4
Complementi

A. Procedimenti grafici e numerici per derivare una funzione

Nel corso del cap. 4 abbiamo visto come calcolare la derivata di una funzione "costruita" a partire dalle funzioni elementari: basta conoscere le derivate delle funzioni elementari ed applicare correttamente le regole dell'algebra delle derivate.

Tuttavia accade spesso nelle applicazioni[1] che una funzione non sia descritta da una formula, ma sia data mediante un grafico o con una tabella; eppure è proprio in questi casi che è importante la derivata per descrivere la rapidità con cui una grandezza varia. Ecco come si può procedere.

1. Derivazione grafica

Consideriamo una funzione $y=f(x)$ data mediante una curva disegnata sul piano cartesiano (fig. 1) e vediamo come si può ottenere la sua derivata $y'=f'(x)$ con un procedimento grafico.

Si comincia col fissare l'attenzione su un punto A della curva di ascissa a e si determina $f'(a)$, basandosi sul significato geometrico della derivata: $f'(a)$ indica la pendenza della tangente alla curva in A. Si può allora procedere così (fig. 2):

- si traccia la tangente t_A alla curva nel punto A,
- si fissa sull'asse delle x il punto $P(-1, 0)$,
- da P si conduce la retta $r_A // t_A$, fino ad incontrare l'asse delle y in Q_A.

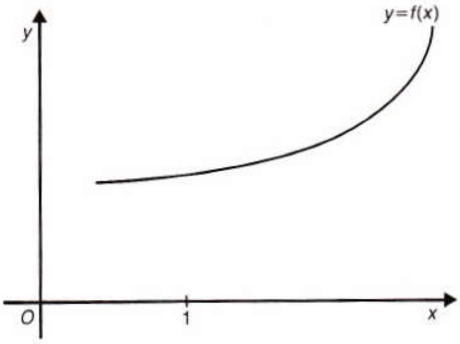

Fig. 1

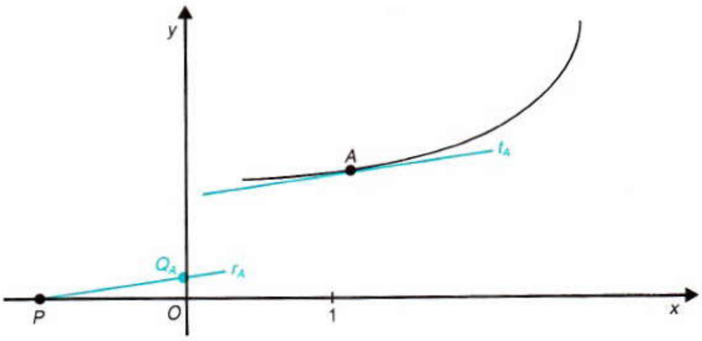

Fig. 2

[1] Vedi cap. 1, paragrafi 1 e 2.

È facile verificare che l'ordinata del punto Q_A indica proprio la derivata $f'(a)$, dato che risulta

$$Q_A[0, f'(a)].$$

Infatti, le due rette r_A e t_A hanno la stessa pendenza $m=f'(a)$; perciò la retta r_A, che passa per $P(-1, 0)$, ha l'equazione

$$y=f'(a)(x+1)$$

ed incontra l'asse delle y nel punto che ha l'ascissa $x=0$ e l'ordinata $y=f'(a)$.

Ora è facile continuare il procedimento per ottenere il grafico di $y'=f'(x)$:

- si traccia da A la parallela all'asse delle y e da Q_A la parallela all'asse delle x, in modo da determinare il punto $T_A[a, f'(a)]$ (fig. 19);
- si ripete il procedimento a partire da altri punti B, C, ... della curva (fig. 3);
- si raccordano i vari punti T_B, T_C, ... così ottenuti (fig. 4).

In questo modo si arriva a tracciare un grafico approssimativo della funzione $y'=f'(x)$. È chiaro che il grafico sarà solo grossolanamente approssimato se i punti costruiti sono pochi e distanti, ma diventerà sempre più soddisfacente quanto più numerosi e "fitti" sono i punti ottenuti.

