4
Le derivate

1. Problemi che conducono alla derivata di una funzione

Questo capitolo tratta uno degli argomenti più importanti della matematica: la derivata di una funzione. Si tratta di un argomento che risale al 1600, ma che continua ad essere attuale, soprattutto per le numerose applicazioni: molti rami della fisica, dell'economia, delle scienze naturali fanno infatti uso delle derivate per risolvere in modo semplice e rigoroso i problemi più vari. Ecco qualche esempio.

A) La velocità istantanea di un corpo che si muove con una data legge oraria

Cominciamo con l'esaminare una situazione particolare: un pendolo si muove secondo la legge

$$s=\operatorname{sen} t,$$

dove s indica la distanza del pendolo P dal punto O d'equilibrio (fig. 1) e t il tempo.
Qual'è la velocità del pendolo, quando sono trascorsi 3 secondi dall'inizio del movimento?
Si tratta di un classico problema di fisica: determinare la velocità istantanea di un corpo, cioè la velocità del corpo in un dato istante. Per risolvere questo problema si procede nel modo seguente. Si comincia col calcolare la velocità media del corpo in un piccolo intervallo di tempo, tenendo presente che risulta:

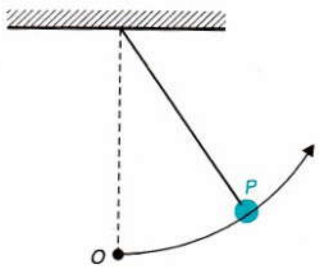

Fig. 1

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove

v_m indica la velocità media,
Δs indica lo spazio percorso,
Δt indica l'intervallo di tempo impiegato a percorrere quello spazio.

Nel caso assegnato, si fissa l'attenzione su un piccolo intervallo di tempo lungo h secondi: l'intervallo di tempo che intercorre fra 3 e $3+h$ secondi; si calcola poi la distanza percorsa dal pendolo in quell'intervallo di tempo. Si ha che:

- nel tempo da 0 a 3 il pendolo percorre uno spazio $s_1=\operatorname{sen} 3$,
- nel tempo da 0 a $(3+h)$ il pendolo percorre uno spazio $s_2=\operatorname{sen}(3+h)$,
- nell'intervallo di tempo lungo h il pendolo percorre uno spazio $\Delta s=\operatorname{sen}(3+h)-\operatorname{sen} 3$.

La velocità v_m cercata è data dunque da:

$$v_m=\frac{\operatorname{sen}(3+h)-\operatorname{sen} 3}{h}$$

Per passare poi dalla velocità media a quella istantanea si osserva che riducendo l'ampiezza h dell'intervallo di tempo "si dà meno tempo al corpo per variare la sua velocità"; si assume quindi come velocità istantanea v il valore a cui tende la velocità media v_m quando h tende a 0. Valendosi del linguaggio dei limiti, si scrive

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3+h)-\operatorname{sen} 3}{h}$$

È facile ora indicare un procedimento generale per calcolare la velocità istantanea v di un corpo che si muove con una legge oraria del tipo $s=f(t)$; si ha che la velocità istantanea relativa al tempo $t=a$ è data da:

$$\boldsymbol{v=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

B) Il tasso di crescita di una popolazione

Cominciamo ancora una volta con l'esaminare un caso particolare: una popolazione di batteri cresce nel tempo secondo la legge

$$P=e^{0,3t}$$

dove P indica il numero di batteri (in migliaia) e t indica il tempo misurato in ore.
Si chiede: qual'è il tasso di crescita della popolazione dopo 5 ore di osservazione?
Il tasso di crescita indica la rapidità con la quale la popolazione cresce; ha dunque un significato analogo alla velocità istantanea incontrata in fisica.
Si può dunque procedere in modo analogo: si fissa un intervallo di tempo lungo h secondi (il tempo che intercorre fra 5 e $5+h$ secondi) e si valuta il tasso di crescita medio r_m in quest'intervallo[1]. Per calcolare r_m si ragiona così:

- dopo 5 ore si ha un numero di batteri $P_1=e^{0,3\cdot 5}$,
- dopo $(5+h)$ ore si ha un numero di batteri $P_2=e^{0,3(5+h)}$,
- nell'intervallo di tempo lungo h si ha un numero di batteri $\Delta P=e^{0,3(5+h)}-e^{0,3\cdot 5}$.

Il tasso r_m cercato è dato dunque da:

$$r_m=\frac{e^{0,3\cdot(5+h)}-e^{0,3\cdot 5}}{h}$$

Si è quindi condotti ad assumere come tasso di crescita istantaneo r il valore a cui tende il tasso medio r_m quando h tende a 0.
Valendosi del linguaggio dei limiti, si scrive

$$r=\lim_{h\to 0}\frac{e^{0,3\cdot(5+h)}-e^{0,3\cdot 5}}{h}$$

Si arriva così ad un procedimento generale per calcolare il tasso istantaneo di crescita r di una popolazione che varia nel tempo secondo una legge del tipo $P=f(t)$: il tasso istantaneo di crescita r, relativo al tempo $t=a$ è dato da:

$$\boldsymbol{r=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

[1] Si è indicato il tasso di crescita con la lettera r, iniziale della parola inglese "rate", che significa, appunto, tasso di crescita. Del resto l'iniziale t del corrispondente vocabolo italiano renderebbe la trattazione meno chiara, dato che con la lettera t è stata indicata la variabile tempo.

C) La tangente ad una data curva in un suo punto

È facile determinare l'equazione della retta tangente ad una curva in un suo punto A, quando la curva è una conica[1]: basta considerare il fascio di rette per il punto A (fig. 2) ed osservare che una qualunque retta del fascio incontra la conica in due punti distinti, mentre la tangente t è l'unica retta che incontra la curva in due punti coincidenti nel punto A.

Questo procedimento non si può applicare se la curva non è una conica; basta un esempio per rendersene conto.
Consideriamo un punto A sulla curva d'equazione

$$y=x^3,$$

che non è certamente una conica, dato che è descritta da un'equazione di 3° grado (fig. 3). Una retta passante per il punto A incontra la curva in tre punti; perciò la retta t, tangente in A, incontra la curva non solo in due punti coincidenti nel punto A, ma anche in un altro punto B.

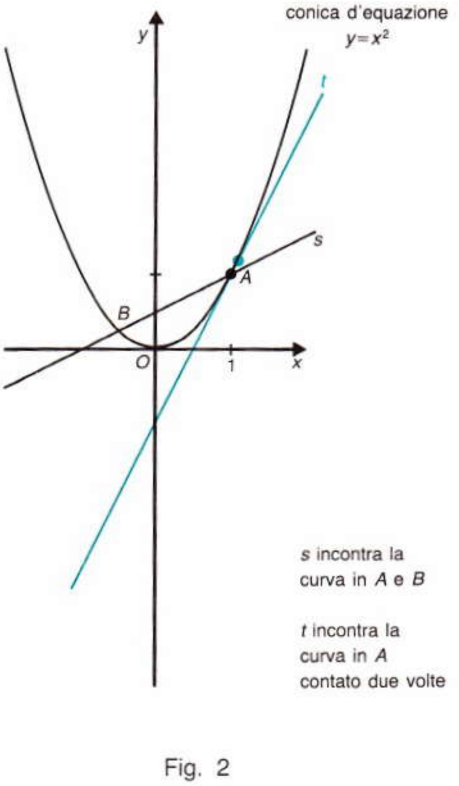

Fig. 2

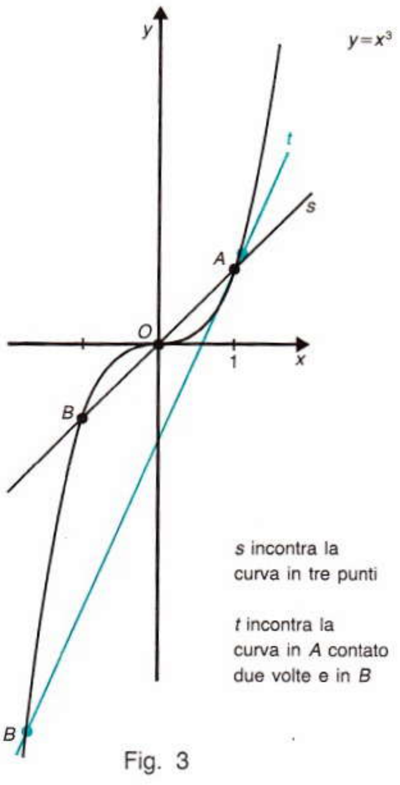

Fig. 3

Si pone quindi il problema di indicare un procedimento per determinare l'equazione della tangente ad una curva.

Per trovare questo procedimento cominciamo ad esaminare un caso particolare: l'equazione della tangente alla curva d'equazione $y=x^3$ nel suo punto $A(1, 1)$.

[1] Ricordiamo che si chiamano coniche le curve che sono descritte da un'equazione di 2° grado nelle variabili x ed y; sono coniche, in particolare, la parabola descritta dall'equazione $y=ax^2+bx+c$ e l'iperbole equilatera d'equazione $xy=k$. Per notizie più dettagliate sulle coniche v. E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, capp. 1 e 2.

La fig. 4 suggerisce il seguente procedimento: si considera la retta secante s, che congiunge il punto A con un punto P della curva "vicino" ad A; si fa poi scorrere il punto P sulla curva verso A (fig. 5). Si osserva allora che, mentre P si avvicina ad A, la retta secante s assume posizioni sempre più vicine a quella della tangente t.

