5
Complementi

A. Metodi per risolvere i problemi di massimo e minimo senza valersi delle derivate

Nel testo (paragrafo 10) è stato indicato un metodo generale per risolvere i problemi di massimo e minimo basandosi sulle derivate. Ma, già molti secoli prima che si pensasse alle derivate, questioni di importanza pratica avevano condotto a risolvere problemi di massimo e minimo.

La traccia più nota è forse la leggenda narrata da Virgilio nell'*Eneide*: la principessa Didone cerca un pezzo di terreno dove costruire una nuova città (la futura Cartagine); finalmente le viene proposto un pezzo di terreno grande tanto da poter essere racchiuso da una pelle di bove. Si dice che l'offerta, apparentemente assurda, venisse ben sfruttata da Didone ritagliando la pelle in striscioline sottilissime che furono disposte ad arco, una dopo l'altra, in modo da formare una circonferenza.

Questa leggenda fa capire che, all'epoca di Virgilio era stato già intuito che il cerchio ha l'area massima fra tutti i poligoni di uguale perimetro. I documenti più antichi che testimoniano studi matematici su problemi di questo tipo risalgono invece ad Erone (I secolo d.C.) e a Pappo (III secolo d.C.), ma Pappo dice di ispirarsi all'opera di Zenodoro, che era un matematico greco del II secolo a.C.

Da allora si sono sviluppate numerose ricerche per risolvere problemi di massimo e minimo; si tratta di ricerche molto varie e spesso geniali, legate a problemi concreti o all'osservazione della natura con "occhio matematico". Ecco due esempi curiosi:

- Il famoso matematico e astronomo Keplero (1571-1630) studia qual è la forma più opportuna da dare ad una botte perché contenga il massimo quantitativo di vino a parità di superficie, cioè di involucro. Keplero osserva che, indipendentemente dalla forma del contenitore, quando ci si avvicina al massimo, accade che, cambiando le dimensioni, il volume cambia pochissimo; ed è proprio questo tipo di osservazioni che ha condotto a collegare i problemi di massimo con lo studio delle derivate.
- Il grande fisico-matematico Plateau (1801-1883) affrontò un problema ancora oggi[1] non completamente risolto: determinare la superficie d'area minima limitata nello spazio da un contorno chiuso assegnato. Il problema conduce a sottili studi matematici, che Plateau accompagnò e in qualche caso sostituì con un'originale trattazione sperimentale: immergeva un contorno chiuso fatto di filo di ferro in una soluzione di acqua e sapone e poi lo estraeva con delicatezza dalla soluzione, osservando la forma della lamina d'acqua saponata ottenuta. Queste esperienze si basano sulla seguente proprietà fisica: la lamina assume una posizione di equilibrio stabile occupando l'area minima, in modo che sia minima l'energia potenziale dovuta alla tensione superficiale.

[1] Vedi l'articolo "Bolle" di Bruce Schechter sul numero di aprile della rivista *Scienza 84*, dove si descrivono ricerche sulle bolle di sapone, effettuate nel 1984 presso il Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.).

In questo Complemento esamineremo appunto alcuni problemi di massimo e minimo risolti con metodi elementari: mancherà dunque il sostegno di un metodo generale come quello offerto dalle derivate e si andrà alla ricerca dei metodi di volta in volta più opportuni. Il lavoro è diviso in due parti:

- parte I, in cui si affrontano i problemi basandosi sulla geometria analitica,
- parte II, in cui ci si basa solo sulla geometria e l'algebra elementare.

Parte I: metodi basati sulla geometria analitica

1. Problemi che si risolvono basandosi sul grafico della parabola

Vediamo come valersi di semplici nozioni di geometria analitica per trattare i problemi che conducono ad una funzione del tipo

$$y=ax^2+bx+c. \tag{1}$$

Ricordiamo infatti che la (1) è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y (figg. 1 e 2).

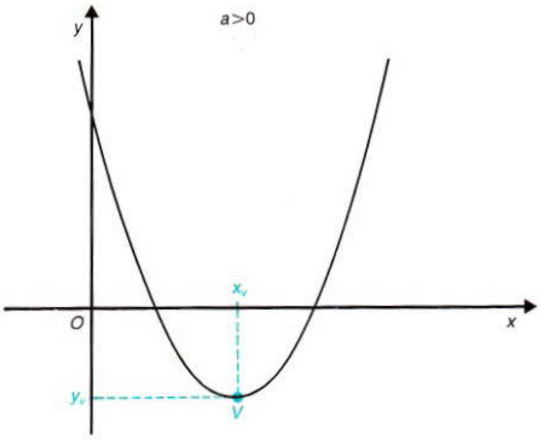


Fig. 1

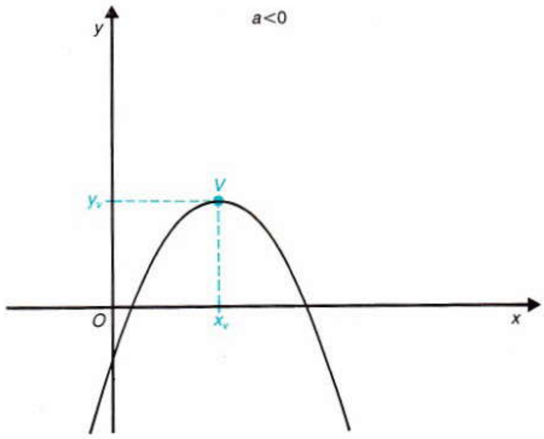


Fig. 2

Se dunque risulta $a>0$, la parabola rivolge la concavità verso l'alto e il minimo valore di y corrisponde all'ordinata y_v del vertice V.

Se invece risulta $a<0$, la parabola rivolge la concavità verso il basso e il massimo valore di y corrisponde ancora all'ordinata y_v del vertice V.

Ora, in entrambi i casi, l'ascissa x_v del vertice è data da

$$x_v=\frac{-b}{2a}$$

e quindi è facile risolvere i corrispondenti problemi di massimo o minimo.

Vediamo subito due esempi di problemi risolti basandosi su queste considerazioni.