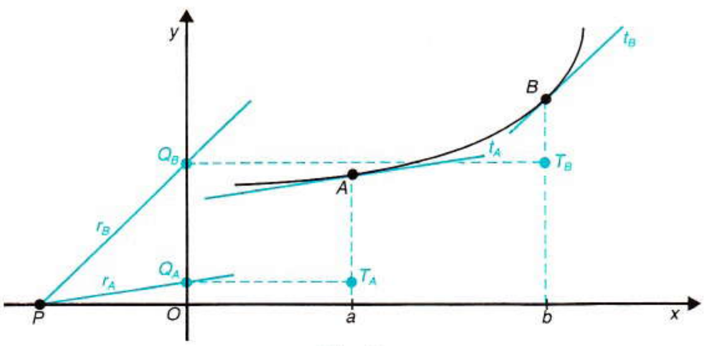

Fig. 3

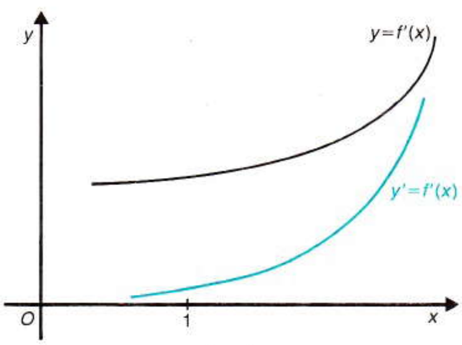

Fig. 4

2. Derivazione numerica

Consideriamo ora una funzione $y=f(x)$ data mediante una tabella come quella riportata qui sotto, dove compaiono i dati relativi al lancio del missile Ariane, avvenuto il 21 dicembre 1981: nella tabella è riportata la quota s a cui si trova il missile, al variare del tempo t.

t (in secondi)	23	24	25	26	27	28	29	30
s (in metri)	430	480	533	589	649	712	779	849

In questo caso si è interessati a seguire la velocità del missile istante per istante e dunque si vuole conoscere la derivata della funzione assegnata. Ci si dovrà allora basare sul procedimento algebrico per calcolare la derivata: per valutare, per esempio, la velocità dopo 25" dal lancio, si dovrà calcolare

$$f'(25)=\lim_{h\to 0}\frac{f(25+h)-f(25)}{h}$$

Fermiamoci ora a riflettere sulla formula appena scritta per capire come si può adattare alla situazione attuale:

- la lettera h indica un intervallo di tempo,
- il rapporto $\dfrac{f(25+h)-f(25)}{h}$ indica la velocità media nell'intervallo h,
- la velocità media si avvicina sempre di più a quella istantanea, quando si assegnano ad h valori sempre più vicini a 0.

È facile rendersi conto che, in questo caso, non possiamo rendere l'incremento h piccolo quanto vogliamo, perché i dati a disposizione sono ad intervalli di tempo di 1 secondo; perciò, si riuscirà a determinare solo un valore approssimato della velocità cercata.

Vediamo dunque come si può determinare questo valore approssimato; si hanno a disposizione almeno tre possibili procedimenti:

I) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25+1)-f(25)}{1}=\frac{589-533}{1}=56$$

II) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25)-f(25-1)}{1}=\frac{533-480}{1}=53$$

III) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25+1)-f(25-1)}{2}=\frac{589-480}{2}=54{,}5$$

Questi tre procedimenti corrispondono ai tre modi più comuni per calcolare la velocità media:

I) calcolare la velocità media "in avanti", in un intervallo di tempo successivo all'istante considerato,
II) calcolare la velocità media "all'indietro", in un intervallo di tempo precedente all'istante considerato,
III) calcolare la velocità media "centrale", in un intervallo di tempo che ha al centro l'istante considerato.

