3
Continuità e calcolo dei limiti

1. Fenomeni continui e discontinui
2. Definizione di funzione continua
3. Casi di discontinuità
4. Dalla continuità al calcolo di limiti. Limiti delle funzioni elementari
5. L'algebra dei limiti
6. Risoluzione di forme indeterminate: qualche caso semplice
7. Il teorema del confronto. Qualche applicazione
8. Teoremi sulle funzioni continue

1. Fenomeni continui e discontinui

Nei due capitoli precedenti abbiamo presentato vari esempi di funzioni continue e discontinue, basandoci sempre su considerazioni di carattere grafico.
Si è detto, per esempio, che la funzione

$$y=\text{sen }x,$$

rappresentata in fig. 1, è continua in tutti i suoi punti, dato che se ne può tracciare il grafico senza alzare la matita dal foglio.
Invece, la funzione

$$y=\frac{1}{x},$$

rappresentata in fig. 2, presenta una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 0, dato che, mentre si traccia il grafico, "si è costretti ad alzare la matita dal foglio" per passare da sinistra a destra del valore 0.

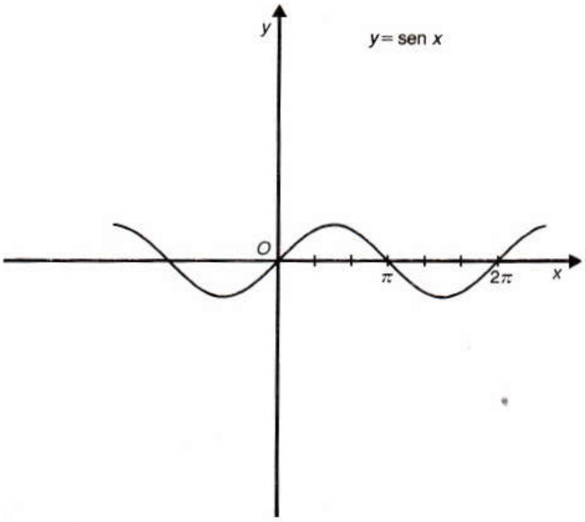


Fig. 1

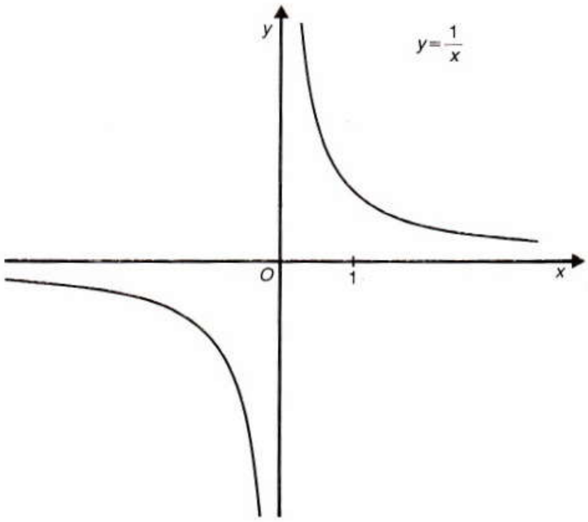


Fig. 2

Si sono anche effettuate sui due tipi di funzioni alcune operazioni elementari (addizione, moltiplicazione, ...); negli esempi trattati si verificava che la somma di due funzioni continue era ancora una funzione continua. Fermiamoci su questa proprietà, che sembra evidente e sempre vera, e riportiamo un esempio storico, che fa riflettere.

Ai primi del 1800 gli studi di J. Fourier[1] e di altri fisico-matematici hanno condotto a scoprire delle inaspettate contraddizioni che si verificano componendo più funzioni continue; si è stati allora forzati a studiare più attentamente il concetto di continuità, che è diventato uno dei più importanti argomenti di ricerca matematica del XIX secolo.

[1] Joseph Fourier (1768-1830) è famoso per i suoi studi fisico-matematici sulla propagazione del calore.

Uno dei problemi proposti da Fourier è lo studio il movimento delle corde vibranti; questo problema conduce a tracciare il grafico di funzioni che si ottengono sommando sinusoidi di diverso periodo (fig. 3).

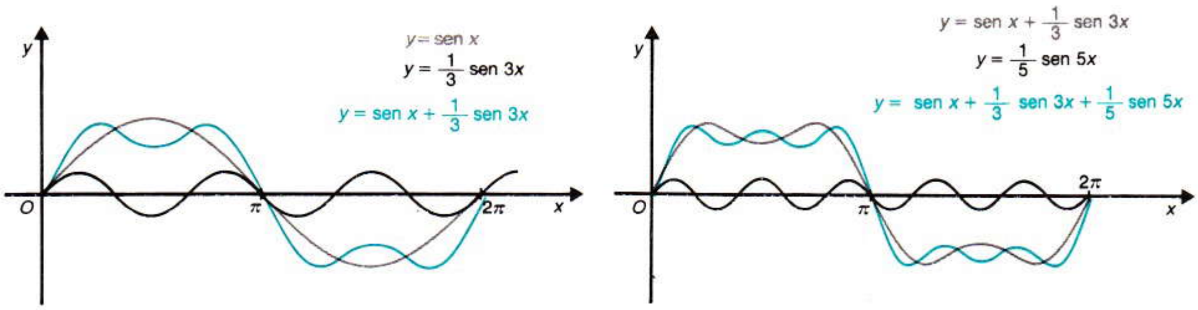


Fig. 3

Le curve che si ottengono non sono più sinusoidali, ma sono ancora continue. Osserviamo ora la fig. 4, dove è presentata la somma di 15 funzioni sinusoidali; si intuisce come, continuando a sommare sinusoidi di frequenza opportuna, si possono ottenere funzioni sempre più vicine a quella di fig. 5. Ma la curva di fig. 5 non è certamente continua!

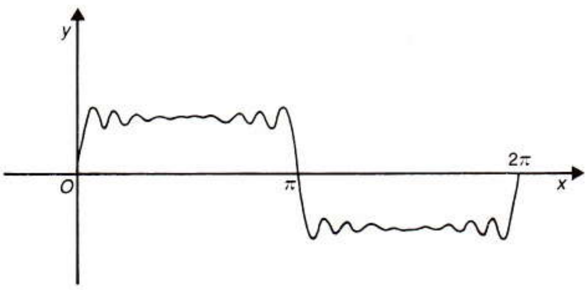


Fig. 4

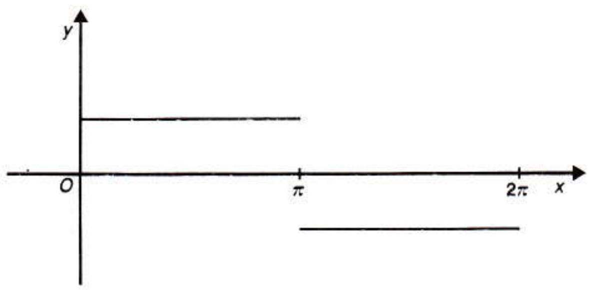


Fig. 5

Si capisce che la contraddizione è dovuta al fatto che per ottenere la curva di fig. 5, dobbiamo immaginare di sommare **infinite** sinusoidi, mentre finora si erano ottenute funzioni continue sommando un numero, anche grande, ma **finito** di funzioni continue.

È interessante notare che la funzione di fig. 5 non è certo un'invenzione dei matematici puri, ma ha assunto notevole importanza nella tecnica: si tratta della così detta "onda quadra" un segnale elettrico così nitido e facilmente riconoscibile da essere largamente impiegato nella taratura di strumenti elettronici (oscilloscopi, registratori, apparecchi musicali, ...).

L'argomento di questo capitolo – la continuità – non è dunque banale e presenta numerose applicazioni nei più vari settori.

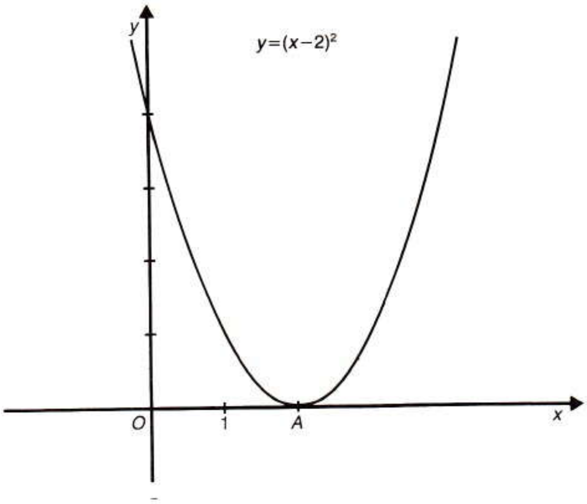
2. Definizione di funzione continua

Allo scopo di chiarire la distinzione fra funzioni continue e discontinue, per poi arrivare ad una precisa definizione, fissiamo l'attenzione sulle due curve disegnate nelle figg. 6 e 7: la prima è il grafico della funzione

$$y=(x-2)^2,$$

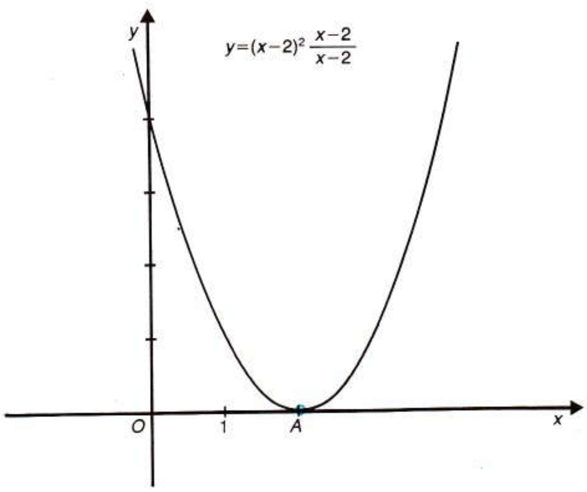
e la seconda è il grafico di

$$y=(x-2)^2\cdot\frac{(x-2)}{x-2}.$$



x	y
1	1
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	0
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25
3	1

Fig. 6



x	y
1	1
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	non esiste
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25
3	1

Fig. 7

La differenza fra le due curve non è molto appariscente, eppure la curva di fig. 7 presenta una discontinuità nel punto $A(2, 0)$, mentre la curva di fig. 6 è continua in quel punto. Dal punto di vista grafico, si può dire che, per tracciare la curva di fig. 7, occorre alzare la matita dal foglio quando si incontra il punto A, mentre in fig. 6 si passa attraverso A senza interruzioni. Ma è chiaro che la scoperta di discontinuità non può essere affidata solo all'esame di un grafico!

Le tabelle delle figg. 6 e 7 conducono a descrivere in modo più preciso la differenza fra le due funzioni disegnate.
La tabella di fig. 6, conduce a scoprire che per la funzione

$$y=(x-2)^2,$$

risulta che:

1) $\lim_{x\to 2} f(x)=0$,
2) il numero 2 fa parte del campo di esistenza della funzione,
3) $f(2)=(2-2)^2=0$.