Si è dunque condotti a dire che **la retta tangente è la posizione limite della secante AP, quando il punto P tende al punto A.**

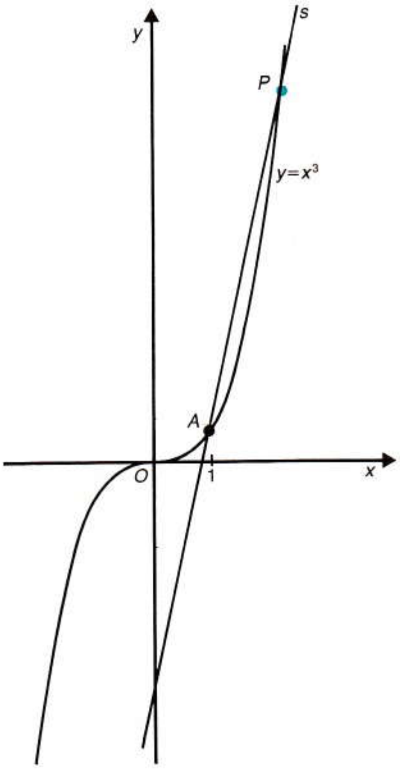

Fig. 4

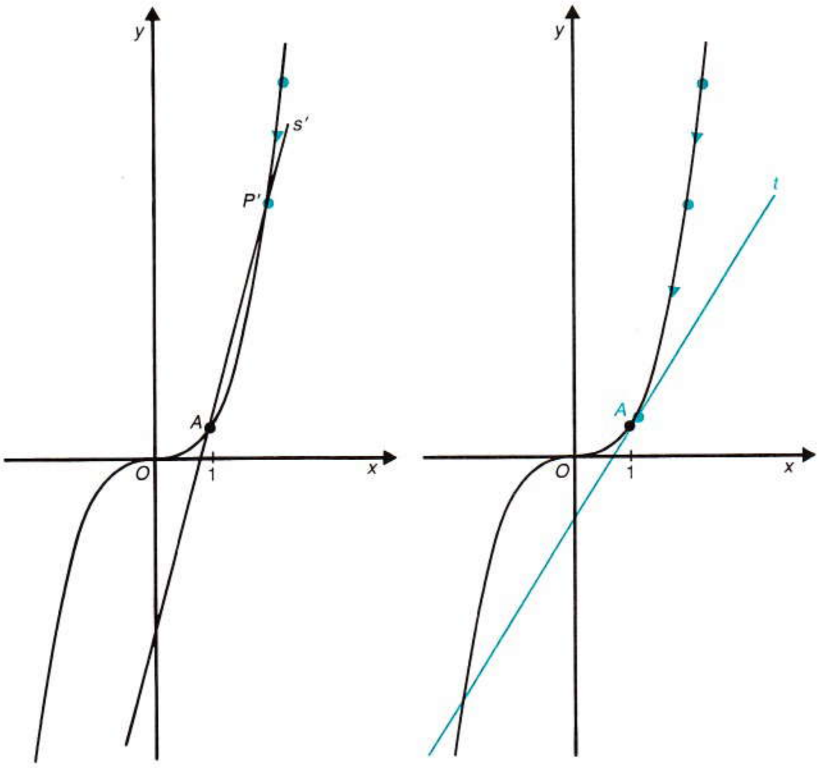

Fig. 5

Per scrivere l'equazione della tangente occorre tradurre in termini algebrici questa osservazione di carattere geometrico.

Ecco come si procede:

– l'ascissa del punto P, "vicino" al punto A d'ascissa 1, si indica con

$$x_P=(1+h),$$

dove h è un piccolo incremento che varia al variare del punto P sulla curva.

– l'ordinata y_P del punto P si calcola tenendo presente che P deve muoversi sulla curva e perciò risulta:

$$y_P=(x_P)^3, \quad \text{ossia} \quad y_P=(1+h)^3.$$

– si scrive l'equazione della retta s (fig. 6) che passa per $A(1, 1)$ e per $P(x_P, y_P)$; si ha[1]:

$$\frac{y-1}{x-1}=m_s, \qquad \text{con} \qquad m_s=\frac{(1+h)^3-1}{h}$$

– infine si traduce il fatto che, quando P si avvicina ad A, la retta s tende ad assumere la posizione della tangente t.

Per fare questo si osserva che, mentre P tende ad A, l'incremento h diventa sempre più piccolo e, contemporaneamente, la pendenza m_s tende alla pendenza m_t della tangente.

Valendosi del linguaggio dei limiti, si scrive:

$$m_t=\lim_{h\to 0} m_s, \qquad \text{ossia} \qquad m_t=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h} \tag{1}$$

Si può allora concludere che la tangente t ha l'equazione

$$\frac{y-1}{x-1}=m_t$$

dove la pendenza m_t è data dalla (1).

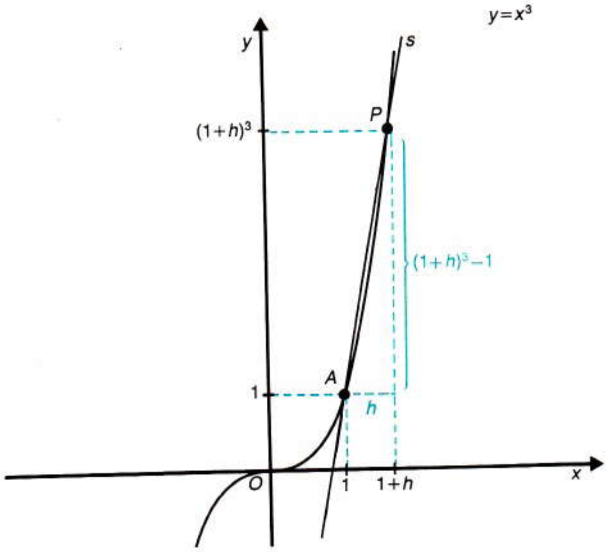

Fig. 6

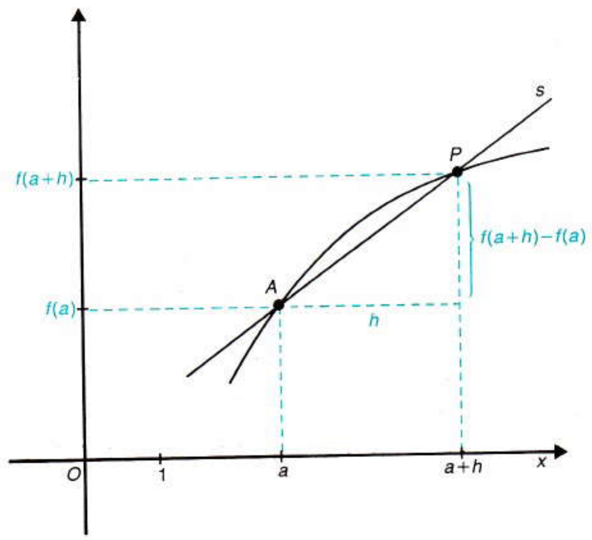

Fig. 7

È facile ora indicare il procedimento generale per determinare l'equazione della retta t, tangente ad una curva d'equazione $y=f(x)$ in un suo punto A, d'ascissa a.

[1] Ricordiamo che l'equazione della retta che unisce due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è data da

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A},$$

dove il termine

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

indica la pendenza (o coefficiente angolare) della retta.

Si procede così (fig. 7):

- si considera, insieme al punto A, un punto P della curva prossimo ad A; si considerano dunque i punti seguenti:

  $A[a, f(a)]$, $P[(a+h), f(a+h)]$;
- si scrive l'equazione della retta s, che congiunge A con P; si ottiene

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=m_s \qquad (2)$$

  con

$$m_s=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- dalla (2) si ottiene l'equazione della tangente, sostituendo la pendenza m_t della tangente alla pendenza m_s.
- per ottenere la pendenza m_t, si osserva che, quando $P \to A$, si ha che $h \to 0$ e $m_s \to m_t$; perciò risulta:

$$\boldsymbol{m_t=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Abbiamo esaminato tre problemi apparentemente molto diversi fra loro; eppure, per risolvere questi problemi abbiamo impostato sempre lo stesso tipo di calcolo:

- nel *problema A*, si è determinata la **velocità istantanea** $\boldsymbol{v}$, calcolando

$$\boldsymbol{v=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

  ossia calcolando la rapidità di variazione della distanza $s=f(t)$;
- nel *problema B*, si è determinato il **tasso istantaneo di crescita** di una popolazione, calcolando

$$\boldsymbol{r=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

  ossia calcolando la rapidità di variazione della popolazione $P=f(t)$;
- nel *problema C*, si è determinata la **pendenza** $\boldsymbol{m_t}$ **della tangente** ad una curva in un punto, calcolando

$$\boldsymbol{m_t=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

  ossia calcolando la rapidità di variazione dell'ordinata $y=f(x)$.

Si capisce dunque come i più vari problemi di tipo applicativo conducano a sviluppare le tecniche algebriche necessarie per calcolare la rapidità di variazione di una grandezza che è funzione di un'altra. È proprio di questo che ci occuperemo nei paragrafi seguenti.

2. Derivata di una funzione in un punto

I problemi esaminati nel paragrafo precedente conducono a valutare la rapidità di variazione di una grandezza funzione di un'altra. È facile riconoscere che, in tutti i casi, si segue lo stesso procedimento.

Indicata con $y=f(x)$ la funzione data e con a il valore di x, si procede nel modo seguente:

1) si assegna un piccolo incremento h alla variabile x, considerando, insieme al valore a, il valore $a+h$;

2) si valuta il corrispondente incremento che subisce la variabile y, tenendo presente che risulta

per $x=a$ $\quad y=f(a)$,
per $x=a+h$ $\quad y=f(a+h)$,

e perciò l'incremento che subisce y è dato da

$$f(a+h)-f(a);$$

3) si calcola il rapporto fra questi due incrementi, e cioè il **rapporto incrementale**, dato da

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4) si assegnano ad h valori sempre più prossimi a 0 e si calcola

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Fissiamo ora l'attenzione su quest'ultimo calcolo: quando $h\to 0$, sia il numeratore che il denominatore tendono a 0, perciò il limite del rapporto incrementale è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

Si possono dunque presentare le seguenti situazioni:

1) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$$

in tal caso **non si riesce** a determinare la rapidità di variazione cercata.

2) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

dove ℓ indica un numero finito (anche 0); in tal caso il numero ℓ indica proprio la rapidità di variazione.

Il procedimento descritto è abitualmente indicato con un apposito termine: il numero ℓ prende il nome di **derivata della funzione $y=f(x)$ nel punto d'ascissa a** e si indica con il simbolo $f'(a)$; si scrive:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Si dice dunque che **la derivata in un punto è il limite del rapporto incrementale, quando tende a 0 l'incremento dato alla variabile x.**

Nel calcolo delle derivate si usano anche altri simboli, fra i quali segnaliamo i seguenti:

- l'incremento h, assegnato alla variabile x, viene indicato con[1] Δx,
- il corrispondente incremento che subisce la funzione viene anche indicato con Δf o con Δy; così si scrive:

$$f(a+h)-f(a)=\Delta f=\Delta y;$$

- il rapporto incrementale viene pertanto scritto nella forma

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- la derivata viene indicata con

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}, \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$$

[1] La lettera Δ (d maiuscola dell'alfabeto greco) è l'iniziale della parola differenza; il simbolo Δx ricorda dunque che l'incremento della variabile x si ottiene eseguendo una differenza $(a+h-a)$.

Quest'ultima terminologia è certo più pesante ma riassume in modo più preciso il procedimento seguito; in particolare ricorda che il procedimento riguarda il valore $x=a$.

