# 4
# Esercizi

## 1. Problemi che conducono alla derivata di una funzione

**1.** La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nel vuoto varia secondo la legge

$$v=gt$$

Valutare l'accelerazione istantanea $a$ della pallina, quando sono trascorsi 2″ dall'inizio del movimento.
*(Calcolare prima di tutto l'accelerazione media del corpo in un piccolo intervallo di tempo, tenendo presente che risulta*

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

*dove*

*$a_m$ indica l'accelerazione media,*
*$\Delta v$ indica la variazione di velocità,*
*$\Delta t$ indica l'intervallo di tempo nel quale è avvenuta la variazione $\Delta v$.*

*Considerando come intervallo $\Delta t$ il tempo che intercorre fra 2 e $2+h$ secondi, si ottiene...*
*Assumere come accelerazione istantanea il valore a cui tende l'accelerazione media $a_m$, quando $h\to 0$. Nel caso esaminato si ottiene $a=g$).*

**2.** La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nell'aria varia secondo la legge

$$v=A\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

dove $A$ e $b$ sono due costanti.
Valutare l'accelerazione istantanea $a$ della pallina, quando sono trascorsi 2″ dall'inizio del movimento.

*(Vedere le considerazioni svolte nell'esercizio precedente; in questo caso non è facile ottenere il risultato del limite...)*

**3.** Indicare un procedimento generale per calcolare in un dato istante $c$ l'accelerazione istantanea $a$ di un corpo che si muove con la velocità istantanea variabile secondo la legge $v=f(t)$.

*(Si ottiene $a=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$).*

**4.** Per determinare la portata di un fiume o di un tubo si procede così (fig. 1): si fissa l'attenzione su una sezione $S$ del tubo (o del fiume) e si misura la massa d'acqua $m$ che attraversa $S$ al variare del tempo $t$; si considera quindi come **portata $p$** la rapidità con cui $m$ varia al variare di $t$.
Indicare

- con $m=f(t)$ la legge con cui $m$ varia al variare di $t$,
- con $a$ un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- la portata media $p_m$ nell'intervallo di tempo da $a$ ad $a+h$,
- la portata $p$ all'istante $t=a$.

*(Si ottiene $p=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$).*

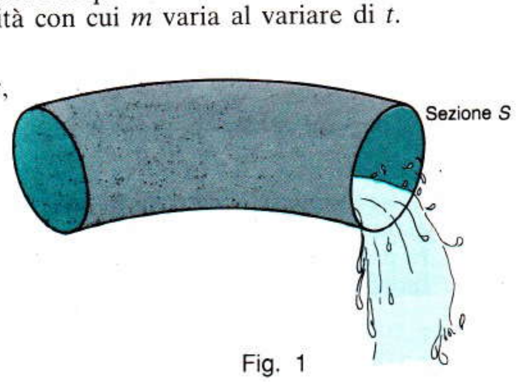

Fig. 1

**5.** Gli elettroni liberi in un filo di rame si muovono caoticamente; non c'è quindi un moto ordinato lungo la direzione del filo. Se, invece, si collegano gli estremi del filo ad una batteria, in ogni punto del filo si stabilisce un campo elettrico, che imprime agli elettroni un moto ordinato lungo il filo. Perciò si trova che, attraverso una superficie $S$ tagliata idealmente nel filo, passa una quantità di carica $q$ variabile al variare del tempo $t$. La rapidità con cui $q$ varia al variare del tempo $t$ è chiamata **intensità di corrente $i$**.
Indicare

- con $q=f(t)$ la legge con cui $q$ varia al variare di $t$,
- con $a$ un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- l'intensità media di corrente $i_m$ nell'intervallo di tempo da $a$ ad $a+h$,
- l'intensità di corrente $i$ all'istante $t=a$.

*(Si ottiene* $i=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

**6.** Per studiare il decadimento radioattivo di una sostanza si può misurare la massa $m$ della sostanza al variare del tempo $t$. La rapidità con cui $m$ varia al variare del tempo $t$ è chiamato **tasso di decadimento $r$**.
Indicare

- con $m=f(t)$ la legge con cui $m$ varia al variare di $t$,
- con $a$ un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il tasso medio di decadimento $r_m$ nell'intervallo di tempo da $a$ ad $a+h$,
- il tasso di decadimento $r_m$ all'istante $t=a$.

*(Si ottiene* $r=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

**7.** Per studiare la crescita di un animale si può misurare l'altezza $h$ dell'animale al variare del tempo $t$. La rapidità con cui $h$ varia al variare del tempo $t$ è chiamato **tasso di crescita $r$**.
Indicare

- con $h=f(t)$ la legge con cui $h$ varia al variare di $t$,
- con $a$ un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il tasso medio di crescita $r_m$, nell'intervallo di tempo da $a$ ad $a+h$,
- il tasso di crescita $r$, relativo all'istante $t=a$.

*(Si ottiene* $r=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

**8.** Per studiare l'inquinamento termico che una centrale elettrica produce in un fiume, si può misurare la temperatura $T$ in un dato punto del fiume al variare del tempo $t$. La rapidità con cui $T$ varia al variare del tempo $t$ è chiamato **tasso di inquinamento $r$**.
Indicare

- con $T=f(t)$ la legge con cui $T$ varia al variare di $t$,
- con $a$ un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il tasso medio di inquinamento $r_m$, nell'intervallo di tempo da $a$ ad $a+h$,
- il tasso di inquinamento $r$, relativo all'istante $t=a$.

*(Si ottiene* $r=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

**9.** In economia è spesso necessario analizzare l'andamento del costo $C$ di produzione di una data merce (plastica, concimi chimici, ...) al variare della quantità $q$ di merce prodotta.
In particolare, la rapidità con cui $C$ varia al variare della quantità $q$ è chiamata **costo marginale $c$**.
Indicare

- con $C=f(t)$ la legge con cui $C$ varia al variare di $q$,
- con $a$ una quantità di merce fissata.

Descrivere un procedimento per calcolare:

– il costo marginale medio $c_m$, quando la quantità $q$ varia da $a$ ad $a+h$,
– il costo marginale $c$, relativo alla quantità $q=a$.

*(Si ottiene* $c=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

**10.** In economia è spesso necessario analizzare l'andamento del profitto $P$ che si ottiene vendendo una data merce (plastica, concimi chimici, ...) al variare della quantità $q$ di merce venduta.
In particolare, la rapidità con cui $P$ varia al variare della quantità $q$ è chiamata **profitto marginale $p$**.
Indicare

– con $P=f(t)$ la legge con cui $P$ varia al variare di $q$,
– con $a$ una quantità di merce fissata.

Descrivere un procedimento per calcolare:

– il profitto marginale medio $p_m$, quando la quantità $q$ varia da $a$ ad $a+h$,
– il profitto marginale $p$, relativo alla quantità $q=a$.

*(Si ottiene* $p=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*).*

# 2. Derivata di una funzione in un punto

## Derivata e rapporto incrementale

*Gli esercizi dall'11 a 18 conducono ad impadronirsi di due nozioni relative ad una funzione $y=f(x)$, considerata in corrispondenza ad un valore $x=a$:*

– ***rapporto incrementale*** $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

– ***derivata*** $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Calcolare il rapporto incrementale e la derivata delle funzioni indicate negli esercizi dall'11 al 18.

**11.** $y=x^2$, nel punto d'ascissa $x=2$. $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}=4+h,\ f'(2)=4\right]$

**12.** $y=x^3$, nel punto d'ascissa $x=1$. $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}=3+3h+3h^2,\ f'(1)=3\right]$

**13.** $y=\frac{1}{x}$, nel punto d'ascissa $x=1$. $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-1}{(1+h)},\ f'(1)=-1\right]$

**14.** $y=\frac{1}{x^2}$, nel punto d'ascissa $x=1$. $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-h-2}{(1+h)^2},\ f'(1)=-2\right]$

**15.** $y=e^x$, nel punto d'ascissa $x=0$.

*(Si ottiene* $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{e^h-1}{h}$, $f'(0)=1$*. Tenere presente le forme indeterminate risolte nel paragrafo 6 del cap. 3).*

**16.** $y=\text{sen}\ x$, nel punto d'ascissa $x=0$.

*(Si ottiene* $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\text{sen}\ h}{h}$, $f'(0)=1$*. Tenere presente le forme indeterminate risolte nel paragrafo 7 del cap. 3).*

**17.** $y=\cos x$, nel punto d'ascissa $x=0$.

*(Si ottiene* $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\cos h-1}{h}$, $f'(0)=0$. *Tenere presente le forme indeterminate risolte nel paragrafo 7 del cap. 3).*

**18.** $y=\sqrt{x}$, nel punto d'ascissa $x=4$.

*(Si ha* $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ *e* $f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$*).*

*Il limite si presenta, come sempre, nella forma indeterminata del tipo* $\frac{0}{0}$*; ora, per eliminare l'indeterminazione, conviene procedere come nell'esercizio 225 del Capitolo 3°, scrivendo*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{4+h}-2)\cdot(\sqrt{4+h}+2)}{h\cdot(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{4+h-4}{h\cdot(\sqrt{4+h}+2)}.$$

*Così si ottiene*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}\ \text{e}\ f'(4)=\frac{1}{4}).$$

## Derivata e rapporto incrementale nelle applicazioni

*Gli esercizi dal 19 al 27 conducono ad interpretare rapporto incrementale e derivata di una funzione dal punto di vista grafico; per questo occorre ricordare che, fissata una funzione* $y=f(x)$ *ed un suo punto* $A[a, f(a)]$,

- *il rapporto incrementale indica la pendenza* $m_s$ *di una secante s, che unisce il punto A con un punto* $P[a+h, f(a+h)]$,
- *la derivata indica la pendenza* $m_t$ *della tangente alla curva in A.*

*Si ha dunque (fig. 2)*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=m_s, \qquad f'(a)=m_t.$$

**19.** Verificare che, considerata una funzione $y=f(x)$ ed un suo punto $A[a; f(a)]$, i numeri $m_s$ e $m_t$ si possono visualizzare nel modo seguente (fig. 3):

- si fissa sull'asse delle $x$ il punto $V(-1,0)$,
- da $V$ si conduce la retta $r_s // s$, fino ad incontrare l'asse delle $y$ in $Q_s$,
- da $V$ si conduce la retta $r_t // t$, fino ad incontrare l'asse delle $y$ in $Q_t$.

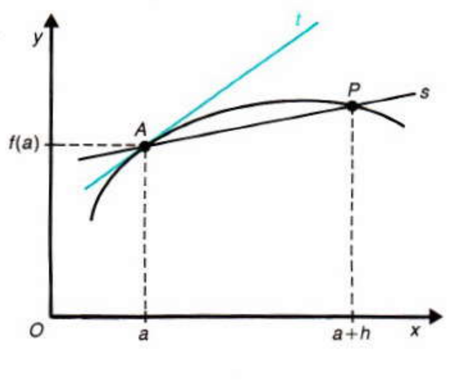


Fig. 2

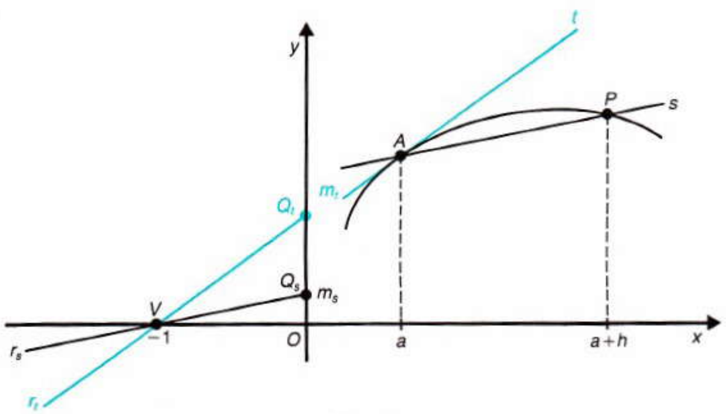


Fig. 3

In questo modo si ottengono sull'asse delle $y$ i punti $Q_s(0; m_s)$, $Q_t(0; m_t)$ e dunque i due numeri $m_s$ e $m_t$ si leggono facilmente sull'asse delle $y$.

