* $S=\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}(4x)$, *massima per* $x=\frac{\pi}{8}$*).*

491. In una circonferenza di raggio r si fissa una corda AB lunga $r\sqrt{3}$ e da un punto Q variabile su AB si conduce la corda CD, perpendicolare ad AB. Determinare la posizione di Q per cui è massimo il perimetro $2p$ del quadrilatero $ACBD$.

(Valendosi opportunamente del teorema della corda, scegliendo $B\hat{A}C=x$ si ha $p=r\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, massimo per $x=\frac{\pi}{3}$).

492. Si considera un punto M, variabile sull'arco AB, sesta parte di una circonferenza di centro O e raggio r e si traccia da M la parallela al raggio OA, fino ad incontrare in N il raggio OB. Determinare la posizione di M, in modo che sia massima l'area del triangolo AMN.

(Deve essere $A\hat{O}M=\frac{\pi}{6}$).

493. Si considera un triangolo isoscele ABC, con i lati obliqui AB ed AC lunghi a e l'angolo al vertice A variabile; si tracciano le seguenti semirette:

- la bisettrice dell'angolo BAC, che incontra in D la base AB,
- da D la parallela ad AB, che incontra il lato AC in E,
- da D la parallela ad AC, che incontra il lato AB in F.

Calcolare l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$, in modo che sia massima l'area del quadrilatero $AEDC$.

(Deve essere $B\hat{A}C=\frac{\pi}{2}$).

494. Sono date due circonferenze, che hanno diametri $\overline{AO}=r$ ed $\overline{AB}=4r$ e sono tangenti internamente in A. Condurre una retta per A che incontri la circonferenza minore in M e quella maggiore in N, formando un quadrangolo $OBNM$ con le seguenti caratteristiche:

- perimetro P massimo,
- area S massima.

(Indicando $x=B\hat{A}M$, si ottengono i valori $x=\text{arctg } 3$ e $x=45°$).

495. Considerare un punto M variabile su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, congiungere M con A e con B e costruire, esternamente al triangolo ABM, il quadrato $AMPQ$, di lato AM; si otterrà un trapezio rettangolo. Determinare la posizione di M, per cui il trapezio $ABPQ$ presenta le seguenti caratteristiche:

- area massima,
- perimetro massimo.

(Indicando $x=B\hat{A}M$, si ottengono i valori $x=\frac{1}{2}\text{arctg }\frac{1}{2}$ e $x=\text{arctg }\frac{1}{3}$).

496. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$ è inscritto il triangolo rettangolo ABC, che ha l'angolo di vertice A ampio 60°. Si considera un punto P variabile sull'arco BC e si indicano con M ed N le proiezioni di P sulla corda BC e sul prolungamento della corda AC. Determinare l'ampiezza dell'angolo PAB, in modo che sia massima l'area del rettangolo $PMCN$.

(Si ottiene $P\hat{A}B=20°$).

497. È dato un settore circolare AOB di raggio $\overline{OA}=r$ ed angolo al centro $A\hat{O}B=60°$.. Nel settore si inscrive un rettangolo $PQMN$ con la base PQ sul raggio OA, il vertice M sull'arco ed il vertice N sul raggio OB.
Esprimere le dimensioni del rettangolo in funzione dell'angolo $A\hat{O}M=x$ ed indicare i rettangoli che presentano le seguenti caratteristiche:

- area massima,
- perimetro massimo,
- diagonale massima.

(Si ottiene $x_1=30°$, $x_2=\text{arctg}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $x_3=\frac{1}{2}\text{arctg }(2\sqrt{3})$).

498. È dato un quadrante AOB di cerchio e si prolunga il raggio OA di un segmento $AC=OA=r$. Determinare sull'arco AB un punto M, in modo che si formi il quadrangolo $OCMB$ di area massima.

(Indicando $x=M\hat{O}A$, si ottiene $x=\text{arctg } 2$).

499. Si considerano dei triangoli che hanno fissi i lati $AB=c$ e $AC=b$ e variabile l'angolo $B\hat{A}C=x$ e si costruisce sul lato BC il relativo quadrato. Indicare la situazione in cui è massima la somma delle aree del triangolo e del quadrato.

(Si ottiene $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$).

500. Data una circonferenza di centro O e raggio r, considerare una corda AB e costruire il triangolo equilatero ABC, con il vertice C dalla parte opposta di O rispetto alla retta AB. Determinare l'ampiezza dell'angolo AOB, in modo che sia massima l'area del quadrilatero $AOBC$.

(Indicando $A\hat{O}B=2x$, si ottiene $x=150°$).

501. Un quadrato di lato a ruota intorno ad una retta che appartiene allo stesso piano, passa per un vertice ed è esterna al quadrato. Determinare l'angolo x che la retta deve formare con un lato del quadrato, in modo che sia massimo il volume V del solido così generato.

(Si ottiene $x=45°$).

502. Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per cui è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovato l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono.

(Si ottiene $x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$).

Problemi di geometria analitica

503. Data la parabola d'equazione $y=-x^2+4$, si traccia, nel semipiano al disopra dell'asse delle ascisse, una retta r parallela all'asse delle x, che incontra la parabola nei punti M ed N e si indicano con M' ed N' le proiezioni di M ed N sull'asse delle x. Determinare la posizione di r, per cui è massima l'area S del rettangolo $MM'NN'$.

(Indicata con $y=k$ l'equazione della retta r, si può esprimere S in funzione di k, ottenendo $S=2k\sqrt{4-k}$, massima per $k=\frac{8}{3}$).

504. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, calcolando le coordinate del suo vertice V. Determinare sull'arco OV un punto P, in modo che sia massima l'area S del triangolo OVP.

(Osservare che il triangolo ha il lato OV fisso, perciò S è massima quando è massima l'altezza PH, relativa al lato OV. Indicando con h l'ascissa di P, si può esprimere PH, in funzione di h, valendosi della formula per la distanza di un punto da una retta. Si ottiene

$$\overline{PH}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot h^2+2h-h}{\sqrt{2}},\ \textit{massima per } h=1).$$

505. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passa per $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ ed è tangente in B alla retta d'equazione $y=-2x+5$. Tracciare una retta r, parallela ad AB, che incontri la parabola nei punti C e D dell'arco AB ed indicare con C' e D' le proiezioni di C e D sulla retta AB. Determinare la posizione della retta r per cui è massima l'area del rettangolo $CDD'C'$.