Si osserva subito che sia il procedimento di calcolo seguito che la definizione di derivata di una funzione in un punto sono indipendenti dal particolare problema che si vuole risolvere. Ma, tornando agli esempi che abbiamo esaminato nel paragrafo precedente, si ha che:

- *quando si calcola la velocità all'istante $t=a$ di un corpo che si muove secondo la legge $s=f(t)$,*
  il rapporto incrementale indica **la velocità media v_m**,
  la derivata indica **la velocità istantanea v**.
- *quando si calcola il tasso di crescita all'istante $t=a$ di una popolazione che varia nel tempo secondo la legge $P=f(t)$,*
  il rapporto incrementale indica **il tasso medio di crescita r_m**,
  la derivata indica **il tasso istantaneo di crescita r**.
- *quando si calcola l'equazione della tangente ad una curva d'equazione $y=f(x)$ in un suo punto A d'ascissa a,*
  il rapporto incrementale indica **la pendenza m_s della secante s**,
  la derivata indica **la pendenza m_t della tangente t**.

3. Funzione derivabile in un punto

Applichiamo ora le nozioni introdotte nel paragrafo precedente a due casi particolari.

A) È data la funzione $y=x^2$ e se ne vuole calcolare la derivata nel punto d'ascissa $x=0$. Si procede così:

1) si assegna un piccolo incremento $\Delta x=h$ alla variabile x, considerando, insieme al valore 0, il valore $0+h=h$;
2) si valuta il corrispondente incremento che subisce la variabile y, tenendo presente che risulta

   per $x=0$ $\quad f(0)=0^2=0,$
   per $x=h$ $\quad f(0+h)=h^2,$

   e perciò l'incremento che subisce y è dato da

   $$\Delta f=h^2-0=h^2;$$
3) si calcola il rapporto incrementale, dato da

   $$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{h^2}{h}=h;$$
4) si calcola

   $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}, \qquad \text{ossia} \qquad f'(0)=\lim_{h\to 0} h=0.$$

In conclusione si ottiene:

$$\mathbf{f'(0)=0.}$$

Il risultato ottenuto ha un'immediata interpretazione geometrica (fig. 8): la retta t, tangente alla parabola d'equazione $y=x^2$ nel punto $O(0, 0)$, ha la pendenza che vale 0; perciò la retta t è parallela all'asse delle x. In questo caso particolare t coincide addirittura con l'asse delle x.

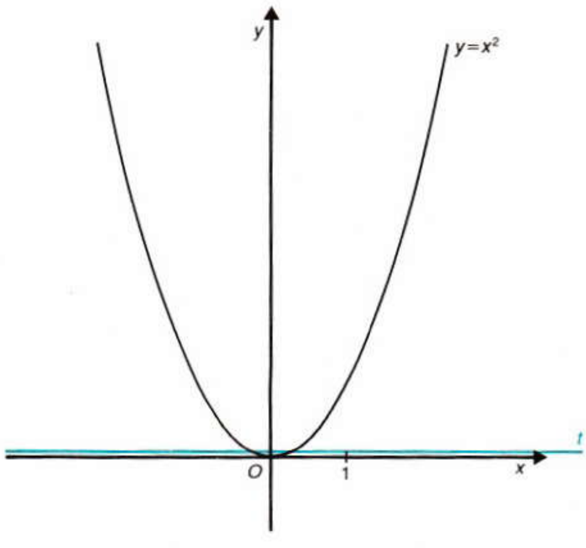

Fig. 8

B) Si vuole determinare la derivata della funzione $y=\sqrt{x}$ nel punto d'ascissa $x=0$.

Ripetendo il procedimento di prima si calcola il rapporto incrementale che è dato da:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Perciò risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty.$$

Si conclude dunque che non esiste la derivata della funzione $y=\sqrt{x}$ nel punto d'ascissa 0, ossia la funzione $y=\sqrt{x}$ non è derivabile nel punto $O(0, 0)$.

Anche questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica (fig. 9): la retta t, tangente alla curva d'equazione $y=\sqrt{x}$ in $O(0, 0)$, coincide con l'asse delle y; ed è noto che non è possibile determinare la pendenza dell'asse delle y (o di una retta parallela all'asse delle y)[1].

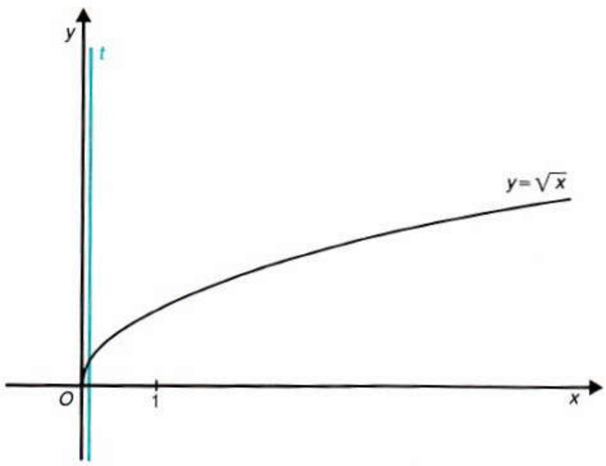

Fig. 9

Gli esempi ora esaminati permettono di cogliere il significato della seguente definizione:

si dice che una funzione $y=f(x)$ è derivabile in un punto d'ascissa a se risulta

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

dove ℓ indica un numero finito.

Possiamo inoltre aggiungere che

- **se risulta $f'(a)=0$, la tangente t alla curva nel punto $A[a, f(a)]$ ha la pendenza che vale 0, perciò t risulta parallela all'asse delle x.**
- **se il limite ℓ del rapporto incrementale non esiste oppure è infinito, la funzione non è derivabile nel punto A.**

Le figg. 10 e 11 mostrano ancora due esempi di funzioni non derivabili in un punto[2].

[1] Per maggiori notizie sulla pendenza di una retta vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, cap. 1.

[2] Per i calcoli corrispondenti vedi esercizi alle pagg. 403-404.

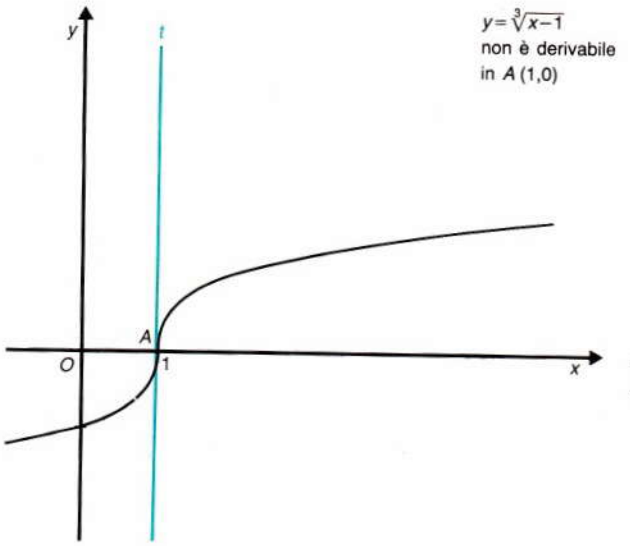

Fig. 10

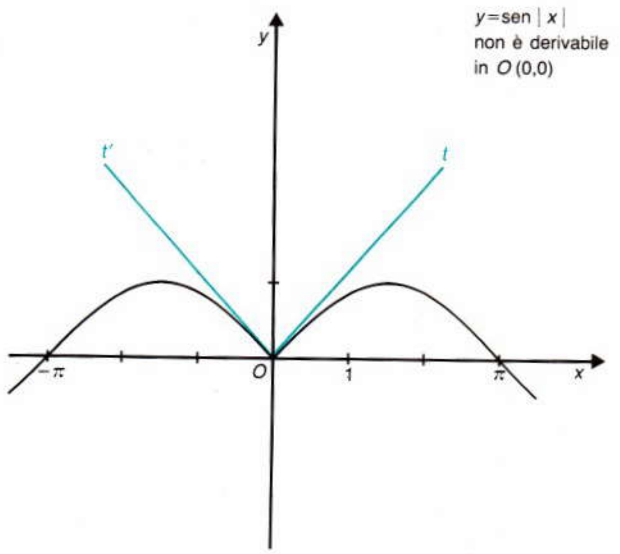

Fig. 11

4. Funzione derivata

Cominciamo col calcolare la derivata di una funzione, per esempio $y=x^3$, in punti di diversa ascissa. Si ha che:

- per $x=0$ risulta

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^3}{h}=h^2$$

e quindi

$$f'(0)=\lim_{h\to 0} h^2=0;$$

- per $x=1$ risulta

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3-1}{h}=3+3h+h^2$$

e quindi

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3;$$

- per $x=-1$ risulta

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(-1+h)^3-(-1)}{h}=3-3h+h^2$$

e quindi

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}(3-3h+h^2)=3.$$

Si osserva che, per ogni valore di x, si è seguito sempre lo stesso procedimento; procedimento che si può ripetere a partire da uno qualunque dei valori di x che appartengono al campo d'esistenza della funzione $y=x^3$. Si capisce così che, ad ogni valore di x si può far corrispondere il numero $f'(x)$, risultato del procedimento di derivazione. In questo modo si crea un'altra funzione: **la funzione derivata** della funzione $y=x^3$.

Per ottenere l'espressione analitica di questa funzione derivata basterà applicare il procedimento di derivazione a partire da un punto qualunque d'ascissa x; si ha:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3hx+h^2$$

e quindi

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2)=3x^2$$

Spesso si indica brevemente la funzione derivata con y', si scrive dunque che **la funzione derivata della funzione $y=x^3$ è $y'=3x^2$.**

Alcune importanti osservazioni:

A) le due lettere h ed x hanno un ruolo diverso nelle espressioni ora scritte:
- la variabile h assume valori sempre più vicini a 0;
- la lettera x indica una generica ascissa, che rimane fissa durante il procedimento di derivazione.

B) quando si conosce l'espressione analitica della funzione derivata, è facile calcolare il valore della derivata in un punto: basta sostituire ad x il valore desiderato. Ecco qualche esempio.