*($r_s$ ha equazione $y=m_s(x+1)$, $r_t$ ha equazione $y=m_t(x+1)$, ...*
*Per maggiori dettagli sull'argomento vedi anche Complemento A di questo capitolo).*

**20.** Tracciare il grafico della funzione $y=\frac{1}{x}$, fissare l'attenzione sul punto $A(1, 1)$ e tracciare il grafico delle seguenti secanti:

$s_1$) per $A$ e $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$,

$s_2$) per $A$ e $C\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$;

calcolare la pendenza delle due rette ottenute.
Tracciare il grafico della retta $t$, tangente alla parabola in $A$ e calcolarne la pendenza.
Confrontare le pendenze delle tre rette $s_1$, $s_2$ e $t$, valendosi del procedimento indicato nell'esercizio 19.

**21.** Tracciare il grafico della funzione $y=x^2$, fissare l'attenzione sul punto $A(2; 4)$ e tracciare il grafico delle seguenti secanti;

$s_1$) per $A$ e $B(3; 3^2)$,
$s_2$) per $A$ e $C(2{,}5; 2{,}5^2)$;

calcolare la pendenza delle due rette ottenute.
Tracciare il grafico della retta $t$, tangente alla parabola in $A$ e calcolarne la pendenza.
Confrontare le pendenze delle tre rette $s_1$, $s_2$ e $t$, valendosi del procedimento indicato nell'esercizio 19.

**22.** Ripetere l'esercizio 21 più in generale, considerando le rette seguenti:

$s$) per $A(2,4)$ e $P[2+h, (2+h)^2]$,
$t$) tangente alla parabola in $A$.

Studiare come varia la differenza $m_s-m_t$ al variare di $h$.

**23.** Ripetere l'esercizio 21 ancora più in generale, fissando sulla parabola $y=x^2$ il punto $A(a, a^2)$ e considerando le rette seguenti:

$s$) per $A$ e $P[a+h, (a+h)^2]$,
$t$) tangente alla parabola in $A$.

Studiare come varia la differenza $m_s-m_t$ al variare di $h$.

**24.** Tracciare il grafico delle funzioni seguenti

$$y=x^2 \quad \text{e} \quad y=x^2+1.$$

Considerare su ciascuna curva il punto di ascissa $x=0$ e calcolare i rapporti incrementali che si ottengono, fissando $h=1$.
Verificare che i rapporti incrementali ottenuti sono uguali.
Calcolare i rapporti incrementali relativi ad un punto d'ascissa $x=a$, lasciando fisso $h=1$. Si ottengono ancora valori uguali?
Calcolare poi i rapporti incrementali relativi al punto d'ascissa $x=2$, considerando $h$ variabile. Si ottengono ancora valori uguali?
Calcolare i rapporti incrementali relativi ad un punto d'ascissa $x=a$, considerando $h$ variabile. Si ottengono ancora valori uguali?
Spiegare i risultati ottenuti ed interpretarli dal punto di vista grafico.

**25.** Ripetere l'esercizio 24, a partire dalle funzioni seguenti

$$y=x^2 \quad \text{e} \quad y=(x+1)^2.$$

**26.** Ripetere l'esercizio 24, a partire dalle funzioni seguenti

$$y=x^2+1, \quad y=x^3, \quad y=x-2.$$

**27.** Rispondere ai seguenti quesiti:

a) il rapporto incrementale di una funzione può assumere valore 0 per qualche valore dell'ascissa $a$ e dell'incremento $h$? Come si interpreta questa situazione dal punto di vista grafico?
b) il rapporto incrementale di una funzione può assumere valore 0 per qualche valore dell'ascissa $a$? Come si interpreta questa situazione dal punto di vista grafico?

**Gli esercizi dal 28 al 35 conducono ad applicare rapporto incrementale e derivata in vari settori.**

**28.** Riprendere l'esercizio 3, pag. 397, e considerare in un dato istante $t=c$ un corpo che si muove con velocità istantanea variabile secondo la legge $v=f(t)$; quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(c)$?

**29.** Riprendere l'esercizio 4, pag. 397, e considerare in un dato istante $t=a$ la massa d'acqua $m$ che attraversa una sezione $S$ di un tubo. Se $m$ varia nel tempo secondo la legge $m=f(t)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

**30.** Riprendere l'esercizio 5, pag. 398, e considerare in un dato istante $t=a$ la quantità di carica $q$ che attraversa una sezione $S$ di un filo conduttore. Se $q$ varia nel tempo secondo la legge $q=f(t)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

**31.** Riprendere l'esercizio 6, pag. 398, e considerare in un dato istante $t=a$ la massa $m$ di una sostanza radioattiva. Se $m$ varia nel tempo secondo la legge $m=f(t)$, che significato hanno rapporto incrementale e derivata $f'(a)$?

**32.** Riprendere l'esercizio 7, pag. 398, e considerare in un dato istante $t=a$ l'altezza $h$ di un animale. Se $h$ varia nel tempo secondo la legge $h=f(t)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

**33.** Riprendere l'esercizio 8, pag. 398, e considerare in un dato istante $t=a$ la temperatura $T$ in un dato punto di un fiume. Se $T$ varia nel tempo secondo la legge $T=f(t)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

**34.** Riprendere l'esercizio 9, pag. 398, e considerare, per una data quantità $q=a$ di merce, il costo di produzione $C$. Se $C$ varia al variare di $q$ secondo la legge $C=f(q)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

**35.** Riprendere l'esercizio 10, pag. 398, e considerare, per una data quantità di merce $q=a$, il profitto $P$. Se $P$ varia al variare di $q$ secondo la legge $P=f(q)$, quale significato assumono il rapporto incrementale e la derivata $f'(a)$?

## Vari modi di indicare il rapporto incrementale e la derivata

Data una funzione $y=f(x)$ e fissato un suo punto $A[a, f(a)]$, nel testo si è considerato il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ e la derivata $f'(a)$, indicati nel modo seguente:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Esaminiamo ora altri quattro modi molto diffusi per indicare il rapporto incrementale e la derivata in un punto.

I) Si indica $h=\Delta x$ e si scrive

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}, \qquad f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

II) Si indica $a+h=x$; così $x\to a$, quando $h\to 0$ e si scrive

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

III) Si indica $a=x_0$ e $a+h=x$; così $x\to x_0$, quando $h\to 0$ e si scrive

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

IV) Si indica $a=x_1$ e $a+h=x_2$; così $x_2\to x_1$, quando $h\to 0$ e si scrive

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad f'(x_1)=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

# 3. Funzione derivabile in un punto

## Sulla definizione di funzione derivabile

*Gli esercizi dal 36 al 39 conducono a riflettere sulla seguente definizione:*
***una funzione $y=f(x)$ è derivabile in un suo punto A d'ascissa $x=a$, se risulta***

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell,\qquad \text{con } \ell \text{ numero finito}$$

**36.** Nel testo si è dimostrato che non è derivabile in $O(0,0)$ la funzione

$$y=\sqrt{x}.$$

Dimostrare che la funzione è derivabile in qualunque altro punto $A(a, \sqrt{a})$ del suo campo di esistenza.

*(Tenendo presente lo svolgimento dell'esercizio 18, si ha*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

*Così risulta*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$$

*e dunque il limite del rapporto incrementale è ...)*

**37.** Dimostrare che non è derivabile nel punto $A(1,0)$ la funzione

$$y=\sqrt[3]{x-1}$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

*(Relativamente alla funzione si ha*

$$f(1)=\sqrt[3]{1-1}=0 \qquad e \qquad f(1+h)=\sqrt[3]{1+h-1}=\sqrt[3]{h};$$

*perciò il rapporto incrementale è dato da*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

*e risulta*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty\ldots$$

*La retta t, tangente alla curva in A, è parallela all'asse delle y).*

**38.** Dimostrare che non è derivabile nel punto $O(0,0)$ la funzione

$$y=|x|$$

*(Tenendo presente il significato del simbolo $|x|$, la funzione $y=|x|$ è definita nel modo seguente*

$$\begin{array}{ll} y=x & \text{per } x>0 \\ y=-x & \text{per } x<0. \end{array}$$

*Si ottengono dunque, nell'intorno di 0, due rapporti incrementali diversi, a seconda del segno di h; si ha:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{h}{h}\quad \text{per } h>0, \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-h}{h}\quad \text{per } h<0.$$

*Perciò risulta*

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-1 \qquad e \qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=1$$

*ma non esiste*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

*e quindi ...)*

**39.** Dimostrare che non è derivabile nel punto $O(0,0)$ la funzione

$$y = \text{sen}\,|x|.$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

*(Tenendo presente il significato del simbolo $|x|$, la funzione $y=sen\,|x|$ è definita nel modo seguente*

$$y = sen\,x \qquad per\ x>0$$
$$y = sen\,(-x) = -sen\,x \qquad per\ x<0.$$

*Si ottengono dunque, nell'intorno di 0, due rapporti incrementali diversi, a seconda del segno di h; si ha:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{sen\,h}{h} \quad per\ h>0, \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-sen\,h}{h} \quad per\ h<0.$$

*Perciò risulta*[1]*:*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -1 \qquad e \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$$

*ma non esiste*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

*Dal punto di vista geometrico, si osserva che la curva non ammette in O un'unica tangente t, ma due tangenti distinte t e t').*

## Derivata, derivata destra, derivata sinistra

*Gli esercizi dal 40 al 43 conducono a riflettere sulla nozione di derivata, tenendo anche presente le definizioni di limite, limite destro e limite sinistro esposte nel paragrafo 6 del cap. 2.*

***In generale, data una funzione $y=f(x)$ ed un suo punto $A[a, f(a)]$, si possono calcolare i seguenti limiti:***

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

***Si ha che***

- ***se risulta*** $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell_1$, ***con $\ell_1$ numero finito***

  ***si dice che la funzione è derivabile a sinistra; il numero $l_1$ prende il nome di derivata sinistra della funzione nel punto A e si indica con $f'_s(a)$;***
- ***se risulta*** $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell_2$, ***con $\ell_2$ numero finito***

  ***si dice che la funzione è derivabile a destra; il numero $\ell_2$ prende il nome di derivata destra della funzione nel punto A e si indica con $f'_d(a)$;***
- ***se risulta*** $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$, ***con $\ell$ numero finito***

  ***si dice che la funzione è derivabile nel punto A; il numero $\ell$ prende il nome di derivata della funzione nel punto A e si indica con $f'(a)$;***
- ***se invece risulta $\ell_1 \neq \ell_2$, la funzione non è derivabile nel punto A, che prende in tal caso il nome di punto angoloso.***

[1] Tenere presente che risulta (vedi cap. 3, paragrafo 7) $\lim_{h \to 0} \frac{sen\,h}{h} = 1$.

*Dal punto di vista grafico, una curva ammette in un punto angoloso due tangenti distinte: $t_s$ con pendenza $f'_s(a)$ e $t_d$ con pendenza $f'_d(a)$.*

**Tenere presenti le considerazioni ora svolte per eseguire gli esercizi dal 40 al 43.**

**40.** Tracciare il grafico della funzione

$$y=|\text{sen}\, x|$$

e fissare l'attenzione sul punto $O(0,0)$, risolvendo i seguenti quesiti:

- calcolare la derivata destra e la derivata sinistra della funzione in $O$;
- verificare che la funzione non è derivabile in $O$;
- interpretare graficamente i risultati ottenuti.

*(Vedere anche i suggerimenti dati nell'esercizio 39).*

**41.** Tracciare il grafico della funzione

$$y=|x^2-1|$$

e fissare l'attenzione sui punti $A(-1,0)$ e $B(1,0)$, risolvendo i seguenti quesiti:

- calcolare la derivata destra e la derivata sinistra della funzione sia in $A$ che in $B$;
- verificare che la funzione non è derivabile né in $A$ né in $B$;
- interpretare graficamente i risultati ottenuti.

*(Tenere presente che la funzione è definita nel modo seguente:*

$$y=x^2-1 \quad \text{per } x>1 \quad \text{o} \quad \text{per } x<-1,$$
$$y=1-x^2 \quad \text{per } -1<x<1.$$

*Perciò si ha, per esempio nel punto $B(1,0)$,*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=2+h \quad \text{per } h>0 \quad e \quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=-2-h \quad \text{per } h<0$$

*e dunque risulta*

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-2 \quad e \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=2 \ldots)$$

**42.** Esaminare il grafico presentato nella fig. 4 ed indicare:

- i punti in cui non esiste la derivata, dato che la tangente è parallela all'asse delle $y$;
- i punti in cui non esiste la derivata, dato che si tratta di punti angolosi;
- i punti in cui la derivata vale 0.