Problema 1

In un quadrato dato inscrivere il quadrato di area minima.

Riferiamoci alla fig. 3: b indica la lunghezza del lato del quadrato $ABCD$, x e $b-x$ indicano i tratti in cui i vertici del quadrato inscritto $EFGH$ dividono ciascun lato del quadrato dato. Deve dunque essere

$$0 \leq x \leq b$$

ed è chiaro che, nei due casi limite, cioè quando risulta $x=0$ oppure $x=b$, il quadrato inscritto si sovrappone al quadrato dato ed ha perciò l'area che vale b^2.

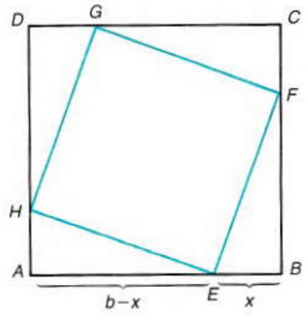


Fig. 3

Ora, per esprimere l'area y del quadrato $EFGH$ in funzione della variabile x e del dato b, si può osservare che risulta

$$y=\overline{EF}^2;$$

d'altra parte, applicando il teorema di Pitagora al triangolo EBF, si ha

$$\overline{EF}^2=x^2+(b-x)^2=x^2+b^2-2bx+x^2.$$

In definitiva si ottiene

$$y=2x^2-2bx+b^2. \tag{2}$$

L'area y del quadrato inscritto è data dunque dalla funzione (2), che ha per grafico l'arco di parabola rappresentato in fig. 4; si tratta della parabola che ha il vertice V con le seguenti coordinate:

$$x_v=\frac{b}{2}, \qquad y_v=\frac{b^2}{2}.$$

I risultati ottenuti si possono esprimere nel modo seguente:

- il quadrato inscritto di area minima si ottiene in corrispondenza al valore

  $$x=\frac{b}{2};$$

  si tratta dunque del quadrato che ha per vertici i punti medi dei lati del quadrato dato (fig. 5);
- tale area minima vale $y=\dfrac{b^2}{2}$, cioè la metà dell'area del quadrato dato.

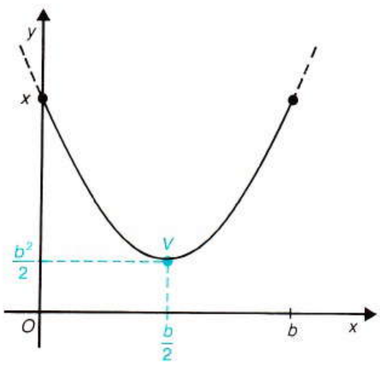


Fig. 4

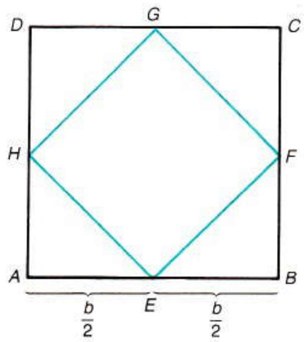


Fig. 5

Problema 2

All'interno di un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r, si costruisce una semicirconferenza di diametro OB; si considera quindi una semiretta di origine O che incontra l'arco AB in P e la semicirconferenza in Q. Determinare l'angolo $A\hat{O}P$ per cui è massima l'area S del triangolo APQ.

Cominciamo col tracciare una figura che visualizzi il problema (fig. 6); è facile osservare che:

- la variabile x è soggetta alle limitazioni seguenti:

  $$0° \leq x \leq 90°$$

  e nei due casi limite, cioè quando risulta $x=0°$ oppure $x=90°$, l'area esaminata vale 0;
- l'area S è data da $S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{AH}$

Ora, per esprimere l'area S in funzione della variabile x e del dato r, basta applicare le nozioni di trigonometria relative ai triangoli rettangoli OAH e OQB (fig. 7), per trovare che risulta

$$\overline{AH}=r\cdot \text{sen } x, \qquad \overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ}=r-r \text{ sen } x$$

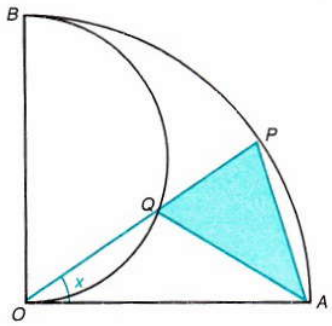


Fig. 6

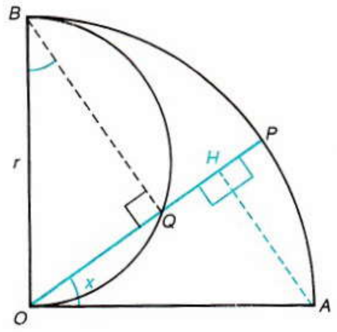


Fig. 7

L'area S del triangolo APQ è dunque data da

$$S=\frac{1}{2}\cdot r \operatorname{sen} x(r-r \operatorname{sen} x)=\frac{1}{2}\cdot r^2 \operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x).$$

Dato che r^2 è una costante positiva, per determinare il massimo di S basta studiare la funzione

$$y=\frac{S}{r^2}, \qquad \text{ossia} \qquad y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x. \tag{3}$$

Si osserva ora che si può ricondurre quest'ultima funzione ad una forma più facile da esaminare, considerando come variabile indipendente non l'angolo acuto x, ma il seno dell'angolo; perciò si introduce una nuova variabile z, legata ad x dalla relazione

$$z=\operatorname{sen} x.$$

In questo modo, risulta $0\leq z\leq 1$ e la funzione (3) viene scritta nella forma

$$y=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z;$$

si ottiene così l'equazione di una parabola, di cui è immediato tracciare il grafico (fig. 8); in particolare si trova che il vertice V ha le coordinate seguenti:

$$x_v=\frac{1}{2}, \qquad y_v=\frac{1}{8}.$$

I risultati ottenuti si possono esprimere nel modo seguente:

– il triangolo di area massima (fig. 9) si ottiene in corrispondenza al valore

$$z=\frac{1}{2}, \qquad \text{ossia} \qquad \operatorname{sen} x=\frac{1}{2}, \qquad \text{da cui} \qquad x=30°,$$

– tale area massima vale $S=\frac{1}{8}r^2$, cioè $\frac{1}{8}$ dell'area del quadrato di lato r.

