3. Complementi

B. I procedimenti infiniti nella matematica greca

Verso la fine del VI secolo a.C. i matematici greci si trovarono ad affrontare diversi problemi legati a procedimenti infiniti. Questi problemi hanno avuto una grande importanza nello sviluppo del pensiero filosofico e scientifico occidentale, tanto che sono ancora oggi conosciuti e discussi. In questo Complemento esamineremo dunque da diversi punti di vista alcuni di questi problemi.

1. I segmenti incommensurabili e la crisi della scuola Pitagorica

Nella storia delle origini della matematica greca assume grande importanza la cosiddetta scuola Pitagorica, fondata da Pitagora. La ricostruzione del pensiero di Pitagora si basa soprattutto su tradizioni nate in epoca successiva, dato che non si hanno al riguardo documenti matematici o scientifici fino al tempo di Platone, e cioè fino al IV secolo a.C.

Secondo la tradizione, Pitagora negli ultimi anni della sua vita si stabilì a Metaponto, dove morì verso il 500 a.C. La tradizione aggiunge che non lasciò alcuna opera scritta, ma che le sue idee vennero sviluppate da un gran numero di discepoli.

Uno dei dogmi fondamentali della scuola pitagorica era il seguente: l'essenza di tutte le cose, sia in geometria che nelle questioni pratiche della vita, era spiegabile in termini di numeri interi o rapporti di numeri interi. In particolare, i Pitagorici pensavano la materia formata da particelle elementari indivisibili (le monadi) che costituivano tutte le cose, anche le figure geometriche: i segmenti contenevano un numero finito di punti ed erano più o meno lunghi a seconda del numero dei punti da cui erano formati. Il punto aveva dunque una sua dimensione, sia pure piccolissima.

I dialoghi di Platone mostrano però che la comunità matematica greca era rimasta sconvolta da una rivelazione che demoliva la base della fede pitagorica nei numeri interi. Si trattava di una scoperta che oggi non sembra davvero sorprendente: con i numeri interi non si riesce ad esprimere il rapporto fra diagonale e lato di un quadrato.

Non si sa esattamente quando e come è avvenuta questa scoperta; di solito si fa riferimento ad un documento di Aristotele, che accenna ad una dimostrazione basata sulla distinzione fra numeri pari e numeri dispari. Una dimostrazione del genere può essere ricostruita nel modo seguente. Si immagina che il rapporto fra il lato l del quadrato e la diagonale d possa essere espresso con numeri interi, in modo che risulti

$(A)\qquad \dfrac{d}{l}=\dfrac{q}{p}$

dove

(B) **p e q sono due numeri interi che non hanno fattori in comune.**

D'altra parte, per il teorema di Pitagora, si ha (fig. 12):

$$d^2=l^2+l^2, \quad \text{ossia} \quad d^2=2\cdot l^2 \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2}{l^2}=2$$

Deve allora risultare

$$(C) \qquad \frac{q^2}{p^2}=2, \quad \text{ossia} \quad q^2=2\cdot p^2$$

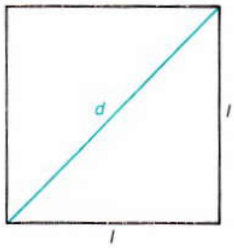

Fig. 12

Perciò q^2 deve essere un numero pari e dunque **q deve essere pari**. Il numero intero q si può allora scrivere nella forma seguente

$$q=2r, \quad \text{da cui} \quad q^2=4r^2.$$

Ora, sostituendo quest'ultima espressione nella (C) si ha:

$$4r^2=2p^2, \quad \text{da cui} \quad 2r^2=p^2$$

e perciò p^2 deve essere un numero pari e dunque anche p deve essere pari. Si è così dimostrato che, **se è vera la (A)**, p e q sono due numeri pari, cioè

(D) **p e q hanno in comune il fattore 2**.

Si è dunque stabilita la seguente implicazione[1]

$$(A)\Rightarrow(D)$$

Questa dimostrazione porta anche ad affermare che

$$\text{non } (D)\Rightarrow \text{non } (A),$$

cioè, se p e q **non** hanno il fattore 2 in comune, allora la (A) **non** è vera. Si conclude dunque che:

è falsa l'uguaglianza $\frac{d}{l}=\frac{p}{q}$ con p e q interi senza fattori comuni.

Questo significa che il rapporto fra lato e diagonale del quadrato non può essere espresso da numeri interi, cioè lato e diagonale del quadrato sono **segmenti incommensurabili**.

