5. Complementi

B. Massimi e minimi per funzioni di due variabili

1. Punti di massimo o minimo relativo per una curva piana e per una superficie

Nel Complemento *B* del cap. 1 sono date alcune idee sulle funzioni a due variabili; in particolare si è visto che una funzione a due variabili

$$z=f(x, y)$$

si può rappresentare in un riferimento cartesiano tridimensionale, ottenendo una superficie.

Si possono allora estendere ad una superficie le considerazioni svolte a proposito delle curve piane; così si individuano su una superficie dei punti che presentano delle caratteristiche notevoli. In particolare si ha:

- **un punto di massimo relativo**, cioè un punto che si trova "più in alto dei punti vicini" (fig. 40);
- **un punto di minimo relativo**, cioè un punto che si trova "più in basso dei punti vicini" (fig. 41).

Ma si può anche trovare **un punto di sella**, in cui la superficie ha il caratteristico andamento illustrato in fig. 42.

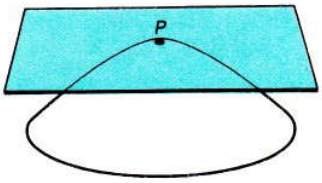

Fig. 40. P punto di massimo relativo

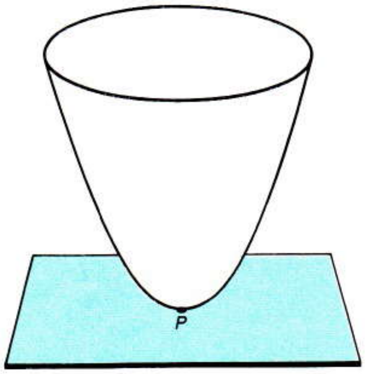

Fig. 41. P punto di minimo relativo.

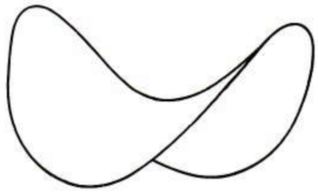

Fig. 42. P punto di sella.

Vediamo ora se è possibile individuare analiticamente i punti di massimo o minimo relativo, estendendo le considerazioni svolte a proposito dei punti di massimo o minimo relativo delle curve piane. Fissiamo in particolare l'attenzione sui punti di minimo relativo, seguendo un procedimento che si può ripetere, con qualche ovvia modifica, per i punti di massimo relativo. Esaminiamo dunque la fig. 43, dove è rappresentata una superficie d'equazione

$$z=f(x, y),$$

che ha un punto di minimo relativo in $P[a, b, f(a, b)]$.

Per utilizzare le nozioni relative ai punti di minimo relativo delle curve piane si può procedere così: si sega la superficie con un piano e si esamina la curva piana ottenuta.

Cominciamo dunque a segare la superficie con il piano d'equazione

$$y=b;$$

si osserva subito (fig. 44) che la curva ottenuta presenta in P un punto di minimo relativo.

Esaminiamo ora l'equazione della curva: dato che l'ordinata y ha il valore costante b, si ottiene

$$z=f(x, b).$$

Si tratta dunque di una funzione di un'unica variabile (x) a cui possiamo applicare tutte le nozioni note relative alle derivate. In particolare si può ricordare che, se una curva d'equazione

$$y=f(x)$$

presenta nel punto P d'ascissa a un punto di minimo relativo, si ha:

$$y'(a)=0 \quad \text{e} \quad y''(a)>0. \tag{1}$$

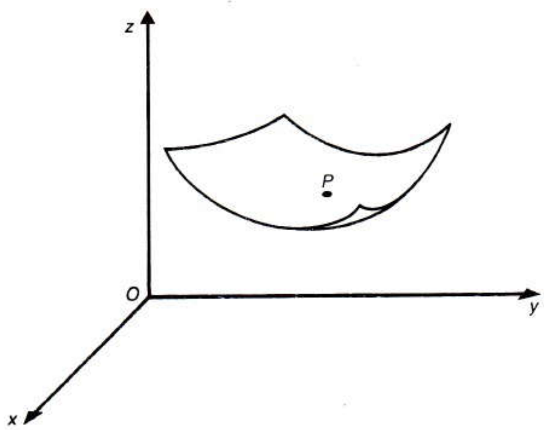

Fig. 43. $z=f(x, y)$ ha in P un minimo relativo.