**43.** Esaminare il grafico presentato nella fig. 5 e stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere

a) la funzione non è derivabile nel punto $B$, dato che la tangente è parallela all'asse delle $x$;
b) la funzione è derivabile nel punto $B$ e la derivata vale 0, dato che la tangente è parallela all'asse delle $x$;
c) la funzione non è derivabile nel punto $A$, dato che la tangente è parallela all'asse delle $y$;
d) la funzione è derivabile nel punto $A$ e la derivata vale 0, dato che la tangente è parallela all'asse delle $y$.

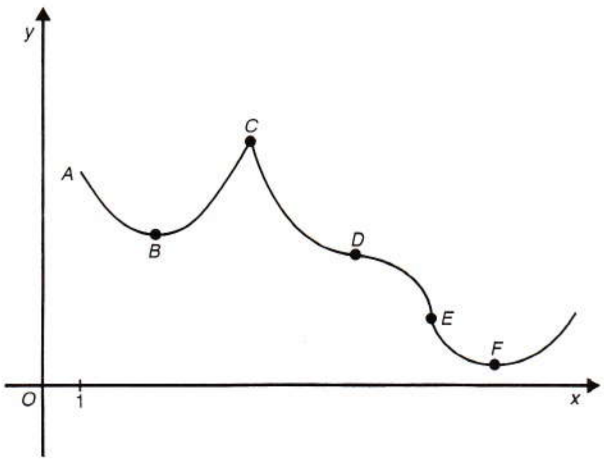


Fig. 4

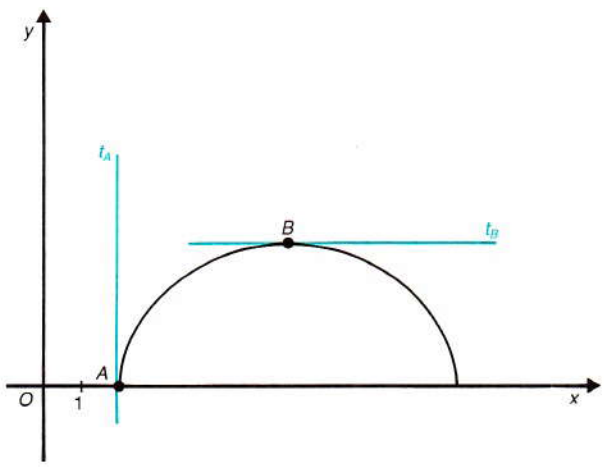


Fig. 5

# 4. Funzione derivata

## Sulla definizione di derivata

**Gli esercizi dal 44 al 49 conducono ad impadronirsi della nozione di funzione derivata di una data funzione $y=f(x)$.**

*Per questo è opportuno ricordare che la derivata $f'(x)$ è definita nel modo seguente:*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**44.** Calcolare la funzione derivata della funzione $y=x^2$.
Visualizzare il legame fra la funzione e la sua derivata, basandosi sul grafico cartesiano delle due funzioni e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(\sqrt{2})$, $f'(-\sqrt{2})$ spiegando il procedimento seguito e visualizzando sui grafici cartesiani i risultati ottenuti;
- quale particolarità presenta il valore $f'(0)$?
- indicare sulla parabola d'equazione $y=x^2$ il punto che ha la tangente parallela alla bisettrice del I e III quadrante;
- può succedere che due punti della parabola d'equazione $y=x^2$ abbiano tangenti parallele?

*(Si ottiene $y'=2x$. Tenere presente che due tangenti sono parallele se hanno la stessa pendenza ...)*

**45.** Ripetere l'esercizio 44 a partire dalla funzione $y=x^3$.

**46.** Calcolare la funzione derivata della funzione $y=\frac{1}{x}$.

Visualizzare il legame fra la funzione e la sua derivata, basandosi sul grafico cartesiano delle due funzioni e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(\sqrt{3})$, $f'(-\sqrt{3})$, spiegando il procedimento seguito e visualizzando sui grafici cartesiani i risultati ottenuti;
- indicare sulla curva d'equazione $y=\frac{1}{x}$ i punti che hanno la tangente parallela alla bisettrice del II e IV quadrante;
- si può calcolare $f'(0)$?
- può succedere che due punti della curva d'equazione $y=\frac{1}{x}$ abbiano tangenti parallele?

*(Si ottiene $y'=-\frac{1}{x^2}$ ...)*

**47.** Ripetere l'esercizio 46, a partire dalla funzione $y=\frac{1}{x^2}$.

*(Si ottiene $y'=-\frac{2}{x^3}$ ).*

**48.** Fissare l'attenzione sulla funzione $y=x^2$ e calcolare i seguenti rapporti incrementali:

- il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=1$, con $h$ variabile;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica $x$, con $h=1$;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa $x$, con $h$ variabile.

Confrontare i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

a) il rapporto di cui valutare il limite per $h\to 0$, per ottenere $f'(1)$;
b) il rapporto di cui valutare il limite per $h\to 0$, per ottenere $f'(x)$.

**49.** Fissare l'attenzione sulla funzione $y=\frac{1}{x}$ e calcolare i seguenti rapporti incrementali:

- il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=0{,}5$, con $h$ variabile;
- il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=0{,}5$, con $h=0{,}01$;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica $x$, con $h=0{,}5$;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa $x$, con $h$ variabile.

Confrontare i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

a) il rapporto che dà un valore approssimato di $f'(0{,}5)$;
b) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(0{,}5)$;
c) il rapporto che dà un valore approssimato di $f'(x)$;
d) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(x)$.

## Vari modi di indicare la derivata

Data una funzione $y=f(x)$, derivabile in tutto il suo campo di esistenza, nel testo si è considerata la funzione derivata $f'(x)$, definita nel modo seguente:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esaminiamo ora altri modi molto diffusi per indicare la funzione derivata.

I) Si indica $f'(x)=Df(x)$ e si scrive $Df(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

II) Si indica $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ e si scrive $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

III) Si indica $h=\Delta x$, $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ e si scrive $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

IV) Si considera $s=f(t)$, cioè una funzione del tempo; indicando $h=\Delta t$ e $f'(t)=\dot{s}(t)$, si scrive $\dot{s}(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(x+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

# 5. Derivate di alcune funzioni elementari

**50.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$y=-1, \quad y=\frac{3}{4}, \quad y=\sqrt{3}, \quad y=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 5 per calcolare la derivata di ciascuna funzione. Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

**51.** Nel testo si è dimostrato che la funzione $y=x$ ha come funzione derivata $y'=1$.
Indicare il valore della derivata di $y=x$ in corrispondenza ai seguenti valori di $x$:

$$x=0, \quad x=-1, \quad x=\frac{2}{3}, \quad x=\sqrt{5}.$$

Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

**52.** Nel testo si è dimostrato che la funzione $y=\text{sen}\, x$ ha come funzione derivata $y'=\cos x$.
Visualizzare il legame fra la funzione e la sua derivata, basandosi sul grafico cartesiano delle due funzioni e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ spiegando il procedimento seguito e visualizzando sui grafici cartesiani i risultati ottenuti;
- indicare sulla curva d'equazione $y=\text{sen}\, x$ i punti che hanno la tangente parallela alla bisettrice del I e III quadrante;
- come si possono individuare i punti della sinusoide che hanno le tangenti fra loro parallele?

**53.** Nel testo si è dimostrato che la funzione $y=e^x$ ha come funzione derivata $y'=e^x$.
Visualizzare il legame fra la funzione e la sua derivata, basandosi sul grafico cartesiano delle due funzioni e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ spiegando il procedimento seguito e visualizzando sui grafici cartesiani i risultati ottenuti;
- indicare sulla curva d'equazione $y=e^x$ il punto che ha la tangente parallela alla bisettrice del I e III quadrante;
- si possono trovare sulla curva esponenziale punti che hanno la tangente parallela all'asse delle $x$?

**54.** Calcolare la derivata della funzione $y=\text{sen } x$, basandosi sulle formule di prostaferesi, invece che sulle formule di addizione.

*(Si ottiene*

$$sen\ (x+h)-sen\ x=2\ cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sen\ \frac{h}{2}$$

*e quindi*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2}{h}\ cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sen\ \frac{h}{2}=cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{sen\ \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

*Per semplificare i calcoli, si può introdurre la variabile*

$$z=\frac{h}{2}$$

*tenendo presente che, se $h\to 0$, anche $z\to 0$. Così si calcola subito*

$$\lim_{z\to 0} cos(x+z)\cdot\frac{sen\ z}{z}=cos\ x).$$

# 6. Algebra delle derivate e sue applicazioni

## Sulla derivata della somma e del prodotto di due funzioni

*Gli esercizi dal 55 al 78 conducono ad impadronirsi delle seguenti regole di derivazione*

- ***una funzione del tipo $y=f(x)+g(x)$ ha per derivata $y'=f'(x)+g'(x)$;***
- ***una funzione del tipo $y=f(x)g(x)$ ha per derivata $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.***

**Calcolare le derivate delle funzioni indicate negli esercizi dal 55 al 61, specificando in ogni caso le regole applicate.**

**55.** $y=x+\sqrt{3}$, $\quad y=\text{sen } x+2$, $\quad y=e^x+6$

**56.** $y=x+\text{sen } x$, $\quad y=\text{sen } x+e^x$, $\quad y=e^x+x$.

**57.** $y=4x$, $\quad y=2\text{ sen } x$, $\quad y=\frac{1}{3}e^x$.

**58.** $y=-x$, $\quad y=-\text{sen } x$, $\quad y=-e^x$.
*(Tenere presente che risulta $-x=(-1)x$ ...)*

**59.** $y=-\frac{3}{4}x$, $\quad y=-\sqrt{2}\text{ sen } x$, $\quad y=-5e^x$.

**60.** $y=x \operatorname{sen} x$, $y=xe^x$, $y=e^x \operatorname{sen} x$.

**61.** $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$.

*(Tenere presente che risulta $x^2=x\cdot x$, $x^3=x^2\cdot x$, $x^4=x^3\cdot x$; si ottiene*

$y'=2x$, $y'=3x^2$, $y'=4x^3$*).*

**62.** Dopo aver svolto l'esercizio 61, indicare la regola generale per calcolare la derivata di $y=x^n$, con $n$ intero positivo.

*(Si ottiene $y'=nx^{n-1}$).*

**63.** Tenendo presenti i risultati dell'esercizio 62, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$y=x^5$, $y=x^7$, $y=x^{10}$.

**64.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, indicando, in ogni caso, le regole applicate:

$y=4x^3$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)x^4$, $y=x^3 \operatorname{sen} x$

**65.** Indicare la regola per calcolare la derivata della somma di tre funzioni.

*(Una funzione del tipo $y=f(x)+g(x)+h(x)$, si può considerare una somma di due funzioni, scrivendo $y=f(x)+[g(x)+h(x)]$ ...*
*Si ottiene $y'=f'(x)+g'(x)+h'(x)$).*

**66.** Basandosi sullo svolgimento dell'esercizio 65, indicare la regola per calcolare la derivata della somma di un qualunque numero $n$ di funzioni.

*(Si può dire, per esempio, così: la derivata della somma di n funzioni derivabili è sempre data dalla somma delle n derivate delle funzioni derivabili).*

**67.** Applicando la regola indicata nell'esercizio 66, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$y=x+\operatorname{sen} x+4$, $y=x+\operatorname{sen} x+e^x$, $y=x+e^x+2$.

**68.** Indicare la regola per calcolare la derivata del prodotto di tre funzioni.

*(Una funzione del tipo $y=f(x)g(x)h(x)$, si può considerare un prodotto di due funzioni, scrivendo $y=f(x)[g(x)h(x)]$ ...*
*Si ottiene $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$).*

**69.** Basandosi sullo svolgimento dell'esercizio 68, indicare la regola per calcolare la derivata del prodotto di un qualunque numero $n$ di funzioni.

*(Si può dire, per esempio, così: la derivata del prodotto di n funzioni derivabili è data dalla somma di n termini che si ottengono dal prodotto stesso, sostituendo al primo, al secondo, ..., n-mo fattore la rispettiva derivata).*

**70.** Applicando la regola indicata nell'esercizio 68, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$y=4x^2 \operatorname{sen} x$, $y=x^3e^x \operatorname{sen} x$, $y=-xe^x$.