(La parabola ha equazione $y=-x^2+4$; la retta AB ha equazione $y=x+2$. Indicata con $y=x+k$ l'equazione della retta r e calcolate le coordinate di C e D, si può ottenere la lunghezza di $CC'=DD'$ mediante la formula per la distanza fra due rette parallele e la lunghezza di $CD=C'D'$ mediante la formula per la distanza fra due punti. Così si esprime l'area S in funzione di k, ottenendo $S=(k-2)\sqrt{17-4k}$, massima per $k=\frac{17}{2}$).

506. Disegnare la parabola d'equazione $y=\frac{1}{2}x^2$ e determinarne i punti O ed A di intersezione della curva con la bisettrice del 1° e 3° quadrante. Considerare un punto B, variabile sul segmento OA e condurre da B le parallele agli assi, fino ad incontrare l'arco OA di parabola in C e D. Determinare la posizione di B per cui è massima l'area del triangolo OBC e la posizione di B per cui è massima l'area del triangolo OBD.

(Indicata con h l'ascissa di B, si debbono considerare i punti seguenti: $B(h, h)$, $C(\sqrt{2h}, h)$, $D\left(h, \frac{1}{2}h^2\right)$. *Il triangolo OBD ha area massima per* $h=\frac{4}{3}$. *Il triangolo OBC ha area massima per* $h=\frac{9}{8}$*).*

507. Sulla parabola d'equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, si considera il punto A d'ascissa $x=1$; per A si traccia la tangente t e la normale n alla curva e si calcolano le coordinate del punto B, ulteriore intersezione di n con la parabola. Determinare sull'arco AB un punto P, in modo che, indicate con T ed N le sue proiezioni ortogonali su t e su n, sia massima l'area del rettangolo $PNAT$.

(Si ottiene: $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $t: y=x+\frac{1}{2}$, $n: y=-x+\frac{5}{2}$, $B\left(5; -\frac{5}{2}\right)$, *area massima* $P(4, 0)$*).*

508. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi $O(0, 0)$ ed $A(4, 0)$. Tracciare una retta r parallela all'asse delle x che incontri la circonferenza in due punti B e C di ordinata positiva; determinare la posizione della retta r per cui è massima l'area S del triangolo OBC.

(La circonferenza ha equazione $x^2+y^2-4x=0$, *la retta richiesta è* $y=\sqrt{2}$*).*

509. Scrivere l'equazione della parabola passante per $O(0, 0)$, $A(5, 0)$ e $B(2, 3)$; determinare una retta parallela all'asse delle x, che incontri la parabola in due punti M ed N del 1° quadrante, in modo da formare un triangolo OMN di area massima.

(La parabola ha equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x$, *la retta richiesta è* $y=\frac{25}{12}$*).*

510. Date le curve d'equazione $y=1-x^2$ e $x^2+y^2=1$, determinare una retta parallela all'asse delle y, che le incontri nei punti P e Q del 1° quadrante, in modo che il segmento PQ abbia lunghezza massima.

(La retta deve avere equazioni $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$*).*

511. Data la parabola d'equazione $y=x^2-x+1$, condurre per il punto $A(0, 1)$ la tangente t alla parabola e considerare su t il punto B da cui si può condurre la tangente t' alla parabola, perpendicolare a t. Nella regione finita di piano delimitata dalla parabola e dalle due tangenti inscrivere il rettangolo che ha i lati paralleli agli assi cartesiani e l'area massima.

(Si ottiene $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *e il rettangolo col vertice in* $C\left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right)$*).*

512. Data la parabola d'equazione $y=3x-x^2$, determinarne i punti A e B d'intersezione con l'asse delle x. Scrivere l'equazione di un'altra parabola che passi per A e B ed abbia vertice $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}a\right)$, con $a>0$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve inscrivere il rettangolo di area massima e determinare per quale valore di a tale rettangolo diventa quadrato.

(Si ottiene $y=ax^2-3ax$, *...)*

513. Scrivere l'equazione della parabola passante per $O(0, 0)$ ed $A(3, 6)$ ed ivi tangente alla retta $y=9-x$. Nella regione finita di piano limitata dalla parabola e dalla retta OA condurre una retta r, parallela ad OA, in modo che, incontrando la parabola nei punti B e C, si formi un trapezio $OABC$ di area massima.

(Si ottiene la parabola $y=-x^2+5x$ *e la retta BC d'equazione* $y=2x+2$*).*

514. Data la parabola d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2-x+2,$$

risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della curva,
- determinare i punti A e B di intersezione della curva con la retta $y=2$,
- determinare le rette t e t', tangenti alla parabola in A e in B,
- nella regione finita di piano delimitata dalle due rette e dalla curva, inscrivere il triangolo isoscele che ha la base parallela all'asse delle x e l'area massima.

(Il triangolo ha un vertice in $P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$).

515. Esaminare, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelti, una parabola ed un punto Q sul suo asse di simmetria. Determinare i punti P della parabola che hanno minima distanza da Q. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro in Q e raggio lungo quanto la distanza minima determinata prima.

(Se l'equazione della parabola è $y=x^2$ e $Q(0, 1)$, la distanza minima è ottenuta dai punti $P(-1, 1)$ e $P'(1, 1)$).

516. Data la parabola d'equazione $y=2x-x^2$ e la retta d'equazione $y=-\frac{3}{4}x+3$ determinare i punti P della parabola che hanno distanza minima dalla retta. Verificare che la tangente nel punto P che realizza il minimo è parallela alla retta data.

(Si ottiene $P\left(\frac{11}{8}, \frac{55}{64}\right)$).

517. Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y=x^2-2x, \qquad y=-\frac{1}{2}x^2+2x$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i punti di intersezione delle due curve;
- condurre una retta parallela all'asse delle x, in modo che siano uguali le due corde che la retta determina su ciascuna curva;
- condurre una retta parallela all'asse delle y, che incontra le due parabole in M ed N, attraversando la parte di piano tra esse compresa, in modo che il segmento MN abbia lunghezza massima.

(Le rette sono $y=1$ e $x=\frac{4}{3}$).

518. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-2x^2+8x$, dopo aver determinato il vertice V e i punti O ed A di intersezione con l'asse delle x.
Risolvere quindi i seguenti quesiti:

- determinare una retta che passi per O ed incontri la parabola in M, formando il triangolo AOM di area massima;
- determinare una retta parallela all'asse delle x, che incontri la parabola in punti P e Q del 1° quadrante, in modo che il triangolo APQ abbia l'area massima.