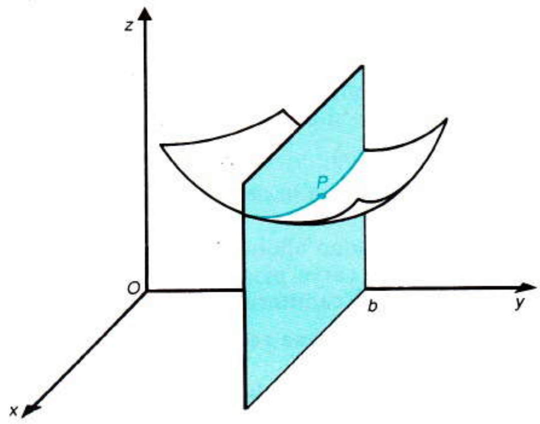

Fig. 44. Sezionando con il piano $y=b$ si ottiene una curva che ha in P un punto di minimo relativo.

Per applicare queste nozioni alla situazione attualmente esaminata, calcoliamo la derivata della funzione

$$z=f(x, b)$$

rispetto alla variabile x; questa derivata, che si indica con

$$z'_x \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{o anche} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

è data da

$$z'_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, b)-f(x, b)}{h}.$$

Così, dato che il punto P di ascissa a è un punto di minimo relativo per la curva, si avrà necessariamente

$$z'_x(a)=0.$$

Si può poi ripetere l'operazione di derivazione: si ottiene la derivata seconda, indicata con

$$z''_x,$$

e si trova che, nel punto P d'ascissa a, risulta certamente

$$z''_x(a)>0.$$

Considerazioni analoghe si possono ripetere segando la superficie con il piano d'equazione

$$x=a.$$

Così si ottiene (fig. 45) un'altra curva piana d'equazione

$$z=f(a, y),$$

con un minimo relativo in corrispondenza al valore $y=b$. Potremo allora calcolare la derivata della funzione

$$z=f(a, y)$$

rispetto alla variabile y; questa derivata si indica con

$$z'_y \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{o anche} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

ed è data da

$$z'_y=\lim_{h\to 0}\frac{f(a, y+h)-f(a, y)}{h}.$$

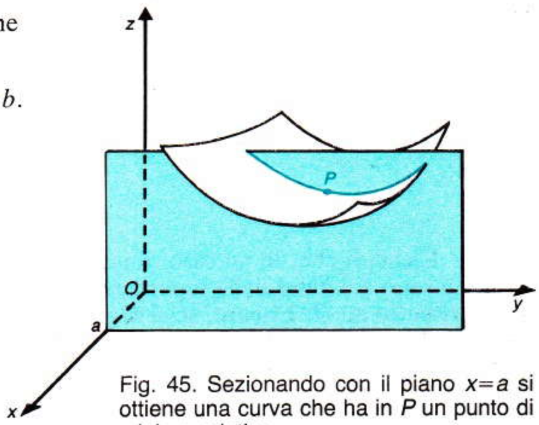

Fig. 45. Sezionando con il piano $x=a$ si ottiene una curva che ha in P un punto di minimo relativo.

Anche in questo caso si può ripetere l'operazione di derivazione ottenendo la derivata seconda che indicheremo con

$$z''_y;$$

così, dato che in corrispondenza al valore $y=b$ si ha un minimo relativo, risulterà certamente

$$z'_y(b)=0 \quad \text{e} \quad z''_y(b)>0.$$

Si conclude dunque che

se $P[a, b, f(a, b)]$ è un punto di minimo relativo per una superficie d'equazione $z=f(x, y)$, risulta necessariamente

$$\mathbf{z'_x(a)=z'_y(b)=0 \quad e \quad z''_x(a)>0,\ z''_y(b)>0.} \tag{2}$$

Le derivate che abbiamo esaminato si chiamano anche **derivate parziali** della funzione a due variabili $z=f(x, y)$; in particolare

$z'_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ è la derivata parziale prima rispetto ad x,

$z'_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è la derivata parziale prima rispetto ad y.

Sembra dunque di aver risolto completamente il problema della ricerca dei punti di massimo o minimo relativo per una funzione a due variabili: sappiamo infatti che le condizioni (2) sono anche sufficienti per individuare i punti di minimo relativo di una curva piana; ci aspettiamo dunque che le condizioni (2) siano sufficienti per individuare i punti di minimo relativo di una superficie. Ma vedremo nel prossimo paragrafo che non è così: le condizioni (2) **non sono sufficienti** in generale per individuare i punti di minimo relativo di una superficie.