Si ottengono così tre condizioni che esprimono in forma sintetica e rigorosa l'idea suggerita dal grafico: si disegna la curva con un un tratto continuo perché, quando si assegnano alla x valori sempre più vicini a 2, si ottengono corrispondenti valori di y sempre più vicini a $f(2)=0$ e, inoltre, il punto $A(2, 0)$ fa parte della curva.

Ora è facile seguire lo stesso metodo per descrivere analiticamente la discontinuità nel punto $A(2, 0)$ di fig. 7.

Basandosi sulla tabella di fig. 7, si trova che per la funzione

$$y=(x-2)^2 \cdot \frac{(x-2)}{x-2}$$

risulta:

1) $\lim_{x\to 2} f(x)=0$,

2′) il numero 2 non fa parte del campo di esistenza, perciò non è possibile calcolare $f(2)$.

È proprio la condizione (2′) che costringe a "saltare" il punto $A(2, 0)$, quando si disegna la curva.

Le considerazioni precedenti possono essere facilmente generalizzate e conducono a cogliere il significato della seguente definizione di **funzione continua**.

Si dice che una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$,

2) il valore $x=a$ fa parte del campo di esistenza della funzione,

3) $f(a)=\ell$.

Esaminiamo meglio la definizione riprendendo il concetto di limite (cap. 2, paragrafi 5 e 6). Si capisce che:
- la condizione (1) descrive il comportamento della funzione, quando si assegnano ad x valori vicinissimi ad a (a escluso);
- le condizioni (2) e (3), invece, fissano l'attenzione sul comportamento della funzione quando si assegna ad x proprio il valore a, affermando che si può calcolare $f(a)$ e che risulta $f(a)=\ell$.

Le condizioni ora elencate possono anche essere sintetizzate nel modo seguente:
si dice che una funzione è continua se è verificata la condizione

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

In questo modo resta sottinteso che il numero a fa parte del dominio della funzione e che si può calcolare $f(a)$; ma la definizione di funzione continua in un punto viene sintetizzata nella sola condizione

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Ecco infine, una semplice estensione della precedente definizione.

si dice che una funzione è continua in un intervallo se e solo se è continua in tutti i punti dell'intervallo considerato.

In base a questa definizione è facile verificare che risultano continue su tutto l'asse reale le due funzioni (figg. 8 e 9)

$$y=k \quad \text{e} \quad y=x.$$

Meno immediata risulta la dimostrazione rigorosa della continuità su tutto l'asse reale delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x, \quad y=e^x.$$

Le relative dimostrazioni sono schematizzate negli esercizi, e sono per ora sostituite dall'osservazione dei grafici "senza interruzioni" rappresentati nelle figg. 10 e 11.

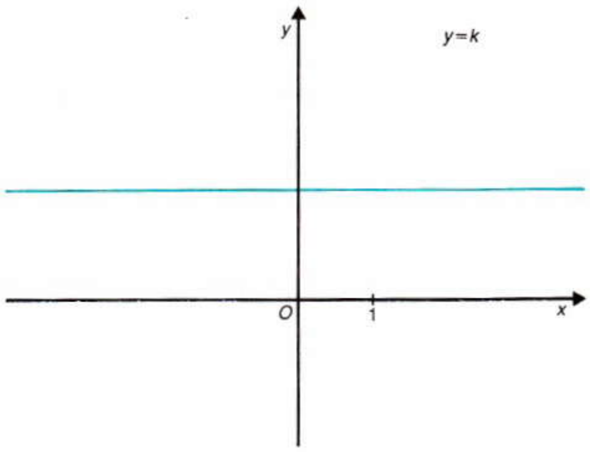


Fig. 8

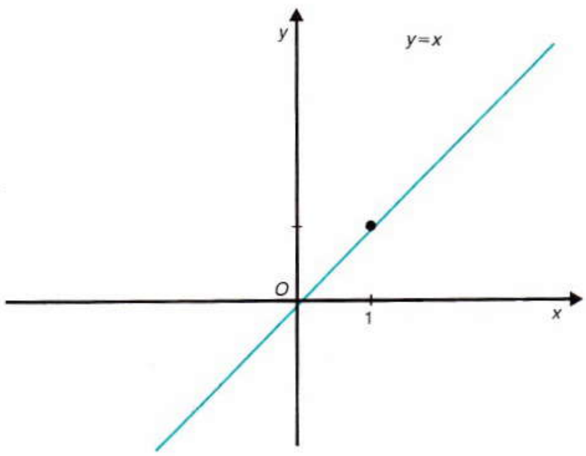


Fig. 9

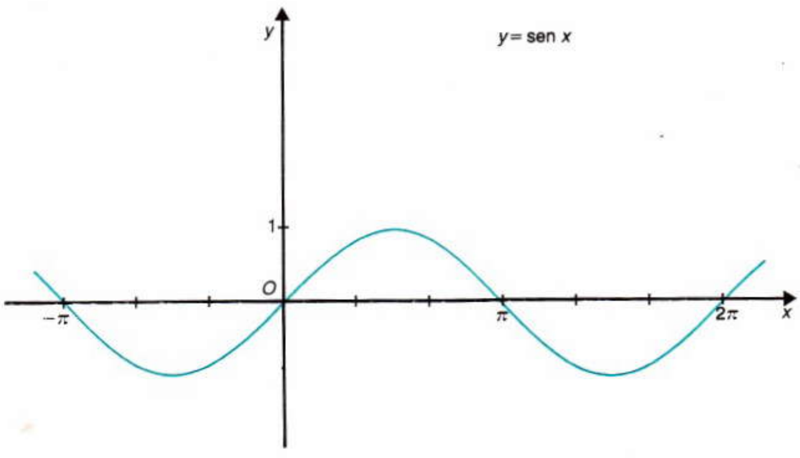


Fig. 10

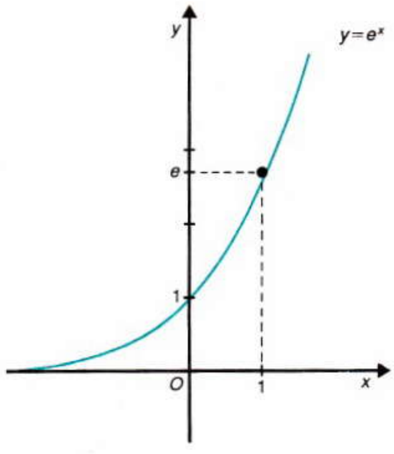


Fig. 11

3. Casi di discontinuità

La definizione di funzione continua in un punto permette anche di elencare in modo chiaro i possibili casi di discontinuità. Si ragiona così:

- si fissa l'attenzione sulle condizioni che debbono essere verificate perché la funzione sia continua in un punto e cioè
  1) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$;
  2) il valore $x=a$ fa parte del campo di esistenza della funzione;
  3) $f(a)=\ell$;
- si determinano i casi in cui viene a mancare almeno una delle condizioni elencate.

Ecco dunque i casi possibili.

• **Manca la condizione (1)**

Questo può avvenire in due situazioni:

a) si ha $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$;
   in tal caso si ha una **discontinuità infinita**, come quella che presenta la funzione di fig. 12 in corrispondenza all'ascissa 3.

b) non esiste $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, perché il limite destro è diverso da quello sinistro.
   Si ha così un **punto di salto** come il punto d'ascissa 1 della fig. 13.

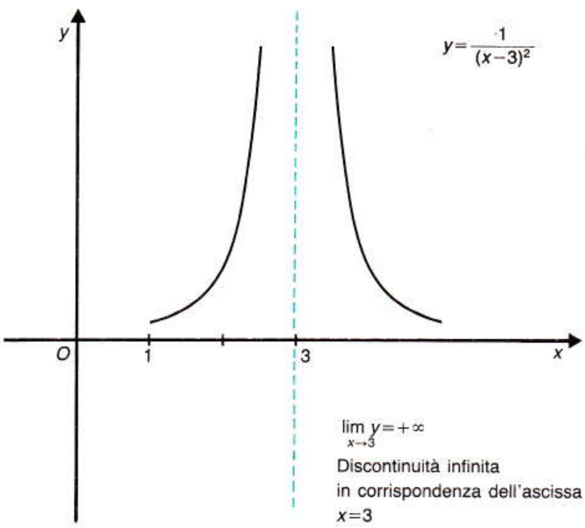


Fig. 12

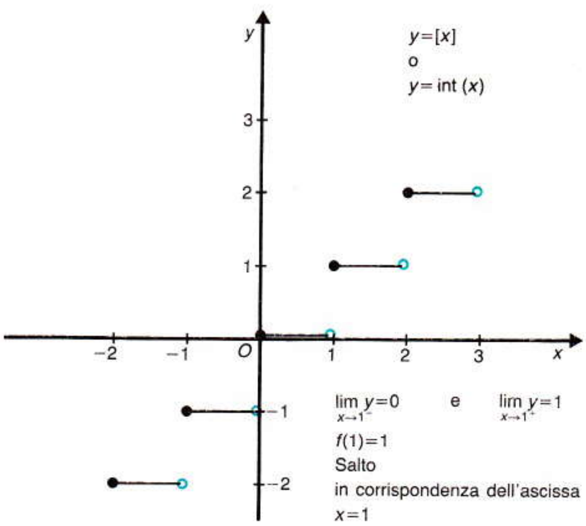


Fig. 13

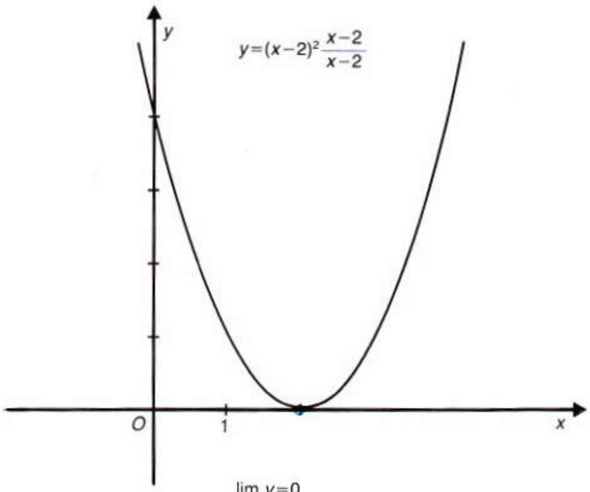
• **Manca la condizione (2)**

Il valore a non fa dunque parte del campo d'esistenza della funzione. In tal caso manca anche la condizione (3) perché non è possibile calcolare $f(a)$. Siamo in un caso come quello presentato in fig. 14.