Data la funzione

$$y=x^3,$$

si è trovato che la funzione derivata è

$$f'(x)=3x^2.$$

Risulta perciò:

$$f'(0)=3\cdot 0^2=0\ ;\quad f'(1)=3\cdot 1^2=3\ ;\quad f'(-1)=3\ (-1)^2=3\ ;\ \ldots$$

C) La funzione

$$y'=3x^2$$

è legata alla funzione

$$y=x^3,$$

da cui è derivata da un'intuitiva relazione di carattere geometrico che è illustrata in fig. 12. Si immagina una tangente che "scorre lungo la curva" d'equazione

$$y=x^3;$$

per ogni valore dell'ascissa x, si "legge" la pendenza della tangente sulla curva che rappresenta la funzione derivata e cioè

$$y'=3x^2.$$

È chiaro che il procedimento seguito prima si può applicare a qualunque funzione $y=f(x)$, che sia derivabile in tutti i punti del suo campo di esistenza. Si definisce così **la funzione derivata, data da:**

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

ed indicata spesso col simbolo

$$\boldsymbol{y'=f'(x).}$$

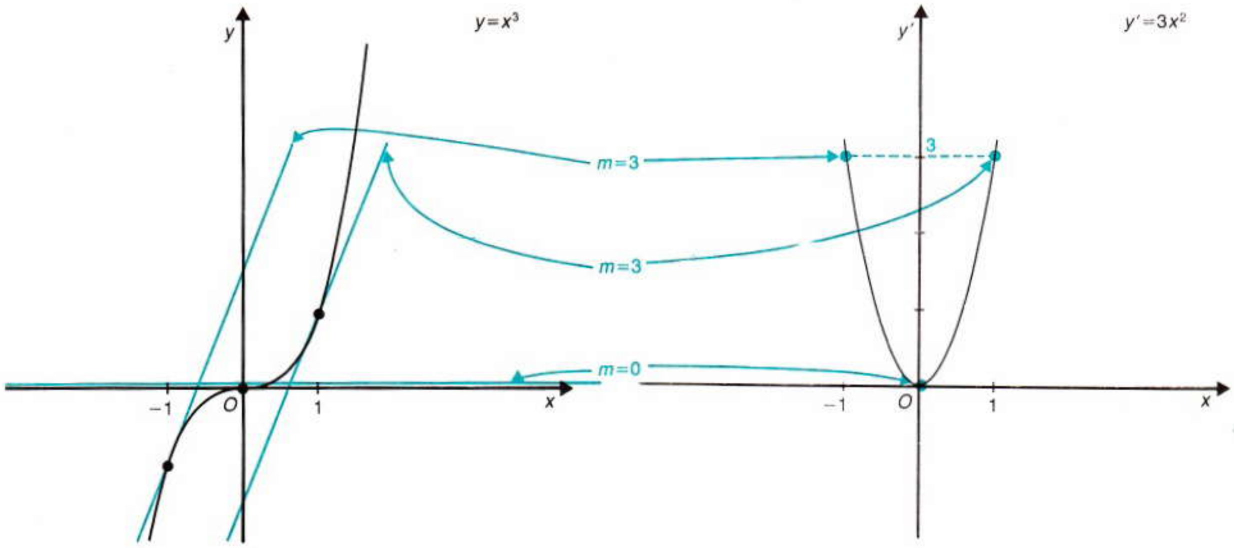

Fig. 12

Per indicare la funzione derivata si usano anche altri simboli, fra i quali segnaliamo in particolare i seguenti

$$\frac{df}{dx} \quad \text{oppure} \quad \frac{dy}{dx},$$

analoghi a quelli già introdotti a proposito della derivata in un punto.

Nei paragrafi seguenti vedremo come si possono calcolare, a partire da semplici regole, le funzioni derivate di tutte le funzioni che conosciamo. Svilupperemo un procedimento analogo a quello seguito per il calcolo dei limiti e cioè:

I) si calcolano le derivate di alcune funzioni elementari,

II) si trovano le regole fondamentali "dell'algebra delle derivate".

Vedremo che, in questo modo, si riescono a calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute componendo quelle elementari.

5. Derivate di alcune funzioni elementari

In questo paragrafo calcoleremo le derivate delle seguenti funzioni:

$$y=k, \quad y=x, \quad y=\text{sen}\, x, \quad y=e^x.$$

Per calcolare le derivate di queste funzioni ripeteremo sempre lo stesso procedimento; indicando la funzione considerata con $y=f(x)$, si procede così:

1) si calcola il rapporto incrementale della funzione , dato da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

2) si ottiene la funzione derivata $y'=f'(x)$, calcolando il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale; ossia

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

A) Derivata della funzione $y=k$

Cominciamo con l'esaminare un caso numerico: $y=4$. La funzione assegnata fa corrispondere sempre lo stesso numero 4 ad ogni valore di x (fig. 13); risulta quindi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-4}{h}=\frac{0}{h}=0;$$

e dunque

$$f'(x)=0.$$

È chiaro che il procedimento ora svolto si ripete per qualunque valore della costante k e permette di arrivare alla seguente conclusione:

la derivata di $y=k$ è $y'=0$.

Il risultato ora ottenuto era facilmente prevedibile: la funzione $y=k$ ha come grafico una retta r parallela all'asse delle x; perciò la tangente ad r coincide con r stessa. Il fatto che la derivata vale 0 indica proprio che la pendenza della tangente vale 0 in ogni punto.

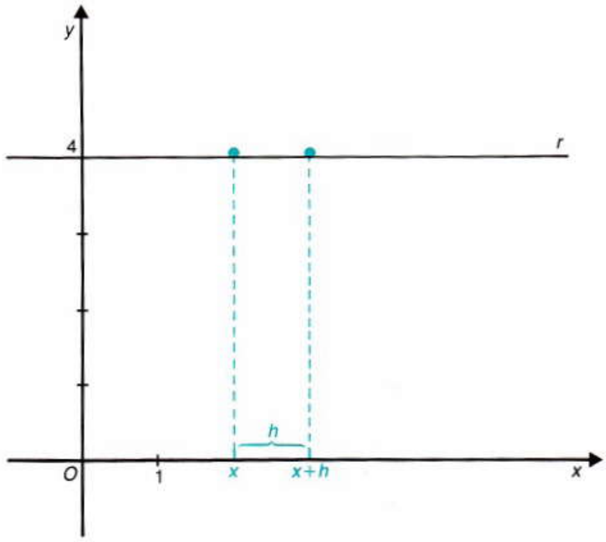

Fig. 13

B) Derivata della funzione $y=x$

Calcolando il rapporto incrementale, si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x+h-x}{x}=\frac{h}{h}=1;$$

perciò risulta:

$$f'(x)=1.$$

Si conclude che

la derivata di $y=x$ è $y'=1$.

Anche questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica: la funzione $y=x$ ha come grafico la bisettrice del 1° e 3° quadrante (fig. 14); perciò la retta tangente ad s coincide, per qualunque valore di x, con s stessa. Il fatto che la derivata vale 1 per qualunque x indica, appunto, che la pendenza della tangente vale 1 in ogni punto.

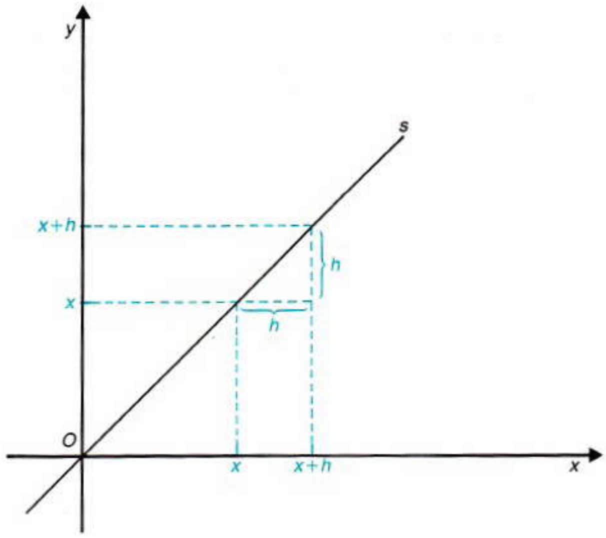

Fig. 14

C) Derivata di $y=\text{sen } x$

Calcoliamo prima di tutto il rapporto incrementale; si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen }(x+h)-\text{sen } x}{h}.$$

Risulta quindi

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen }(x+h)-\text{sen } x}{h}$$

Il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ che, in questo caso, non è immediato risolvere. Occorre valersi delle formule di addizione[1]; in base a queste formule risulta:

$$\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen} x \cdot \cos h+\cos x \cdot \operatorname{sen} h,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x&=\operatorname{sen} x \cdot \cos h+\cos x \cdot \operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x= \\ &=\operatorname{sen} x\,(\cos h-1)+\cos x \cdot \operatorname{sen} h.\end{aligned}$$

Si può allora scrivere il rapporto incrementale nella forma seguente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h-1}{h}+\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Si è così condotti a calcolare il seguente limite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h-1}{h}+\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]$$

Ora, per concludere il calcolo, basta ricordare che risulta[2]:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1,$$

perciò si ottiene

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h-1}{h}+\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]=\cos x$$

Si arriva dunque alla seguente conclusione:

la derivata della funzione $y=\operatorname{sen} x$ è $y'=\cos x$.

Anche questo risultato può essere interpretato geometricamente, considerando i grafici di $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ (fig. 15): fissato sulla sinusoide un qualunque punto P d'ascissa x e disegnata la relativa tangente t, si può "leggere" sulla curva $y=\cos x$ il coefficiente angolare della retta t.

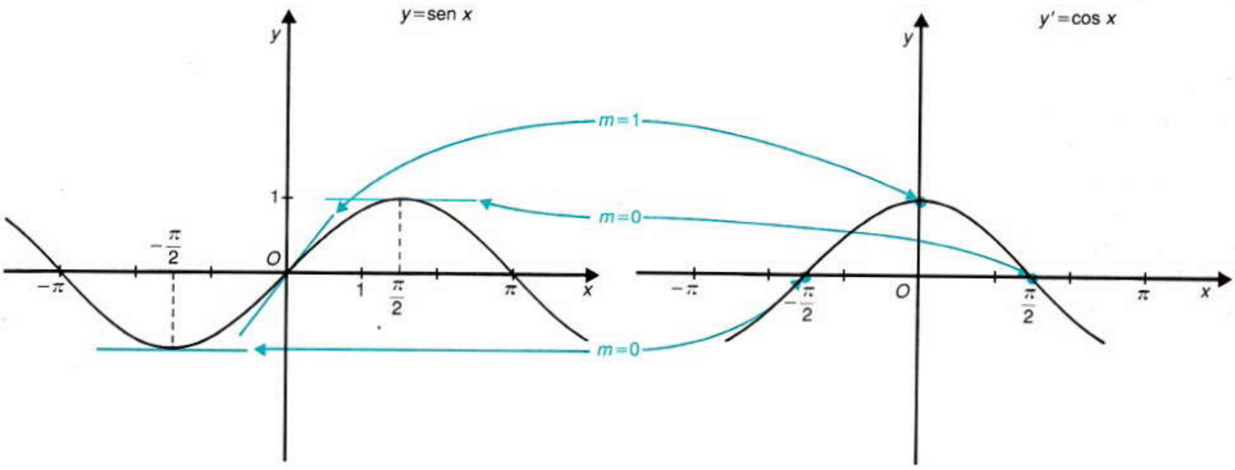

Fig. 15

[1] Le formule di addizione da utilizzare sono: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, dove α e β indicano angoli assegnati.