**Calcolare le derivate delle funzioni proposte negli esercizi dal 71 al 77 indicando, in ogni caso, la regola applicata.**

**71.** $y=2x-3$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$, $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$.

**72.** $y=x^2-x$, $y=-2x^2+3x$, $y=3x^2-5x$.

**73.** $y=x^4-x^2+x-5$, $y=-4x^5+5x^4-10x^2+20$, $y=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+3x-5$.

**74.** $y=-x^6+2x^3-6$, $y=x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+\sqrt{3}$, $y=\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+x-\sqrt{5}$.

**75.** $y=(x+1)(x-1)$, $y=(x^2+2)(x^2-2)$, $y=(x-1)(x^2+x+1)$

In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?
Qual'è il procedimento più rapido?

**76.** $y=(2x^2+x)(2x^2-x)$, $y=(x^3+1)(x^3-1)$, $y=x^3(-4x^2+2x-3)$
In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?
Qual'è il procedimento più rapido?

**77.** $y=(x^2+1)e^x$, $y=(2x^3+x)\ \text{sen}\ x$, $y=3-4\ \text{sen}\ x$.

**78.** Scrivere la derivata di un polinomio, cioè di una funzione del tipo

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

*(Si ottiene $y'=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$).*

## Sulla derivata del quoziente di due funzioni

*Gli esercizi dal 79 al 99 conducono ad impadronirsi delle seguenti regole di derivazione*

– ***una funzione del tipo*** $y=\dfrac{1}{g(x)}$ ***ha per derivata*** $y'=\dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$

– ***una funzione del tipo*** $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***ha per derivata*** $y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

**Calcolare le derivate delle funzioni indicate negli esercizi dal 79 al 99 specificando in ogni caso le regole applicate.**

**79.** $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{3x}$, $y=\dfrac{1}{x+3}$

**80.** $y=\dfrac{1}{2x-5}$, $y=\dfrac{1}{2-x}$, $y=\dfrac{1}{7-4x}$

**81.** $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$, $y=\dfrac{1}{x^4}$

**82.** $y=\dfrac{1}{x^2+2}$, $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$, $y=\dfrac{1}{x^2+3x-1}$

**83.** $y=\dfrac{1}{x^3+x^2}$, $y=\dfrac{1}{3x^4-4x^2}$, $y=\dfrac{1}{-2x^3+6x-1}$

**84.** $y=\dfrac{1}{\text{sen}\ x}$, $y=\dfrac{1}{e^x}$

**85.** $y=\dfrac{2x+1}{x}$, $y=\dfrac{-3x+4}{x}$, $y=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

**86.** $y=\dfrac{4-x}{x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{4-x}$, $y=\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$

**87.** $y=\dfrac{4-x^2}{x^2}$, $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$, $y=\dfrac{4x^2+1}{3x}$

**88.** $y=\dfrac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{x^2+1}$, $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $y=\dfrac{1+x^3}{x^2}$

**89.** $y=\dfrac{x^3}{2x^2-1}$, $y=\dfrac{2x-1}{2x^3}$, $y=\dfrac{x-1}{x^3}$

**90.** $y=\dfrac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)}$, $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2-2x+2}$, $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-x+1}$

**91.** $y=\dfrac{\text{sen}\ x}{x}$, $y=\dfrac{x}{\text{sen}\ x}$, $y=\dfrac{\text{sen}\ x+1}{\text{sen}\ x}$

**92.** $y=\dfrac{1+\text{sen}\ x}{1-\text{sen}\ x}$, $y=\dfrac{1-\text{sen}\ x}{1+\text{sen}\ x}$, $y=\dfrac{x-\text{sen}\ x}{x+\text{sen}\ x}$

**93.** $y=\frac{e^x}{x}$, $y=\frac{x}{e^x}$, $y=\frac{e^x+1}{e^x}$

**94.** $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$, $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$, $y=\frac{x+e^x}{x-e^x}$

**95.** $y=\frac{6-4x}{2}$, $y=\frac{4x^2+8x}{4}$, $y=\frac{\text{sen } x}{\sqrt{3}}$

In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**96.** $y=x+\frac{1}{x}$, $y=x-\frac{1}{x^3}$, $y=\frac{x}{3}-\frac{1}{x^2}$

In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**97.** $y=\frac{4}{x^2}-x$, $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, $y=x+\frac{4}{x^2}$

In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**98.** $y=x+\frac{1}{3x^3}$, $y=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{x^2}$, $y=x^2+\frac{16}{x^2}$

In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**99.** $y=\frac{3}{2}-x+\frac{1}{2x^2}$, $y=x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}$, $y=x-3+\frac{4}{x^2}$

In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

## Sulla derivata delle funzioni composte

*Gli esercizi dal 100 al 116 conducono ad impadronirsi della seguente regola di derivazione:* ***la derivata di $y=f[g(x)]$ è data da $y'=f'[g(x)]g'(x)$.***

**100.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$y=\text{sen}^2 x$, $y=\text{sen}^3 x$, $y=\text{sen}^4 x$.

**101.** Indicare la regola generale per calcolare la derivata di una funzione del tipo $y=[\text{sen } x]^n$, con $n$ intero positivo.

*(Si ottiene $y'=n[\text{sen } x]^{n-1} \cos x$).*

**102.** Indicare la regola generale per calcolare la derivata di una funzione del tipo $y=[f(x)]^n$, con $n$ intero positivo.

*(Si ottiene $y'=n[f(x)]^{n-1}f'(x)$).*

**Calcolare le derivate delle funzioni indicate negli esercizi dal 103 al 113, indicando, in ogni caso, le regole applicate.**

**103.** $y=(x-1)^2$, $y=(x+2)^2$, $y=(3x-5)^2$.

*(Tenere presente che le derivate indicate si possono calcolare in due modi:*

*I) applicando la regola di derivazione di funzione composta;*
*II) svolgendo il quadrato ed applicando quindi le necessarie regole di derivazione.*

*Qual'è il procedimento più rapido?)*

**104.** $y=(x^2-2)^2$, $y=(3-x^3)^2$, $y=(2x^2+x)^2$.
In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**105.** $y=(2x+3)^3$, $y=(x-2)^4$, $y=(4x^2-8)^3$.
In quanti modi si può svolgere il calcolo delle derivate indicate? Qual'è il procedimento più rapido?

**106.** $y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

**107** $y=\cos(x+\pi)$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

**108.** $y=\text{sen}(2x)$, $y=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, $y=\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

**109.** $y=\cos(2x)$, $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $y=\cos(2x-\pi)$

**110.** $y=e^{-x}$, $y=e^{2x}$, $y=e^{(3x+4)}$

**111.** $y=e^{x^2}$, $y=e^{-x^2}$, $y=e^{2x^2}$

**112.** $y=e^{(4-3x^2)}$, $y=e^{(x^2+x)}$, $y=e^{(x^2-3x+2)}$

**113.** $y=e^{\frac{1}{x}}$, $y=e^{\frac{-1}{x}}$, $y=e^{\frac{1}{x^2}}$

**114.** Indicare la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni
$y=\text{sen}(\omega x)$, $y=\text{sen}(\omega x+\varphi)$, $y=\text{sen}[f(x)]$,
dove $\omega$ e $\varphi$ indicano due costanti e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile.
*(Si ottiene* $y'=\omega\cos(\omega x)$, $y'=\omega\cos(\omega x+\varphi)$, $y'=f'(x)\cos[f(x)]$*).*

**115.** Indicare la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni
$y=\cos(\omega x)$, $y=\cos(\omega x+\varphi)$, $y=\cos[f(x)]$,
dove $\omega$ e $\varphi$ indicano due costanti e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile.
*(Si ottiene* $y'=-\omega\,\text{sen}(\omega x)$, $y'=-\omega\,\text{sen}(\omega x+\varphi)$, $y'=-f'(x)\,\text{sen}[f(x)]$*).*

**116.** Indicare la regola generale per calcolare la derivata delle seguenti funzioni
$y=e^{ax}$, $y=e^{(ax+b)}$, $y=e^{f(x)}$
dove $a$ e $b$ indicano due costanti e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile.
*(Si ottiene* $y'=a\cdot e^{ax}$, $y'=a\cdot e^{(ax+b)}$, $y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$*).*

## Sulla derivata delle funzioni inverse

*Gli esercizi dal 117 al 123 conducono ad impadronirsi della seguente regola di derivazione:*
***se*** $y=g(x)$ ***è l'inversa di una funzione derivabile*** $y=f(x)$***, per tutti i valori di x per cui risulta*** $f'(y)\neq 0$***, si ha:***

$$y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

**117.** Calcolare la derivata della funzione $y=\sqrt{x}$, inversa della funzione $y=x^2$.
*(Si ottiene* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$*).*

**118.** Calcolare la derivata della funzione $y=\sqrt[3]{x}$, inversa della funzione $y=x^3$.
*(Si ottiene* $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$*).*

**119.** Calcolare la derivata della funzione $y=\sqrt[n]{x}$, inversa della funzione $y=x^n$.

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$*).*

**120.** Calcolare la derivata della funzione $y=\arccos x$, inversa della funzione $y=\cos x$.

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$*).*

**121.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{arcsen} x+\arccos x, \qquad y=\operatorname{arcsen} x-\arccos x.$$

Come si possono spiegare i risultati ottenuti?

*(Si ottiene* $y'=0, \quad y'=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

*Tenere presente che risulta* $\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$*).*

**122.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad y=\frac{1}{\arccos x}$$

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\operatorname{arcsen} x)^2}, \qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\arccos x)^2}$*).*

**123.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{\ln x}, \qquad y=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{-1}{x\cdot(\ln x)^2}, \qquad y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$*).*

## Esercizi vari

*Gli esercizi dal 124 al 185 conducono ad applicare simultaneamente i risultati dell'algebra delle derivate ottenuti nei paragrafi 6 e 7 del testo e nei relativi esercizi. Per questo è opportuno tenere presente lo schema riassuntivo esposto a pag. 667.*

**Calcolare le derivate delle funzioni esposte negli esercizi dal 124 al 161, indicando, in ogni caso, le regole applicate.**

**124.** $y=(x-1)^2-(x+1)^2, \qquad y=(x^2-1)^2-(x^2+1)^2, \qquad y=(x^3-1)^2-(x^3+1)^2$

Qual'è il procedimento più rapido per calcolare le derivate?

*(Valendosi subito della regola di derivazione di funzione composta si ottiene, per la prima funzione*

$$y'=2(x-1)-2(x+1)=2(x-1-x-1)=-4.$$

*Procedendo in modo analogo a partire dalle altre due funzioni, si ottiene:* $y'=-4x$, $y'=-12x^2$*).*

**125.** $y=(x-4)^3-(x+4)^3, \qquad y=(x^2-2)^3-(x^2+2)^3, \qquad y=(x^3-5)^3-(x^3+5)^3$

*(Seguendo le indicazioni dell'esercizio precedente, si ottiene:*

$$y'=-12, \qquad y'=-24x, \qquad y'=-180x^5).$$

**126.** $y=(2x^2-4x-5)^2-(x^2-2x+3)^2, \qquad y=(5x^2-10x-1)^2+(3x^2-6x+5)^2$

*(Si ottiene:* $y'=4(x-1)(3x^2-6x-13)$, $y'=8(x-1)(17x^2-34x+5)$*).*

**127.** $y=(x^2+4x+1)^3+(x^3+3x^2-8)^2, \qquad y=(x^2+4x+1)^3-(x^3+3x^2+8)^2$

*(Si ottiene* $y'=6(x+2)(2x^4+11x^3+18x^2+1)$, $y'=6(x+2)(5x^3+18x^2+1)$*).*

**128.** $y=(4x-1)^3(3x+1)^4, \quad y=(x+3)^4(x^2-2x+3)^2$

*(Si ottiene* $y'=84x(4x-1)^2(3x+1)^3$, $y'=8x^2(x+3)^3(x^2-2x+3)$*).*

**129.** $y=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}, \quad y=\dfrac{x^2\cdot(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2}$

*(Per svolgere i calcoli in modo rapido ed efficiente non è opportuno sviluppare i quadrati, conviene invece procedere così, per esempio, nel 1° caso:*

$$y'=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4};$$

*in definitiva si ottiene* $y'=\dfrac{4\cdot(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$. *Nel secondo caso si ha* $y'=\dfrac{2x\cdot(2x^2+3)}{(2x^2-1)^3}$*).*

**130.** $y=\dfrac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}, \quad y=\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^2$

*(Tenendo presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente, si ha*

$$y'=\frac{4(3x-1)}{(x+1)^3}, \qquad y=\frac{-8\cdot(x+1)}{(2x+1)^3}).$$

**131.** $y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-3\cos x+4, \quad y=\cos x-\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\sqrt{2}$

**132.** $y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,(2x)-3\cos(2x)+4, \quad y=\cos(2x)-\sqrt{3}\,\text{sen}\,(2x)-\sqrt{2}$

**133.** $y=\text{sen}^2 x+3\,\text{sen}\,x-2, \quad y=4\cos^2 x-\cos x+1$

**134.** $y=\text{sen}^2(2x), \quad y=4\cos^2(2x)$

**135.** $y=\text{sen}^2\dfrac{x}{2}, \quad y=\cos^2\dfrac{x}{2}$

**136.** $y=\text{sen}^2 x+\cos^2 x, \quad y=\text{sen}^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}$

Come si può spiegare il particolare risultato che si ottiene?