Si tratta di tre procedimenti che possono essere facilmente estesi a tutti i casi in cui una funzione $y=f(x)$ è data mediante una tabella: la derivata

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

può essere valutata in modo approssimato con i tre procedimenti seguenti:

I) con **la differenza in avanti**, indicata spesso con il simbolo Δf e data da

$$\Delta f=\frac{f(a+h)-f(a)}{h};$$

II) con **la differenza all'indietro**, indicata con il simbolo ∇f e data da

$$\nabla f=\frac{f(a)-f(a-h)}{h};$$

III) con **la differenza centrale**, indicata con il simbolo δf e data da

$$\delta f=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

Esaminiamo meglio il significato di questi tre rapporti, visualizzando la situazione sul piano cartesiano, cioè rappresentando i tre punti $A[a, f(a)]$, $P[a-h, f(a-h)]$ e $Q[a+h, f(a+h)]$ (fig. 5).

Possiamo ragionare così: se i tre punti si trovassero su una data curva, come in fig. 6, potremmo calcolare la derivata $f'(a)$, tracciando la tangente t_A alla curva nel punto A e valutando la pendenza di questa retta.

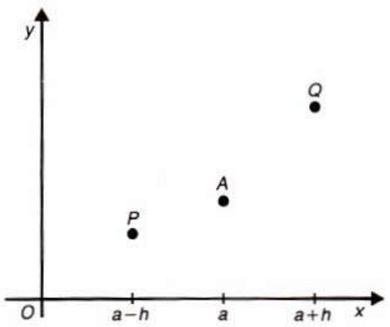

Fig. 5

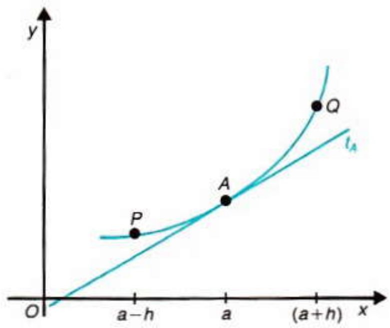

Fig. 6

Ma nel caso esaminato non abbiamo il grafico della curva, abbiamo solo le coordinate dei tre punti; perciò, non possiamo far altro che approssimare la tangente t_A con una secante. Per realizzare questa approssimazione abbiamo a disposizione tre possibilità:

I) approssimare la tangente t_A con la secante AQ (fig. 7); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante AQ, che corrisponde alla differenza in avanti Δf;
II) approssimare la tangente t_A con la secante PA (fig. 8); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante PA, che corrisponde alla differenza all'indietro ∇f;
III) approssimare la tangente t_A con la secante PQ (fig. 9); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante PQ, che corrisponde alla differenza centrale δf.

Concludiamo l'esame di questi metodi di derivazione numerica provandoli su qualche funzione di cui è nota l'espressione analitica per confrontare i risultati del metodo numerico con quelli forniti dal calcolo differenziale.

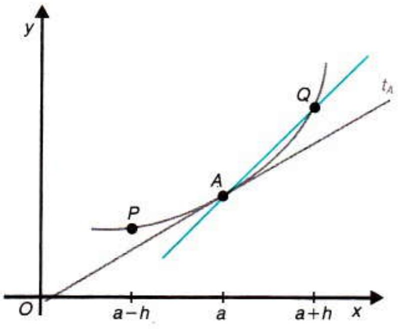

Fig. 7

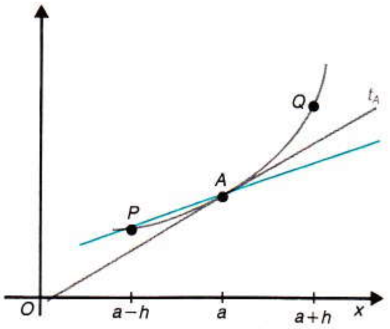

Fig. 8

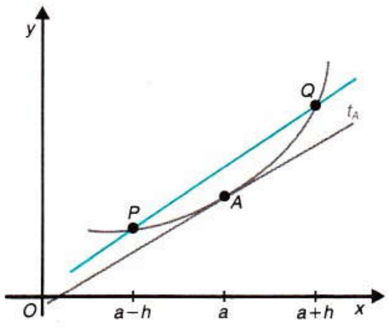

Fig. 9

– La funzione lineare $y=mx+n$, che ha come derivata

$$y'=m.$$

Calcolando le tre differenze introdotte prima, relativamente ad un punto A di ascissa a, si ha:

$$\Delta f=\frac{m(a+h)+n-(ma+n)}{h}=m$$

$$\nabla f=\frac{ma+n-[m(a-h)+n]}{h}=m$$

$$\delta f=\frac{m(a+h)+n-[m(a-h)+n]}{2h}=m$$

Si ottiene così un risultato facilmente prevedibile dal punto di vista geometrico: nel caso della funzione lineare i tre metodi numerici forniscono il valore esatto della derivata.