[2] Vedi cap. 3, paragrafo 7.

D) Derivata di $y=e^x$

Cominciamo, come sempre, col calcolare il rapporto incrementale; si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h}=\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h}.$$

Risulta

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}.$$

Ora, per ottenere la derivata cercata, basta ricordare che si ha[1]:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

Risulta quindi:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x.$$

Si arriva così alla seguente conclusione:

la derivata della funzione $y=e^x$ è $y'=e^x$.

Questo risultato sembra davvero sorprendente: la funzione esponenziale ha per derivata se stessa!

L'interpretazione grafica può aiutare a capire: si traccia il grafico della curva esponenziale (fig. 16) e si indica sulla curva un punto P e la relativa tangente t: se, per esempio, il punto è $P(0, 1)$, la tangente in P ha la pendenza $m=1$; se poi il punto è $P'(1, e)$, la tangente in P' ha la pendenza $m'=e$. Accade cioè che l'ordinata del punto P coincide col valore della pendenza della retta t e questa proprietà vale sempre, qualunque sia la posizione di P sulla curva.

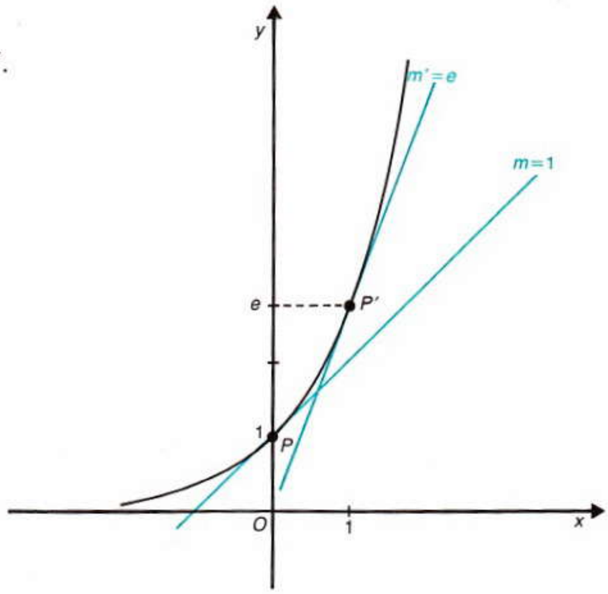

Fig. 16

6. L'algebra delle derivate

In questo paragrafo sono sviluppate le regole per calcolare le derivate di funzioni ottenute da quelle elementari con le seguenti operazioni:

A) addizione;
B) moltiplicazione;
C) divisione;
D) composizione di funzioni;
E) passaggio alla funzione inversa.

Per trovare le varie regole di derivazione si segue sempre lo stesso procedimento e cioè:

1) si scrive il rapporto incrementale della funzione data,
2) si calcola il limite del rapporto incrementale per $h\to 0$.

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 6.

A) Derivata della somma di due funzioni

Riprendiamo alcune delle funzioni di cui abbiamo calcolato le derivate nel paragrafo precedente e scriviamo alcune funzioni ottenute dalla loro somma; si ha per esempio:

$$y=\operatorname{sen} x+4; \qquad y=x+\sqrt{2}; \qquad y=\operatorname{sen} x+e^x; \qquad y=x+e^x \ldots$$

Si vuole calcolare la derivata di una di queste funzioni, che indicheremo genericamente con

$$y=F(x), \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=f(x)+g(x),$$

dove $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono due funzioni di cui conosciamo le derivate. Ora, conoscere le derivate di $y=f(x)$ e $y=g(x)$, vuol dire conoscere il limite del rapporto incrementale relativo a ciascuna funzione, ossia sapere che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x). \qquad (1)$$

Scriviamo dunque il rapporto incrementale della funzione $y=F(x)$; si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

ossia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}.$$

Si osserva subito che si può scrivere questo rapporto incrementale come somma dei rapporti incrementali (1), di cui conosciamo il limite e cioè:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Risulta così

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=f'(x)+g'(x).$$

Si conclude che:

una funzione del tipo $y=f(x)+g(x)$ ha per derivata $y'=f'(x)+g'(x)$.

Si può anche dire, a parole, che:

la derivata della somma di due funzioni si ottiene addizionando le relative derivate.

Siamo dunque in grado di calcolare le derivate delle funzioni indicate all'inizio; si ha che

$y=\operatorname{sen} x+4$ ha come derivata $y'=\cos x+0$, ossia $y'=\cos x$;
$y=x+\sqrt{2}$ ha come derivata $y'=1+0$, ossia $y'=1$;
$y=\operatorname{sen} x+e^x$ ha come derivata $y'=\cos x+e^x$,
$y=x+e^x$ ha come derivata $y'=1+e^x$;

Si osserva in particolare, a partire dalle prime due derivate, che le funzioni del tipo

$$y=f(x)+k \qquad \text{e} \qquad y=f(x)$$

hanno la stessa derivata

$$y'=f'(x).$$

Questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica.

Le due funzioni $y=f(x)+k$ e $y=f(x)$ hanno come grafico due curve come quelle di fig. 17: si tratta di due curve uguali, una traslata rispetto all'altra nella direzione dell'asse delle y.

È chiaro allora che, in corrispondenza ad uno stesso valore di x, si trovano tangenti con uguale pendenza.

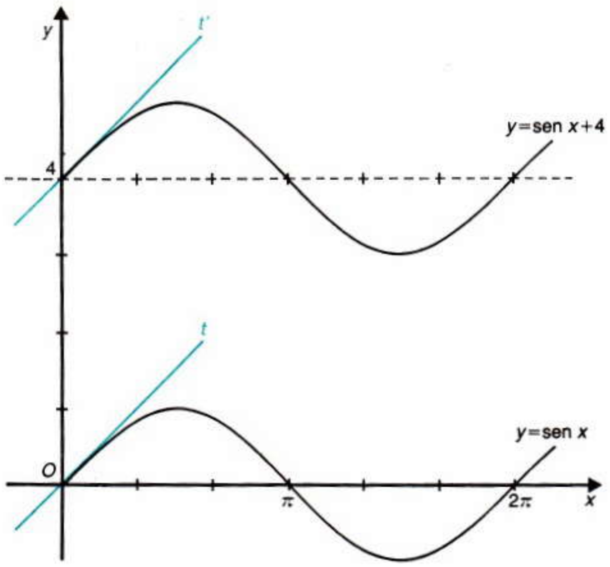

Fig. 17

B) Derivata del prodotto di due funzioni

Anche in questo caso è facile scrivere delle funzioni che siano il prodotto di due delle funzioni di cui abbiamo calcolato le derivate nel paragrafo precedente; consideriamo, per esempio:

$$y=8 \operatorname{sen} x; \quad y=\sqrt{5}\cdot x; \quad y=xe^x; \quad y=e^x \operatorname{sen} x \ldots$$

Si vuole calcolare la derivata di una di queste funzioni, che indicheremo genericamente con

$$y=F(x), \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=f(x)g(x),$$

dove $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono due funzioni di cui sono note le derivate; sappiamo quindi che risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x). \tag{1}$$

Ripetiamo il procedimento seguito nel caso (A) e scriviamo il rapporto incrementale della funzione $y=F(x)$; si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

ossia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} \tag{2}$$

Ci si rende conto che non si riesce più a proseguire come nel caso della somma: il rapporto incrementale (2) non si può ottenere moltiplicando i due rapporti incrementali presenti nelle (1).

Per "ritrovare" i rapporti incrementali delle due funzioni, occorre valersi di un artificio algebrico: si aggiunge e si toglie al numeratore della (2) l'espressione $f(x+h)g(x)$. In questo modo si ottiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)}{h}.$$

Quest'ultima espressione si può scrivere, poi, nella forma seguente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si ottiene dunque

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right],$$

e quindi, tenendo anche presente che risulta

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

si ha

$$F'(x)=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

Si conclude così che una funzione del tipo

$y=f(x)g(x)$ ha per derivata $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Dunque, **la derivata del prodotto di due funzioni *non si ottiene* moltiplicando le relative derivate**.

Si scopre così che "l'algebra delle derivate" presenta delle regole molto particolari e non prevedibili.

Per impadronirci dell'ultima regola, calcoliamo le derivate delle funzioni indicate all'inizio di questa parte (B); si ha che:

$y=8\,\mathrm{sen}x$ ha come derivata $y'=0\,\mathrm{sen}\,x+8\cos x$, ossia $y'=8\cos x$;
$y=\sqrt{5}\cdot x$ ha come derivata $y'=0x+\sqrt{5}\cdot 1$, ossia $y'=\sqrt{5}$;
$y=xe^x$ ha come derivata $y'=1e^x+x\,e^x$, ossia $y'=e^x(1+x)$;
$y=e^x\,\mathrm{sen}\,x$ ha come derivata $y'=e^x\,\mathrm{sen}\,x+e^x\cos x$, ossia $y'=e^x(\mathrm{sen}\,x+\cos x)$.

Si osserva, in particolare a partire dalle prime due derivate calcolate, che le funzioni del tipo

$$y=kf(x)$$

hanno per derivata

$$y'=k\cdot f'(x),$$

qualunque sia il valore della costante k.

Questo risultato ha un'immediata interpretazione geometrica: per passare dal grafico della funzione $y=f(x)$ al grafico della $y=kf(x)$, si opera una dilatazione che moltiplica per k le ordinate (fig. 18)[1]; è chiaro che questa trasformazione "si trasmette" in ogni punto e quindi modifica anche la tangente alla curva.