(Si ottiene $y=4x$, $y=\frac{16}{3}$).

Problemi vari

519. Da un cartone di lato a, si ritagliano agli angoli quattro quadrati uguali e si ripiegano le strisce ottenute, realizzando una scatola senza coperchio. In quale caso la scatola ha volume massimo?

(Si tratta di una generalizzazione del problema esposto nel testo. Indicando con x la lunghezza del lato del quadrato che si ritaglia, si ottiene $x=\frac{a}{6}$).

520. Da un cartone rettangolare di lati a e b, si ritagliano agli angoli quattro quadrati uguali e si ripiegano le strisce ottenute, realizzando una scatola senza coperchio. In quale caso la scatola ha volume massimo?

(Si tratta di un'ulteriore generalizzazione del problema esposto nel testo. Scegliendo x come nel problema precedente, si ha $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$*).*

521. Su un cartone quadrato di lato $2a$ si tracciano le diagonali (fig. 42) e, sulle diagonali, si indicano quattro punti equidistanti dal centro; si congiungono quindi questi punti con i punti medi dei lati più vicini. Si ritaglia poi il cartone lungo queste congiungenti e si ripiegano i lembi triangolari, in modo da costruire una piramide. Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i casi in cui si può costruire la piramide,
- fra questi casi determinare quello in cui la piramide ha volume V massimo.

(Indicando x come in figura, si ottiene $V=4(a-x)^2\cdot\sqrt{2ax-a^2}$*, massimo per* $x=\frac{3}{5}a$*).*

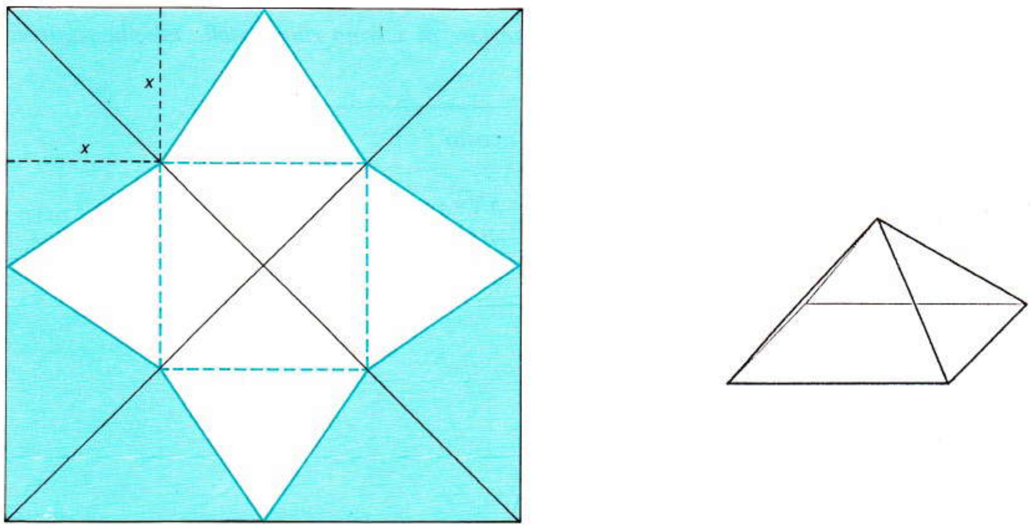


Fig. 42

522. Fra i contenitori cilindrici costruiti con una data quantità di materiale (e cioè di superficie totale S fissa), indicare quello di volume V massimo.

(Indicando con x il raggio di base del cilindro e con h la sua altezza, si può ricavare h in funzione di x, sapendo che risulta $S=2\pi x^2+2\pi xh$*; in definitiva risulta* $V(x)=\frac{S}{2}x-\pi x^3\ldots$*)*

523. Fra i contenitori cilindrici di dato volume V, indicare quello che si può realizzare con la minima quantità di materiale (e cioè di superficie totale S minima).

(Indicando con x il raggio di base del cilindro e con h la sua altezza, si può ricavare h in funzione di x, sapendo che risulta $V=\pi x^2 h$*; in definitiva risulta* $S(x)=2\pi x^2+\frac{V}{x}\ldots$*)*

524. Se x_1, x_2, x_3, x_4 sono i risultati di 4 misure ugualmente precise di una grandezza che vale x; verificare che il valore x per cui è minima la somma dei quadrati degli errori è la media aritmetica delle misure.

(La somma dei quadrati degli errori è $S=(x-x_1)^2+\ldots+(x-x_4)^2$*).*

525. Un'industria deve trasportare il petrolio dal pozzo P all'impianto di lavorazione L nella situazione illustrata in fig. 43; i costi di trasporto sono i seguenti:

- via mare 5 milioni ogni 100 chilometri,
- via terra 4 milioni ogni 100 chilometri.

Qual è il percorso che costa meno?

(La fig. 44 mostra alcuni percorsi possibili:

a) l'intero trasporto via mare (tratto PL in grigio),
b) minimo percorso PR via mare e il tratto RL via terra (in colore),
c) un "percorso intermedio" (in nero), cioè PT via mare e TL via terra.

Fissiamo ora l'attenzione sul percorso (c). Il percorso varia se cambia la lunghezza del tratto RT; si ha inoltre che:

- *se $RT=0$, si ha il percorso (b),*
- *se $RT=5$, si ha il percorso (a).*

Il percorso (c) include dunque i percorsi (a) e (b) come casi particolari; perciò basta esaminare solo il percorso (c) per studiare completamente il problema.
Indichiamo dunque con x la lunghezza del tratto RT (in centinaia di chilometri), tenendo presente che deve essere

$$0 \leq x \leq 5.$$

I calcoli necessari per valutare il costo C al variare di x sono riuniti nella tabella seguente:

percorso (in centinaia di Km)	*costo*
$PT=\sqrt{9+x^2}$	$5\sqrt{9+x^2}$
$TL=5-x$	$4(5-x)$
totale	$5\sqrt{9+x^2}+4(5-x)$

Si ha dunque

$$C(x)=4\cdot(5-x)+5\cdot\sqrt{9+x^2}$$

che risulta minimo per $x=4$, fig. 45).