• **Manca la sola condizione (3)**

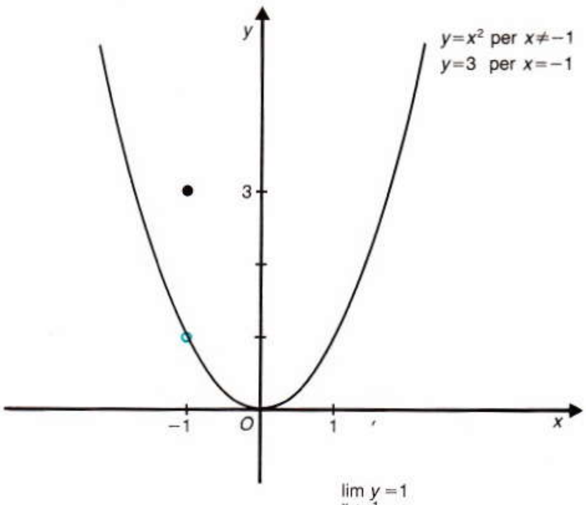
Questo vuol dire che risulta $f(a) \neq \ell$. Si tratta di un caso poco frequente, che si può incontrare, "inventando" funzioni come quella presentata in fig. 15, dove si nota una discontinuità in corrispondenza all'ascissa $x=-1$.

In questi ultimi due casi si dice che la discontinuità è **eliminabile**, dato che è possibile modificare la definizione della funzione in modo da ottenere una funzione continua.



$\lim\limits_{x\to 2} y=0$
$x=2$ non fa parte del campo di esistenza
Discontinuità eliminabile
in corrispondenza dell'ascissa
$x=2$

Fig. 14



$\lim\limits_{x\to -1} y=1$
$f(-1)=3$
Discontinuità eliminabile
in corrispondenza dell'ascissa
$x=-1$

Fig. 15

4. Dalla continuità al calcolo di limiti. Limiti di funzioni elementari

Fino ad ora abbiamo fatto largo uso del concetto di limite; non abbiamo però mai detto come si calcola il limite di una funzione. Affronteremo ora questo argomento, che è stato suddiviso in diversi paragrafi, individuando tre tipi di limiti da calcolare:

I) Limiti di funzioni elementari, in cui la continuità ha un ruolo fondamentale (argomento trattato in questo paragrafo).
II) Limiti che si ottengono a partire dai limiti delle funzioni elementari, valendosi di apposite regole (argomento sviluppato nel paragrafo 5).
III) Le forme indeterminate, ossia i limiti che non si riescono calcolare con le regole esposte prima (argomento svolto nei paragrafi 6 e 7).

Occupiamoci dunque dei limiti delle funzioni elementari, riprendendo una definizione presentata nel paragrafo precedente:

Se una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$, allora risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Se dunque si deve calcolare il limite di una funzione in un punto d'ascissa $x=a$, in cui la funzione è continua, basta sostituire ad x il numero a: il valore $f(a)$ ottenuto fornisce anche il risultato del limite cercato.

Ecco qualche esempio, relativo a funzioni di cui si è verificata la continuità nel capitolo precedente (figg. 16-19):

$$\lim_{x\to 1} 2=2, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}} x=\sqrt{3}, \quad \lim_{x\to\pi} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\pi=0, \quad \lim_{x\to 0} e^x=e^0=1.$$

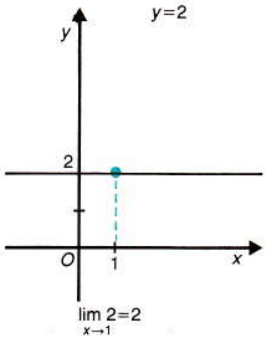


Fig. 16

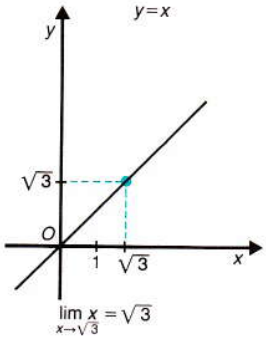


Fig. 17

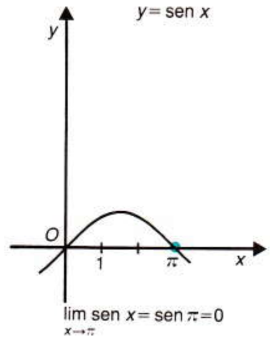


Fig. 18

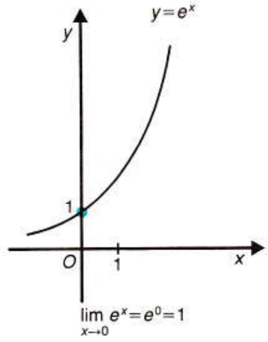


Fig. 19

Fissiamo ora l'attenzione sui limiti di alcune funzioni elementari, che possono essere considerate come "mattoni" per costruire molte funzioni che conosciamo; si tratta delle seguenti funzioni:

$$y=k, \quad y=x, \quad y=\operatorname{sen} x, \quad y=e^x.$$

Dato che si tratta di funzioni continue in tutti i punti del loro insieme di definizione (l'insieme dei numeri reali), risulta senz'altro (figg. 20-23):

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} k=k, \quad \lim_{x\to a} x=a, \quad \lim_{x\to a} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a, \quad \lim_{x\to a} e^x=e^a,}$$

dove a indica un qualunque numero reale.

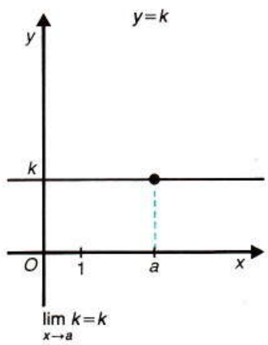


Fig. 20

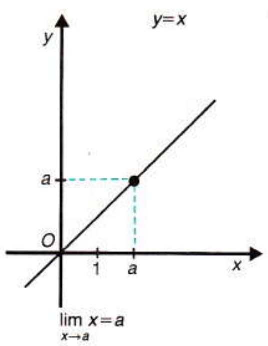


Fig. 21

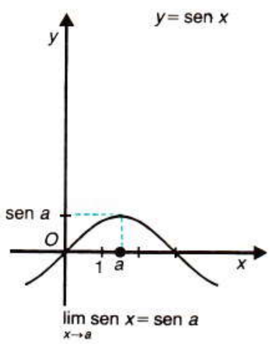


Fig. 22

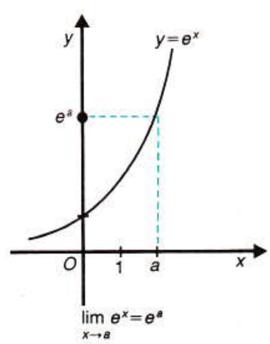


Fig. 23

Un'osservazione importante:

il metodo ora seguito per determinare il limite di una funzione (sostituire il numero a al posto di x e calcolare $f(a)$) *vale solo se*
– il simbolo a indica un numero finito,
– la funzione è continua nel punto d'ascissa a.

Non è possibile dunque seguire lo stesso metodo nelle situazioni seguenti:

1) Si vuole calcolare il limite per x che tende ad un numero finito a, in cui la funzione è discontinua.

Ecco un esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Sappiamo che la funzione considerata è discontinua nel punto d'ascissa $x=0$ (fig. 24) e, dunque, non è possibile sostituire ad x il valore 0 per calcolare il risultato del limite.

2) Si vuole calcolare il limite di una funzione per $x\to\infty$.

Ecco un esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} e^x.$$

È chiaro che, in questo caso, non avrebbe alcun significato sostituire ad x il simbolo $+\infty$.

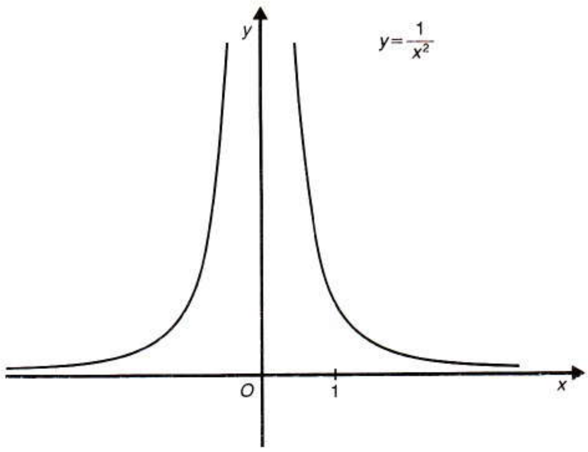


Fig. 24

Si riesce tuttavia a determinare il limite per $x\to\infty$ di queste funzioni elementari, non certo "sostituendo ∞ ad x", ma valendosi di due tipi di considerazioni:
- considerazioni intuitive, basate sui grafici delle funzioni (vedi cap. 2, paragrafo 2);
- rigorose dimostrazioni, basate sulla definizione di limite (vedi esercizi).

Si arriva comunque ai risultati seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} k=k \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} k=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x \ \textbf{non esistono}.$$

5. L'algebra dei limiti

In questo paragrafo sono sviluppate le regole fondamentali per calcolare i limiti di tutte le funzioni che si possono ottenere a partire da quelle elementari, valendosi dell'algebra delle funzioni esposta nel cap. 1. Per rendere la trattazione più semplice l'argomento è diviso in tre parti:

A) algebra dei limiti finiti,
B) algebra dei limiti infiniti,
C) forme indeterminate.

A) Algebra dei limiti finiti

Esaminiamo un primo caso: calcolare il limite di una funzione, che è la somma di due funzioni elementari.

Ecco qualche esempio:

$$\lim_{x\to 0} (x+e^x), \quad \lim_{x\to 3} (x+4), \quad \lim_{x\to \pi} (x+\operatorname{sen} x).$$

Per capire meglio di che cosa si tratta, cominciamo con lo studiare da un punto di vista intuitivo il primo limite proposto, basandoci sui grafici e sulle tabelle di fig. 25.

Sappiamo che per la funzione continue

$$y=x \quad \text{e} \quad y=e^x$$

risulta

$$\lim_{x\to 0} x=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} e^x=e^0=1$$

Così, per valutare

$$\lim_{x\to 0} (x+e^x)$$

si è condotti a considerare la funzione

$$y=x+e^x$$

dove ad x si sostituiscono valori sempre più vicini a 0 e si calcolano i corrispondenti valori di y. Si capisce che si ottengono valori di y sempre più vicini a $(0+1)$, che è la somma dei due limiti noti.

x	e^x	$x+e^x$
−0,5	~0,6	0,1
−0,1	~0,9	0,8
−0,01	~0,99	0,98
0	1	1
0,01	~1,01	1,02
0,1	~1,1	1,2
0,5	~1,6	2,1

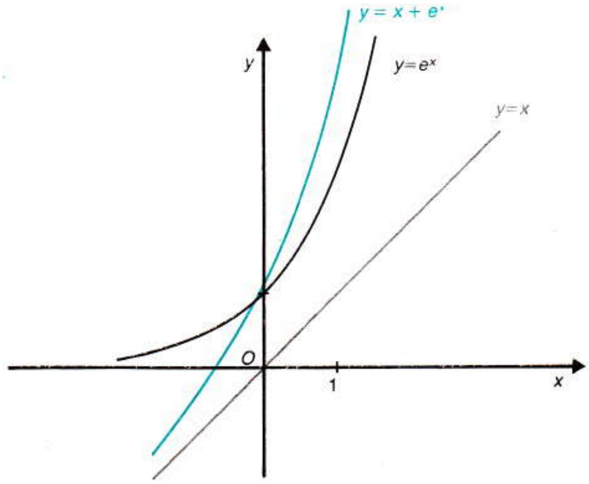


Fig. 25

Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate e permettono di cogliere il significato del seguente teorema:

se sono dati

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=m, \quad \text{con} \quad \text{ed } m \text{ finiti,}$$

risulta

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\ell+\mathrm{m}.$$

Le considerazioni grafico-intuitive sviluppate prima possono ora essere convalidate da una dimostrazione rigorosa.