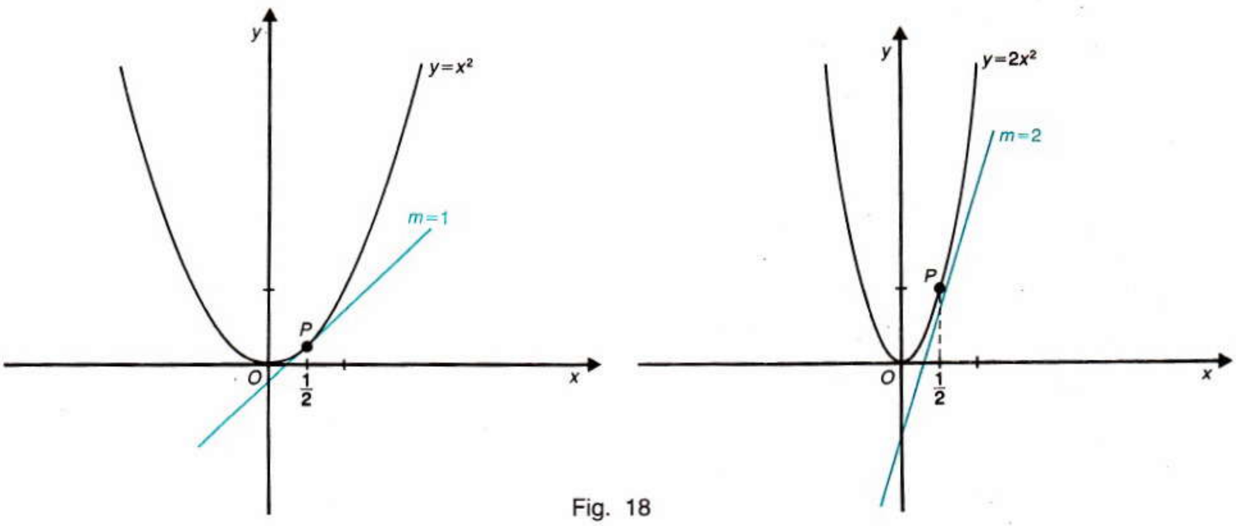

Fig. 18

[1] Per maggiori notizie sulle trasformazioni del piano vedi cap. 1, paragrafo 5.

C) Derivata del quoziente di due funzioni

Ecco qualche esempio di funzione, che è quoziente di due funzioni di cui è nota la derivata:

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y=\frac{x}{e^x}, \quad y=\frac{4}{\operatorname{sen} x}.$$

Si tratta di calcolare la derivata di una di queste funzioni, che indicheremo genericamente con

$$y=F(x), \quad \text{ossia} \quad F(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono due funzioni di cui conosciamo le derivate. Seguiremo in questi casi una via analoga a quella indicata nell'algebra dei limiti: consideriamo il quoziente di due funzioni come un prodotto, scrivendo, per esempio

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\operatorname{sen} x\frac{1}{x}, \quad \frac{x}{e^x}=x\frac{1}{e^x}, \ \ldots$$

In generale si scrive

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

In questo modo il problema da affrontare diventa il seguente: calcolare la derivata di

$$y=\frac{1}{g(x)}$$

conoscendo la derivata della funzione $y=g(x)$.

Ripetiamo ancora una volta il procedimento seguito nei casi (A) e (B), cioè scriviamo prima di tutto il rapporto incrementale della funzione considerata; si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\left(\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

La derivata cercata è dunque data da:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}=\frac{-g'(x)}{g^2(x)},$$

visto che risulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x).$$

Si conclude che una funzione del tipo

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{g(x)}} \ \textbf{ha per derivata} \ \boldsymbol{y'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}$$

È facile ora calcolare la derivata del quoziente di due funzioni: basta valersi simultaneamente dell'ultima regola e di quella per calcolare la derivata del prodotto; si ha che

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{ossia} \quad y=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

ha come derivata

$$y'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{g^2(x)},\quad \text{ossia}\quad y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Si conclude che una funzione del tipo

$$\boldsymbol{y=\frac{f(x)}{g(x)}\ \textbf{ha per derivata}\ y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}.$$

Dunque, **la derivata del quoziente di due funzioni *non* si ottiene dividendo le relative derivate**.

Applichiamo ora l'ultima regola per calcolare le derivate delle varie funzioni indicate all'inizio di questa parte (C); si ha che:

$$y=\frac{\text{sen}\,x}{x}\quad \text{ha come derivata}\quad y'=\frac{x\cos x-\text{sen}\,x\cdot 1}{x^2},\quad \text{ossia}\quad y'=\frac{x\cos x-\text{sen}\,x}{x^2};$$

$$y=\frac{x}{e^x}\quad \text{ha come derivata}\quad y'=\frac{1\cdot e^x-xe^x}{[e^x]^2},\quad \text{ossia}\quad y'=\frac{1-x}{e^x},$$

$$y=\frac{4}{\text{sen}\,x}\quad \text{ha come derivata}\quad y'=\frac{0\ \text{sen}\,x-4\cos x}{\text{sen}^2\,x},\quad \text{ossia}\quad y'=\frac{-4\cos x}{\text{sen}^2\,x}.$$

D) Derivata delle funzioni composte

È facile scrivere delle funzioni che si ottengono componendo due funzioni, di cui si conosce la derivata; ecco qualche esempio[1]:

$$y=\text{sen}\,2x,\quad y=e^{3x},\quad y=e^{\text{sen}\,x}.$$

Esaminando queste funzioni, si individuano le due funzioni di cui ciascuna è composta:

$y=\text{sen}\,2\,x$	si ottiene componendo	$z=2x$	e	$y=\text{sen}\,z$,
$y=e^{3x}$	si ottiene componendo	$z=3x$	e	$y=e^z$,
$y=e^{\text{sen}\,x}$	si ottiene componendo	$z=\text{sen}\,x$	e	$y=e^z$.

Si vuole calcolare la derivata di una di queste funzioni, che indicheremo genericamente con

$$y=F(x),$$

sapendo che risulta

$$F(x)=f[g(x)],$$

dove

$$y=f(x)\quad \text{e}\quad z=g(x)$$

sono due funzioni di cui si conoscono le derivate. Questo significa, come abbiamo già detto, che conosciamo il limite del rapporto incrementale relativo a ciascuna funzione, ossia sappiamo che risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\quad \text{e}\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x).\qquad (1)$$

Ripetiamo il procedimento seguito nei casi precedenti, cioè scriviamo prima di tutto il rapporto incrementale della funzione $y=F(x)$; si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h},\quad \text{ossia}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}\qquad (3)$$

[1] Vedi anche cap. 1, paragrafo 6.

Incontriamo così un problema già affrontato più volte: "ritrovare" nel rapporto incrementale (3) i rapporti incrementali (1), di cui è noto il limite. In questo caso, conviene scrivere

$$k=g(x+h)-g(x),$$

in modo che risulti

$$g(x+h)=g(x)+k, \quad \text{ossia} \quad g(x+h)=z+k.$$

Il rapporto incrementale (3) assume così la forma seguente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(z+k)-f(z)}{h}; \tag{3'}$$

questa espressione "somiglia" molto al rapporto incrementale che definisce $f'(x)$, ma al denominatore compare h, mentre al numeratore l'incremento della variabile z è k e non h.

Si riesce tuttavia ad arrivare alla derivata cercata moltiplicando il numeratore e il denominatore della (3′) per k (supponendo che risulti $k\neq 0$).

Si ottiene infatti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(z+k)-f(z)}{k}\cdot\frac{k}{h}=\frac{f(z+k)-f(z)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h};$$

passando ora al limite per $h\to 0$, si ottiene che anche $k\to 0$; si ha quindi:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+k)-f(z)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(z)\cdot g'(x).$$

Si conclude che:

la derivata di $y=f[g(x)]$ è data da $y'=f'[g(x)]g'(x)$.

Ecco qualche esempio di applicazione di questa regola:

$y=\text{sen}\,2\,x$, composta da $z=2x$ e $y=\text{sen}\,z$, ha come derivata $y'=2\cos 2x$,
$y=e^{3x}$, composta da $z=3x$ e $y=e^z$, ha come derivata $y'=3e^{3x}$,
$y=e^{\text{sen}\,x}$, composta da $z=\text{sen}\,x$ e $y=e^z$, ha come derivata $y'=e^{\text{sen}\,x}\cos x$.

D) Derivata delle funzioni inverse

Consideriamo infine le seguenti funzioni, inverse di funzioni elementari, di cui è nota la derivata:

$y=\ln x$, ossia $x=e^y$, inversa di $y=e^x$;
$y=\text{arcsen}\,x$, ossia $x=\text{sen}\,y$, inversa di $y=\text{sen}\,x$.

Indichiamo con $y=g(x)$ la funzione inversa di una funzione $y=f(x)$, di cui è nota la derivata. Per determinare rapidamente $y'=g'(x)$, conviene basarsi sul fatto che, componendo una funzione e la sua inversa[1], si ottiene sempre la funzione $y=x$; risulta dunque

$$f[g(x)]=x. \tag{4}$$

Si calcola allora la derivata dei due membri della (4), applicando la regola di derivazione delle funzioni composte; si ha:

$$f'[g(x)]g'(x)=1.$$

Da quest'ultima relazione si può ricavare la derivata $g'(x)$. Si ottiene:

$$g'(x)=\frac{1}{f'[g(x)]} \quad \text{ossia} \quad g'(x)=\frac{1}{f'(y)}, \quad \text{purché risulti } f'(y)\neq 0.$$

[1] Vedi cap. 1, paragrafo 6.

Si arriva così alla seguente conclusione:

se $y=g(x)$ è l'inversa di una funzione derivabile $y=f(x)$, per tutti i valori di x per cui risulta $f'(y)\neq 0$, si ha:

$$y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}.$$

La regola di derivazione della funzione inversa di una data funzione si presta ad un'intuitiva interpretazione geometrica: $y=f(x)$ e la sua inversa $x=f(y)$, ossia $y=g(x)$, hanno come grafico due curve simmetriche rispetto alla retta r d'equazione $y=x$ (fig. 19); perciò, ad ogni punto $P[a, f(a)]$ con tangente t su una curva, corrisponde un punto $P'[f(a), a]$ con tangente t' sulla curva simmetrica. Si capisce allora che anche le rette t e t' saranno simmetriche rispetto ad r ed avranno equazioni del tipo:

$$t)\ y=mx+n, \qquad t')\ x=my+n, \qquad \text{ossia} \quad y=\frac{1}{m}x-\frac{n}{m}.$$

La relazione $g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ indica dunque che t e t' hanno pendenza m e $\dfrac{1}{m}$.

