4. Complementi

B. Dimostrazioni dei teoremi sulle funzioni derivabili

Questo complemento integra il paragrafo 8 del testo, dove sono esposti soltanto da un punto di vista grafico-intuitivo alcuni teoremi sulle funzioni derivabili. Vi si trovano dunque:

- teoremi già esposti nel testo, che vengono qui dimostrati rigorosamente;
- teoremi che per brevità sono stati omessi nel testo.

1. Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili

Una funzione $y=f(x)$, che è derivabile in un punto P d'ascissa a, è anche continua nello stesso punto P.

Per dimostrare questo teorema, che è illustrato da un punto di vista grafico-intuitivo nel paragrafo 8, fissiamo prima di tutto l'attenzione sull'ipotesi e sulla tesi:

- **ipotesi**: $y=f(x)$ è derivabile in $P[a, f(a)]$, cioè risulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a);$$

- **tesi**: $y=f(x)$ continua in P, ossia si ha:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Si deve dunque dimostrare che l'ipotesi implica la tesi, ossia che l'ipotesi "contiene in sé" la tesi.
Infatti, dato che $f'(a)$ è un numero finito, a partire dall'ipotesi si può scrivere:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h=0,$$

da cui

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]=0, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

Per concludere la dimostrazione, basta ora introdurre la variabile

$$x=a+h, \qquad \text{tale che} \qquad x\to a, \qquad \text{quando} \qquad h\to 0.$$

In questo modo si ottiene, appunto, la condizione di continuità:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

2. Teorema sui punti di massimo e minimo relativo

Vediamo prima di tutto che cosa si intende con il termine "punto di massimo o minimo relativo", esaminando il grafico di fig. 13.

Fissiamo l'attenzione sul punto A della curva; si tratta di un punto che presenta una caratteristica particolare: è "il più alto dei punti vicini" e perciò prende il nome di **punto di massimo relativo**.

In termini precisi, si dice che:

$A(a, f(a))$ è un punto di massimo relativo, se risulta

$$f(a)\geq f(x),$$

quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.

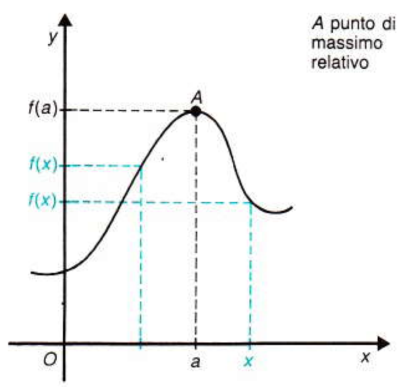

Fig. 13

Analogamente, si osserva che il punto B di fig. 14 "è il più basso dei punti vicini"; si dice che

$B(b, f(b))$ è un punto di minimo relativo, se risulta

$$f(b) \leq f(x),$$

quando x varia in un opportuno intorno $I(b)$.

Relativamente a questi punti particolari vale il seguente teorema:

Se una funzione $y=f(x)$, derivabile in un punto A d'ascissa a, presenta in A un punto di massimo (o di minimo) relativo, allora risulta $f'(a)=0$.

Questo teorema ha un'intuitiva interpretazione geometrica (fig. 15); in un punto di massimo o di minimo relativo la tangente ad una curva è parallela all'asse delle x e, dunque, ha la pendenza, data da $f'(a)$, che vale 0.

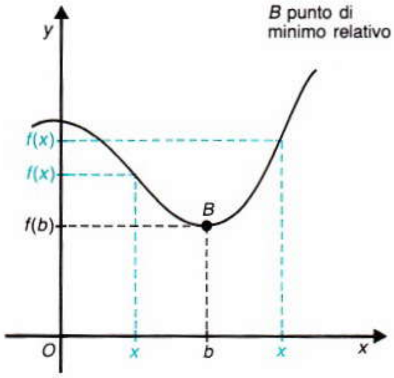

Fig. 14

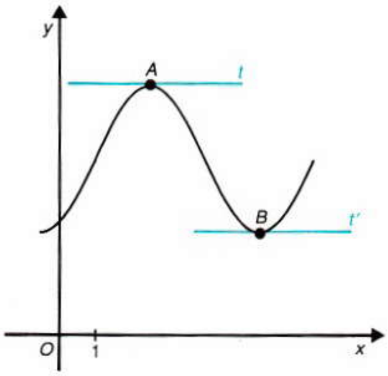

Fig. 15

Dimostriamo ora il teorema per un punto di massimo relativo; si ha dunque:

ipotesi: $y=f(x)$ derivabile in $A(a, f(a))$,
$f(a) \geq f(x)$ per x variabile in $I(a)$,

tesi: $f'(a)=0$.