La dimostrazione del teorema è basata sulla definizione di limite, che è esposta nel cap. 2, paragrafo 7, e che ora richiamiamo: il simbolo

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che $y=f(x)$ appartiene ad $I(\ell)$ quando x varia in $I(a)$.

Cominciamo col mettere in evidenza quello che sappiamo (cioè l'ipotesi) e quello che dobbiamo dimostrare (cioè la tesi).

Ipotesi:
si sa che

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=m.$$

Tesi:
si dimostra che

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\ell+m.$$

Dimostrazione.
Per dimostrare il teorema occorre verificare che la tesi segue necessariamente dall'ipotesi.
In base alla definizione di limite la tesi consiste in questo:
scelto un qualunque intorno $I(\ell+\mathrm{m})$, si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, quando x varia in $I(a)$, $y=[f(x)+g(x)]$ varia nell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$.
Indichiamo dunque con ε il raggio dell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$ scelto e verifichiamo che l'ipotesi permette di determinare l'intorno $I(a)$ richiesto dalla tesi. Si può procedere così. Si sceglie l'intorno $I(\ell)$ di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$ e, in base all'ipotesi, si trova l'intorno $I_1(a)$, tale che, se x varia in $I_1(a)$, $y=f(x)$ varia in $I(\ell)$, cioè risulta (fig. 26):

$$\ell-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<\ell+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Analogamente, si sceglie l'intorno $I(m)$ di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$ e si trova l'intorno $I_2(a)$, tale che, se x varia in $I_2(a)$, $y=g(x)$ cade in $I(m)$, ossia risulta (fig. 27)

$$m-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<m+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

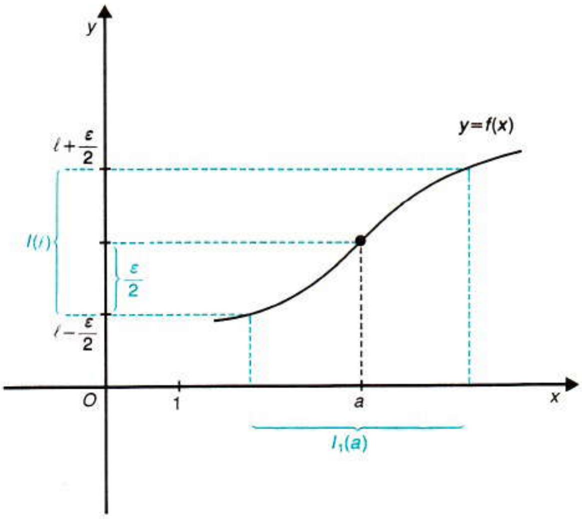


Fig. 26

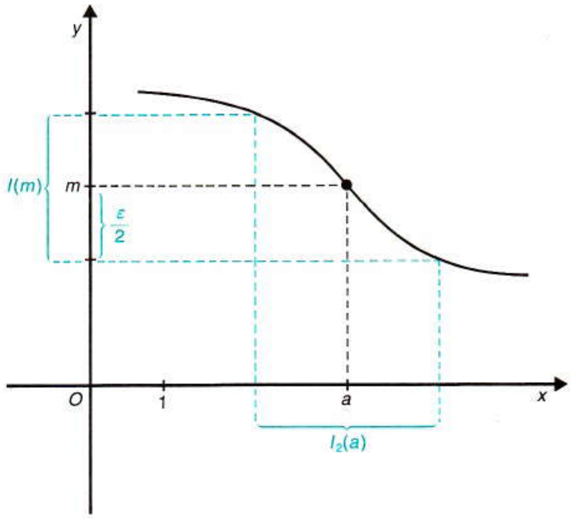


Fig. 27

È chiaro che gli intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$ sono in generale diversi; se indichiamo allora con $I(a)$ l'intorno di raggio minore, si ha che, quando x varia in $I(a)$, le relazioni (1) e le (2) valgono contemporaneamente. Addizionando membro a membro queste due disuguaglianze, si ha:

$$[\ell+\mathrm{m}]-\varepsilon<[f(x)+g(x)]<[\ell+\mathrm{m}]+\varepsilon.$$

Quest'ultima condizione assicura che, quando x varia in $I(a)$, $y=[f(x)+g(x)]$ varia proprio nell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$ di raggio ε scelto all'inizio; la dimostrazione è così completata.

Un'osservazione importante: la dimostrazione vale se a indica un numero finito, o anche il simbolo ∞, purché ℓ ed m indichino due numeri finiti.

In conclusione, a partire da considerazioni di tipo grafico-intuitivo o conducendo una rigorosa dimostrazione, si arriva a stabilire la regola seguente: **per calcolare il limite di una somma di funzioni, basta sommare i singoli limiti.**

In modo analogo si riesce a stabilire il procedimento per calcolare il limite del prodotto di due funzioni, del reciproco di una funzione e, infine, del quoziente di due funzioni.
Le regole ottenute si possono riassumere nel modo seguente:

se sono dati

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=m, \quad \text{con} \quad \ell \text{ ed } m \text{ finiti,}$$

risulta

(1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\ell+\mathrm{m}$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]=\ell\cdot\mathrm{m}$,

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{m}$, **purché sia** $m\neq 0$

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\ell}{m}$, **purché sia** $m\neq 0$

Si nota subito che rimane nella regola (3) un caso critico da trattare: quando risulta $m=0$, ossia

$$\lim_{x\to a} g(x)=0$$

In questo caso infatti non si può ottenere il

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$$

calcolando il quoziente $\dfrac{1}{m}$, dato che **non si può eseguire l'operazione** $\dfrac{1}{0}$.

Una situazione analoga si trova anche nella regola (4): il limite del quoziente di due funzioni non è quoziente dei limiti quando il denominatore tende a 0.

Fissiamo ora l'attenzione su questi casi particolarmente importanti, esaminando da un punto di vista grafico-intuitivo l'esempio seguente:

$$\text{dato} \quad \lim_{x\to 0} x^2=0, \quad \text{calcolare} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Ricordiamo prima di tutto quanto è stato già detto nel cap. 2:
con il simbolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

non si intende assegnare ad x esattamente il valore 0.

Si intende invece esaminare la funzione

$$y=\frac{1}{x^2}$$

per studiare l'andamento di y, quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0.

È facile così avvicinarsi intuitivamente al risultato del limite considerato, basandosi sulla fig. 28: i reciproci di numeri vicini a zero sono numeri grandi in valore assoluto; perciò risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
$-0{,}5$	$0{,}25$	$\frac{1}{0{,}25}=4$
$-0{,}1$	$0{,}01$	$\frac{1}{0{,}01}=100$
$\vdots$		
0	0	non esiste
$\vdots$		
$0{,}1$	$0{,}01$	100
$0{,}5$	$0{,}25$	4

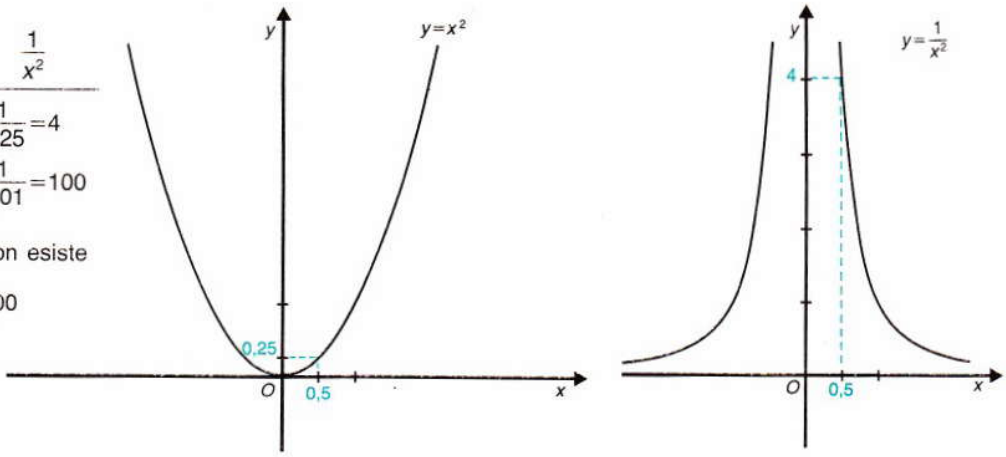


Fig. 28

Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate e conducono a stabilire la seguente regola:

se è dato $\lim_{x\to a} g(x)=0$, **risulta** $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty$

Il procedimento grafico-intuitivo sviluppato prima può ora essere convalidato da una dimostrazione rigorosa, basata sulle definizioni di limite esposte nel cap. 2, paragrafi 3 e 6.

Cominciamo col mettere in evidenza l'ipotesi e la tesi del teorema:

Ipotesi:

$$\lim_{x\to a} g(x)=0,$$

ossia, scelto comunque un intorno $I(0)$, di raggio ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, allora $y=g(x)$ varia in $I(0)$, cioè risulta:

$$|g(x)|<\varepsilon.$$

Tesi:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty,$$

ossia, scelto un numero $M>0$, grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|}>M$$

Dimostrazione.
È facile ora verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi: scegliamo un numero ε, positivo e molto piccolo e troviamo, in base all'ipotesi, l'intorno $I(a)$ per cui risulta

$$|g(x)|<\varepsilon;$$

così, quando x varia in $I(a)$, risulta anche

$$\frac{1}{|g(x)|}>\frac{1}{\varepsilon},$$

dove ora $\frac{1}{\varepsilon}$, reciproco di un numero molto piccolo, è un valore molto grande, che possiamo indicare con M.
Troviamo così che, nell'intorno $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|}>M$$

con M grande a piacere e questo garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty.$$

In conclusione, si è dimostrato rigorosamente che **vale ∞ il limite del reciproco di una funzione che tende a 0**.
Questo risultato ha un'immediata conseguenza sul calcolo di limiti di quozienti con il denominatore che tende a 0: per calcolare limiti del tipo

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

ci si può ridurre a calcolare

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$$

Si è dunque condotti a studiare l'algebra dei limiti infiniti.