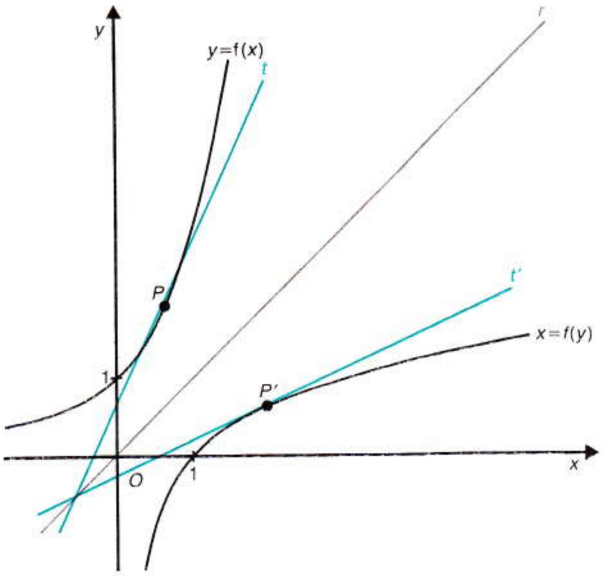

Fig. 19

Applichiamo ora l'ultima regola ottenuta per determinare le inverse delle funzioni indicate all'inizio di questa parte (D).

$$y=\ln x \quad , \text{ ossia } \quad x=e^y \quad , \text{ ha come derivata } \quad y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

$$y=\text{arcsen}\, x, \text{ ossia } \quad x=\text{sen}\, y, \text{ ha come derivata}^1 \quad y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[1] Ci si vale della seguente relazione nota dalla trigonometria:

$\cos^2 y+\text{sen}^2 y=1$, da cui si ricava $\cos y=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$.

Occorre ricordare che, quando si considera la funzione $y=\text{arcsen}\, x$, si ottengono valori di y tali che risulta:

$$-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2} \quad \text{e quindi} \quad \cos y\geq 0;$$

si ha perciò, nel caso esaminato:

$\cos y=\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$.

7. Qualche applicazione dell'algebra delle derivate

In questo paragrafo vedremo come si possono calcolare le derivate di molte funzioni, valendosi di una o più regole stabilite dall'algebra delle derivate.

A) Derivata di $y=x^n$

Consideriamo le funzioni del tipo $y=x^n$, distinguendo vari casi a seconda dell'esponente n assegnato.

- *n intero positivo*

Si tratta delle seguenti funzioni:

per $n=1$, $y=x$,
per $n=2$, $y=x^2=x\cdot x$,
per $n=3$, $y=x^3=x^2\cdot x$,
...

Per calcolare le derivate di queste funzioni, basta valersi della regola per derivare il prodotto di funzioni; si ha:

per $n=1$, $y=x$, con derivata $y'=1$;
per $n=2$, $y=x^2$, ossia $y=x\cdot x$, con derivata $y'=1\cdot x+x\cdot 1$, ossia $y'=2x$;
per $n=3$, $y=x^3$, ossia $y=x^2\cdot x$, con derivata $y'=2x\cdot x+x^2\cdot 1$, ossia $y'=3x^2$ ...

Si arriva alla seguente regola generale:

$\boldsymbol{y=x^n}$ **ha per derivata** $\boldsymbol{y'=nx^{n-1}}$.

- *n intero negativo*

Si tratta delle seguenti funzioni:

per $n=-1$, $y=x^{-1}$, cioè $y=\dfrac{1}{x}$,

per $n=-2$, $y=x^{-2}$, cioè $y=\dfrac{1}{x^2}$, ...

per $n=-r$, $y=x^{-r}$, cioè $y=\dfrac{1}{x^r}$, (con r intero positivo).

Per calcolare le derivate di queste funzioni ci si vale della regola di derivazione del reciproco di una funzione; si ha che:

$$y=\frac{1}{x^r} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=\frac{-rx^{r-1}}{x^{2r}}, \quad \text{ossia} \quad y'=-rx^{r-1-2r};$$

quindi

$$y=x^{-r} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=-rx^{-r-1}.$$

Si scopre che, anche quando l'esponente n è intero negativo (cioè si ha $n=-r$), continua a valere la seguente regola generale:

$\boldsymbol{y=x^n}$ **ha per derivata** $\boldsymbol{y'=nx^{n-1}}$.

- *n numero reale qualunque*

Si tratta di funzioni come le seguenti:

per $n=\dfrac{1}{2}$ $y=x^{\frac{1}{2}}$ ossia $y=\sqrt{x}$

per $n=-\dfrac{2}{3}$ $y=x^{-\frac{2}{3}}$ ossia $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

per $n=\pi$ $y=x^{\pi}$

Dato che n indica un qualunque numero reale, consideriamo la funzione $y=x^n$, definita nell'insieme dei reali positivi. Così si scrive[1]:

$$x^n=e^{\ln(x^n)}=e^{n \ln x}$$

e si calcola la derivata della funzione assegnata scrivendola nella forma

$$y=e^{n \ln x}.$$

Si ha, valendosi della regola di derivazione di funzione composta:

$$y'=e^{n \ln x} n \frac{1}{x},$$

ossia

$$y'=e^{\ln (x^n)} \cdot n \cdot \frac{1}{x}=n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x}$$

e, in definitiva

$$y'=nx^{n-1}.$$

Si conclude dunque che

> **$y=x^n$ ha per derivata $y'=nx^{n-1}$, qualunque sia il valore dell'esponente n, purché reale.**

Si possono ora calcolare le derivate delle funzioni indicate all'inizio. Si ha che:

$$y=x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad \text{ossia} \quad y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

e perciò

$$y=\sqrt{x} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$y=x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} \quad \text{ossia} \quad y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

e perciò

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=\frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}};$$

infine

$$y=x^{\pi} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=\pi \cdot x^{(\pi-1)}.$$

B) Derivata di $y=\cos x$

Per derivare questa funzione ricordiamo le seguenti relazioni note dalla trigonometria:

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\operatorname{sen} x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

[1] Ci si vale più volte della nota proprietà dei logaritmi: $\ln (a^p)=p \cdot \ln a$.

Allora, invece di derivare la funzione $y=\cos x$, possiamo derivare la funzione

$$y=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

valendosi della regola di derivazione di una funzione composta; si ha:

$$y'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Si trova dunque che **la derivata di $y=\cos x$ è $y'=-\operatorname{sen} x$**.

C) Derivata di $y=\arccos x$.

Applicando i risultati ottenuti nel caso precedente, insieme con la regola di derivazione della funzione inversa di una funzione, si ha che la derivata di $y=\arccos x$, ossia $x=\cos y$ è data da:

$$y'=\frac{1}{-\operatorname{sen} y}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si conclude che **la derivata di $y=\arccos x$ è $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$**.

D) Derivata della funzione $y=\operatorname{tg} x$

Per derivare questa funzione, occorre applicare contemporaneamente le seguenti regole:
- i risultati ottenuti nel caso B),
- la regola relativa al quoziente di funzioni,
- alcune nozioni di trigonometria.

Si ha che:

$$y=\operatorname{tg} x \text{ si può anche scrivere come } y=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Perciò risulta

$$y'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\operatorname{sen} x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}.$$

La derivata così ottenuta si può anche scrivere in una delle due forme seguenti[1]

$$y'=1+\operatorname{tg}^2 x, \quad \text{oppure} \quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Si conclude che **la funzione $y=\operatorname{tg} x$ ha come derivata $y'=1+\operatorname{tg}^2 x$**.

E) Derivata di $y=\operatorname{arctg} x$

La derivata di questa funzione si ottiene valendosi dei risultati appena trovati e della regola per derivare la funzione inversa. Si ha che

$y=\operatorname{arctg} x$, ossia $x=\operatorname{tg} y$, ha per derivata

$$y'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Si conclude che **la funzione $y=\operatorname{arctg} x$ ha come derivata $y'=\frac{1}{1+x^2}$**.

[1] Si può applicare la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla divisione e scrivere:
$y'=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$; oppure ricordare che risulta $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$.

Osserviamo che alcune delle derivate che abbiamo calcolato danno dei risultati abbastanza imprevedibili; si ha, per esempio che:

- la funzione trascendente $y=\ln x$ ha come derivata una funzione che non è affatto trascendente; si tratta della funzione razionale $y=\frac{1}{x}$;
- la funzione trascendente $y=\operatorname{arctg} x$ ha per derivata ancora una funzione razionale, cioè $y=\frac{1}{1+x^2}$;
- la funzione trascendente $y=\operatorname{arcsen} x$ ha per derivata una funzione che non è più trascendente, anche se è irrazionale; si tratta della funzione $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si capisce che l'operazione di derivazione "getta un ponte" fra funzioni di tipo diverso; questo collegamento s'interpreta geometricamente, riflettendo che la derivata di una funzione in un punto indica sempre il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione in quel punto.

8. Teoremi sulle funzioni derivabili

In questo paragrafo sono raccolti alcuni teoremi che valgono per tutte le funzioni derivabili. Questi teoremi sono tutti basati sulla nozione di funzione derivabile, che ora richiamiamo:

- Una funzione $y=f(x)$ è derivabile in un punto P d'ascissa a se risulta
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a),$$
dove $f'(a)$ indica un numero finito.
Dal punto di vista geometrico, il grafico di una funzione derivabile in P è tangente nel punto P alla retta t, che ha pendenza $f'(a)$ (fig.20).
- Una funzione è derivabile in un intervallo, se è derivabile in tutti i punti di quell'intervallo.

I vari teoremi saranno considerati soltanto da un punto di vista grafico-intuitivo; tuttavia si può completare questa trattazione con le dimostrazioni esposte nel Complemento B.

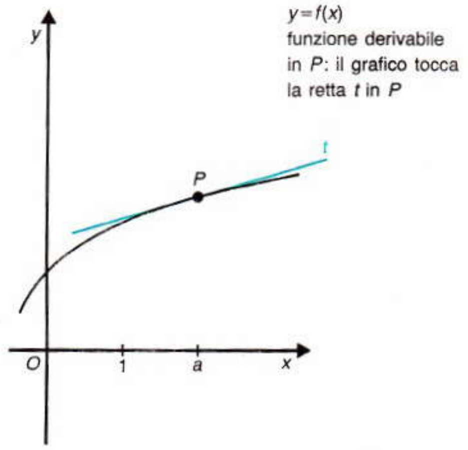

Fig. 20

1) Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili

Una funzione $y=f(x)$ che è derivabile in un punto P d'ascissa a, è anche continua nello stesso punto P.

Il teorema esprime una proprietà semplice da intuire da un punto di vista geometrico: la funzione $y=f(x)$, che è derivabile nel punto $P[a, f(a)]$, "si appoggia" nel punto P alla retta t di pendenza $f'(a)$ (fig. 20). Si capisce allora che in P non ci può essere un'interruzione della curva, cioè la funzione $y=f(x)$ non può presentare una discontinuità nel punto d'ascissa $x=a$.