Per dimostrare che la tesi segue necessariamente dall'ipotesi, calcoliamo la derivata $f'(a)$; dato che la funzione è derivabile in A per ipotesi, si ha certamente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell, \qquad \text{con } \ell \text{ numero finito.}$$

Esaminiamo ora come varia il rapporto incrementale, quando si assegnano ad h valori positivi e negativi vicini a 0. È chiaro che si ha comunque (fig. 16)

$$f(a) > f(a+h) \qquad \text{e quindi} \qquad f(a+h)-f(a)<0.$$

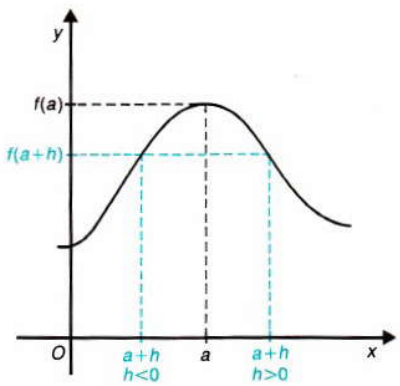

Fig. 16

Tenendo ora presente il teorema della permanenza del segno[1], si può dire che

– se è dato $h>0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell, \quad \text{con } \ell\leq 0;$$

– se è dato $h<0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell, \quad \text{con } \ell\geq 0.$$

Allora deve necessariamente risultare

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0, \quad \text{ossia} \quad f'(a)=0.$$

La dimostrazione si ripete, con qualche ovvia modifica, per un punto di minimo relativo.

Abbiamo così dimostrato che **se un punto A d'ascissa a è un punto di massimo o di minimo relativo, allora risulta $f'(a)=0$.**

È importante notare subito che **non vale il teorema inverso**; cioè non basta verificare che in un punto P d'ascissa a risulti $f'(a)=0$, per essere certi che il punto P sia di massimo o minimo relativo.

Ecco un esempio: per la funzione $y=x^3$, risulta $y'=3x^2$; perciò nel punto $O(0, 0)$ risulta $y'(0)=0$.

Eppure l'origine O non è certo un punto di massimo o minimo relativo per la curva (fig. 17) anche se la retta tangente in O ha la pendenza che vale 0, dato che coincide con l'asse delle x.

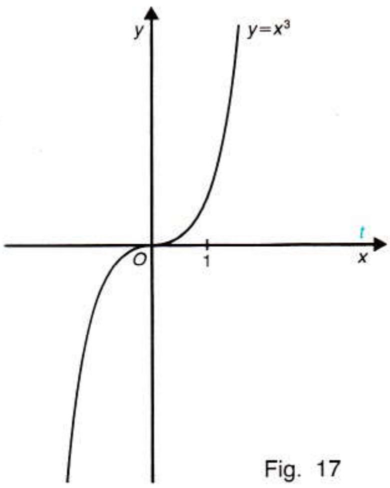

Fig. 17

3. Teorema di Rolle

Se per una funzione $y=f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$, si ha

$$f(a)=f(b),$$

allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c tale che risulti

$$f'(c)=0.$$

Per dimostrare questo teorema, illustrato dal punto di vista grafico-intuitivo nel paragrafo 8, basta ricordare che, nelle condizioni indicate, la funzione è continua in un intervallo chiuso, perciò vale il teorema di Weierstrass[2], cioè la funzione ha un valore massimo M ed un valore minimo m.

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 8.

[2] Vedi cap. 3, paragrafo 8.

Inoltre, la condizione $f(a)=f(b)$ esclude che il massimo ed il minimo cadano entrambi agli estremi dell'intervallo (altrimenti risulterebbe $m=M$ e la funzione avrebbe valore costante).

Deve dunque esistere almeno un punto di massimo o minimo che cade all'interno dell'intervallo (a, b); in questo punto, che è di massimo (o minimo) relativo, la derivata deve valere 0 per il teorema precedente.

La dimostrazione è così completata.