B) Algebra dei limiti infiniti

Si tratta di determinare delle regole per il calcolo di limiti, quando si presentano situazioni di questo tipo: si deve calcolare

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)], \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)], \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}, \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e almeno una delle due funzioni tende all'infinito per $x\to a$.
Ecco due esempi.

1) Calcolare $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+e^x\right)$, sapendo che risulta $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ e $\lim_{x\to 0} e^x=1$

2) Calcolare $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}$, sapendo che risulta $\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$

In questi casi non si possono certo calcolare i limiti sommando o dividendo il numero 1 con il simbolo ∞, perché tali operazioni non hanno significato. Ci si può invece basare, come nella parte A), su due tipi di procedimento:
- considerazioni di tipo grafico, basate sulla nozione intuitiva di limite[1];
- rigorose dimostrazioni basate sulla definizione di limite[2].

Per avere un'idea di come si procede, esaminiamo il secondo esempio, cominciando a sviluppare le considerazioni di tipo grafico-intuitivo.

[1] Vedi anche cap. 2, paragrafi 2 e 5.
[2] Vedi anche cap. 2, paragrafi 3 e 6.

In fig. 29 sono rappresentate le funzioni

$$y=x^3 \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x^3}$$

Le figure permettono di ricordare facilmente che il simbolo

$$\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$$

ha il significato seguente: quando si assegnano ad x valori sempre più grandi in modulo $y=x^3$ assume valori sempre più grandi in modulo.
Ma allora, quando si sostituiscono ad x numeri sempre più grandi in valore assoluto, $y=\frac{1}{x^3}$ assume valori sempre più vicini a 0, dato che si tratta dei reciproci di numeri molto grandi.

x	x^3	$\frac{1}{x^3}$
5	125	$\frac{1}{125}=0{,}08$
10	1000	$\frac{1}{1000}=0{,}001$
-5	-125	$-\frac{1}{125}=-0{,}08$
-10	-1000	$-\frac{1}{1000}=-0{,}001$

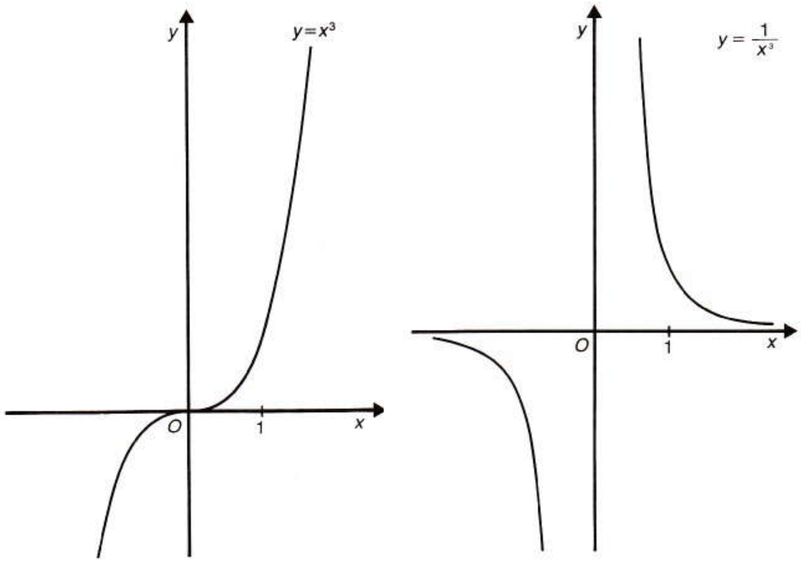


Fig. 29

Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate e conducono a stabilire la seguente regola:

$$\textbf{dato} \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty, \qquad \textbf{risulta} \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$$

Il ragionamento grafico-intuitivo seguito prima può essere convalidato da una dimostrazione rigorosa, basata sulle definizioni di limite.

Cominciamo col mettere in evidenza l'ipotesi e la tesi del teorema:

Ipotesi:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

ossia, scelto un numero $M>0$, grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$|g(x)|>M.$$

Tesi:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

ossia, scelto comunque un intorno $I(0)$, di raggio ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, allora $\frac{1}{g(x)}$ varia in $I(0)$, cioè risulta:

$$\frac{1}{|g(x)|} < \varepsilon,$$

Dimostrazione.

È facile verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi: scegliamo un numero M, positivo e molto grande e troviamo, in base all'ipotesi, l'intorno $I(a)$ per cui risulta

$$|g(x)| > M;$$

così, quando x varia in $I(a)$, risulta pure

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{M},$$

dove ora $\frac{1}{M}$, reciproco di un numero molto grande, è un valore molto piccolo, che possiamo indicare con ε.

Troviamo così che, nell'intorno $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|} < \varepsilon,$$

con ε piccolo a piacere e questo garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

In modo analogo si arriva a stabilire le regole riassunte nella tabella seguente.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]$	$\lim\limits_{x\to a} [g(x)]$	$\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$l\neq 0$	∞	∞	∞	0	0
∞	$m\neq 0$	∞	∞	$\frac{1}{m}$	∞
0	∞	∞	?	0	0
∞	0	∞	?	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	0	?

Nella tabella si nota subito il simbolo **?**, che segnala alcune situazioni in cui il calcolo dei limiti presenta particolari difficoltà; è proprio di queste situazioni che ci occuperemo ora.

C) Forme indeterminate

Nella tabella precedente abbiamo indicato delle situazioni in cui il calcolo di limiti presenta particolari difficoltà; le situazioni sono le seguenti:

1) dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

2) dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$,

3) dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$.

Vediamo meglio di che si tratta, esaminando qualche esempio relativo al caso 1).
Sono dati

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

e si debbono calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2}.$$

La fig. 30 con le relative tabelle suggerisce i seguenti risultati:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2}=0.$$

x	x^2	$\dfrac{x^2}{x}$	$\dfrac{x}{x^2}$
10	100	10	0,1
100	10.000	100	0,001
1000	10^6	1000	0,001
↓	↓	↓	↓
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

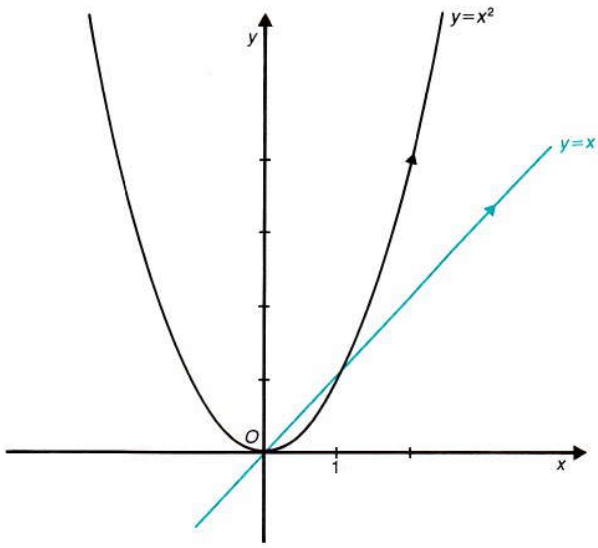


Fig. 30

La figura suggerisce inoltre la seguente osservazione: se $x\to+\infty$, y assume valori sempre più grandi, sia quando si percorre la parabola (d'equazione $y=x^2$), sia quando si percorre la retta (d'equazione $y=x$), ma y cresce più rapidamente se si percorre la parabola (si ha una "salita più ripida").

Così, risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$$

perché il numeratore cresce più rapidamente del denominatore e il quoziente si avvia al risultato ∞ "dettato dal numeratore".
Si trova invece:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

perché si ha un quoziente reciproco del precedente.
Se poi sono dati (fig. 31)

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

si trova che risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

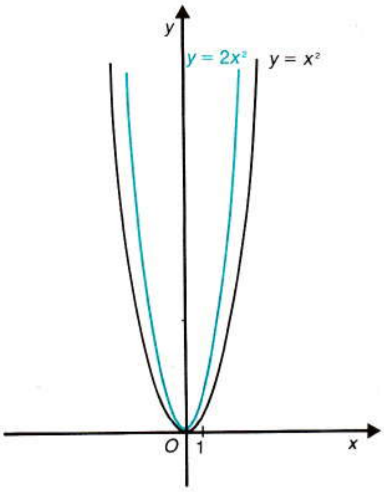


Fig. 31

Anche in questi casi le figure suggeriscono un'interpretazione intuitiva dei risultati: quando $x\to+\infty$, numeratore e denominatore crescono in modo analogo e perciò il quoziente tende ad un limite finito.

Gli esempi presentati mostrano un fatto inaspettato: quando si considera il limite del quoziente di due funzioni che tendono entrambe ad ∞, non si ottiene sempre un ben determinato risultato; si può ottenere ∞, 0, oppure un numero ℓ, a seconda del tipo di funzioni considerate.

Per questa ragione si dice che il limite del quoziente di due funzioni che tendono ad ∞ è **una forma indeterminata del tipo** $\frac{\infty}{\infty}$.

Considerazioni del tutto analoghe si possono sviluppare anche nei casi (2) e (3); si ha dunque che:

- il limite del prodotto di una funzione che tende a 0 per una che tende ad infinito dà luogo ad **una forma indeterminata del tipo $0\,\infty$**;
- il limite della differenza di due funzioni che tendono a $+\infty$ dà luogo ad **una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$**.

Si trova poi un'altra forma indeterminata calcolando il quoziente di due funzioni che tendono a 0: è **la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$**.

Infatti, un limite del tipo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

si può sempre scrivere nella forma seguente

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}, \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\infty.$$

Quest'ultimo limite è una forma indeterminata; deve dunque essere una forma indeterminata anche il limite da cui siamo partiti.

Si arriva così ad individuare quattro tipi di limiti che si presentano come forme indeterminate:

- **la forma del tipo $\frac{\infty}{\infty}$,**
- **la forma del tipo $\frac{0}{0}$,**
- **la forma del tipo $0\,\infty$,**
- **la forma del tipo $\infty-\infty$.**

In questi casi non ci si può più valere dell'algebra dei limiti presentata nelle parti A) e B); occorre invece ricorrere ad appositi metodi.

Alcuni di questi metodi, validi solo in alcuni casi particolari, si trovano nei paragrafi 6 e 7, mentre il metodo più generale per trattare le forme indeterminate, che si basa sulle derivate, è presentato nel cap. 4 paragrafo 8.

6. Risoluzione di forme indeterminate: qualche caso semplice

Nel paragrafo precedente abbiamo indicato delle situazioni in cui non si riescono a trovare delle regole per calcolare il risultato del limite; si tratta dei casi seguenti:

a) sono dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ e si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
si ha la **forma indeterminata del tipo** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

b) sono dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ e si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
si ha la **forma indeterminata del tipo** $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

c) sono dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ e si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$;
si ha la **forma indeterminata del tipo 0** ∞.

d) sono dati $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ e si deve calcolare $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)]$;
si ha la **forma indeterminata del tipo** $\infty-\infty$.