*(Si ottiene nei due casi* $y'=0$*. Tenere presente che risulta* $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$*, per qualunque* $\alpha$*).*

**137.** $y=\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}, \quad y=\dfrac{\cos x}{1-\text{sen}\,x}$

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$, $y'=\dfrac{1}{1-\text{sen}\,x}$*).*

**138.** $y=\dfrac{\text{sen}\,x+\cos x}{\text{sen}\,x-\cos x}, \quad y=\dfrac{\text{sen}\,x-\cos x}{\text{sen}\,x+\cos x}$

*(Si ottiene* $y'=\dfrac{-2}{(\text{sen}\,x-\cos x)^2}$, $y'=\dfrac{2}{(\text{sen}\,x+\cos x)^2}$*).*

**139.** $y=\text{tg}\,x, \quad y=\text{ctg}\,x, \quad y=\text{arctg}\,x$

*(Tenendo presente che risulta* $\text{tg}\,x=\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, *e* $\text{ctg}\,x=\dfrac{1}{\text{tg}\,x}$

*si ottiene* $y'=1+\text{tg}^2 x$, $y'=-1-\text{ctg}^2 x$, $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$*).*

**140.** $y=\text{tg}\,2x, \quad y=\text{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), \quad y=\text{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

**141.** $y=\text{tg}\,\dfrac{x}{2}, \quad y=\text{tg}^2 x, \quad y=\text{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

**142.** $y=\dfrac{1+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x}, \quad y=\dfrac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x}$

**143.** $y=\dfrac{x+\text{tg}\,x}{x-\text{tg}\,x}, \quad y=\dfrac{x-\text{tg}\,x}{x+\text{tg}\,x}$

**144.** $y=\text{arcsen}\,(2x)$, $y=\text{arcsen}\,(2x+3)$, $y=\text{arcsen}\,(x^2)$

**145.** $y=\text{arctg}\,(3x)$, $y=\text{arctg}\,(3x+2)$, $y=\text{arctg}\,(\sqrt{x})$

**146.** $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$

**147.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

**148.** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

**149.** $y=\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{4-3x}$

**150.** $y=\sqrt{2x^2+3}$, $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{2x^2+3x-5}$

**151.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{-4x}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-5x}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3x^2}}$

**152.** $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $y=\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$

**153.** $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}}$, $y=\sqrt{\dfrac{4x^2+3}{2x-1}}$

**154.** $y=1+x+4\cdot\sqrt{1-x^2}$, $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$

**155.** $y=\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$, $y=\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,(2x)}{1-\text{sen}\,(2x)}}$

**156.** $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\,(2x)}{1+\cos\,(2x)}}$

**157.** $y=x\ln x$, $y=\dfrac{x}{\ln x}$, $y=\dfrac{\ln x}{x}$

**158.** $y=x\ln x-x$, $y=(x+\ln x)\cdot(x-1)$, $y=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

**159.** $y=\ln\,(-x)$, $y=\ln\,(4x)$, $y=\ln\,(3x+4)$

**160.** $y=\ln\,(x^2)$, $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $y=\ln\,(\sqrt{x})$

**161.** $y=\ln\,(\cos x)$, $y=\ln\,(\text{sen}\,x)$, $y=\ln\,(\text{tg}\,x)$
*(Si ottiene $y'=-tg\,x$, $y'=ctg\,x$, $y'=tg\,x+ctg\,x$).*

**162.** Scrivere la formula generale per ottenere le derivate delle seguenti funzioni:

$$y=\ln f(x),\quad y=\text{arctg}\,f(x),\quad y=\text{arcsen}\;f(x).$$

*(Si ottiene: $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, $y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$).*

**163.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$y=x,\quad y=-x,\quad y=|x|.$$

Visualizzare i risultati ottenuti tracciando il grafico di ogni funzione e della relativa derivata.

**164.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y=\ln x,\quad y=\ln\,(-x),\quad y=\ln|x|.$$

Visualizzare i risultati ottenuti tracciando il grafico di ogni funzione e della relativa derivata.
*(Attenzione al campo di esistenza di ciascuna funzione e al dominio della corrispondente derivata).*

**165.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y=\text{sen } x, \qquad y=-\text{sen } x, \qquad y=|\text{sen } x|.$$

Visualizzare i risultati ottenuti tracciando il grafico di ogni funzione e della relativa derivata.

**166.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y=\ln(\text{sen } x), \qquad y=\ln(-\text{sen } x), \qquad y=\ln|\text{sen } x|.$$

Confrontare le tre derivate ottenute, tracciandone il relativo grafico.

**167.** Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y=\ln[f(x)], \qquad y=\ln[-f(x)], \qquad y=\ln|f(x)|.$$

Confrontare le tre derivate ottenute.

**168.** Confrontare due procedimenti per derivare le seguenti funzioni

$$y=\text{sen }(2x), \qquad y=\cos(2x), \qquad y=\text{tg }(2x)$$

I) valersi della regola di derivazione di funzione composta;
II) valersi delle formule di duplicazione e, successivamente, delle necessarie regole di derivazione.

**169.** Confrontare due procedimenti per derivare le seguenti funzioni

$$y=\text{sen }(x+k), \qquad y=\cos(x+k), \qquad y=\text{tg }(x+k)$$

I) valersi della regola di derivazione di funzione composta;
II) valersi delle formule di addizione e, successivamente, delle necessarie regole di derivazione.

**170.** Confrontare due procedimenti per derivare le seguenti funzioni

$$y=\text{sen }\frac{x}{2}, \qquad y=\cos\frac{x}{2}, \qquad y=\text{tg }\frac{x}{2}$$

I) valersi della regola di derivazione di funzione composta;
II) valersi delle formule di bisezione e, successivamente, delle necessarie regole di derivazione.

**171.** Dimostrare che la derivata di una funzione dispari è una funzione pari.

*(Dire che la funzione è dispari, vuol dire che risulta*

$$f(-x)=-f(x).$$

*Calcolando la derivata dei due membri ...)*

**172.** Verificare i risultati dell'esercizio precedente, esaminando, per esempio, le derivate delle funzioni

$$y=x^3 \text{ e } y=\text{sen } x.$$

**173.** Dimostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari.

*(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 171).*

**174.** Verificare i risultati dell'esercizio precedente, esaminando, per esempio, le derivate delle funzioni

$$y=x^4 \text{ e } y=\cos x.$$

**175.** Dimostrare che la derivata di una funzione periodica con periodo $T$ è ancora una funzione periodica con lo stesso periodo.

*(Dire che la funzione è periodica con periodo T vuol dire che risulta*

$$f(x+T)=f(x).$$

*Calcolando la derivata dei due membri ...)*

**176.** Verificare i risultati dell'esercizio precedente, esaminando, per esempio, le derivate delle funzioni

$$y=\cos x,\ y=\text{sen } x,\ y=\text{sen }(2x).$$

**177.** Scegliere fra le seguenti frasi quella che è ricavata correttamente dalle regole dell'algebra delle derivate:

I) se la funzione $y=f(x)+g(x)$ è derivabile in un punto d'ascissa $x=a$, allora sono derivabili nello stesso punto anche le funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$;
II) se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono derivabili in un punto d'ascissa $x=a$, allora è derivabile nello stesso punto anche la funzione $y=f(x)+g(x)$.

**178.** Verificare che le due funzioni $y=|x|$ e $y=2-|x|$ non sono derivabili nel punto d'ascissa $x=0$, ma la loro somma è derivabile in quel punto.
Questi risultati contraddicono le regole dell'algebra delle derivate?

**179.** Scegliere fra le seguenti frasi quella che è derivata correttamente dalle regole dell'algebra delle derivate:

I) se la funzione $y=[f(x)]^n$ è derivabile in un punto d'ascissa $x=a$, allora è derivabile nello stesso punto anche la funzione $y=f(x)$;
II) se la funzione $y=f(x)$ è derivabile in un punto d'ascissa $x=a$, allora è derivabile nello stesso punto anche la funzione $y=[f(x)]^n$.

**180.** Verificare che la funzione $y=\sqrt[3]{x}$ non è derivabile nel punto d'ascissa $x=0$, ma è derivabile nello stesso punto la funzione $y=[\sqrt[3]{x}]^3$.
Questi risultati contraddicono le regole dell'algebra delle derivate?

**181.** Scegliere fra le seguenti frasi quelle che sono ricavate correttamente dalle regole dell'algebra delle derivate:

I) se per due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, risulta $f'(a)=g'(a)=0$, anche la derivata della funzione $y=f(x)g(x)$ vale zero per $x=a$;
II) se la derivata della funzione $y=f(x)g(x)$ vale zero per $x=a$, allora risulta certamente $f'(a)=g'(a)=0$;
III) se la derivata della funzione $y=f(x)g(x)$ vale zero per $x=a$, allora risulta certamente $f'(a)g(a)=-f(a)g'(a)$.

**182.** Scegliere fra le seguenti frasi quelle che sono ricavate correttamente dalle regole dell'algebra delle derivate:

I) se per una funzione $y=f(x)$, risulta $f'(a)=0$, anche la derivata della funzione $y=[f(x)]^n$ vale zero per $x=a$;
II) se la derivata della funzione $y=[f(x)]^n$ vale zero per $x=a$, allora risulta certamente $f'(a)=0$;
III) se la derivata della funzione $y=[f(x)]^n$ vale zero per $x=a$, allora deve risultare certamente $f'(a)=0$ oppure $[f(a)]^{n-1}=0$.

**183.** Scegliere fra le seguenti frasi quelle che sono ricavate correttamente dalle regole dell'algebra delle derivate:

I) se per due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, risulta $f'(a)=g'(a)=0$, anche la derivata della funzione $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vale zero per $x=a$;
II) se la derivata della funzione $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vale zero per $x=a$, allora risulta certamente $f'(a)=g'(a)=0$;
III) se la derivata della funzione $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vale zero per $x=a$, allora risulta certamente $f'(a)g(a)=f(a)g'(a)$.

**184.** Fissato un numero reale $k$, indicare una funzione $y=f(x)$ per cui risulti

$$f(0)=0 \quad \text{e} \quad f'(0)=k.$$

**185.** Fissato un numero reale $k$, indicare una funzione $y=f(x)$ per cui risulti

$$f'(0)=0 \quad \text{e} \quad f(0)=k.$$

# 7. Teoremi sulle funzioni derivabili

## Sulla continuità delle funzioni derivabili

**186.** Esaminare la funzione $y=\sqrt[3]{x-1}$ e verificare che:

- la funzione è continua, ma non derivabile nel punto $A(1,0)$,
- la tangente al grafico della funzione in $A$ è parallela all'asse delle $y$.

Considerare la funzione inversa della precedente, e verificare che:

- la funzione è derivabile e quindi continua nel punto $A'(0,1)$,
- la tangente al grafico della funzione in $A'$ è parallela all'asse delle $x$.

Visualizzare i risultati, tracciando i grafici delle due funzioni.

**187.** Esaminare la funzione $y=x^3$ e verificare che:

- la funzione è derivabile e quindi continua nel punto $O$ d'ascissa 0,
- risulta $f'(0)=0$.

Considerare la funzione $y=\sqrt[3]{x}$, inversa della precedente, e verificare che è continua ma non derivabile nel punto $O$.
Visualizzare i risultati, tracciando i grafici delle due funzioni.