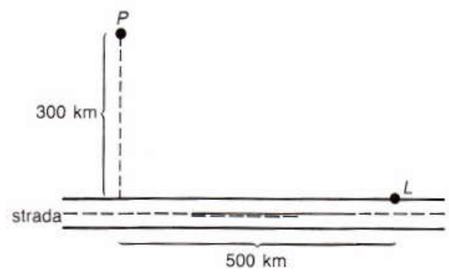


Fig. 43

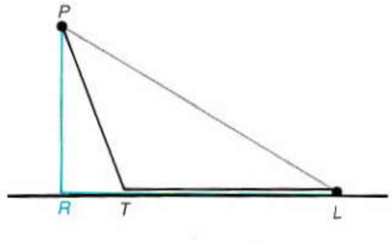


Fig. 44

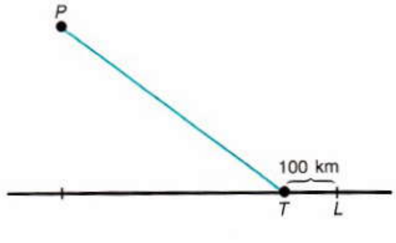


Fig. 45

11. Le derivate in fisica

Le derivate per indicare la rapidità di variazione

526. Un proiettile, lanciato con una velocità iniziale v_0 verticale verso l'alto, si muove secondo la legge $s=v_0t-4{,}9t^2$; risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della legge assegnata;
- determinare la legge che regola la velocità v al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- determinare la legge che regola l'accelerazione a al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica, fissando in particolare l'attenzione sull'istante in cui v è minima.

527. Un corpo, lanciato con una velocità iniziale v_0 verticale verso il basso, si muove secondo la legge $s=v_0t+4{,}9t^2$; risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della legge assegnata;
- determinare la legge che regola la velocità v al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- determinare la legge che regola l'accelerazione a al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica.

528. Un corpo si muove secondo la legge $s=20t-5t^2$ nell'intervallo di tempo $[0, 1]$. Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare la velocità media nell'intervallo indicato,
- determinare l'istante nel quale la velocità istantanea uguaglia la velocità media.

(Tenere presente anche il teorema del valor medio).

529. La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nell'aria varia secondo la legge

$$v=A\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

dove A e b sono due costanti.
Risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della legge assegnata;
- determinare la legge con cui varia l'accelerazione a al passare del tempo e tracciarne il grafico;
- interpretare dal punto di vista fisico i risultati ottenuti.

530. Si esamina un pendolo che si muove percorrendo un piccolo arco di circonferenza con la legge $s=A \text{ sen } (\omega t+\varphi)$; trascurando l'attrito dell'aria, risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della legge assegnata;
- determinare la legge che regola la velocità v al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- determinare la legge che regola l'accelerazione a al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- interpretare fisicamente i risultati ottenuti, fissando in particolare l'attenzione sugli istanti in cui v è massima o minima e sugli istanti in cui a è massima o minima.

Per rendere più espressivi i calcoli, si possono assegnare dei valori numerici fissi alle costanti, per esempio: $A=4$, $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

531. Un pendolo in presenza di attrito percorre piccoli archi di circonferenza secondo la legge $s=Ae^{-kt} \text{ sen } (\omega t+\varphi)$; risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico della legge assegnata;
- determinare la legge che regola la velocità v al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- determinare la legge che regola l'accelerazione a al passare del tempo t e tracciarne il grafico;
- interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica, fissando in particolare l'attenzione sugli istanti in cui v è massima o minima e sugli istanti in cui a è massima o minima.

Per rendere più espressivi i calcoli, si possono assegnare dei valori numerici fissi alle costanti, per esempio: $A=4$, $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $k=1$.

532. Una spira di metallo posta in un campo magnetico B nelle condizioni di fig. 46 ruota con velocità angolare costante ω; determinare la forza elettromotrice indotta che si rileva ai capi dei due contatti striscianti.

(Tenere presente che in questo caso si ha $\Phi(B)=BS\cos(\omega t)$, ...)

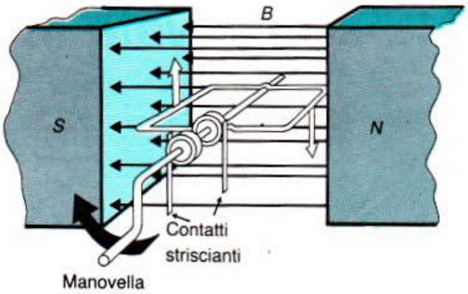


Fig. 46

533. Una spira di metallo è percorsa da una corrente variabile nel tempo, che possiamo indicare con $i=f(t)$; calcolare la forza elettromotrice autoindotta che insorge nella spira.

(Tenere presente che in questo caso si ha $\Phi(B)=Li$, dove L è il coefficiente di autoinduzione ...)

534. Riprendere l'esercizio 5 del cap. 4 e scrivere la relazione che lega la quantità di carica $q(t)$ che attraversa una data sezione di un filo conduttore e l'intensità di corrente i che circola nel conduttore.

Le derivate per risolvere problemi di massimo o minimo

535. Un circuito è formato da una pila di forza elettromotrice E e di resistenza interna r, applicata ad un reostato capace di fornire una resistenza di valore R compreso fra 0 e 100Ω. L'intensità di corrente i che circola nel circuito, la potenza W dissipata dal circuito e la tensione V ai capi del reostato sono regolate dalle seguenti leggi:

$$i=\frac{E}{R+r}, \qquad V=Ri, \qquad W=Vi.$$

Esaminare i, V, W in funzione delle costanti E ed r e della variabile R; determinare il valore di R che rende massima ogni funzione.

536. Si hanno a disposizione N pile elettriche uguali, che si possono disporre in vari modi per formare una batteria: si possono collegare in serie n pile e poi collegare in parallelo i gruppi ottenuti $\left(\text{che sono in numero di } \frac{N}{n}\right)$. Collegando questa batteria ai capi di una resistenza fissa R, si ha una corrente i, che varia al variare di n secondo la legge

$$i=\frac{ENn}{NR+n^2r}$$

dove E ed r sono due costanti caratteristiche delle pile.
Determinare per quale valore di n la batteria dà la massima corrente.

(Si ottiene $n=\sqrt{\frac{N\cdot R}{r}}$, che si approssima con un intero).

537. Un circuito, in cui sono inseriti in serie un conduttore di resistenza R ed un condensatore di capacità C, è caratterizzato da un coefficiente di autoinduzione L. Ai capi del circuito è collegata una sorgente di tensione sinusoidale di valore massimo V e pulsazione ω; si trova che, in tal caso, il circuito è attraversato da una corrente i, data da

$$i=\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(L\cdot\omega-\frac{1}{C}\cdot\omega\right)^2}}$$

Determinare il valore di L per cui è massima i, se ω, R, C sono costanti.
Determinare il valore di C per cui è massima i, se ω, R, L sono costanti.