2. *Alla ricerca di condizioni sufficienti per individuare i punti di minimo relativo di una superficie*

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, se una superficie d'equazione $z=f(x, y)$ ha un minimo relativo in un punto $P[a, b, f(a, b)]$, valgono sempre condizioni

$$z'_x(a)=z'_y(b)=0 \quad \text{e} \quad z''_x(a)>0,\ z''_y(b)>0.$$

Queste condizioni **necessarie** erano legate al fatto che le due curve piane ottenute segando la superficie con i piani $x=a$ e $y=b$ avevano in P un punto di minimo relativo.

Per scoprire che queste condizioni non sono però sufficienti per individuare un punto di minimo relativo, cominciamo ad esaminare la superficie rappresentata in fig. 46: la superficie è simile ad una semisfera appoggiata in $O(0, 0, 0)$ sul piano xy; ma, in corrispondenza al punto O, si trova un sottile "canale" che scende sotto il piano xy in una direzione diversa da quella dell'asse z.

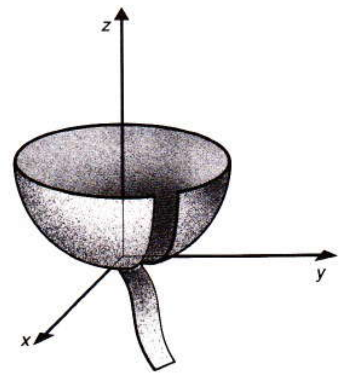

Fig. 46

È chiaro che, in tal caso, il punto O non è un punto di minimo relativo, perché ci sono dei punti della superficie che sono vicini a O, ma si trovano "più in basso" rispetto ad O. Eppure, se si sega questa superficie con i piani d'equazione $x=0$ e $y=0$ (figg. 47 e 48), si ottengono due curve che hanno in O un punto di minimo relativo e, dunque, risulta

$$z'_x(0)=z'_y(0)=0 \quad \text{e} \quad z''_x(0)>0,\ z''_y(0)>0.$$

È chiaro però che si potrebbe capire qual è la situazione segando la superficie con il piano determinato dall'asse delle z e dalla retta che corrisponde al "canaletto" (fig. 49): in tal caso si ottiene come sezione una curva che non ha certo in O un punto di minimo.

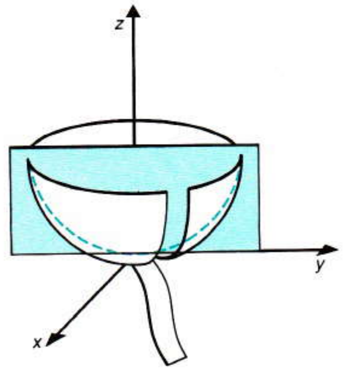

Fig. 47

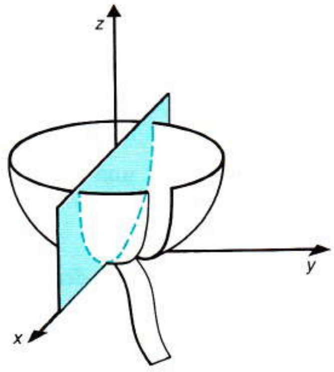

Fig. 48

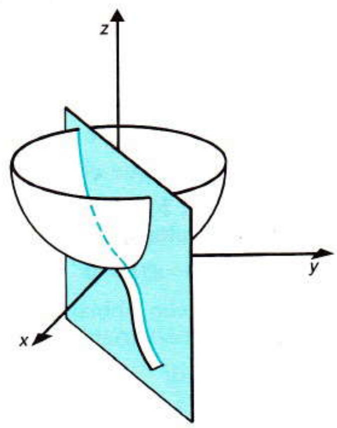

Fig. 49

Si capisce allora che, per poter scoprire se la superficie ha in O un punto di minimo relativo, non ci si può limitare ad esaminare due sole sezioni piane, bisogna invece esaminare infinite sezioni: tutte quelle che si ottengono segando la superficie con gli infiniti piani passanti per l'asse delle z.
Sembra dunque di poter asserire che la condizione sufficiente per dire se la superficie ha un punto di minimo in O è la seguente: tutte le curve ottenute sezionando la superficie con i piani passanti per l'asse delle z debbono avere in O un punto di minimo relativo.