Vedremo ora come in alcuni casi particolari si riesca a calcolare il risultato del limite anche in queste situazioni di indeterminazione.

1) Qualche caso particolare della forma $\infty-\infty$.

Cominciamo a lavorare sul seguente esempio numerico: si deve calcolare

$$\lim_{x\to\infty} (x^4-x^2).$$

Ecco come si può procedere. Si riscrive il polinomio assegnato mettendo in evidenza la potenza di x di grado più elevato; si ha:

$$x^4-x^2=x^4\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Così ci si riduce a calcolare il limite di un prodotto di funzioni che non si presenta più sotto una forma indeterminata; si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^4}_{\to\infty}\cdot\overbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 1}=\infty$$

In modo analogo si procede per calcolare il limite per $x\to\infty$ di un qualunque polinomio; si ha:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{(n-1)}}+\ldots+a_n\right)$$

perciò risulta:

$$\lim_{x\to\infty} (a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^n}_{\to\infty}\overbrace{\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{(n-1)}}+\ldots+a_n\right)}^{\to a_n}=\infty$$

In definitiva si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=\infty$$

2) Qualche caso particolare della forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Cominciamo ancora una volta con alcuni esempi numerici: si debbono calcolare i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-4x}{5x^2+3}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5}{6x^5+8x^3}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2+2}{2x^4-x}$.

Si può ripetere sia per il numeratore che per il denominatore il procedimento seguito prima:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\infty}{x^{\cancel{3}}}\cdot\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}_{\to 2}}{\cancel{x^2}\cdot\underbrace{\left(5+\frac{3}{x^2}\right)}_{\to 5}}=\infty \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-4x}{5x^2+3}=\infty$$

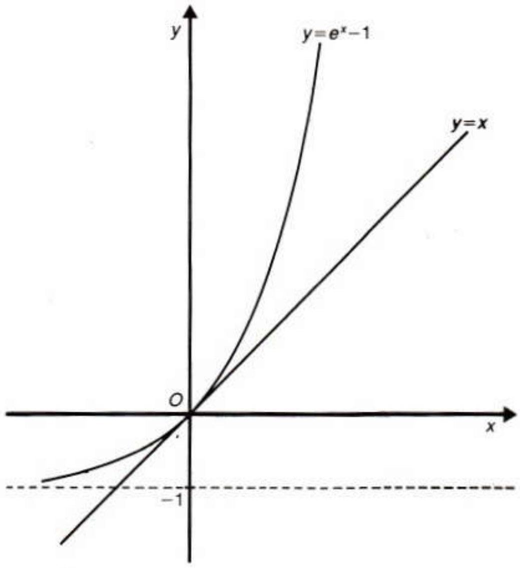
b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}\cdot\underbrace{\left(3-\frac{5}{x^4}\right)}_{\to 3}}{\underset{\infty\leftarrow}{x^{\cancel{5}}}\cdot\underbrace{\left(6+\frac{8}{x^2}\right)}_{\to 6}}=0 \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5}{6x^5+8x^3}=0$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}\cdot\underbrace{\left(5+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}_{\to 5}}{\cancel{x^4}\cdot\underbrace{\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}_{\to 2}}=\frac{5}{2} \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2+2}{2x^4-x}=\frac{5}{2}$$

È chiaro che si può procedere in modo analogo per calcolare il limite per $x\to\infty$ di un qualunque quoziente di polinomi[1]; così si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}=\begin{cases}\infty, & \textbf{se è dato } n>m\\ 0, & \textbf{se è dato } n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \textbf{se è dato } n=m.\end{cases}$$

[1] Si può osservare che i calcoli svolti non sono validi se risulta $x=0$; tuttavia, quando si calcola il limite per $x\to\infty$, si può trascurare la possibilità che x assuma proprio il valore 0.



x	$y=\dfrac{e^x-1}{x}$
−0,1	0,95
−0,01	0,995
0	non esiste
0,01	1,005
0,1	1,05

Fig. 32

3) Un caso particolare della forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Si vuole calcolare il seguente limite[1]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Esaminiamo prima di tutto la situazione da un punto di vista grafico-intuitivo: si osserva che le due funzioni $y=e^x-1$ e $y=x$, rappresentate in fig. 32, "decrescono in modo analogo intorno all'origine $O(0, 0)$"; d'altra parte la tabella presentata nella stessa figura suggerisce che risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Vediamo ora come si può dimostrare in modo più rigoroso che il risultato del limite assegnato vale proprio 1.

Occorre innanzitutto ricordare le seguenti nozioni:

1) la definizione del numero e e cioè[2]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2) la definizione di logaritmo naturale[3], che conduce a scrivere

$$e^{\ln x}=x$$

Per arrivare al risultato, si ricorre quindi ad un artificio: si scrive la variabile x nella forma seguente

$$x=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Occorre allora tener presente che risulta

$$ln\ 1=0,$$

perciò, per ottenere $x\to 0$, si deve considerare $\dfrac{1}{n}\to 0$, ossia $n\to\infty$.

[1] Il risultato di questo limite viene utilizzato nel cap. 4, paragrafo 5.
[2] Vedi Complementi del cap. 1.
[3] Vedi cap. 1, paragrafi 6 B e C.

Con l'artificio indicato, il quoziente diventa:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Basta ora ricordare una proprierà dei logaritmi per arrivare a scrivere il quoziente nella forma più opportuna; la proprietà è la seguente:

$$p\cdot\ln a=\ln\left(a^p\right)$$

Così, invece di calcolare il limite assegnato, si arriva a calcolare:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\ln e}=1$$

In questo modo abbiamo dimostrato rigorosamente che risulta:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.}$$

È immediato osservare che i metodi presentati valgono solo in pochi casi particolari.
Nel prossimo paragrafo parleremo di un teorema che indica un procedimento di più ampia portata; tuttavia anche questo teorema si riesce ad applicare solo in particolari condizioni.
Il metodo più generale per trattare le forme indeterminate richiede l'uso delle derivate e perciò è presentato nel cap. 4, paragrafo 6.

7. Teorema del confronto. Qualche applicazione

Presentiamo in questo paragrafo un teorema che viene spesso utilizzato nel calcolo di limiti; il teorema può essere enunciato nel modo seguente:

Teorema del confronto

Se tre funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ soddisfano le seguenti condizioni:
I) per qualunque x variabile in un intorno $I(a)$ risulta

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x),$$

II) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell,$

si ha allora

$$\lim_{x\to a} g(x)=\ell.$$

Osserviamo subito che il teorema, chiamato anche "dei due carabinieri", ha un immediato significato intuitivo: la funzione $y=g(x)$ nelle vicinanze dell'ascissa $x=a$ rimane "imprigionata" fra due funzioni che tendono allo stesso limite ℓ, e perciò dovrà tendere anch'essa allo stesso limite ℓ (fig. 33).

Vediamo ora come si svolge la dimostrazione di questo teorema.

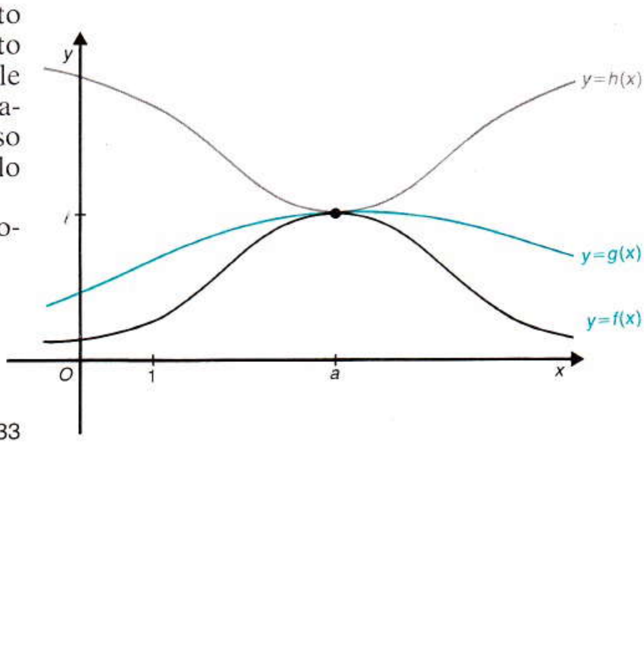


Fig. 33

Cominciamo col fissare l'attenzione su ciò che è noto (ipotesi) e ciò che si vuole dimostrare (tesi).

Ipotesi.

I) per qualunque x variabile in un intorno $I(a)$ risulta $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
II) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$;

Tesi:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Dimostrazione.

Per dimostrare il teorema ci si basa sulla definizione di limite, verificando che dalle ipotesi deriva la seguente condizione: scelto un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ in modo che $g(x)$ appartenga a $I(\ell)$, se x varia in $I(a)$. Si sceglie dunque un intorno $I(\ell)$ di raggio ε e si trovano, basandosi sulla parte II) dell'ipotesi, i seguenti intorni (figg. 34 e 35):

– l'intorno $I_1(a)$ tale che, se x varia in $I_1(a)$, $f(x)$ appartiene a $I(\ell)$, cioè risulta

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \tag{1}$$

– l'intorno $I_2(a)$ tale che, se x varia in $I_2(a)$, $h(x)$ appartiene a $I(\ell)$, ossia si ha

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon. \tag{2}$$

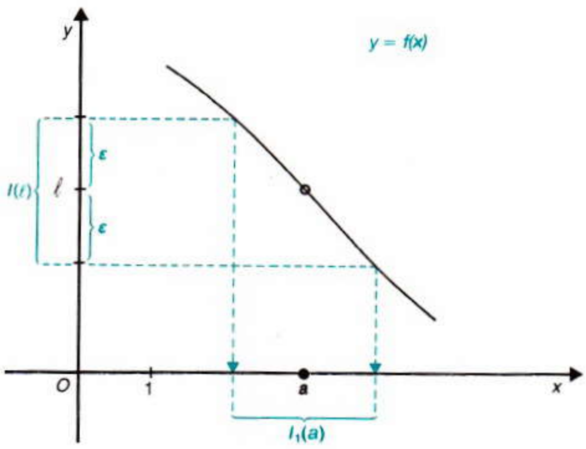


Fig. 34

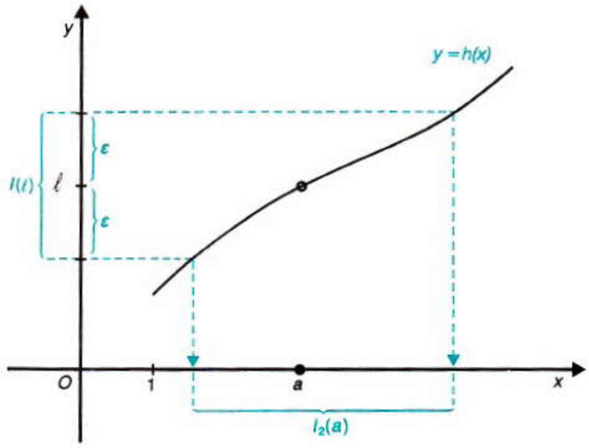


Fig. 35

Si indica poi con $I(a)$ il più piccolo fra i due intorni precedentemente determinati; è chiaro che, quando x varia in $I(a)$, risultano contemporaneamente verificate le disuguaglianze (1) e (2), insieme alla parte I) dell'ipotesi; si ha dunque:

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

La dimostrazione è così completata, dato che, in base alla definizione di limite, la disuguaglianza ottenuta garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

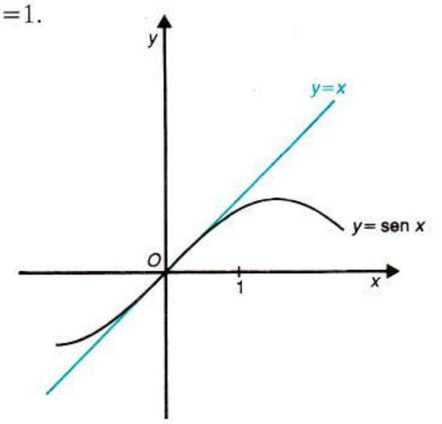
Il teorema del confronto risulta molto utile nel calcolo di limiti; spesso infatti non si riesce a calcolare direttamente il limite di una funzione $y = g(x)$, ma è possibile trovare due funzioni di confronto, $y = f(x)$ e $y = h(x)$, di cui è facile calcolare il limite.