D'altra parte, la scoperta dei segmenti incommensurabili porta a capire che i segmenti non possono essere formati da un numero intero di punti con una certa dimensione. È così la dottrina pitagorica secondo cui "i numeri interi costituiscono l'intero universo" entra in una crisi profonda. E di questa crisi si trovano tracce anche in un'antica leggenda: il pitagorico Ippaso di Metaponto che aveva divulgato la "verità scandalosa" fu punito duramente dagli dei che lo fecero morire in un naufragio.

Ed ora riflettiamo su questo problema con le attuali conoscenze matematiche: il rapporto fra la diagonale d ed il lato l del quadrato è dato da

$$\frac{d}{l}=\sqrt{2}$$

dove $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

Scrivendo $\sqrt{2}$ in forma decimale, si trovano infinite cifre dopo la virgola; si ha:

$$\sqrt{2}\approx 1{,}414\ldots$$

ossia

$$\sqrt{2}\approx 1+0{,}4+0{,}01+0{,}004+\ldots=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\ldots$$

$\sqrt{2}$ è dunque la somma di infiniti numeri.

[1] Per maggiori notizie sull'implicazione vedi Esercizi del cap. 2, pagg. 338-340.

Interpretiamo questo risultato dal punto di vista geometrico, esaminando per esempio il quadrato di lato 1: per costruire la diagonale che è lunga $\sqrt{2}$, occorre un procedimento infinito (fig. 13), dato che si debbono successivamente addizionare

$$\text{il lato, } \frac{4}{10} \text{ del lato, } \frac{1}{100} \text{ del lato, } \frac{4}{1000} \text{ del lato, } \ldots$$

È questo uno dei procedimenti infiniti che, ripresi nel Rinascimento, portarono da una parte all'esplosione di nuovi metodi di indagine per "stringere l'infinito", e, dall'altra, ad una lenta ma graduale chiarificazione del concetto di numero.

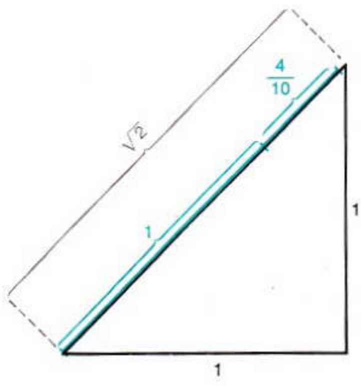

Fig. 13

2. I paradossi di Zenone

Zenone di Elea (V secolo a.C.) è uno dei più noti rappresentanti di un'altra scuola filosofica – la cosiddetta *scuola eleatica* – fondata da Parmenide e basata su un dogma fondamentale: l'unità e la permanenza dell'essere, concezione che si contrapponeva alle idee pitagoriche di molteplicità e mutamento.

I pitagorici affermavano infatti che lo spazio ed il tempo erano formati da punti e da istanti. Si è fatta l'ipotesi che Zenone avesse sviluppato i suoi paradossi proprio contro questa concezione, seguendo un metodo che anticipava il metodo dialettico di Socrate.

Vediamo ora uno dei paradossi che, secondo la testimonianza di Aristotele, è stato origine di grandi discussioni: il paradosso di Achille e la tartaruga. Si tratta del problema seguente: il velocissimo Achille fa una gara di corsa con una lentissima tartaruga che parte da un punto più avanzato. Supponiamo per rendere i calcoli più semplici, che il punto di partenza della tartaruga sia B, a 10 metri di distanza dal punto A, da cui parte Achille (fig. 14). Supponiamo poi che la velocità di Achille sia 10 volte più grande di quella della tartaruga. Allora, se i due partono nello stesso istante, quando Achille ha percorso 10 metri (e cioè la distanza AB), la tartaruga ha percorso 1 metro, e quando Achille ha percorso quel metro, la tartaruga sarà avanzata di 1 decimetro, e... Lo spazio S che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga è dunque dato da

$$S=10+1+0{,}1+0{,}01+\ldots$$

Fig. 14

È un tratto, questo, che sembra essere di lunghezza infinita, dato che è la somma di infiniti addendi positivi; dunque – dice Zenone – Achille non potrà raggiungere la tartaruga in un tempo finito.

Ci troviamo davanti ad un problema che appare in netto contrasto con la realtà; ed è il concetto di limite che chiarisce il problema: una somma di infiniti termini può avere valore finito. Anzi, essendo S la somma di una serie geometrica[1], si ha:

$$S=\frac{10}{1-0{,}1}=\frac{100}{9}\approx 11{,}1$$

[1] Per maggiori notizie sulle serie vedi Complemento A del cap. 2.