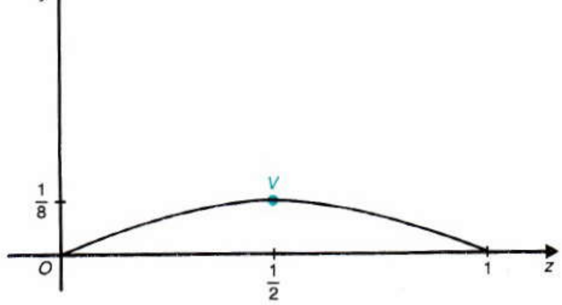


Fig. 8

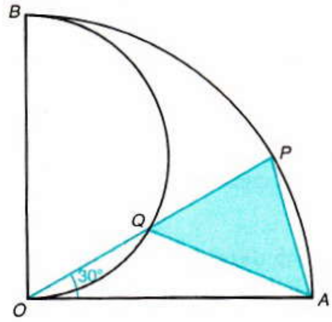


Fig. 9

2. *Problemi che si risolvono basandosi sui fasci di curve*

Esaminiamo ora due esempi di problemi che si possono risolvere basandosi sui fasci di curve; avremo così un'idea di un metodo grafico-dinamico spesso molto utile per trattare rapidamente i problemi di massimo e minimo.

Problema 3

Si considera un punto Q variabile su un segmento AB di lunghezza 8 e si costruisce su AQ il rettangolo $AQRS$ di area 24; determinare la posizione di Q per cui il rettangolo ha perimetro minimo.

Cominciamo a tracciare qualche disegno che visualizzi il problema.

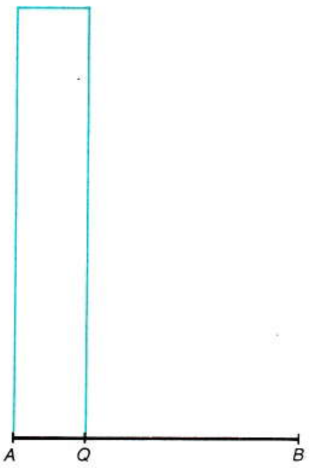


Fig. 10

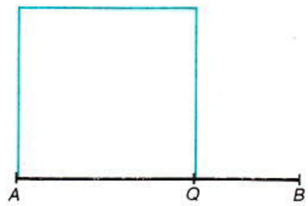


Fig. 11

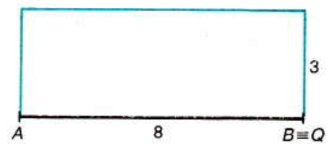


Fig. 12

La fig. 10 mostra il rettangolo costruito scegliendo Q vicino ad A: il rettangolo ha una base AQ piccola e, quindi, un'altezza QR grande. Così ci si rende subito conto che non è possibile far coincidere Q con A, perché, in tal caso, non si riesce a costruire su una base lunga 0 un rettangolo di area 24. In fig. 11 il punto Q "è scivolato" lungo il segmento AB: AQ è aumentato, mentre QR è diminuito; il perimetro sembra diminuito. Infine, in fig. 12 è rappresentato il caso limite: Q coincide con B, risulta $\overline{AQ}=8$ e $\overline{QR}=3$.

Dall'esame delle figure emerge un primo risultato: il rettangolo $AQRS$ ha il perimetro che assume un valore, che possiamo indicare con $2p$, variabile al variare di Q lungo il segmento; tale perimetro vale 22, quando Q coincide con B e diventa sempre più grande, quando Q si avvicina ad A.

Tuttavia le figure non permettono di individuare la posizione di Q per cui il perimetro è minimo; indichiamo allora con x la distanza AQ e con y l'altezza QR, precisando che risulta

$x=8$ e $y=3$, quando Q coincide con B,
$0<x<8$ e $y>3$, quando Q percorre il segmento AB.

Così la condizione che l'area del rettangolo vale 24 si traduce nell'equazione

$$xy=24; \tag{4}$$

mentre il perimetro $2p$ è legato alle grandezze x e y dall'equazione

$$2x+2y=2p, \quad \text{ossia} \quad x+y=p. \tag{5}$$

Ed ora l'esame del problema diventa rapido ed espressivo, se rappresentiamo le due equazioni (4) e (5) sul piano cartesiano. La (4) descrive un'iperbole, ma si osserva subito che solo un arco di curva è legato al problema assegnato: è l'arco disegnato in colore in fig. 13. La (5) descrive invece il fascio di rette parallele alla retta b d'equazione $y=-x$ (fig. 13).

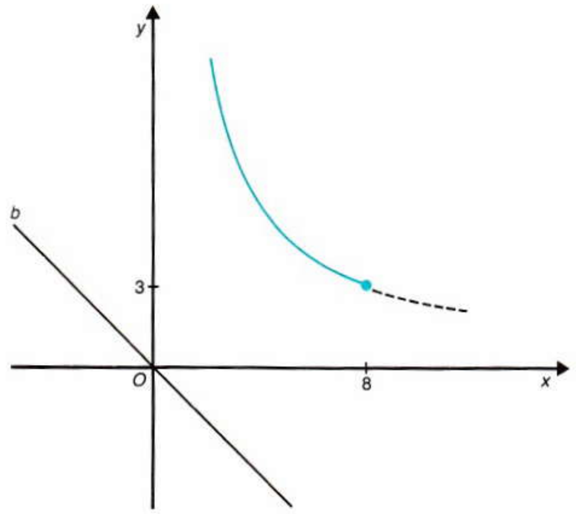


Fig. 13

Esaminiamo ora la situazione da un punto di vista dinamico (fig. 14): si nota l'iperbole fissa ed una retta che può spostarsi percorrendo il fascio; così il valore di p è visualizzato dal punto d'intersezione di ciascuna retta del fascio con l'asse delle y.

Si capisce allora come si può determinare il rettangolo di perimetro minimo: fra le rette del fascio che intersecano l'iperbole dobbiamo scegliere quella con il minimo valore di p.