Un esempio è fornito dal limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}.$$

Cominciamo con l'esaminare la situazione da un punto di vista grafico-intuitivo: si osserva che le due funzioni $y = \text{sen } x$ e $y = x$, rappresentate in fig. 36, "decrescono in modo analogo intorno all'origine $O(0, 0)$; d'altra parte la tabella presentata nella figura suggerisce che risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$



x	$y = \dfrac{\text{sen } x}{x}$
−0,1	0,998
−0,01	0,99998
0	non esiste
0,01	0,99998
0,1	0,998

Fig. 36

Valutiamo ora questo limite in modo più rigoroso, valendoci del teorema del confronto; per questo occorre trovare due funzioni che soddisfino le seguenti condizioni:

I) "imprigionano" la funzione $y = \dfrac{\text{sen } x}{x}$, quando x varia in un intorno di 0.

II) tendono allo stesso limite per $x \to 0$.

Una prima idea viene suggerita dalla fig. 37: l'arco AP rimane "stretto" fra la semicorda PH e il segmento di tangente AT, mentre il punto P percorre l'arco AB. Se poi si ricorda la definizione delle funzioni circolari $y = \text{sen } x$ e $y = \text{tg } x$ (fig. 38), si ha che:

x indica la lunghezza dell'arco AP,
sen x indica l'ordinata del punto P,
tg x indica l'ordinata del punto T.

Perciò, quando x varia nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, risulta: $\text{sen } x < x < \text{tg } x$.

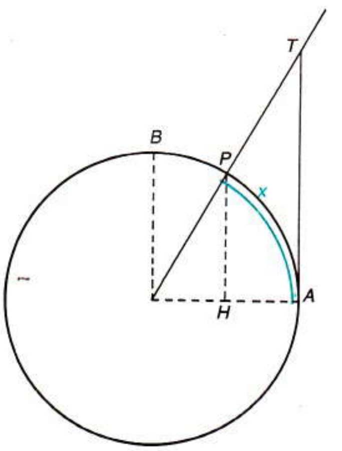


Fig. 37

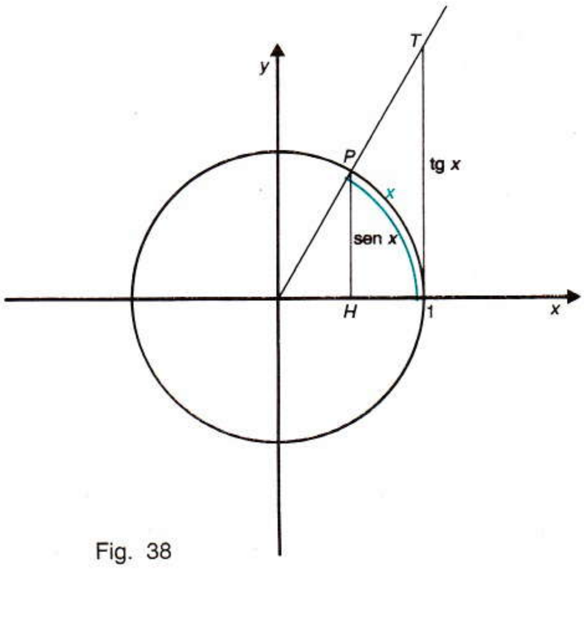


Fig. 38

A partire da queste disuguaglianze si procede nel modo seguente.

– Si tiene presente la relazione fondamentale $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e si scrive:

$$\operatorname{sen} x<x<\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

– Si dividono tutti i membri per sen x, ottenendo[1]:

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x}.$$

– Si ricavano le disuguaglianze che legano i reciproci di ogni membro[2]; così si ha

$$\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1, \qquad \text{nell'intervallo} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

– Si tiene presente che le stesse disuguaglianze sono valide anche nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, dato che risulta (fig. 39)

$$\cos(-x)=\cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Si arriva così a riconoscere si hanno le seguenti condizioni (fig. 40):

I) $\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$ nell'intorno $I(0)$ di raggio $\frac{\pi}{2}$,

II) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x=\lim\limits_{x\to 0} 1=1.$

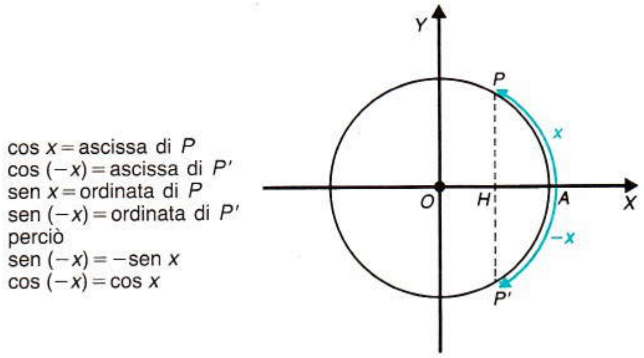


Fig. 39

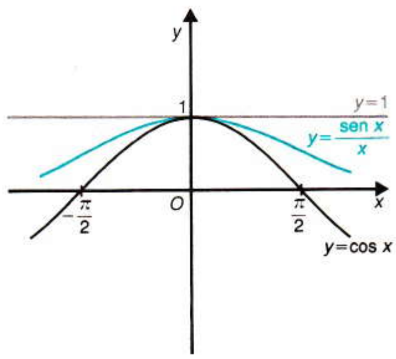


Fig. 40

Il teorema del confronto garantisce dunque che risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

A partire da questo risultato, si può calcolare il limite di altre forme indeterminate, in cui intervengono le funzioni circolari; ecco un esempio, che riprenderemo nel capitolo successivo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

[1] Tenere presente che sen x è positivo quando x varia nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

[2] Tenere presenti le note proprietà delle disuguaglianze: da $a<b$ si ricava $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$; da $a>b$ si ricava $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che si riesce a risolvere basandosi sui risultati precedenti e su una nota formula di trigonometria:

$$\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1,$$

da cui si ricava

$$\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

Si procede così: si riscrive la funzione assegnata in altra forma moltiplicandone il numeratore ed il denominatore per $(1+\cos x)$. Si ottiene[1]:

$$\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}=\frac{\text{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}$$

Così, invece di calcolare il limite assegnato, si calcola il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}$$

E, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\text{sen } x}_{0}\cdot\underbrace{\frac{\text{sen } x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}=0$$

si ha anche

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

8. Teoremi sulle funzioni continue

In questo paragrafo sono presentati alcuni teoremi sulle funzioni continue. Si tratta di teoremi che richiedono talvolta sottili dimostrazioni, anche se sono facili da scoprire quando ci si basa su considerazioni geometriche. Il paragrafo è diviso in due parti. Nella parte A sono presentati dei teoremi che permettono di scoprire se una funzione è continua; nella parte B sono esposte delle proprietà valide per tutte le funzioni continue.

A) Teoremi per verificare la continuità di una funzione

All'inizio di questo capitolo (paragrafo 2) è stata indicata la condizione per riconoscere se una funzione è continua:

una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se si verifica che $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Si è anche visto come questa condizione permetta di riconoscere che sono continue su tutto l'asse reale le seguenti funzioni elementari:

$$y=k,\quad y=x,\quad y=\text{sen } x,\quad y=e^x.$$

Ora, componendo opportunamente queste funzioni, se ne possono costruire molte altre. Ecco qualche esempio:

$y=x+k$, $\quad y=\text{sen } x+k$, ... (somme di funzioni continue)

$y=kx$, $\quad y=x \text{ sen } x$, ... (prodotti di funzioni continue)

$y=\frac{k}{x}$, $\quad y=\frac{x}{e^x}$, ... (quozienti di funzioni continue)

[1] È chiaro che l'operazione ora eseguita perde significato se risulta
$1+\cos x=0$, ossia $\cos x=-1$, cioè $x=\pi$.
Ma, dato che dobbiamo calcolare il limite dell'espressione per $x\to 0$, possiamo trascurare il caso che risulti $x=\pi$.

È facile continuare quest'elenco: si possono aggiungere le funzioni che si ottengono ripetendo le varie operazioni più volte o combinando operazioni diverse. Così si può arrivare a scrivere funzioni dall'espressione analitica molto complicata, come, per esempio, le seguenti:

$$y=\frac{4x^3-x^2+5x-4}{2x^4+x^2+3} \quad \text{oppure} \quad y=\frac{e^x \cdot \operatorname{sen} x}{x}$$

Di queste funzioni non si riesce a tracciare facilmente il grafico, tuttavia si può scoprire rapidamente se si tratta di funzioni continue; basta valersi dei teoremi seguenti:

date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, continue in un punto d'ascissa $x=a$, risultano continue nello stesso punto anche le seguenti funzioni:

I) $y=f(x)+g(x)$,

II) $y=f(x)g(x)$,

III) $y=\dfrac{1}{g(x)}$, **purché risulti** $g(a)\neq 0$,

IV) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, **purché risulti** $g(a)\neq 0$.

Questi teoremi sono un'immediata conseguenza di quelli relativi all'algebra dei limiti. Per rendersene conto basta dimostrare il 1° teorema.

L'**ipotesi** è che le due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ siano continue per $x=a$, cioè

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$

La **tesi** è che sia continua la funzione $y=f(x)+g(x)$ per $x=a$, cioè risulti:

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]=f(a)+g(a).$$

La **dimostrazione** è molto facile: dall'ipotesi segue immediatamente la tesi, dato che per ottenere il limite di una somma di funzioni si calcola la somma dei limiti.