**188.** Esaminare il grafico rappresentato in fig. 6 e indicare:

- i punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile,
- le ascisse dei punti in cui la funzione non è continua.

Ci sono punti in cui la curva è derivabile senza essere continua?

**189.** Esaminare il grafico rappresentato in fig. 7 e indicare:

- i punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile,
- i punti in cui la derivata della funzione vale 0.

Tracciare il grafico della funzione inversa di quella data e indicare:

- i punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile,
- i punti in cui la derivata della funzione vale 0.

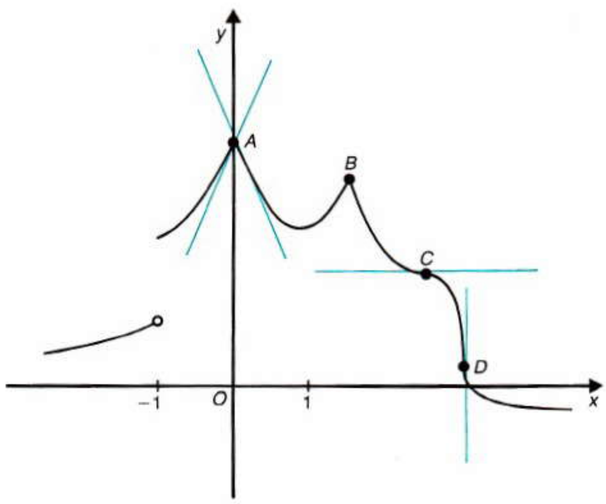

Fig. 6

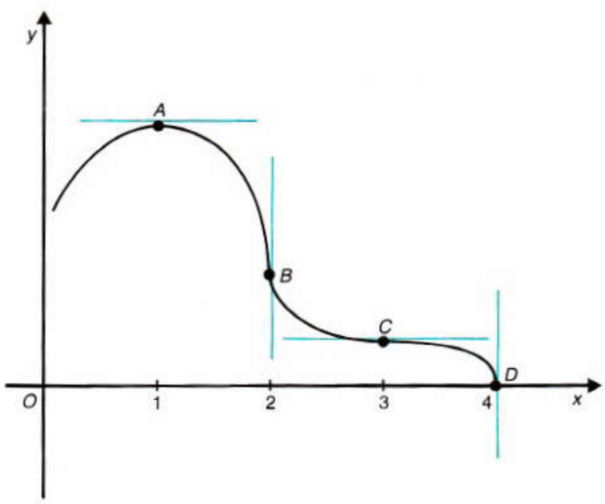

Fig. 7

**190.** Tracciare il grafico di una funzione $y=f(x)$ che presenti le seguenti caratteristiche:

I) è continua e sempre crescente nell'intervallo $[0, 7]$;
II) ha la tangente parallela all'asse delle $y$ nel punto $A(2, 1)$;
III) ha la tangente parallela all'asse delle $x$ nel punto $B(4, 6)$.

Indicare il punto in cui la funzione non è derivabile ed il punto in cui la derivata della funzione vale zero.
Tracciare il grafico della funzione inversa di quella disegnata prima; indicare il punto in cui la nuova funzione ottenuta non è derivabile ed il punto in cui la derivata vale zero.

**191.** Tracciare il grafico delle seguenti funzioni e studiarne la continuità e la derivabilità nel loro campo di esistenza:

$$y=1-x^2, \quad y=x^2-1, \quad y=|1-x^2|.$$

**192.** Ripetere l'esercizio 191 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen} x, \quad y=\operatorname{sen} |x|, \quad y=|\operatorname{sen} x|.$$

**193.** Ripetere l'esercizio 191 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\cos x, \quad y=\cos |x|, \quad y=|\cos x|.$$

**194.** Ripetere l'esercizio 191 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x, \quad y=\ln |x|, \quad y=|\ln x|.$$

**195.** Ripetere l'esercizio 191 a partire dalle seguenti funzioni:

per $x\leq 0$ $f(x)=-2x$, per $x\leq 0$ $f(x)=-x$,
per $x>0$ $f(x)=x^2-2x$ per $x>0$ $f(x)=x^2-2x$.

**196.** Ripetere l'esercizio 191 a partire dalle seguenti funzioni:

per $x\leq 0$ $f(x)=x$, per $x\leq 0$ $f(x)=2x$,
per $x>0$ $f(x)=\operatorname{sen} x$ per $x>0$ $f(x)=\operatorname{sen} x$.

**197.** Tenere presenti le considerazioni sull'implicazione svolte alle pagg. 338-340 ed esaminare il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili, indicando ipotesi e tesi nel modo seguente:

*Ip*: «la funzione $y=f(x)$ è derivabile in un punto $A$ d'ascissa $a$»,
*Th*: «la funzione è continua nello stesso punto $A$».

Scegliere fra i seguenti simboli quelli che esprimono correttamente il teorema

(I) $Ip \Rightarrow Th$, (II) $Ip \Leftrightarrow Th$, (III) $Th \Rightarrow Ip$

*(Solo il primo simbolo è corretto, ...)*

**198.** Valendosi degli stessi simboli introdotti nell'esercizio 197, scegliere fra le frasi seguenti quelle che esprimono correttamente il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili:

I) *Ip* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Th*,
II) *Ip* è condizione necessaria e sufficiente per *Th*,
III) *Ip* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Th*,
IV) *Th* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Ip*,
V) *Th* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Ip*.

Portare dei controesempi per spiegare perché alcune frasi sono errate.

**199.** In ciascuno dei seguenti casi proposti, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$ che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nel punto $A(1, 2)$, ma non è derivabile nel punto $A$.
II) $y=f(x)$ è discontinua nel punto $A$ e non è derivabile in $A$.
III) $y=f(x)$ è discontinua nel punto $A$ ed è derivabile in $A$.

## Sul teorema di Lagrange (o del valore medio)

*Gli esercizi dal 200 al 210 conducono ad impadronirsi del teorema di Lagrange, che è richiamato qui sotto:*

***Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste, all'interno dell'intervallo, $[a, b]$, almeno un valore $c$, tale che risulti***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

**Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi 200-205 negli intervalli $[a, b]$ indicati a fianco e risolvere i seguenti quesiti:**

- **stabilire in quali casi la funzione verifica le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema e in quali casi tali condizioni non sono soddisfatte;**
- **nei casi in cui le condizioni sono verificate, indicare i valori $c$, interni all'intervallo $[a, b]$, per cui risulta**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

- **interpretare graficamente i risultati ottenuti.**

**200.** $y=-x^2+4x$ nell'intervallo $[0, 2]$

*(La funzione è derivabile in tutti i punti dell'intervallo, perciò sono verificate le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema.*
*Per determinare il valore c, si calcola*

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4}{2}=2 \qquad e \qquad f'(x)=-2x+4$$

*quindi si risolve l'equazione $-2x+4=2$, ottenendo la soluzione $x=1$.*
*La fig. 8 visualizza i risultati ottenuti).*

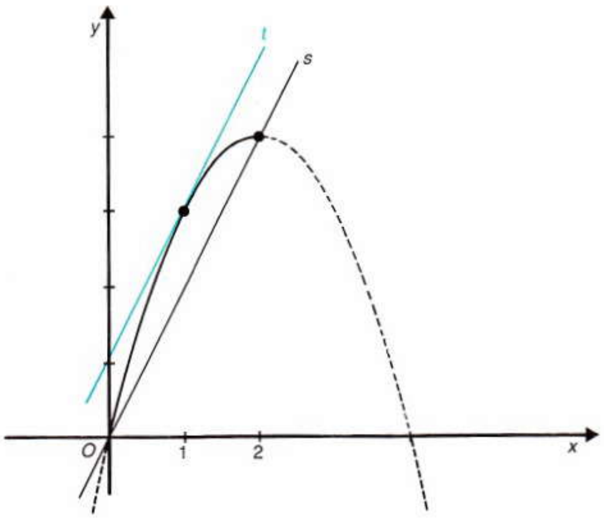


Fig. 8

**201.** $y=x^3+1$ nell'intervallo $[-1, 1]$

**202.** $y=\frac{1}{x}$ negli intervalli $[1, 4]$ e $[-1, 1]$

*(Attenzione al secondo intervallo assegnato: la funzione è derivabile e quindi continua in tutti i punti dell'intervallo?)*

**203.** $y=\frac{1}{x+1}$ negli intervalli $[-2, 0]$ e $[0, 1]$

*(Attenzione al primo intervallo assegnato).*

**204.** $y=\frac{x+2}{x-2}$ negli intervalli $[-2, 0]$ e $[0, 3]$

**205.** $y=\sqrt[3]{x}$ negli intervalli $[1, 8]$ e $[-1, 8]$

Prestare particolare attenzione al secondo intervallo assegnato: la funzione non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo eppure si riesce a trovare il valore $c=1$, per cui risulta

$$\frac{f(8)-f(-1)}{8-(-1)}=f'(1)$$

Questo risultato contraddice il teorema di Lagrange?

**206.** Tenendo presenti le considerazioni sull'implicazione svolte alle pagg. 338-340, indicare ipotesi e tesi del teorema di Lagrange nel modo seguente:

*Ip*: «la funzione $y=f(x)$ è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$»,
*Th*: «esiste all'interno dell'intervallo almeno un punto $c$, per cui si ha

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Scegliere fra i seguenti simboli quelli che esprimono correttamente il teorema

(I) $Ip \Rightarrow Th$, (II) $Ip \Leftrightarrow Th$, (III) $Th \Rightarrow Ip$

*(Solo il primo simbolo è corretto, ...)*

**207.** Valendosi dei simboli introdotti nell'esercizio 206, scegliere fra le frasi seguenti quelle che esprimono il teorema di Lagrange:

I) *Ip* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Th*,
II) *Ip* è condizione necessaria e sufficiente per *Th*,
III) *Ip* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Th*,
IV) *Th* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Ip*,
V) *Th* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Ip*.

Portare dei controesempi per spiegare perché alcune frasi sono errate.

**208.** In ciascuno dei seguenti casi, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo $[-1, 4]$, non è derivabile nel punto d'ascissa 0 e nel punto d'ascissa $x=1$ ha la tangente $t$ parallela alla secante che congiunge i punti $A[-1, f(-1)]$, $B[4, f(4)]$;
II) $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo chiuso $[-1, 4]$, ma non esiste un punto in cui la tangente è parallela alla secante $AB$ indicata prima;
III) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo $[-1, 4]$, non è derivabile nel punto d'ascissa 0 e non esiste un punto in cui la tangente è parallela alla secante $AB$ indicata prima.

**209.** Basandosi sul teorema di Lagrange, dimostrare il seguente teorema:

se una funzione $y=f(x)$ ha la derivata nulla in tutti i punti di un dato intervallo, allora la funzione si mantiene costante in quell'intervallo.

*(Scelti due qualunque punti a e b dell'intervallo, applicare il teorema di Lagrange; tenendo presente che risulta $f'(c)=0$ ...)*

**210.** Basandosi sul teorema di Lagrange, dimostrare il seguente teorema:

se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno la stessa derivata in tutti i punti di un intervallo, risulta $f(x)-g(x)=k$, in ogni punto dell'intervallo.