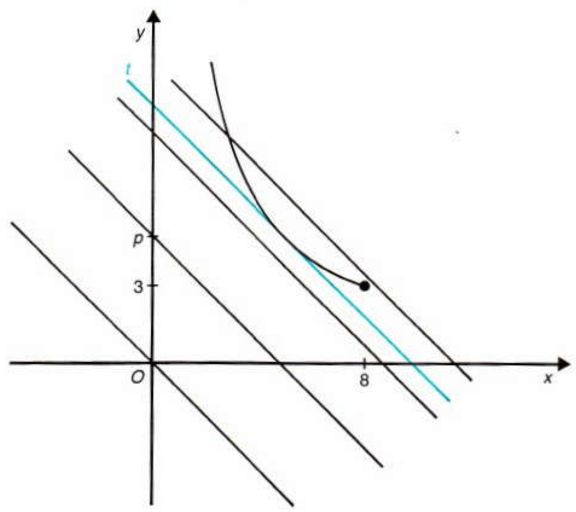


Fig. 14

La fig. 14 suggerisce che la retta cercata è la tangente t, che possiamo determinare impostando il sistema

$$\begin{cases} y=-x+p \\ xy=24 \end{cases}$$

e calcolando il valore di p per cui il sistema ammette due soluzioni coincidenti; si ottiene

$$p=\pm 4\sqrt{6}.$$

È chiaro che solo il valore positivo di p interessa il problema; la retta t ha dunque l'equazione

$$y=x+4\sqrt{6}$$

e tocca l'iperbole nel punto $T(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$.

Si arriva dunque alla seguente conclusione: il rettangolo di perimetro minimo è quello che ha le due dimensioni uguali date da

$$x=y=2\sqrt{6};$$

si tratta dunque del quadrato di area 24.

Problema 4

Si taglia una semisfera di centro O e raggio r con un piano parallelo alla base e si considerano le seguenti due superfici:

- *S, superficie laterale del cono, che ha O come vertice ed il cerchio sezione come base;*
- *S′, superficie della zona sferica compresa fra il piano secante e la base dell'emisfero.*

Determinare la posizione del piano per cui la somma S+S′ risulta massima.

Cominciamo a tracciare qualche disegno che visualizzi il problema: la fig. 15 mostra un piano che sega la semisfera secondo il cerchio di centro O', la fig. 16 mostra il cono che ha la superficie laterale S e la fig. 17 la zona sferica che ha superficie S'.

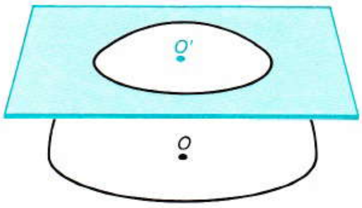


Fig. 15

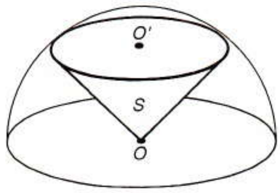


Fig. 16

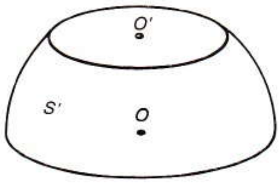


Fig. 17

Le figg. 18 e 19 mostrano invece i due casi limite:

- il piano coincide con il piano α, tangente alla semisfera; in tal caso il cono si riduce al segmento OO', mentre la zona sferica coincide con tutta la semisfera. Si ha dunque

$$S'=2\pi r^2, \quad S=0 \quad \text{e quindi} \quad S+S'=S'=2\pi r^2$$

- il piano coincide con il piano β, su cui è appoggiata la semisfera; in tal caso il cono "si schiaccia" sul cerchio di base, mentre la zona sferica si riduce alla circonferenza di base; si ha dunque

$$S'=0, \quad S=\pi r^2 \quad \text{e quindi} \quad S+S'=S=\pi r^2.$$

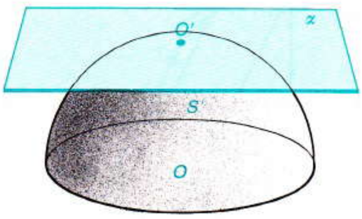


Fig. 18

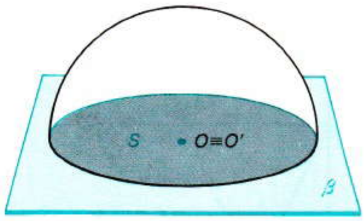


Fig. 19

Indichiamo ora (fig. 20) con x ed y l'altezza e il raggio di base del cono, tenendo presente che, mentre il piano secante "sale" dalla posizione β alla posizione α, risulta

$$0 \leq x \leq r \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq r.$$

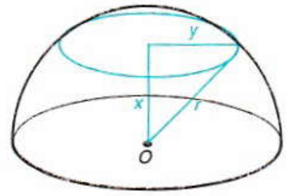


Fig. 20

In questo modo si ha che le due variabili x ed y sono legate dalla relazione

$$x^2+y^2=r^2;$$

risulta poi

$$S=\pi ry, \qquad S'=2\pi rx \qquad \text{e quindi} \qquad S+S'=\pi r(y+2x).$$

Ora, dato che il prodotto πr è senz'altro positivo, per stabilire il massimo di $S+S'$, basta determinare il massimo di

$$s=\frac{S+S'}{\pi r};$$

così, visualizzando la situazione sul piano cartesiano si ha che

$$x^2+y^2=r^2$$

è l'equazione della circonferenza fissa di centro O e raggio r di cui interessa soltanto l'arco in colore di fig. 21 mentre

$$y+2x=s$$

rappresenta il fascio di rette parallele alla retta b d'equazione $y=-2x$ (figg. 21 e 22); così il valore di s è visualizzato dal punto d'intersezione di ciascuna retta del fascio con l'asse delle y.