(Si ottiene $L=\frac{1}{C\omega^2}$, $C=\frac{1}{L\omega^2}$).

538. Nella fig. 47 è rappresentata la sezione di un cavo, destinato alla trasmissione di segnali e caratterizzato da $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=ax$ (con $x>1$).
Il numero y di segnali che si possono trasmettere lungo il filo in un minuto è regolato dalla legge

$$y=\frac{k}{x^2}\cdot\ln x,$$

dove k è una costante che dipende dalle caratteristiche del cavo.
Determinare il valore di x per cui si ha il massimo numero di segnali.

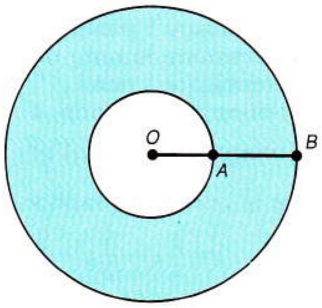


Fig. 47

539. Verificare che si può ricavare la legge della rifrazione dal principio di Fermat, esposto nel testo.
(In fig. 48 sono indicati i punti A e B, che si trovano in due mezzi trasparenti diversi, e un raggio APB che li collega; a e b sono le distanze dei punti dalla superficie s che separa i due mezzi, x indica distanza HP, con $0\leq x\leq d$. La luce ha nei due mezzi velocità differenti, v_1 e v_2, perciò impiega un tempo t_1 per percorrere il tratto AP ed un tempo t_2 per percorrere il tratto PB. Risulta dunque:

$$t_1=\frac{\overline{AP}}{v_1},\qquad t_2=\frac{\overline{BP}}{v_2}$$

e il tempo totale di percorrenza è dato da $t=\frac{\overline{AP}}{v_1}+\frac{\overline{BP}}{v_2}$.
Risulta dunque $t=f(x)$, dove si ha:

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$$

Calcolando ora le due derivate di questa funzione si determina il valore di x che rende il tempo t minimo. Si trova che deve essere

$$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Quest'ultima condizione si traduce, mediante la trigonometria (fig. 49), nella nota legge della rifrazione $\frac{sen\ i}{sen\ r}=\frac{v_1}{v_2}$*).*

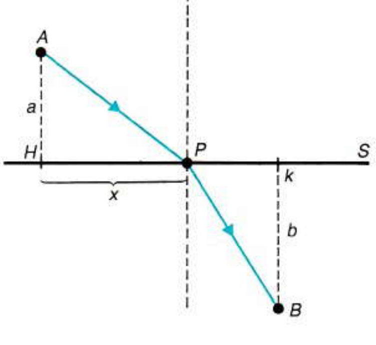


Fig. 48

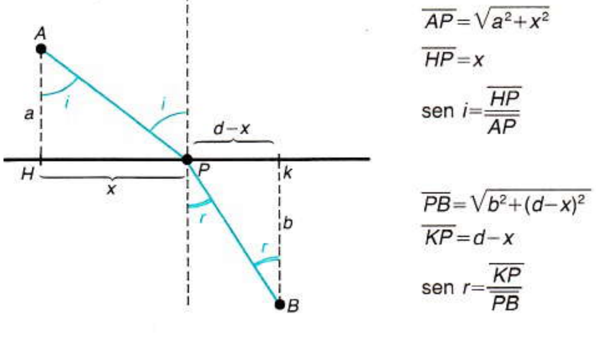


Fig. 49

12. Esercizi riassuntivi

540. Studiare il grafico della funzione $y=x(x-2)^2$ e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare i punti A, B, C di intersezione con la retta $y=x$,
- determinare le rette tangenti alla curva condotte dai punti A, B, C,
- determinare i punti A', B', C', ulteriori intersezioni di ciascuna tangente con la curva,
- verificare che i punti A', B', C' sono allineati.

(Si ottengono i punti $A'(4, 16)$, $B'(2, 0)$, $C'(-2, -32)$).

541. Date le curve d'equazione

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{4} \quad \text{e} \quad y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}$$

risolvere i seguenti quesiti:

- tracciare il grafico delle due funzioni, determinando le coordinate dei loro punti di intersezione;
- tracciare una retta r parallela all'asse delle y che intersechi la prima curva in un punto M e la seconda in un punto N del 1° quadrante; si determini la posizione di r per cui la corda MN ha lunghezza massima;
- indicare con M' ed N' le proiezioni di M ed N sull'asse delle y e determinare la posizione di r per cui è massima l'area del rettangolo $MM'N'N$.

(Si ottiene la prima retta d'equazione $x=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $r: y=\frac{3}{5}\sqrt{15}$).

542. Date la curva p e la retta r d'equazioni

$$p: y=x^3-3x+3, \qquad r: y=-\frac{3}{4}x+3,$$

verificare che esse hanno in comune, oltre al punto $A(0, 3)$, altri due punti B e C, di cui si chiedono le coordinate.
Determinare la funzione $f(t)$ che esprime la distanza di un punto D dell'arco BC di curva p dalla retta r, al variare dell'ascissa t del punto D.
Verificare che i punti della curva che hanno massima distanza dalla retta r sono i punti di contatto delle tangenti parallele alla retta r.

(Applicando la formula della distanza punto-retta al punto $D(t, t^3-3t+3)$ ed alla retta r, si ottiene $f(t)=\frac{1}{5}|4t^3-9t|$, ...)

543. Determinare i coefficienti della funzione $y=ax^4+bx^2+c$ sapendo che:

- la curva passa per $A(1, 3)$,
- la curva ha un punto stazionario $B(\sqrt{3}, -1)$.

Tracciare il grafico della curva ottenuta.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, il vertice $V(0, 4)$ ed è tangente alla curva.

(Si ottiene $y=x^4-6x^2+8$, $y=-2x^2+4$).

544. Fra le funzioni del tipo

$$y=ax^4+bx^2+c \tag{1}$$

determinare quella che descrive la curva con un flesso nel punto $F(1, -1)$, dove la tangente t è parallela alla retta d'equazione $y=-8x+3$.
Tracciare il grafico della curva ottenuta, indicando le coordinate dei punti di massimo o minimo relativo ed i flessi.
Determinare le coordinate dell'ulteriore punto P di intersezione della tangente t con la curva.
Verificare che tutte le curve descritte dalle funzioni del tipo (1) hanno la tangente orizzontale nel punto A d'ascissa 0.
In quali casi A è un punto di massimo relativo?
In quali casi A è un punto di minimo relativo?
Il punto A può essere in qualche caso un flesso orizzontale?