Per esaminare meglio questa condizione, applichiamola a due superfici che sono state già descritte nel Complemento B del cap. 1:

- il paraboloide rotondo d'equazione $z=x^2+y^2$ (fig. 50),
- il paraboloide a sella d'equazione $z=xy$ (fig. 51).

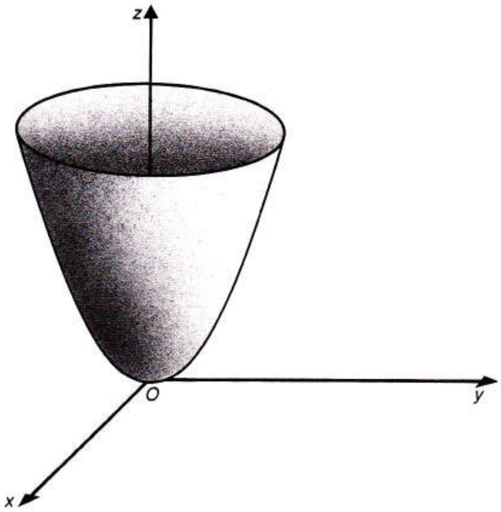

Fig. 50. Paraboloide rotondo d'equazione $z=x^2+y^2$.

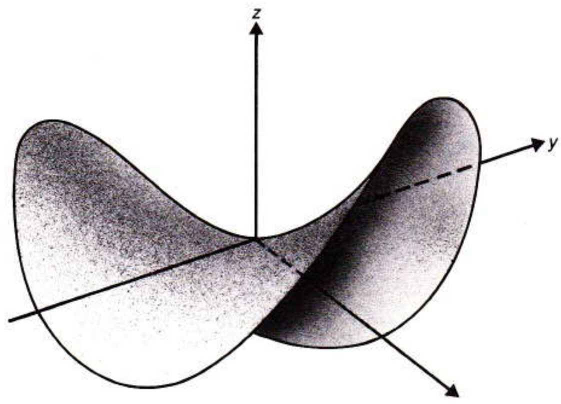

Fig. 51

Cominciamo con l'esaminare il paraboloide rotondo nel punto O.
Studiamo dunque le sezioni di questa superficie con i piani che passano per l'asse delle z ed hanno equazione[1] $y=mx$.
Le sezioni ottenute hanno l'equazione data da

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=mx \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=x^2+m^2x^2 \\ y=mx \end{cases} \quad \text{e infine} \quad \begin{cases} z=(1+m^2)x^2 \\ y=mx. \end{cases}$$

Si ottiene così, in ogni piano d'equazione $y=mx$, una parabola che ha (fig. 52);

- il vertice in O,
- la concavità rivolta verso l'alto, dato che risulta sempre $1+m^2>0$.

Si conclude che tutte le curve hanno in O un punto di minimo relativo e perciò O è un punto di minimo relativo anche per la superficie.

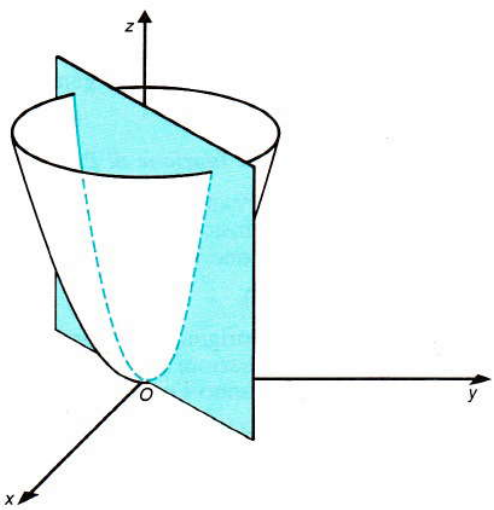

Fig. 52

[1] Vedi Complemento B del cap. 1.

Esaminiamo ora il paraboloide a sella nel punto O, segando questa superficie con i piani d'equazione $y=mx$; le curve sezione hanno l'equazione data da

$$\begin{cases} z=xy \\ y=mx \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=x\,mx \\ y=mx \end{cases} \quad \text{e infine} \quad \begin{cases} z=mx^2 \\ y=mx. \end{cases}$$

Si ottiene così, in ogni piano d'equazione $y=mx$, una parabola che ha (fig. 53):

- il vertice in O,
- la concavità rivolta verso l'alto, se è dato $m>0$,
- la concavità rivolta verso il basso, se è dato $m<0$.