Si capisce ora come possiamo determinare il massimo richiesto: fra le rette del fascio che intersecano la circonferenza dobbiamo scegliere quella con il massimo valore di s. La fig. 22 suggerisce che la retta cercata è la tangente t, che possiamo determinare impostando il sistema

$$\begin{cases} y=-2x+s \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

e calcolando il valore di s per cui il sistema ammette due soluzioni coincidenti; si ottiene

$$s=\pm r\sqrt{5}.$$

È chiaro che solo il valore positivo di s interessa il problema; la retta t ha dunque l'equazione

$$y=-2x+r\sqrt{5}$$

e tocca la circonferenza nel punto $T\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}r, \frac{\sqrt{5}}{5}r\right)$

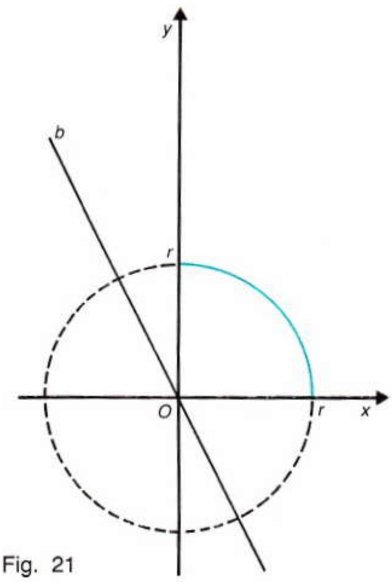


Fig. 21

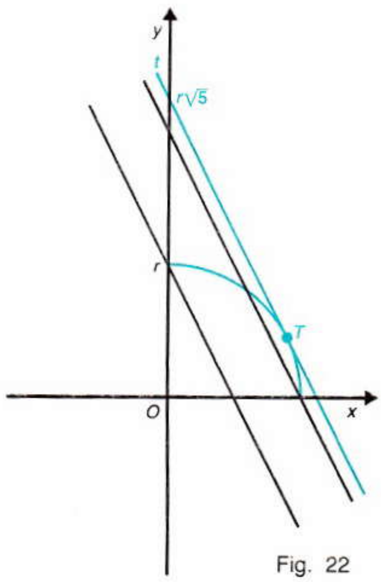


Fig. 22

Si arriva dunque alla seguente conclusione: si ottiene la somma $S+S'$ massima (fig. 23), quando il piano taglia la semisfera ad una quota

$$x=\frac{2}{5}r\sqrt{5}$$

in tal caso la sezione ottenuta è il cerchio di raggio

$$y=\frac{r}{5}\sqrt{5}$$

e risulta

$$S+S'=\pi r^2\sqrt{5}$$

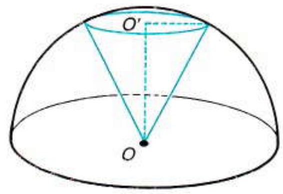


Fig. 23

Parte II: metodi basati su algebra e geometria elementare

1. Due problemi che conducono a scoprire due teoremi fondamentali

Cominciamo a risolvere due semplici problemi che danno luogo ad un gran numero di applicazioni e di importanti generalizzazioni.

Problema 5

Fra tutti rettangoli di uguale perimetro determinare quello di area massima.

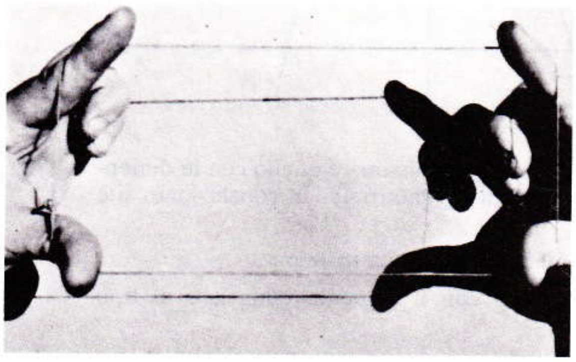


Fig. 24

Il problema si può efficacemente visualizzare realizzando dei rettangoli isoperimetrici, cioè di perimetro costante, con un pezzo di spago, legato agli estremi e tenuto teso fra due mani (fig. 24). Avvicinando o allontanando le mani cambiano le dimensioni del rettangolo: si può avere il quadrato e si possono ottenere i due casi limite quando una delle dimensioni vale zero e, quindi, anche l'area vale zero. Se dunque si fissa l'attenzione sull'area dei rettangoli al variare, per esempio, dell'altezza (fig. 25), si ha una funzione che assume valore zero nei due casi limite; il teorema di Rolle garantisce che ci deve essere un massimo e, data la simmetria della situazione, si è condotti a prevedere che il massimo sarà realizzato dal "caso centrale" e cioè dal quadrato. Il risultato ottenuto per via geometrico-intuitiva può essere facilmente confermato da una dimostrazione di tipo algebrico nel modo seguente.

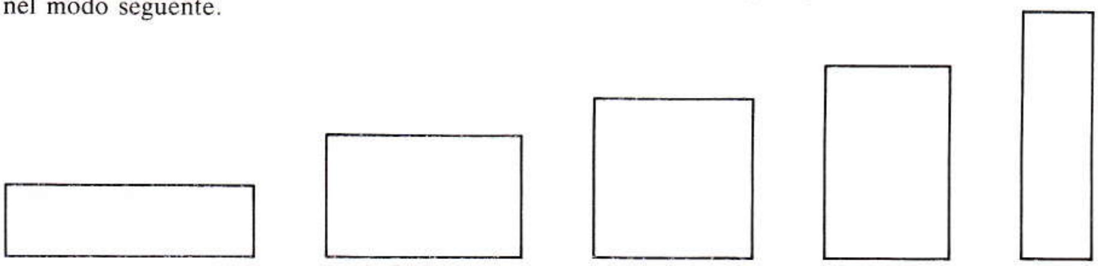


Fig. 25

Si indica con $4p$ il perimetro fisso dei rettangoli (fig. 26); così le due dimensioni dei rettangoli si possono indicare con

$$p+x \quad \text{e} \quad p-x$$

e l'area S è data da

$$S=(p+x)(p-x)=p^2-x^2.$$

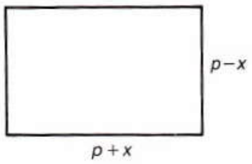


Fig. 26

È allora evidente che S assume valore massimo se risulta $x^2=0$ e cioè $x=0$. La fig. 27, che presenta il grafico della funzione

$$S=p^2-x^2,$$

visualizza questo risultato.