4. Teorema di Lagrange

Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c, tale che risulti

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Per dimostrare questo teorema ci si basa sulla interpretazione geometrico-intuitiva data nel testo (fig. 18): si considera il rapporto

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m, \tag{1}$$

dove m indica la pendenza della retta r che congiunge i due punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$. Si riscrive quindi la relazione (1) nella forma seguente:

$$f(b)-f(a)=m(b-a), \qquad \text{ossia} \qquad f(b)-mb=f(a)-ma.$$

L'ultima uguaglianza conduce ad individuare una "funzione ausiliaria" che soddisfa le condizioni indicate dal teorema di Rolle. Si tratta della seguente funzione:

$$F(x)=f(x)-mx,$$

che, in particolare, assume lo stesso valore sia per $x=a$ che per $x=b$.
Si applica allora il teorema di Rolle, affermando che esiste almeno un punto C d'ascissa c per cui risulta

$$F'(c)=0, \qquad \text{ossia} \qquad f'(c)-m=0$$

e quindi

$$m=f'(c).$$

Riprendendo la relazione (1), si conclude che esiste almeno un valore c per cui risulta:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

La dimostrazione è così completata.

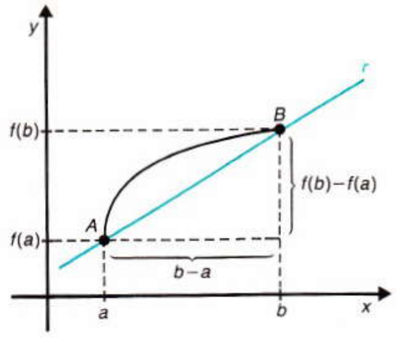

Fig. 18

5. Teorema di Cauchy [1]

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite nello stesso intervallo $[a, b]$, presentano le seguenti caratteristiche:

- **sono derivabili nell'intervallo $[a, b]$,**
- **risulta $g'(x)\neq 0$ per ogni valore di x interno all'intervallo $[a, b]$;**

allora si verifica che:

I) $g(a)\neq g(b)$,
II) si può trovare almeno un punto c, all'interno dell'intervallo $[a, b]$ per cui risulta

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Quest'ultimo teorema è meno espressivo dei precedenti, che hanno un'immediata interpretazione geometrica; si tratta tuttavia di un teorema che permette di dimostrare vari teoremi, fra cui il successivo teorema di de l'Hôpital.

È immediato dimostrare la prima affermazione presentata in questo teorema, basandosi sul teorema di Rolle e ragionando per assurdo: se risultasse $g(a)=g(b)$, si dovrebbe trovare, all'interno dell'intervallo, almeno un punto c in cui risulta $g'(x)=0$, contrariamente all'ipotesi.

La seconda parte del teorema è invece una generalizzazione del teorema di Lagrange e si dimostra in modo analogo.

Ci si basa sempre su una "funzione ausiliaria", che si scopre indicando con k il valore noto del seguente rapporto:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k \tag{2}$$

Così si scrive:

$$f(b)-f(a)=k[g(b)-g(a)], \qquad \text{ossia} \qquad f(b)-kg(b)=f(a)-kg(a).$$

Ora, la "funzione ausiliaria" che soddisfa le condizioni indicate dal teorema di Rolle è la seguente:

$$F(x)=f(x)-kg(x).$$

Applicando dunque il teorema di Rolle, si può trovare un valore c per cui risulta

$$F'(c)=0, \qquad \text{ossia} \qquad f'(c)-kg'(c)=0;$$

si ottiene così

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Riprendendo la relazione (2), si conclude che esiste almeno un valore c per cui risulta:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ed è così completata la dimostrazione.

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) era ingegnere militare e professore all'Ecole Polytechnique di Parigi (una delle prime scuole di ingegneria d'Europa). Matematico di grande valore, ha sempre curato nei suoi scritti l'eleganza della forma ed il rigore delle dimostrazioni.

6. Teorema di de l'Hôpital

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite in uno stesso insieme, soddisfano le seguenti condizioni:

I) **all'interno dell'insieme sono derivabili e risulta $g'(x)\neq 0$,**

II) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$, **(dove a è un numero o il simbolo ∞),**

III) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, **(dove ℓ è un numero o il simbolo ∞),**

allora, risulta anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell .$$

Per dimostrare questo teorema, illustrato da un punto di vista grafico-intutivo nel paragrafo 8, conviene scrivere

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} .$$

Così, applicando il teorema di Cauchy, si può ottenere

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

dove x indica un valore che si trova in un intorno (destro o sinistro) di a, perciò dovrà essere (fig. 19)

$$a<t<x \qquad \text{oppure} \qquad x<t<a .$$

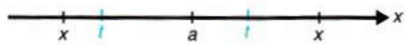

Fig. 19

Osserviamo ora che, quando $x\to a$, anche $t\to a$, e, siccome risulta per ipotesi

$$\lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}=\ell$$

si avrà anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\ell$$

e, in conclusione,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell .$$