Si conclude che alcune sezioni hanno in O un punto di minimo relativo e altre hanno in O un punto di massimo relativo; perciò O non può essere né di massimo né di minimo relativo per la superficie. Questo concorda con l'andamento noto della superficie, che ha in O un punto di sella.

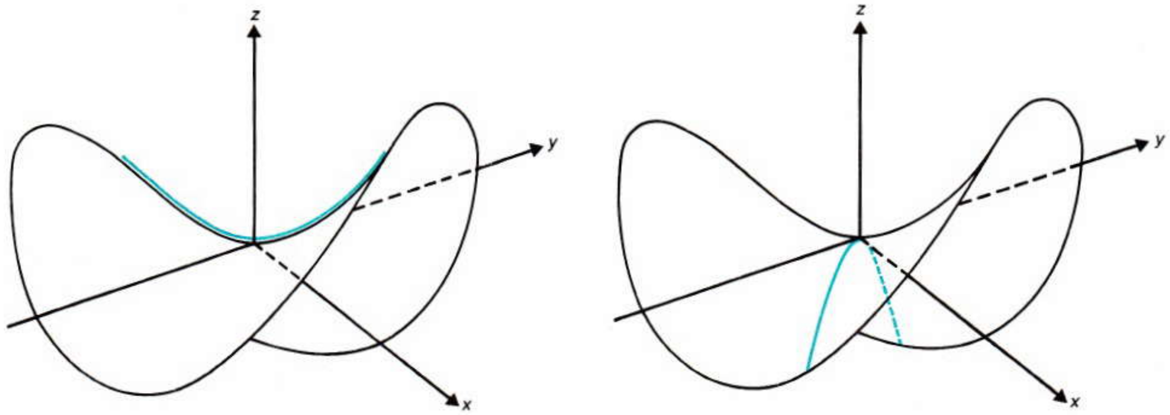

Fig. 53

Questi due esempi conducono ad individuare tre situazioni possibili per un punto P di una superficie:

- P è un punto di minimo relativo, se tutte le curve sezione con tutti i piani d'equazione $y=mx$ hanno in P un minimo relativo;
- P è un punto di massimo relativo, se tutte le curve sezione con tutti i piani d'equazione $y=mx$ hanno in P un massimo relativo;
- P è un punto sella, se, fra le curve sezione con i piani d'equazione $y=mx$, alcune hanno in P un minimo relativo, altre hanno in P un massimo relativo.

Vedremo però nel paragrafo successivo che queste conclusioni, apparentemente chiare e definitive, **non** hanno validità generale.

3. *Un esempio "critico": la funzione di Peano*

Il matematico Giuseppe Peano ha presentato, nel 1884, un esempio di superficie che mette in crisi le conclusioni esposte nel paragrafo precedente: si tratta della superficie che ha l'equazione seguente

$$z=(y^2-x)(y^2-2x).$$

La superficie passa per l'origine O e possiamo dunque esaminarne il comportamento in O, studiando le sezioni della superficie con i piani d'equazione $y=mx$. Si ottengono le curve che hanno l'equazione data da

$$\begin{cases} z=(y^2-x)(y^2-2x), \\ y=mx \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=(m^2x^2-x)(m^2x^2-2x) \\ y=mx. \end{cases}$$

In conclusione, su ogni piano d'equazione $y=mx$, si ha una curva d'equazione

$$z=m^4x^4-3m^2x^3+2x^2$$

Si tratta di una curva del 4° ordine e, per studiarne il comportamento in O, occorre valersi delle derivate. Si ottiene in particolare

$$z'=4m^4x^3-9m^2x^2+4x \quad \text{e} \quad z''=12m^4x^2-18m^2x+4;$$

risulta dunque, per qualunque valore di m,

$$z'(0)=0 \quad \text{e} \quad z''(0)>0.$$

Si trova così che tutte le curve hanno in O un minimo relativo e perciò si dovrebbe concludere che O è un punto di minimo relativo anche per la superficie.