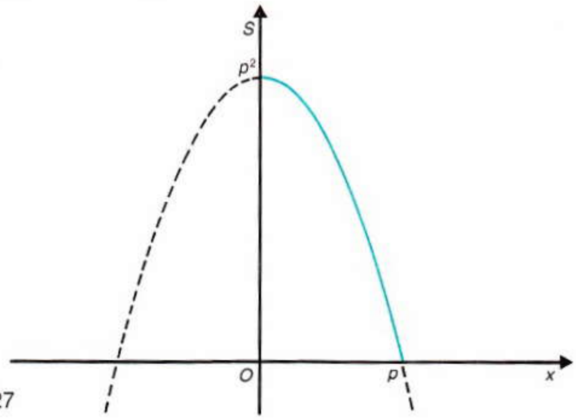


Fig. 27

Si trova dunque che il rettangolo di area massima è quello con le dimensioni lunghe entrambe p, cioè è il quadrato di perimetro $4p$. In conclusione, si è dimostrato il seguente teorema:

fra tutti i rettangoli isoperimetrici, il quadrato ha l'area massima.

Questo teorema può anche essere espresso con il seguente enunciato di tipo algebrico:

il prodotto di due numeri che hanno somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali.

Problema 6

Fra tutti i rettangoli di uguale area determinare quello di perimetro minimo.

Cominciamo anche in questo caso con qualche considerazione di tipo geometrico-intuitivo: dei rettangoli equivalenti si possono costruire con lo stesso numero di quadratini uguali (fig. 28); così si intuisce che il quadrato realizza il perimetro minimo, perché in tal caso si ha il minor numero di quadratini che "cooperano con i loro lati alla formazione del perimetro".

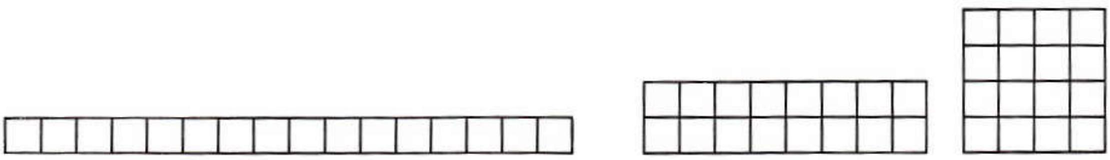


Fig. 28

Il risultato ottenuto per via geometrico-intuitiva può essere facilmente confermato da varie dimostrazioni. Cominciamo col fissare l'attenzione su una dimostrazione di tipo algebrico, analoga a quella seguita per il problema 5.

Si indica con s^2 l'area fissa dei rettangoli; così le due dimensioni dei rettangoli si possono indicare con

$$sx \quad \text{e} \quad \frac{s}{x}$$

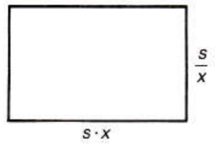


Fig. 29

e il semiperimetro p è dato da (fig. 29)

$$p = sx + \frac{s}{x}.$$

Si ha dunque

$$p = s\left(x + \frac{1}{x}\right) = s\left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$

Ora, per determinare il valore minimo cercato, conviene riscrivere l'espressione di p in altra forma: si tiene presente che risulta

$$(x-1)^2 = x^2+1-2x \qquad \text{e quindi} \qquad x^2+1 = 2x+(x-1)^2$$

e si scrive

$$p = s \cdot \left(\frac{2x+(x-1)^2}{x}\right) = s \cdot \left(2 + \frac{(x-1)^2}{x}\right).$$

In questo modo si esprime p con una somma, che è minima quando risulta

$$\frac{(x-1)^2}{x} = 0, \qquad \text{ossia} \qquad (x-1)^2 = 0, \qquad \text{da cui} \qquad x = 1.$$

Allo stesso risultato si può anche arrivare valendosi della geometria analitica: indicando con x ed y le dimensioni del rettangolo, si ha

$$xy = s^2 \quad \text{e} \quad x + y = p,$$

dove s^2 indica una costante data e p indica il valore variabile del semiperimetro, mentre deve essere

$$x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0.$$

In questo modo il problema viene visualizzato sul piano cartesiano (fig. 30) da un ramo di iperbole equilatera d'equazione $xy = s^2$ e dal fascio di rette parallele alla retta b d'equazione $y = -x$.

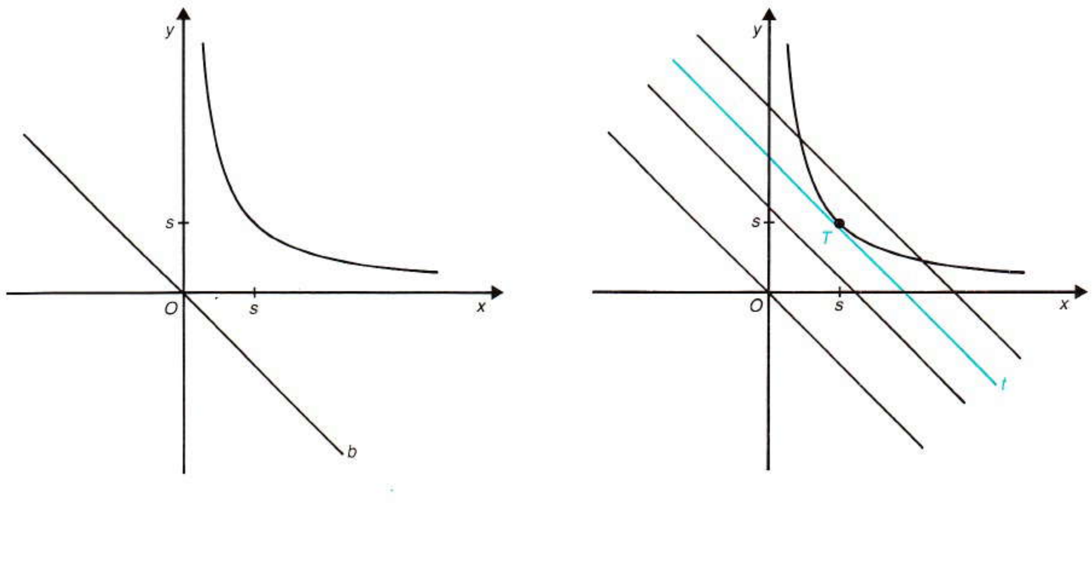


Fig. 30

In ambedue i casi si trova che il rettangolo di perimetro minimo è quello con le dimensioni lunghe entrambe s, cioè è il quadrato d'area s^2.
In conclusione, si è dimostrato il seguente teorema:

fra tutti i rettangoli equivalenti, il quadrato ha perimetro minimo.