(Si ottiene $y=x^4-6x^2+4$, ...)

545. Fra le funzioni del tipo

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+x \tag{2}$$

determinare quella che descrive la curva con un flesso orizzontale nel punto $F(-1, 0)$.
Tracciare il grafico della curva ottenuta, indicando le coordinate dei punti di massimo o minimo relativo ed il secondo flesso F'.
Determinare l'equazione della tangente t alla curva nel punto di flesso F' e calcolare le coordinate dell'ulteriore punto P di intersezione della tangente t con la curva.
Verificare che per tutte le curve descritte dalle funzioni del tipo (1) il punto A d'ascissa 0 è un punto di crescenza.
In quali casi le curve rivolgono in A la concavità verso l'alto?
In quali casi le curve rivolgono in A la concavità verso il basso?
In quale caso il punto A è un flesso?

(Si ottiene $y=x^4-3x^3+3x^2+x$, ...)

546. Tracciare il grafico della funzione

$$y=\frac{2x^2-2x+2}{x^2-2x+2}$$

Verificare che i tre flessi della curva sono allineati su una retta r, di cui si chiede l'equazione.

(Si ottiene $r: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, ...)

547. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

I) $y=2x^3+2x+1$, II) $y=\dfrac{8x^2+5x+1}{x}$

Determinare il punto della prima curva in cui la tangente coincide con l'asintoto obliquo della seconda curva.

(Si ottiene $P(-1, -3)$).

548. Disegnare la curva d'equazione

$$y=\frac{2x}{x^2+x-1}$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare le coordinate dei punti comuni ad essa e alla sua simmetrica rispetto all'asse delle y;
- calcolare l'area del quadrilatero convesso, formato dalle tangenti alle due curve nei punti comuni d'ascissa non nulla.

(Si ottiene O, $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, ...)

549. Tracciare il grafico della curva d'equazione

$$y=\frac{x-1}{x+1}$$

Considerata poi una retta che passa per $P(-1, 1)$ e ha pendenza m, determinare:

- per quali valori di m una delle intersezioni della retta con la curva appartiene al 1° o al 4° quadrante,
- la lunghezza massima della corda intercettata sulla retta dalla curva,
- il rapporto (maggiore di 1) fra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.

(Si ottiene: lunghezza massima=4, rapporto=$17+12\sqrt{2}$).

550. Tracciare il grafico della funzione

$$y=x+\frac{1}{3x^3}$$

Fra tutte le rette passanti per l'origine determinare quella su cui la curva intercetta il segmento di lunghezza minima.

(Si ottiene $y=2x$).

551. Tracciare il grafico della funzione

$$y=\frac{x^2+4}{-x}$$

Determinare i punti della curva che hanno minima distanza da $O(0, 0)$.

(I punti hanno ascissa $x=\pm\sqrt[4]{8}$).

552. Tracciare il grafico della funzione

$$y=\frac{4x^2+1}{3x}$$

Considerare poi un punto P sull'arco di curva che appartiene al 1° quadrante e condurre per esso le parallele agli asintoti; queste rette incontrano gli asintoti nei punti A e B. Determinare la posizione di P per cui è minima la somma dei segmenti PA e PB.

(Si ottiene $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$).

553. Tracciare il grafico delal funzione

$$y=\frac{x-x^2}{1-2x}$$

Determinare il valore di k per cui la retta d'equazione $y=k$ determina sulla curva la corda di lunghezza minima.

(Si ottiene $k=3$).

554. Fra le curve d'equazione

$$y=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

si determini quella che passa per i punti $P\left(1, \frac{1}{6}\right)$, $Q\left(2, \frac{1}{24}\right)$, $R\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{15}\right)$.
Tracciare il grafico della curva ottenuta.

(Si ottiene $y=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}$).

555. Determinare i coefficienti della funzione

$$y=\frac{ax^2+b}{x^2+c}$$

sapendo che la curva passa per $A(1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(3, -3)$.
Tracciare il grafico della funzione ottenuta.
Determinare la circonferenza tangente alla curva nei punti di flesso.

(Si ottiene $y=\frac{9-5x^2}{x^2+3}$, $x^2+y^2+\frac{7}{2}y-\frac{1}{2}=0$).

556. Studiare il grafico della funzione

$$y=a-\frac{a}{x^2}$$

Determinare il valore di a per cui la circonferenza che ha centro nel punto $C(0, a)$ e passa per i punti di intersezione della curva con l'asse delle x è tangente alla curva.

(Si ottiene $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$).

557. Un cono ha il vertice nel centro O di una sfera di raggio r, mentre la sua base è la sezione della sfera con un piano, che dista x da O.
Esaminare le seguenti funzioni e rappresentarle graficamente:

- il volume V del cono, al variare di x nel dominio $[0, r]$,
- la superficie laterale S del cono, al variare di x nel dominio $[0, r]$,
- la superficie totale S_t del cono, al variare di x nel dominio $[0, r]$.

Verificare che, mentre $V(x)$ ammette un massimo, di cui si chiede il valore, le altre due funzioni sono sempre decrescenti nel dominio assegnato.

(Si ottiene $V(x)=\frac{1}{3}\pi x(r^2-x^2)$, $S(x)=\pi r\sqrt{r^2-x^2}$, $S_t(x)=\pi r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2$, ...*)*

558. Fra le curve d'equazione $y=a$ sen $x+\cos^2 x$ si determini quella che ha un flesso nel punto d'ascissa $x=\frac{7}{6}\pi$; studiare il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene $a=2$, ...)

559. Studiare il grafico della funzione

$$y=\frac{1+\text{sen } x}{\text{sen } x}$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Utilizzando gli elementi ottenuti, relativi al grafico della funzione data, rappresentare la seguente funzione:

$$y=\ln\left|\frac{1+\text{sen } x}{\text{sen } x}\right|$$

Problemi con discussione grafica

La possibilità di tracciare il grafico di vaste categorie di funzioni, e in particolare delle funzioni razionali o trigonometriche fratte, permette di estendere i procedimenti di discussione grafica dei problemi[2].
Vediamo meglio di che si tratta, basandosi su un esempio: si deve discutere il problema seguente.