– La funzione quadratica $y=x^2$, che ha come derivata

$$y'=2x.$$

Calcolando le tre differenze introdotte prima, relativamente ad un punto A di ascissa a, si ottiene:

$$\Delta f=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2a+h$$

$$\nabla f=\frac{a^2-(a-h)^2}{h}=2a-h$$

$$\delta f=\frac{(a+h)^2-(a-h)^2}{2h}=2a$$

Le figg. 10-12 visualizzano i risultati ottenuti:

- la differenza centrale δf fornisce il risultato esatto ($2a$) della derivata e questo vuol dire che la secante PQ è parallela alla tangente t_A (fig. 10);
- la differenza in avanti Δf fornisce un valore approssimato per eccesso della derivata e l'errore commesso vale sempre h (fig. 11);
- la differenza ∇f all'indietro fornisce un valore approssimato per difetto della derivata e l'errore commesso vale ancora h (fig. 12).

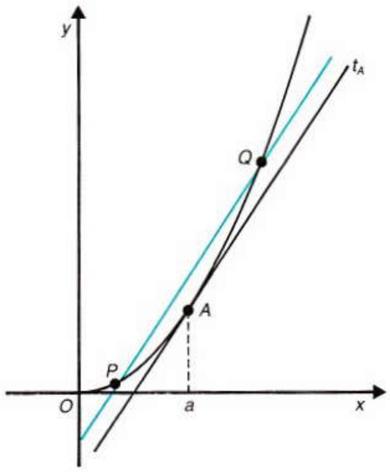

Fig. 10

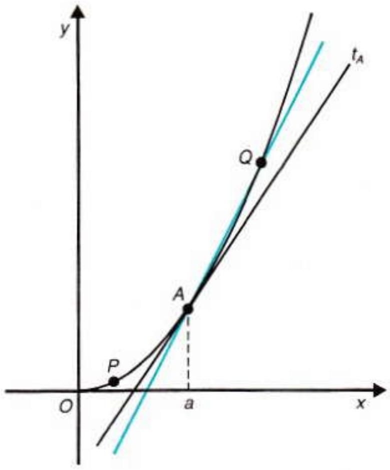

Fig. 11

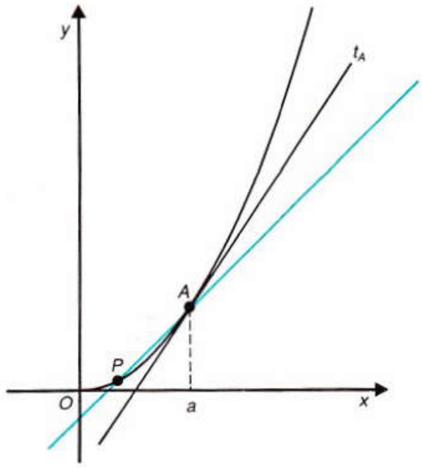

Fig. 12

- La funzione $y=x^3$, che ha come derivata

  $$y'=3x^2.$$

  Calcolando le tre differenze introdotte prima, relativamente ad un punto A di ascissa a, si ottiene:

  $$\Delta f=\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=3a^2+3ah+h^2;$$

  $$\nabla f=\frac{a^3-(a-h)^3}{h}=3a^2-3ah+h^2;$$

  $$\delta f=\frac{(a+h)^3-(a-h)^3}{2h}=3a^2+h^2.$$

Ora si ottengono comunque dei valori approssimati della derivata richiesta, che vale $3a^2$. Inoltre, l'errore della differenza centrale δf vale h^2 e quindi dipende solo dall'ampiezza h dell'intervallo scelto; invece, gli errori che si commettono con le altre due differenze dipendono anche dalla scelta dell'ascissa a.