Questo teorema è anche espresso con il seguente enunciato di tipo algebrico:

la somma di due numeri che hanno prodotto costante è minima quando i due numeri sono uguali.

Confrontiamo ora i due teoremi ottenuti:

1) **il prodotto di due numeri che hanno somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali;**
2) **la somma di due numeri che hanno prodotto costante è minima, quando i due numeri sono uguali.**

Si osserva subito che, a partire dal 1° teorema, si ottiene il 2° nel modo seguente:

- si mantiene costante la grandezza che nel 1° teorema è massima (e cioè il prodotto),
- si rende minima la grandezza che nel 1° teorema è costante (e cioè la somma).

Analogamente, a partire dal 2° teorema, si ottiene il 1° nel modo seguente:

- si tiene fissa la somma, che nel 2° teorema è minima,
- si rende massimo il prodotto che nel 2° teorema è costante.

Si ha così un semplice esempio di una legge molto importante nelle questioni riguardanti i massimi e minimi: la **legge di dualità**. Questa legge permette di accoppiare due teoremi come quelli ora analizzati: si dice che il teorema (1) e il teorema (2) sono fra loro **duali**.

Relativamente ai teoremi duali si stabilisce il seguente risultato di notevole interesse teorico ed applicativo: **se vale un teorema di massimo, allora vale anche il teorema di minimo duale**.

2. *Problemi che si risolvono applicando i due teoremi fondamentali.*

Vediamo ora una serie di problemi che si risolvono facilmente a partire dai due teoremi stabiliti nel paragrafo precedente.

Problema 7

Fra tutti i rettangoli inscritti in un dato triangolo acutangolo, determinare quelli di area massima.

In fig. 31 sono rappresentati alcuni rettangoli inscritti nel triangolo ABC, in modo che una dimensione cada sul lato BC, mentre nella fig. 32 sono rappresentati i due casi limite, che si ottengono quando il rettangolo "si schiaccia" sul lato CB o sull'altezza AH. In entrambi i casi, l'area assume valore zero e, dunque, deve esserci una situazione in cui l'area è massima.

Per determinare questa area massima riferiamoci alla fig. 33, dove il rettangolo inscritto $DEFG$ ha le dimensioni GF e EF lunghe x ed y, mentre a ed h indicano le lunghezze del lato CB e dell'altezza AH.

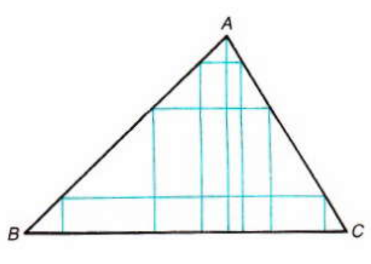


Fig. 31

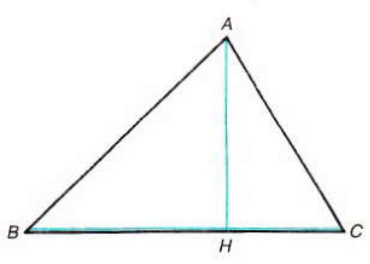


Fig. 32

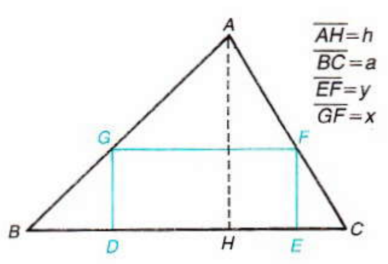


Fig. 33

Si ha così che l'area S del rettangolo è data da

$$S=xy;$$

inoltre, dalla similitudine dei triangoli ABC e AGF si ricava la relazione seguente:

$$a:x=h:(h-y), \qquad \text{da cui} \qquad x=\frac{a}{h}(h-y),$$

che conduce ad esprimere l'area S nella forma

$$S=\frac{a}{h}\cdot(h-y)\cdot y.$$

Così si trova che l'area S è massima, quando è massimo il prodotto

$$(h-y)y,$$

cioè il prodotto di due grandezze che hanno la somma costante data da

$$h-y+y=h.$$

In base al teorema (1) concludiamo allora che il prodotto è massimo quando le grandezze sono uguali, cioè quando risulta (fig. 34)

$$h-y=y, \qquad \text{ossia} \qquad y=\frac{h}{2} \qquad \text{e quindi} \qquad x=\frac{a}{2}.$$

In tale caso l'area S vale

$$S_M=\frac{ah}{4},$$

cioè la metà dell'area del triangolo dato.

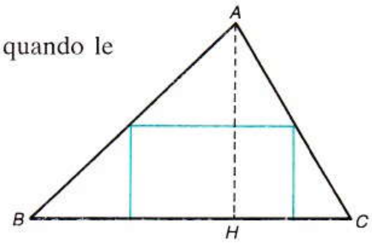


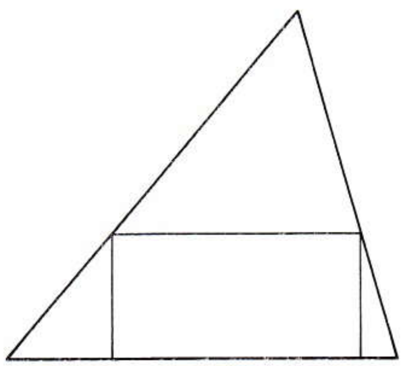
Fig. 34

È chiaro che analoghe considerazioni si possono ripetere disponendo i rettangoli con un lato appoggiato ad uno qualunque degli altri due lati del triangolo. Così si arriva alla seguente conclusione:

fra tutti i rettangoli inscritti in un dato triangolo acutangolo hanno area massima i tre rettangoli che hanno come dimensioni metà di un lato del triangolo e metà della corrispondente altezza; questi tre rettangoli hanno l'area che è la metà dell'area del triangolo dato.