Eppure, esaminando la superficie da un altro punto di vista, si scopre che O non è affatto un punto di minimo relativo. Ecco come si può ragionare. Si sega la superficie con il piano xy d'equazione $z=0$ e si esamina la curva ottenuta, che ha l'equazione data da

$$(y^2-x)(y^2-2x)=0.$$

È facile scoprire che la curva è composta dalle parabole seguenti (fig. 54)

$$y^2-x=0, \quad \text{ossia} \quad y^2=x,$$
$$y^2-2x=0, \quad \text{ossia} \quad y^2=2x.$$

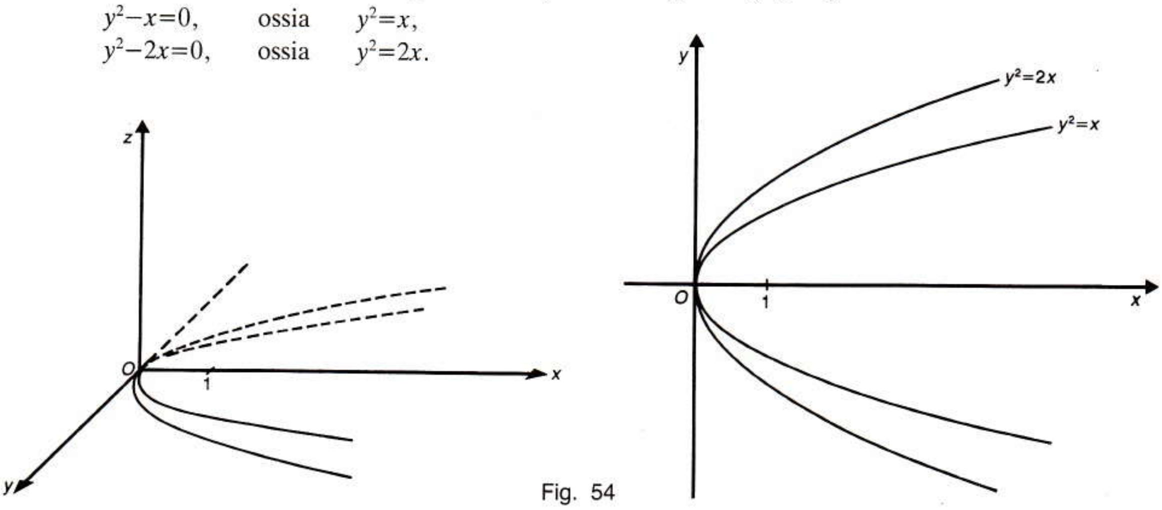

Fig. 54

Per capire come si comporta la superficie nell'intorno di O, si può allora procedere così: si sceglie una coppia di valori (x, y) nella zona del piano xy compresa fra le due parabole (in colore in fig. 55) e si determina il corrispondente punto P sulla superficie di Peano.

Ora, la zona indicata è caratterizzata dalle disuguaglianze seguenti

$$x<y^2<2x$$

e dunque si ottiene un corrispondente valore di z, che è certamente negativo, dato che nell'espressione

$$z=(y^2-x)(y^2-2x)$$

i due fattori al secondo membro assumono segno discorde.

Si trovano così infiniti punti che sono vicini ad O, ma si trovano al disotto del piano xy; dunque O non può essere un punto di minimo relativo!

I risultati analitici ottenuti si possono interpretare intuitivamente pensando ad una superficie che presenta, in corrispondenza della zona fra le due parabole, una "grinza"; ma questa "piega" è disposta in modo tale che non può essere scoperta tagliando la superficie con i piani per l'asse delle z.

Questo esempio mostra le sottigliezze che può presentare lo studio delle funzioni a due variabili, sottigliezze che esigono uno spirito d'indagine acuto e pronto a non adagiarsi su risultati che sembrano evidenti.

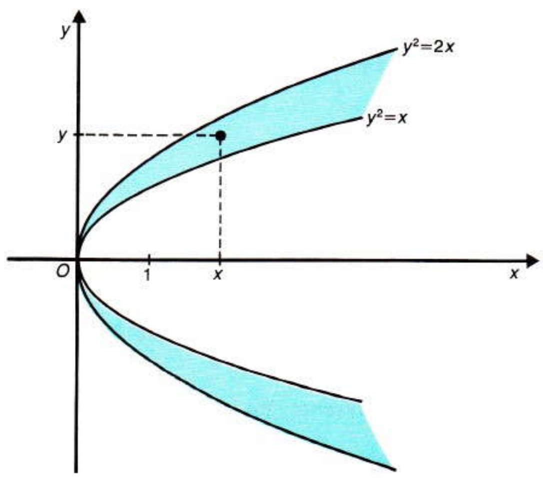

Fig. 55