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si traccia la tangente t alla semicirconferenza in A; si considera sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto M e si conduce per M la tangente t' che tocca la circonferenza in P ed incontra la retta t in Q.
Determinare la posizione di M in modo che risulti

$$\overline{MP}^2+\overline{PQ}^2=k\cdot\overline{AM}^2$$

Discussione.

Ricordiamo prima di tutto che discutere il problema significa determinare i valori di k per cui il problema è risolubile.
Si procede ora nel modo seguente:
- si traccia la figura (fig. 44), che visualizza il problema;
- si sceglie l'incognita $\overline{OM}=x$, precisandone le limitazioni, in questo caso $x>r$;
- si traduce il problema in un'equazione parametrica, osservando che risulta

$$\overline{MP}^2=x^2-r^2, \qquad \overline{AM}=x+r, \qquad \overline{PQ}=\overline{AQ};$$

$$\overline{AQ}=\frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}}$$ dalla similitudine dei triangoli AQM e MOP

e quindi

$$\overline{PQ}^2=\frac{r^2\cdot(x+r)^2}{x^2-r^2}=\frac{r^2\cdot(x+r)}{x-r}$$

In definitiva la relazione assegnata dal problema diventa:

$$x^2-r^2+\frac{r^2\cdot(x+r)}{x-r}=k\cdot(x+r)^2$$

da cui si ricava

$$k=\frac{x^2-2rx+2r^2}{x^2-r^2}$$

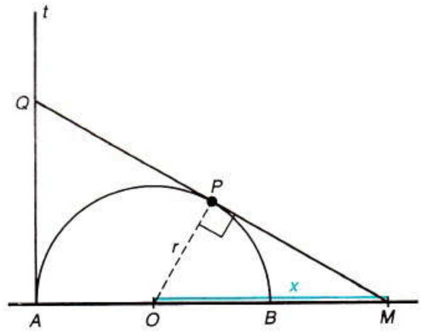


Fig. 44

[2] Vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, vol. 3, pagg. 713-725 e *Trigonometria*, pagg. 346-369.

Ora si imposta la discussione grafica, interpretando l'equazione ottenuta come se provenisse dal sistema seguente

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-2rx+2r^2}{x^2-r^2} \\ y=k. \end{cases}$$

Dal punto di vista grafico, la prima equazione rappresenta una curva di cui sappiamo tracciare il grafico, mentre la seconda equazione rappresenta il fascio di rette parallele all'asse delle ascisse. Così, per trovare i valori di k per cui il problema è risolubile, basta determinare le rette del fascio che incontrano la curva in punti d'ascissa

$$x>r.$$

Tracciamo allora il grafico della funzione; si ottiene la curva di fig. 45, di cui solo l'arco a tratto pieno interessa il problema.

$N\left[\frac{r}{3}(3+\sqrt{5}), \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ minimo

$y=1$, $x=r$, $x=-3$ asintoti

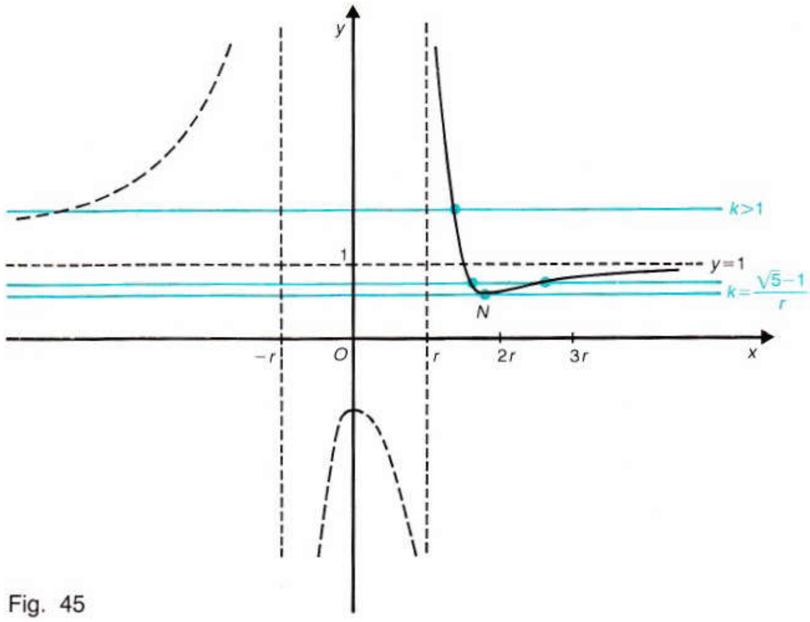


Fig. 45

Dalla figura si ricava subito che:

- per $k<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ le rette del fascio non incontrano la curva nell'arco scelto, perciò il problema non ha soluzioni valide;
- per $k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ si ha la retta del fascio tangente la curva nell'arco scelto, perciò il problema ha due soluzioni valide coincidenti;
- per $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<k<1$ le rette del fascio tagliano la curva in due punti dell'arco, perciò il problema ha due soluzioni valide;
- per $k=1$ si ha l'asintoto orizzontale che incontra la curva in un punto, perciò il problema ha una soluzione valida;
- per $k>1$ si hanno rette che incontrano la curva in un punto e perciò il problema ha una soluzione valida.

Discutere i problemi proposti negli esercizi dal 566 al 575.

560. Dato un quadrato $ABCD$ di lato a, determinare sulla semiretta AB (di origine A) un punto M tale che i quadrati delle sue distanze dai vertici D e C abbiano un dato rapporto k. Discussione.

(Scegliendo $\overline{AM}=x$, *si arriva a discutere* $k=\dfrac{x^2+a^2}{x^2-2ax+2a^2}$, *con* $x>a$*).*

561. Tagliare una sfera di centro O e raggio r con un piano α in modo tale che la somma delle aree della calotta maggiore e della superficie laterale del cono, che è tangente alla sfera ed ha per base il cerchio sezione, stia in rapporto k con l'area della sezione.

(Indicando con x la distanza di O da α, si ha $k=\frac{r^2+rx}{rx-x^2}$, ...)

562. Data una sfera di centro O e raggio r, condurre un piano secante non passante per il centro ed esaminare:

- la superficie S_1 della calotta maggiore che così si ottiene,
- la superficie laterale S_2 del cono avente per base il cerchio sezione ottenuto e le generatrici tangenti alla sfera.