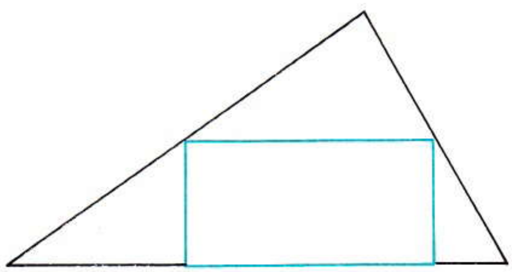
È facile ora verificare che vale anche il seguente risultato, duale del precedente (figg. 35 e 36):

fra tutti i triangoli acutangoli circoscritti ad un dato rettangolo, quelli di area minima hanno un lato e la corrispondente altezza doppi delle dimensioni del rettangolo.



triangolo acutangolo
circoscritto a un rettangolo

Fig. 35



triangolo acutangolo
circoscritto a un rettangolo di area minima

Fig. 36

Problema 8

Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio determinare quello di area massima.

In fig. 37 sono rappresentati alcuni rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r; mentre nella fig. 38 sono rappresentati i due casi limite, in cui il rettangolo "si schiaccia" sul diametro AB e sul diametro CD. In entrambi i casi l'area vale zero e, dunque, deve esserci una situazione in cui l'area è massima. Per determinare questa area massima riferiamoci alla fig. 39, dove il rettangolo inscritto $EFGH$ ha le dimensioni lunghe x ed y.

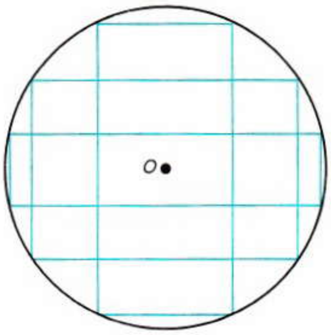


Fig. 37

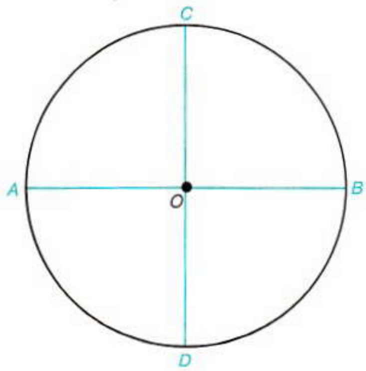


Fig. 38

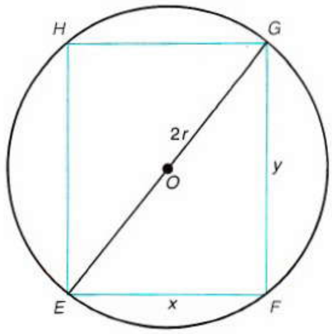


Fig. 39

Si ha così che l'area S del rettangolo è data da

$$S=xy;$$

inoltre, applicando il teorema di Pitagora al triangolo EFG, si ha

$$x^2+y^2=(2\cdot r)^2.$$

Sí può allora ragionare così: x^2 ed y^2 sono due numeri che hanno somma costante, perciò, applicando il teorema (1) si può dire che il prodotto

$$x^2y^2=S^2$$

è massimo quando risulta

$$x^2=y^2.$$

Ora, ricordando che i due numeri x ed y sono positivi, si ha subito che

$xy=S$ è massimo, quando risulta $x=y$.

Si arriva dunque alla seguente conclusione:

fra tutti i rettangoli inscritti in una data circonferenza (cioè fra tutti i rettangoli con la diagonale fissa) il quadrato ha l'area massima.

Questo risultato si può anche esprimere in forma algebrica nel modo seguente:

il prodotto di due numeri positivi che hanno costante la somma dei quadrati è massimo quando i numeri sono uguali.

È facile ora verificare che valgono anche i seguenti risultati, duali dei precedenti:

- **fra tutti i rettangoli di area fissa, il quadrato ha la diagonale minima (cioè ha il cerchio circoscritto di raggio minimo);**
- **se due numeri positivi hanno prodotto costante, la somma dei quadrati dei numeri è minima, quando i numeri sono uguali.**

Problema 9

Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio determinare quello di perimetro massimo.

Possiamo di nuovo riferirci alle figg. 37-39 per dire che

- nei due casi limite il perimetro vale $4r$, dato che due lati del rettangolo vanno a sovrapporsi al diametro,
- il semiperimetro del rettangolo è

$$p=x+y,$$

- risulta sempre

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ora, invece di cercare il massimo di p, si può cercare il massimo di

$$p^2=(x+y)^2;$$

così, tenendo presente che risulta

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy,$$

si è condotti a cercare il massimo di

$$p^2=r^2+2xy.$$

Si capisce allora che p^2 è massimo se è massimo $2xy$ e, in definitiva, se è massimo il prodotto dei due numeri positivi x ed y che hanno somma dei quadrati costante. In base al risultato stabilito alla fine del problema 8, si ha che tale massimo è raggiunto, quando risulta $x=y$.

Si arriva dunque alla seguente conclusione:

fra tutti i rettangoli inscritti in una data circonferenza (cioè fra tutti i rettangoli con la diagonale fissa) il quadrato ha il perimetro massimo.

Questo risultato si può anche esprimere nella seguente forma algebrica:

la somma di due numeri positivi che hanno costante la somma dei quadrati è massima quando i numeri sono uguali.

Si può infine verificare che valgono i risultati duali dei precedenti e cioè:

- **fra tutti i rettangoli di perimetro fisso, il quadrato ha la diagonale minima (cioè ha il cerchio circoscritto di raggio minimo);**
- **se due numeri positivi hanno somma costante, la somma dei quadrati dei numeri è minima, quando i numeri sono uguali.**