Un'importante osservazione: **non vale il teorema inverso**, cioè una funzione continua in un punto non è necessariamente derivabile in quel punto. In fig. 21 si trova un esempio di funzione continua ma non derivabile nel punto $A(1, 0)$: si tratta della funzione $y=\sqrt[3]{x-1}$, di cui abbiamo già parlato nel paragrafo 3.

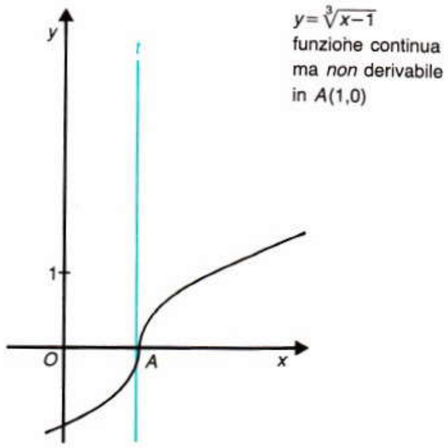

Fig. 21

2) Teorema di Lagrange[1] (o del valore medio)

Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c, tale che risulti

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

È facile interpretare geometricamente questo teorema: il rapporto

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

indica la pendenza della retta r che congiunge i punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$, e

$$f'(c)$$

indica la pendenza della tangente t alla curva in un punto C d'ascissa c.

Il teorema afferma dunque che esiste almeno un punto C, dove la tangente t è parallela alla retta r (fig.22).

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nacque a Torino, dove diventò professore di matematica all'Accademia Militare. Visse più tardi alla corte di Federico il Grande di Prussia e poi a quella di Luigi XVI di Francia, diventando una delle figure rappresentative del periodo della Rivoluzione Francese.

Questo teorema ha una notevole importanza teorica per il seguente motivo: per determinare la derivata di una funzione in un punto, si deve calcolare il rapporto incrementale e perciò si deve valutare la funzione in un intorno del punto. Tuttavia, la derivata sembra «perdere completamente queste informazioni durante il passaggio al limite». È proprio il teorema del valor medio che stabilisce una relazione fra rapporto incrementale e derivata, senza richiamare esplicitamente il passaggio al limite.

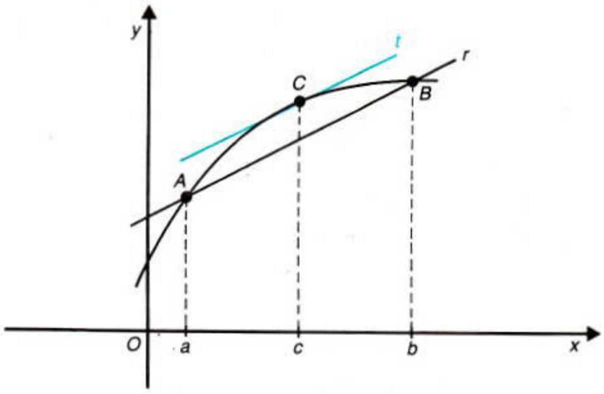

Fig. 22

3) Teorema di Rolle[1]

Se per una funzione $y=f(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ si ha

$$f(a)=f(b),$$

allora esiste, all'interno dell'intervallo (a, b), almeno un valore c, tale che risulti

$$f'(c)=0.$$

Questo teorema fissa l'attenzione su un caso particolare del teorema precedente (fig. 23): il caso in cui risulta

$$f(b)=f(a) \text{ e perciò } f(b)-f(a)=0.$$

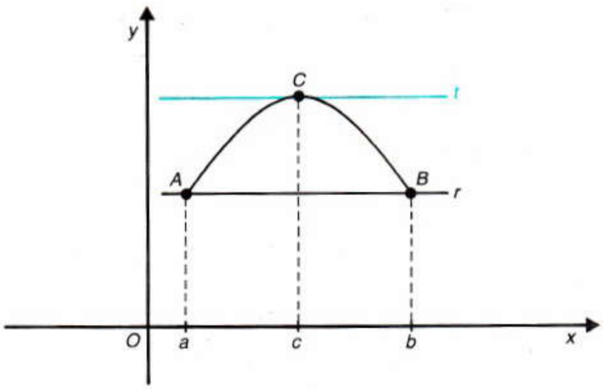

Fig. 23

4) Teorema di de l'Hôpital[2]

Se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite in uno stesso insieme, soddisfano le seguenti condizioni:

I) all'interno dell'insieme sono derivabili e risulta $g'(x)\neq 0$,

II) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ (dove a è un numero o il simbolo ∞),

III) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ (dove ℓ è un numero o il simbolo ∞),

allora, risulta anche

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

[1] Michel Rolle (1652-1719), grande matematico francese, è noto anche per le sue critiche ai metodi dell'analisi infinitesimale.

[2] Guillaume de l'Hôpital, matematico francese, pubblicò nel 1696 il primo manuale di calcolo differenziale che sia mai stato stampato: *Analyse des infiniment petits*. In questo libro si dimostra anche il teorema di cui ci occupiamo ora; tale teorema era stato già formulato da Bernoulli, maestro di de l'Hôpital.

Cerchiamo di capire il significato di questo teorema su un esempio. Consideriamo le funzioni

$$f(x)=3x-3 \quad \text{e} \quad g(x)=2x-2,$$

definite nell'insieme di tutti i numeri reali.

Queste due funzioni sono tali che:

I) sono derivabili nel loro insieme di definizione e risulta $g'(x)=2\neq 0$,
II) risulta $\lim_{x\to 1}(3x-3)=0$ e $\lim_{x\to 1}(2x-2)=0$.

Se allora si calcola

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{2x-2},$$

si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; non si riesce cioè a prevedere il risultato di questo limite, perché questo risultato dipende dalla rapidità con cui le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero.

In questo caso particolare, però, si riesce a calcolare il limite con un semplice artificio algebrico; si scrive:

$$\frac{3x-3}{2x-2}=\frac{3\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)}=\frac{3}{2}.$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{2x-2}=\frac{3}{2}.$$

Ci si rende conto che il risultato ottenuto è uguale al rapporto delle derivate, dato che si ha proprio:

$$f'(x)=3 \text{ e } g'(x)=2;$$

si verifica dunque che

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Questo risultato si può interpretare basandosi sul grafico delle due funzioni che compaiono nel limite assegnato. Si ottengono le due rette rappresentate in fig. 24 e cioè:

r che ha equazione $y=3x-3$ e, quindi, pendenza $m=3$,
s che ha equazione $y=2x-2$ e, quindi, pendenza $m'=2$.

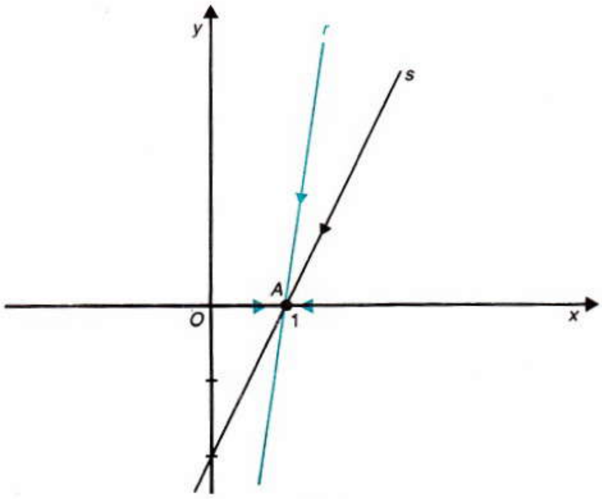

Fig. 24

Si può allora pensare che la rapidità con cui ciascuna retta tende a 0, quando $x \to 1$, dipenda dalla pendenza della retta: se $x \to 1$, ci si avvicina più rapidamente ad $A(1, 0)$ "scendendo" lungo r piuttosto che lungo s.

Questo caso particolare può dare l'idea di estendere il risultato ad altre funzioni, valutando la rapidità con cui una funzione tende a 0 attraverso la pendenza della relativa tangente, ossia attraverso la derivata. In breve, il teorema di de l'Hôpital tratta i casi in cui il

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

si presenta come una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ ed afferma che:

$$\text{se esiste } \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \text{allora risulta } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vediamo un esempio di applicazione di questo teorema; ritroveremo così, in modo più rapido, i risultati ottenuti nel cap. 3, paragrafo 7.

Si deve calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}.$$

In questo caso si ha:

$$\begin{array}{lll} a=0 \ , & & \\ f(x)=\text{sen } x & \text{e quindi} & f'(x)=\cos x, \\ g(x)=x & \text{e quindi} & g'(x)=1, \end{array}$$

Si verifica immediatamente che sono rispettate le condizioni elencate nel teorema; perciò risulta

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Qualche osservazione, per completare l'esame del teorema di de L'Hôpital:

A) Il teorema vale solo se sono verificate le ipotesi elencate

Per fissare meglio l'attenzione su quest'osservazione, consideriamo, per esempio, il limite seguente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}.$$

Questo limite non è una forma indeterminata, dato che il numeratore tende ad 1 e solo il denominatore tende a 0.

Svolgendo correttamente i calcoli si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} = \infty.$$

Se, invece, **applichiamo in modo errato il teorema di L'Hôpital**, calcolando il limite del rapporto delle derivate, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{1} = 0$$

e **arriviamo ad un risultato errato**.

B) Il teorema di de l'Hôpital si estende ad altre forme indeterminate

Da quanto si è visto finora, si potrebbe concludere che le forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ sono "privilegiate", dato che si possono trattare con un criterio di validità generale.

In realtà il teorema si estende, con una formulazione analoga, alle forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Inoltre, accompagnando il teorema con qualche artificio algebrico, si riescono a trattare anche le forme indeterminate del tipo $0\,\infty$ e $\infty-\infty$ (vedi esercizi).

C) Non vale il teorema inverso

Infatti il teorema di L'Hôpital afferma **solo** che, nelle ipotesi indicate,

$$\text{se esiste} \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell, \qquad \text{si ha} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Perciò può accadere che

$$\text{risulti} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell, \qquad \text{ma non esista} \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ecco un esempio: risulta (v. tabella)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$$

ma non esiste il limite del rapporto delle derivate, perché

$$\lim_{x\to\infty}\cos x \quad \text{non esiste.}$$

x	$y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 10	$-0,05$
± 100	$-0,005$
± 1000	$-0,0008$
± 10000	$-0,00003$