*(Esaminare, nell'intervallo dato, la funzione $h(x)=f(x)-g(x)$ e tenere presente il teorema dimostrato nell'esercizio precedente ...)*

## Sul teorema di Rolle

*Gli esercizi dal 211 al 225 conducono ad impadronirsi del teorema di Rolle, che è richiamato qui sotto:*

***se per una funzione $y=f(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$, si ha***

$$f(b)=f(a),$$

***allora esiste, all'interno dell'intervallo $[a, b]$, almeno un valore $c$, tale che risulti $f'(c)=0$.***

**Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal 211 al 220 negli intervalli $[a, b]$ indicati a fianco e risolvere i seguenti quesiti:**

- **stabilire in quali casi la funzione verifica le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema e in quali casi tali condizioni non sono soddisfatte;**
- **nei casi in cui le condizioni sono verificate, indicare i valori $c$, interni all'intervallo $[a, b]$, per cui risulta $f'(c)=0$;**
- **interpretare graficamente i risultati ottenuti.**

**211.** $y=-x^2+4x$ nell'intervallo $[0, 4]$

*(Le condizioni indicate nell'ipotesi del teorema sono verificate, dato che la funzione è derivabile in tutti i punti dell'intervallo e inoltre risulta $f(0)=f(4)=0$.*
*Per determinare il valore c, si calcola*

$$f'(x)=-2x+4$$

*e si risolve l'equazione*

$$-2x+4=0,$$

*ottenendo la soluzione $x=2$. La fig. 9 visualizza i risultati ottenuti).*

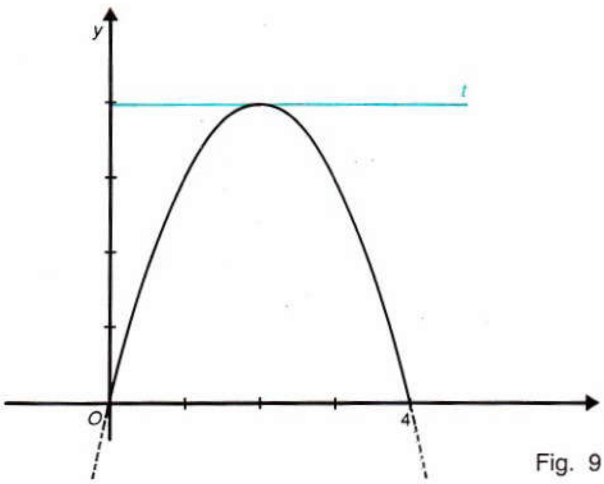


Fig. 9

**212.** $y=-x^2+2x+3$ nell'intervallo $[0, 2]$

**213.** $y=x^3-x+8$ nell'intervallo $[-1, 1]$

**214.** $y=x^3-6x^2+12x$ nell'intervallo $[1, 3]$

**215.** $y=\dfrac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$

Come si spiega il fatto che risulta

$$f(-1)=f(1)=1,$$

ma l'equazione $f'(x)=0$ non ha soluzioni?

**216.** $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ negli intervalli $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Spiegare le differenti situazioni che si incontrano esaminando i due intervalli.

**217.** $y=\sqrt{|x|}$ nell'intervallo $[-1, 1]$

Come si spiega il fatto che risulta

$$f(-1)=f(1)=1,$$

ma l'equazione $f'(x)=0$ non ha soluzioni?

**218.** $y=4-x^2$ nell'intervallo $[-1, 2]$

In questo caso la funzione è derivabile in tutto l'intervallo, ma risulta

$$f(-1)=3 \quad \text{e} \quad f(2)=0, \quad \text{cioè} \quad f(-1)\neq f(2).$$

Tuttavia, si riesce a trovare il valore $c=0$, per cui risulta $f'(0)=0$.
Questo risultato contraddice il teorema di Rolle?

**219.** $y=|4-x^2|$ negli intervalli $[1, \sqrt{7}]$ e $[-1, \sqrt{7}]$

Prestare particolare attenzione al secondo intervallo: risulta

$$f(-1)=f(\sqrt{7})=3,$$

ma la funzione non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo.
Tuttavia, si riesce a trovare il valore $c=0$, per cui risulta $f'(0)=0$.
Questo risultato contraddice il teorema di Rolle?

**220.** $y=|4-x^2|$ nell'intervallo $[-1, 3]$

In questo caso la funzione non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo e inoltre risulta

$$f(-1)=3 \quad \text{e} \quad f(3)=5, \quad \text{cioè} \quad f(-1)\neq f(3).$$

Tuttavia, si riesce a trovare il valore $c=0$, per cui risulta $f'(0)=0$.
Questo risultato contraddice il teorema di Rolle?

**221.** Tenere presenti le considerazioni sull'implicazione svolte alle pagg. 338-340 ed indicare ipotesi e tesi del teorema di Rolle nel modo seguente:

*Ip*: «la funzione $y=f(x)$ è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$ e risulta $f(a)=f(b)$»,
*Th*: «esiste all'interno dell'intervallo almeno un punto $c$, per cui si ha $f'(c)=0$.

Scegliere fra i seguenti simboli quelli che esprimono correttamente il teorema

$$\text{(I) } Ip \Rightarrow Th, \quad \text{(II) } Ip \Leftrightarrow Th, \quad \text{(III) } Th \Rightarrow Ip$$

*(Solo il primo simbolo è corretto, ...)*

**222.** Valendosi dei simboli introdotti nell'esercizio 221, scegliere fra le frasi seguenti quelle che esprimono correttamente il teorema di lagrange:

I) *Ip* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Th*,
II) *Ip* è condizione necessaria e sufficiente per *Th*,
III) *Ip* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Th*,
IV) *Th* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Ip*,
V) *Th* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Ip*.

Portare dei controesempi per spiegare perché alcune frasi sono errate.

**223.** In ciascuno dei seguenti casi, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[-2; 3]$, risulta $f(-2)=f(3)$, ma non esiste un punto in cui la tangente è parallela all'asse delle $x$;
II) l'equazione $f'(x)=0$ non ha soluzioni all'interno dell'intervallo $[-2, 3]$, ma la funzione è derivabile in quell'intervallo e risulta $f(-2)=f(3)$;
III) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo $[-2; 3]$, non è derivabile nel punto d'ascissa 0, risulta $f(-2)\neq f(3)$ e $f'(1)=0$.

**224.** Ripetere l'esercizio 223 a partire dai seguenti casi:

I) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo $[-2; 3]$, non è derivabile nel punto d'ascissa 0, risulta $f(-2)=f(3)$ e non esiste un punto in cui la tangente è parallela all'asse delle $x$.
II) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo $[-2; 3]$, non è derivabile nel punto d'ascissa 0, risulta $f(-2)=f(3)$ e $f'(1)=0$.
III) $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[-2; 3]$, risulta $f(-2)\neq f(3)$ e non esiste un punto in cui la tangente è parallela all'asse delle $x$.
IV) $y=f(x)$ è derivabile nell'intervallo $[-2; 3]$, risulta $f(-2)\neq f(3)$ e risulta $f'(1)=0$.

**225.** Basandosi sul teorema di Rolle, dimostrare il seguente teorema;

se $y=f(x)$ è una funzione derivabile nel suo insieme di definizione e l'equazione $f(x)=0$ ammette due soluzioni distinte, allora l'equazione $f'(x)=0$ ammette almeno una soluzione.

*(Indicate con $a$ e $b$ le soluzioni, applicare il teorema di Rolle, esaminando la funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$).*

**226.** Basandosi sul teorema di Rolle, dimostrare il seguente teorema:

se $y=f(x)$ è una funzione derivabile nel suo insieme di definizione e l'equazione $f(x)=0$ ammette $n$ soluzioni distinte, allora l'equazione $f'(x)=0$ ammette almeno $n-1$ soluzioni distinte.

*(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio precedente).*

## Sul teorema di de l'Hôpital

*Gli esercizi dal 227 al 245 conducono ad impadronirsi del teorema di de l'Hôpital che richiamiamo qui sotto:*

***se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite in uno stesso insieme, soddisfano le seguenti condizioni:***

***I) all'interno dell'insieme sono derivabili e risulta $g'(x)\neq 0$,***

***II) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ (dove $a$ è un numero o il simbolo $\infty$),***

***III) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ (dove $\ell$ è un numero o il simbolo $\infty$),***

***allora, risulta anche***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

*Gli esercizi dal 227 al 238 propongono di valersi del teorema di de l'Hôpital per calcolare il risultato di limiti che si presentano nella forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Molti di questi limiti si possono calcolare anche basandosi sui procedimenti esposti nel cap. 3 e nei relativi esercizi (147-162 e 173-184). In tali casi è interessante confrontare la rapidità ed efficienza dei vari procedimenti che si possono seguire.*

**Basandosi sul teorema di de l'Hôpital, calcolare i limiti proposti negli esercizi dal 227 al 239.**

**227.** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$ $[0, 2, -1]$

**228.** $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$, $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$ $\left[\infty, \frac{-2}{3}, 5\right]$

**229.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$ [tutti 0]

**230.** $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$, $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$ [tutti $\infty$]

**231.** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$, $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$ $[\infty, 2, 0]$

**232.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$ $\left[1, \frac{1}{2}, \infty\right]$

**233.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3}{4x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x}$ $\left[\infty, \frac{3}{4}, -2\right]$

**234.** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$, $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}$ $[1, 2, e]$

**235.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$ $[0, \infty, \infty]$

**236.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$, $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+\operatorname{sen} x}$ [tutti 0]

**237.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}$

*(Applicando il teorema di de l'Hôpital al primo limite, si ottiene $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$*

*Si osserva ora che il limite ottenuto è ancora una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che soddisfa le condizioni del teorema di de l'Hôpital; perciò si può applicare di nuovo il teorema, ottenendo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

*Con un procedimento analogo si può calcolare il secondo limite, ottenendo il risultato $\infty$).*

**238.** $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos x - \text{sen } x}{x^3}$

*(Tenendo presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente, si ottengono i risultati* $\infty$ *e* $\frac{-1}{3}$*).*

**239.** $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3}$

*(Tenendo presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 237 si ottengono i risultati 0 e* $\frac{1}{6}$*).*

**240.** Esaminare i seguenti limiti e spiegare per quali motivi **non** possono essere calcolati basandosi sulla regola di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}}{\text{sen } x}$$

**241.** Ripetere l'esercizio 240 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}}{\ln (x+1)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln x}$$

**242.** Basandosi sul teorema di de l'Hôpital, verificare che, per qualunque numero reale $k$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } kx}{x} = k, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } kx}{x} = k$$

**243.** Basandosi sul teorema di de l'Hôpital, verificare che, per qualunque coppia di numeri reali $a$ e $b$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \frac{a}{b}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } ax}{\text{tg } bx} = \frac{a}{b}$$

**244.** Basandosi sul teorema di de l'Hôpital, verificare che per qualunque numero reale $\beta$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } (x+\beta) - \text{sen } \beta}{x} = \cos \beta, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos (x+\beta) - \cos \beta}{x} = -\text{sen } \beta$$

**245.** Basandosi sul teorema di de l'Hopital, verificare che per qualunque numero reale $\beta$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x - \text{sen } \beta}{x - \beta} = \cos \beta, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos \beta}{x - \beta} = -\text{sen } \beta$$

## Il teorema di de l'Hôpital esteso ad altre forme indeterminate

**A) Le forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.**

*Nel caso di limiti che si presentano nella forma indeterminata del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$ *vale il seguente teorema di de l'Hôpital, analogo a quello già noto:*

***se due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, definite in uno stesso insieme da cui è escluso un valore a, soddisfano le seguenti condizioni:***

***I) all'interno dell'insieme (escluso il valore a) sono derivabili e risulta con $g'(x) \neq 0$,***

***II)*** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, ***(dove a è un numero o il simbolo $\infty$),***

***III)*** $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ ***(dove $\ell$ è un numero o il simbolo $\infty$),***

***allora, risulta anche***

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

**Basandosi sul teorema di de l'Hôpital, determinare il risultato dei limiti proposti negli esercizi dal 246 al 252.**

**246.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{2x+1}$

*(Per calcolare, per esempio, il 1° limite, si calcola il rapporto delle derivate, ottenendo*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

*Procedendo analogamente negli altri casi, si hanno i risultati ∞, 2).*

**247.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2}{5x-3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{3x^3+x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{2x+3}$

*(Risultati: ∞, 0, 3)*

**248.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^4+2x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4}$

*(Ora, applicando il teorema di de l'Hôpital al 1° limite, si ottiene*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x^3+4x}$$

*che è ancora una forma indeterminata del tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$, *a cui si può applicare di nuovo il teorema di de l'Hôpital; si ottiene così:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x^2+4}=0$$

*Procedendo analogamente per gli altri due limiti, si ottengono i risultati ∞ e 1.*
*Si osserva che in questi casi l'applicazione del teorema di de l'Hôpital conduce a svolgere calcoli piuttosto lunghi; risulta dunque più conveniente il procedimento indicato nel paragrafo 6 del cap. 3).*

**249.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

*(Risultati: tutti +∞).*

**250.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2}$

*(Risultati: 0, +∞, +∞).*

**251.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

*(Risultati: tutti 0).*

**252.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln(x^2)}$

*(Risultati: 0, 0, +∞).*

**253.** Esaminare i seguenti limiti e verificare che non si riesce a determinarne il risultato applicando il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+8}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^4+2}}$$

*(Calcolando, per esempio, il rapporto delle derivate, relativamente al 1° limite, si ottiene:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}.$$

*Si ottiene ancora una forma indeterminata del tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *e, applicando di nuovo il teorema di de l'Hôpital, si ottiene ancora una forma indeterminata analoga a quella di partenza...*
*Risulta dunque necessario seguire il procedimento esposto negli esercizi 145 e 146 del cap. 3).*

**254.** Esaminare i seguenti limiti e verificare che non si riesce a determinarne il risultato applicando il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2x-\cos x}$$

*(Tenere presente che non esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos x.$$

*I limiti assegnati si riescono a calcolare, ricordando che risulta:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=0 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}=0$$

*e riscrivendo, per esempio il 1° limite nella forma* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)=1.$

*Nel 2° limite, dividendo numeratore e denominatore per x, si ottiene il risultato* $\frac{1}{2}$*).*

**B) Le forme indeterminate del tipo $0\cdot\infty$.**

*Quando si deve calcolare*

$$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) \qquad con \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

*si ha una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$; ma basta tenere presente che*

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \qquad oppure \qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

*per ricondurre il limite assegnato ad una forma del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, forme che si possono trattare con i teoremi di de l'Hôpital.*

**255.** Ricondurre i seguenti limiti ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e determinarne il risultato valendosi del teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} (x \ln x), \qquad \lim_{x\to0^+} (x^2 \ln x)$$

*(A partire dal 1° limite, conviene scrivere*

$$x\cdot \ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

*Così, applicando il teorema di de l'Hôpital si ottiene*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+} (-x)=0$$

*Procedendo analogamente, si trova anche nel secondo caso, il risultato 0).*

**256.** Ripetere l'esercizio 255 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} (xe^x), \qquad \lim_{x\to+\infty} (xe^{-x})$$

*(Si può scrivere* $xe^x=\frac{x}{e^{-x}}$ *e* $xe^{-x}=\frac{x}{e^x}$.