Determinaro la distanza del piano secante dal centro O in modo che si abbia $S_2+kS_1=2S$, dove S è la superficie della sfera.

(Si ottiene $k=\frac{x^2+8rx-r^2}{2x^2+2rx}$, con $r(\sqrt{17}-4)<x<r$).

563. Su un piano α sono appoggiati una sfera di raggio r ed un cono che ha la base su α, il raggio di base lungo r e l'altezza lunga $2r$. Condurre un piano β, parallelo ad α in modo che la somma delle aree delle due sezioni valga $k\pi$.
Determinare, in particolare, in quali condizioni tale somma è massima.

(Si ha il massimo, quando la distanza fra i due piani vale $\frac{2}{3}r$).

564. È dato un cono circolare retto con il raggio di base lungo r e l'apotema variabile che si indica con x; esprimere in funzione della costante r e della variabile x il rapporto y fra il volume del cono ed il volume della sfera inscritta nel cono e studiare il grafico della funzione ottenuta. Valersi del grafico ottenuto per discutere i casi che si presentano, quando si vuole determinare x in modo che il rapporto y valga k.

(Si ottiene $y=\frac{(x+r)^2}{4r(x-r)}$, ...)

565. È dato un cono con la base di centro O e raggio r e l'altezza uguale al raggio di base. Tracciare a distanza x dal vertice un piano che sia parallelo alla base ed intersechi il cono; considerare quindi un altro cono che ha come base la sezione ottenuta e per vertice il punto O.
Esprimere in funzione di r e di x il volume V del nuovo cono e studiare il grafico della funzione ottenuta.
Valersi del grafico ottenuto per discutere i casi che si presentano, quando si vuole determinare x in modo che il volume V valga $k\frac{\pi}{3}$.

(Si ottiene $V(x)=\frac{\pi}{3}x^2(r-x)$, ...)

566. Dal punto medio O di un segmento AB lungo $2a$ si traccia una semiretta che forma con OB un angolo acuto variabile. Si proietta ortogonalmente il punto B sulla semiretta, ottenendo il punto B'. Determinare l'angolo BOB', in modo che risulti

$$OB'+BB'=ka.$$

(Si arriva a discutere l'equazione sen x+cos $x=k$, con $0°\leq x\leq 90°$, che può anche essere ricondotta ad una funzione razionale, valendosi delle formule parametriche).

567. In una semicirconferenza con il diametro AB lungo $2r$ si conduce una corda AC, che forma con AB un angolo variabile ed una corda CD, lunga quanto il raggio. Determinare l'angolo $B\hat{A}C$, in modo che il perimetro del quadrilatero $ABCD$ valga kr.

(È opportuno ricordare la relazione fra angolo al centro ed angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco ed il teorema della corda; valendosi delle formule di prostaferesi, si può arrivare a discutere l'equazione 4 cos 15° sen $(x-15°)+3=k$ con $30°\leq x\leq 60°$).

568. È dato un triangolo rettangolo con l'ipotenusa BC lunga $2a$, di cui O è il punto medio; si costruisce sul cateto minore AB il triangolo equilatero ABP. Determinare l'angolo ABC, in modo che risulti $\overline{PO}=ka$.

(Si arriva a discutere l'equazione $\sqrt{3}$ sen x+cos $x=k$,con $0°\leq x\leq 90°$, che può anche essere ricondotta ad una funzione razionale, valendosi delle formule parametriche).

569. Un cono ed un cilindro di uguale altezza h, hanno lo stesso volume. Determinare l'angolo di apertura del cono in modo che valga $\frac{2}{3}k$ il rapporto fra la superficie totale del cilindro e la superficie laterale del cono.

(Si arriva a discutere l'equazione $\sqrt{3}\ sen\ x + cos\ x = k$, *con* $0° \leq x < 90°$, *...)*

570. Un triangolo rettangolo ruota intorno all'ipotenusa BC lunga a. Determinare gli angoli acuti del triangolo, in modo che la superficie di rotazione ottenuta abbia l'area che vale $2k$ volte l'area del triangolo.

(Si arriva a discutere l'equazione $sen\ x + cos\ x = k$, *con* $0° \leq x < 90°$, *che può anche essere ricondotta ad una funzione razionale, valendosi delle formule parametriche).*

571. Sul diametro AB lungo $2r$ di una semicirconferenza si è fissato il segmento AH lungo $\frac{3r}{2}$; da H si conduce la retta a, che è perpendicolare ad AB ed incontra la semicirconferenza in P. Da A si traccia una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la retta a in N e l'arco AP in M. Determinare l'angolo BAM, in modo che MN sia lungo kr.
Come cambia il problema, se si chiede che la semiretta per A incontri l'arco PB di semicirconferenza?

(Si arriva a discutere l'equazione $k = \frac{3 - 4\cos^2 x}{2\cos x}$ *con* $30° \leq x < 90°$, *...)*

572. Un triangolo isoscele ABC ha i lati uguali AB e AC lunghi a.
Determinare l'angolo ABC, in modo che valga ka la somma dell'altezza relativa alla base e del raggio della circonferenza circoscritta.

(Si arriva a discutere l'equazione $k = \frac{1 + 2\ sen^2 x}{2\ sen\ x}$ *con* $0° \leq x \leq 90°$, *...)*

573. È data l'iperbole d'equazione $xy = 16$, che incontra la retta r d'equazione $y = -2x + 12$ nei punti A e B. Si considera sull'arco AB un punto Q e si indica con R la sua proiezione sull'asse delle y. Determinare la posizione di Q, in modo che risulti $OR + QR = k$.

(Si ottiene $k = x + \frac{16}{x}$ *...)*

574. È data l'iperbole d'equazione $xy = 12$, che incontra la retta r d'equazione $y = -\frac{3}{2}x + 9$ nei punti A e B. Si considera sull'arco AB un punto Q e si indica con R la sua proiezione sull'asse delle x e con S la sua proiezione sull'asse delle y. Determinare la posizione di Q, in modo che il rettangolo $ORQS$ abbia perimetro $2k$.

(Si ottiene $k = x + \frac{12}{x}$ *con* $2 \leq x \leq 4$*).*

575. Data la parabola d'equazione $y^2 = x$, che ha il fuoco nel punto F, considerare un punto M d'ascissa x, variabile sull'arco di curva che si trova nel I° quadrante, in modo che risulti

$$k = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{FM}^2}$$

(Si arriva a discutere $k = \frac{4x(x+2)}{(2x+1)^2}$, *...)*