*Così si arriva per entrambi i limiti al risultato 0).*

**257.** Ripetere l'esercizio 255 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right), \qquad \lim_{x\to0^+} (x \ln (x^2))$$

*(Risultati: $+\infty$ e 0).*

**258.** Ripetere l'esercizio 255 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x\right], \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot \operatorname{tg} x\right]$$

*(Risultati: $-1$ e 0).*

**C) Le forme indeterminate del tipo $\infty-\infty$.**

*Quando si deve calcolare*

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] \quad con \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$$

*oppure*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] \quad con \quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x)=-\infty$$

*si ha una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$; ma basta scrivere*

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

*per ricondurre ad una forma del tipo $\frac{0}{0}$, forma che si può trattare con il teorema di de l'Hôpital.*

**259.** Ricondurre i seguenti limiti ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e determinarne il risultato valendosi del teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right), \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

*(In entrambi i casi, basta ridurre l'espressione allo stesso denominatore ed applicare due volte il teorema di de l'Hôpital; si arriva ai risultati 0 e $\frac{1}{2}$).*

**260.** Ripetere l'esercizio 259 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right), \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$$

*(Per il 1° limite seguire il procedimento suggerito nell'esercizio precedente; per il 2° limite ridurre sempre allo stesso denominatore, tenendo presente che risulta $tg\ x=\frac{sen\ x}{cos\ x}$.*
*Si ottengono i risultati $\frac{1}{2}$ e 0).*

**261.** Ripetere l'esercizio 259 a partire dai seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{2\ln x}\right], \qquad \left[\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]$$

*(Risultati: entrambi $\infty$).*

## Infinitesimi e infiniti

**A) Infinitesimi**

*Il teorema di de l'Hôpital permette di esaminare dettagliatamente un gran numero di situazioni, in cui sono date due funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$ per cui risulta*

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

*e si deve calcolare*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

*Valendosi dunque del teorema di de l'Hôpital si è trovato che si possono verificare le seguenti quattro situazioni:*

*I)* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, *II)* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

*III)* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$, *con* $\ell\neq 0$ *e finito,* *IV) non esiste* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

*Spesso si descrivono tali situazioni introducendo il termine **infinitesimo** con il seguente significato:* ***una funzione $y=f(x)$ è un infinitesimo per $x\to a$, se risulta $\lim_{x\to a} f(x)=0$***

*Così si dice, relativamente ai vari casi elencati prima:*

*I) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$,*
*II) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$,*
*III) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi dello stesso ordine,*
*IV) $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi non confrontabili.*

*Si possono anche interpretare questi risultati da un punto di vista grafico-intuitivo, dicendo che*

*I) per $x \to a$, $f(x)$ tende a 0 "più rapidamente" di $g(x)$,*
*II) per $x \to a$, $f(x)$ tende a 0 "più lentamente" di $g(x)$,*
*III) per $x \to a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 "con la stessa rapidità".*

*Ecco un esempio di applicazione di queste considerazioni. Dato che risulta:*

$$I)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0, \qquad II)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty, \qquad III)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

*si può dire che:*
*I) $x^2$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $x$ (fig. 10),*
*II) $\sqrt[3]{x}$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto ad $x$ (fig. 11),*
*III) sen $x$ è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto ad $x$ (fig. 12).*

*Due osservazioni:*

- *con il termine infinitesimo si indica una funzione che tende a 0, non un numero fisso molto piccolo;*
- *dalla parola infinitesimo proviene l'aggettivo infinitesimale, che accompagna il termine analisi per indicare i rami della matematica basati sullo studio di funzioni in varie circostanze.*

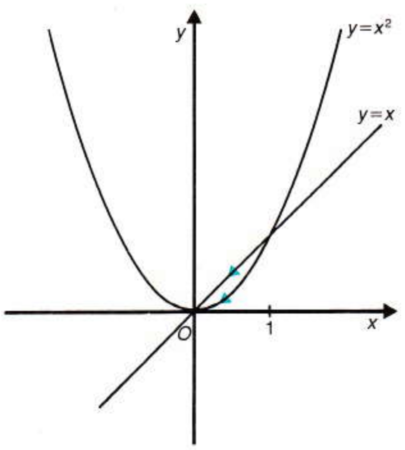


Fig. 10

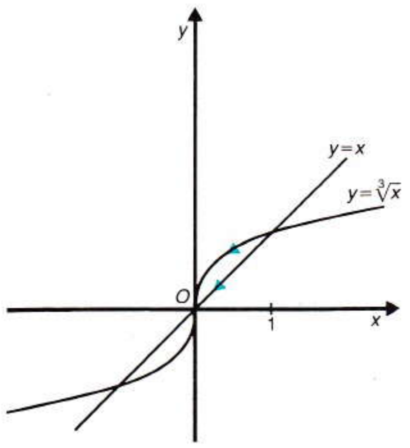


Fig. 11

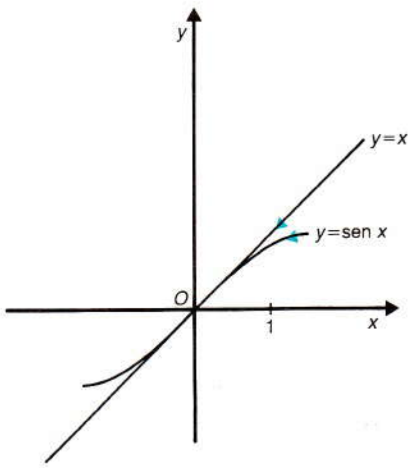


Fig. 12

**B) Infiniti**

*Considerazioni analoghe a quelle precedenti si possono ripetere, a partire da due funzioni* $y=f(x)$ *e* $y=g(x)$, *per cui risulta*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

*quando si calcola*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

*Anche ora si hanno i seguenti casi possibili*

$$I)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0, \qquad\qquad II)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

$$III)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,\ con\ \ell\neq 0\ e\ finito, \qquad\qquad IV)\ non\ esiste\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

*Si descrivono tali situazioni introducendo il termine **infinito** con il seguente significato:*

***una funzione*** $y=f(x)$ ***è un infinito per*** $x\to a$, ***se risulta*** $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

*Così si dice, relativamente ai vari casi elencati prima:*

*I)* $f(x)$ *è un infinito di ordine inferiore rispetto a* $g(x)$,
*II)* $f(x)$ *è un infinito di ordine superiore rispetto a* $g(x)$,
*III)* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due infiniti dello stesso ordine,*
*IV)* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due infiniti non confrontabili.*

*Si possono anche interpretare questi risultati da un punto di vista grafico-intuitivo, dicendo che*

*I) per* $x\to a$, $f(x)$ *tende a* $\infty$ *"più lentamente" di* $g(x)$,
*II) per* $x\to a$, $f(x)$ *tende a* $\infty$ *"più rapidamente" di* $g(x)$,
*III) per* $x\to a$, $f(x)$ *e* $g(x)$ *tendono a* $\infty$ *"con la stessa rapidità".*

*Ecco un esempio di applicazione di queste considerazioni:*
*Dato che risulta*

$$I)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0, \qquad II)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty, \qquad III)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

*si può dire che:*

*I)* $\ln x$ *è un infinito di ordine inferiore rispetto ad* $x$ *(fig. 13),*
*II)* $e^x$ *è un infinito di ordine superiore rispetto ad* $x$ *(fig. 14),*
*III)* $x+1$ *è un infinito dello stesso ordine rispetto ad* $x$ *(fig. 15).*

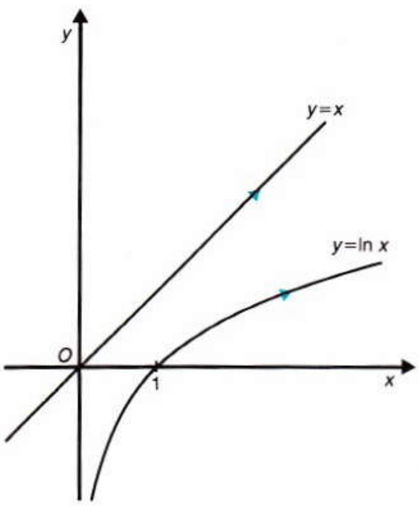

Fig. 13

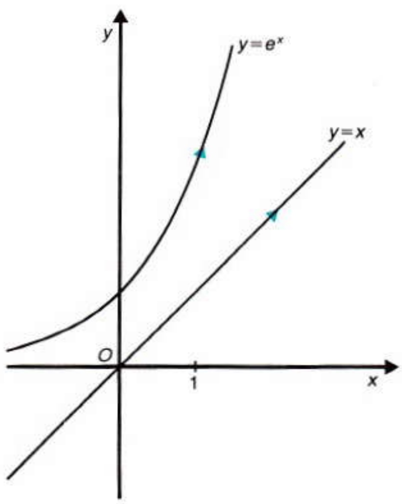

Fig. 14

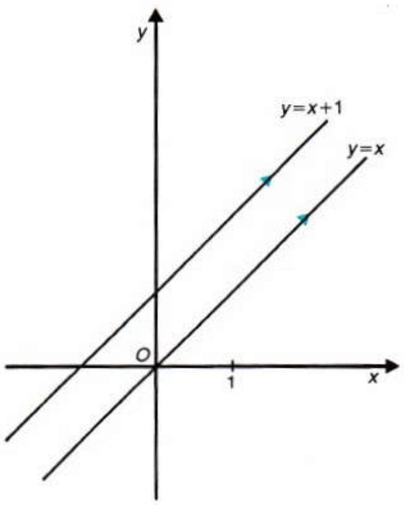

Fig. 15

**262.** Dimostrare che, per $x \to +\infty$, $e^x$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $x^n$ (con $n$ intero positivo). Interpretare questo risultato da un punto di vista grafico-intuitivo.

**263.** Dimostrare che, per $x \to +\infty$, $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $x^n$ (con $n$ intero positivo). Interpretare questo risultato da un punto di vista grafico-intuitivo.

**264.** Dimostrare che nel calcolo di un quoziente fra somme di infinitesimi si possono trascurare tanto al numeratore che al denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

*(Si deve calcolare*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)+m(x)}$$

*sapendo che risulta*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} m(x) = 0$$

*e inoltre*

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to a} \frac{m(x)}{h(x)} = 0$$

*Si può anche scrivere*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)+m(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{1+\dfrac{g(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{m(x)}{h(x)}} = \ldots)$$

**265.** Dimostrare che nel calcolo di un quoziente fra somme di infiniti si possono trascurare tanto al numeratore che al denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

*(Seguire un procedimento analogo a quello suggerito nell'esercizio precedente).*