Questi teoremi permettono di verificare la continuità di un gran numero di funzioni; ecco qualche esempio particolarmente significativo.

- A partire dalla funzione $y=x$, applicando più volte il teorema relativo alla moltiplicazione di funzioni continue, si verifica che sono continue tutte le funzioni del tipo $y=x^n$.
- Applicando i teoremi relativi all'addizione e alla moltiplicazione di funzioni continue, a partire dalle funzioni $y=k$ e $y=x^n$, si verifica che sono continui i polinomi, cioè le funzioni del tipo

  $$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

- Applicando ad una coppia di polinomi il teorema relativo alla divisione di funzioni continue, si verifica che sono continue tutte le funzioni razionali fratte, cioè tutti i quozienti di due polinomi del tipo

  $$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},$$

  purché si escludano i valori di x che rendono nullo il denominatore.

B) Proprietà delle funzioni continue

Teorema di Bolzano[1] (sui valori intermedi)

È data una funzione $y=f(x)$ continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e si fissano, all'interno dell'intervallo, due valori r ed s (con $r<s$) tali che $f(r)\neq f(s)$. Si verifica allora che nell'intervallo $[r, s]$ la funzione $y=f(x)$ assume tutti i valori compresi fra $f(r)$ e $f(s)$.

La proprietà espressa dal teorema è evidente, se si fa riferimento al grafico della funzione (fig. 41): la curva passa dal punto $R[r, f(r)]$ al punto $S[s, f(s)]$ senza salti né "fori"; perciò la funzione deve assumere tutti i valori compresi fra $f(r)$ e $f(s)$.

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema, perché è lunga e laboriosa.

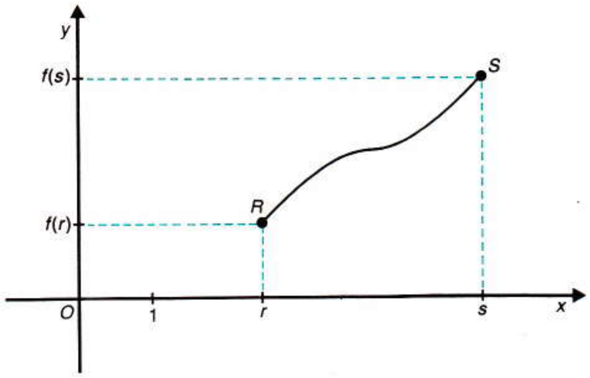


Fig. 41

Teorema dell'esistenza degli zeri

È data una funzione $y=f(x)$, continua in un intervallo chiuso $[a, b]$. Sapendo che $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno opposto, è sempre possibile trovare almeno un valore c dell'intervallo (a, b) tale che risulti $f(c)=0$.

Dal punto di vista grafico (fig. 42) il teorema è evidente: la curva raccorda senza interruzioni il punto $A[a, f(a)]$, situato al disopra dell'asse delle x, con $B[b, f(b)]$, posto al disotto dell'asse delle x; è chiaro che la curva dovrà tagliare l'asse delle x in un punto $C(c, 0)$.

Del resto, questo teorema è un'immediata conseguenza del teorema precedente; basta considerare $r=a$ e $s=b$: se la funzione deve assumere tutti i valori compresi fra un numero positivo (per esempio $f(a)$) ed uno negativo ($f(b)$) dovrà anche assumere il valore 0.

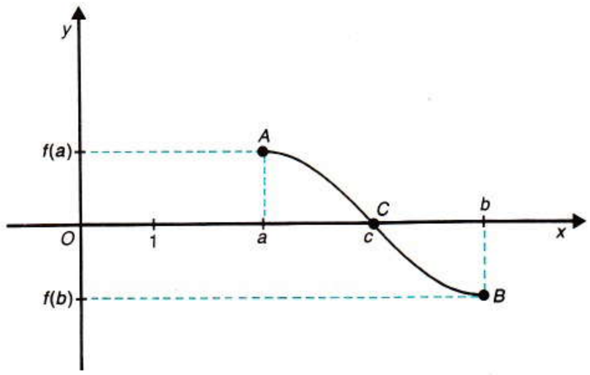


Fig. 42

[1] Bernhard Bolzano (1781-1848) era un sacerdote boemo, che nacque e morì a Praga. Fin dagli inizi del 1800 si rese conto dell'esigenza di dimostrazioni rigorose nel campo dell'analisi e condusse importanti ricerche sui limiti e sulla continuità, anche se i risultati matematici da lui raggiunti furono completamente trascurati dai suoi contemporanei.

Teorema di Weierstrass[1] (sui valori estremi)

Una funzione continua in un intervallo chiuso [*a*, *b*] ammette sempre almeno un massimo e un minimo assoluto.

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema che è lunga e piuttosto artificiosa e ci limitiamo ad illustrarne l'enunciato con qualche considerazione di carattere grafico.

Proviamo dunque a costruire il grafico di qualche funzione che soddisfi l'ipotesi: deve trattarsi di una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, perciò il grafico deve essere un arco di curva che raccorda senza salti o interruzioni i due punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$.

Vediamo qualche grafico che si può ottenere se, per esempio, risulta

$$f(a) > f(b).$$

1) la curva può essere costituita da un arco sempre decrescente (fig. 43); così la funzione ha come massimo assoluto $f(a)$ e come minimo assoluto $f(b)$.
2) la curva decresce a partire da A; ma la funzione raggiunge il valore minimo $m \neq f(b)$ (fig. 44) e poi cresce fino a raggiungere $f(b)$.

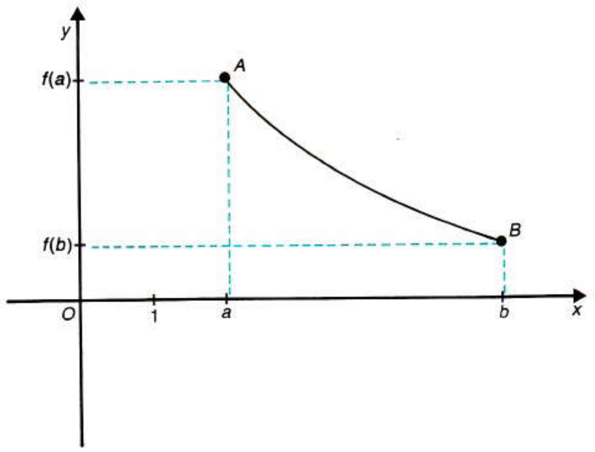


Fig. 43

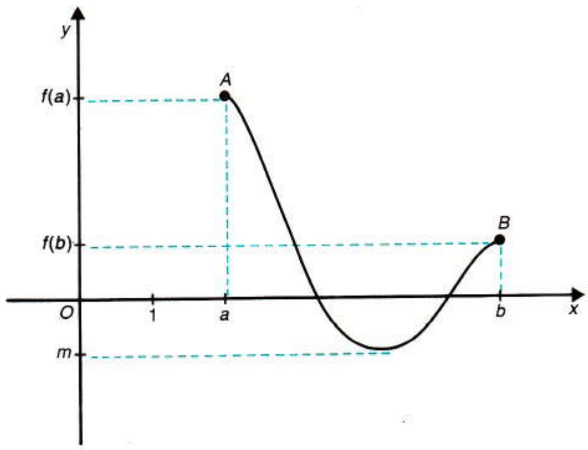


Fig. 44

3) la curva può essere crescente a partire da A (fig. 45). In tal caso non può però crescere indefinitamente, perché deve poi raggiungere il punto B, che ha un'ordinata minore. Dovrà allora verificarsi che la funzione cresce fino ad un valore massimo M e poi decresce. Per la curva di fig. 45 si ha, poi, che $f(b)$ rappresenta il minimo assoluto, cioè il più piccolo valore che la funzione assume nell'intervallo.
4) la curva può essere crescente a partire da A; ma la funzione, dopo aver raggiunto il valore massimo M, raggiunge il minimo $m \neq f(b)$ (fig. 46).

[1] Karl Weierstrass (1815-1897), uno dei più eminenti matematici del secolo scorso, visse ed insegnò in Germania; a lui si deve, fra l'altro, la «costruzione rigorosa» dell'analisi senza fare appello a considerazioni geometriche.

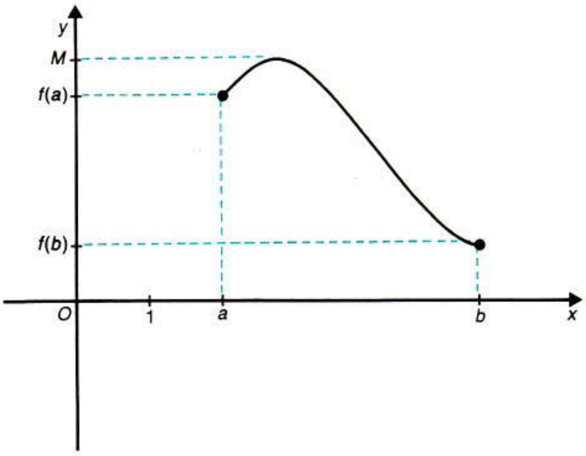


Fig. 45

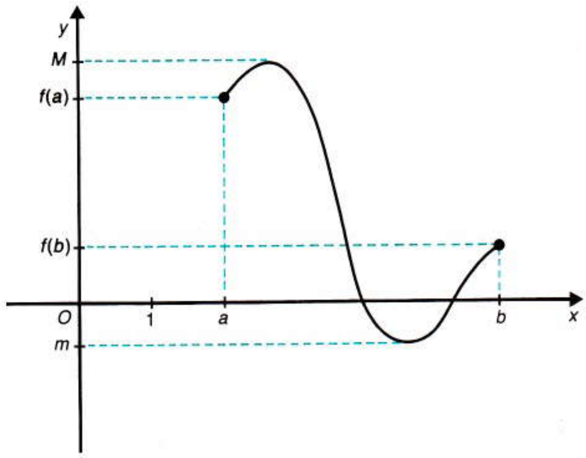


Fig. 46

Si capisce che, anche nel caso in cui risulti $f(a)<f(b)$, si trova sempre che la funzione deve avere un massimo assoluto (che è il più grande dei valori di $f(x)$) ed un minimo assoluto (che è il più piccolo dei valori di $f(x)$). I valori **massimo** e **minimo assoluti** della funzione prendono anche il nome di **valori estremi**.

Un'osservazione importante: nel teorema di Weierstrass l'ipotesi che l'intervallo considerato sia chiuso è essenziale. Le figg. 47 e 48 mostrano appunto due esempi di funzioni continue che non hanno massimo e minimo assoluti: in fig. 47 è rappresentata una funzione continua considerata in un intervallo aperto, mentre in fig. 48 è rappresentata una funzione esaminata in un intervallo illimitato.

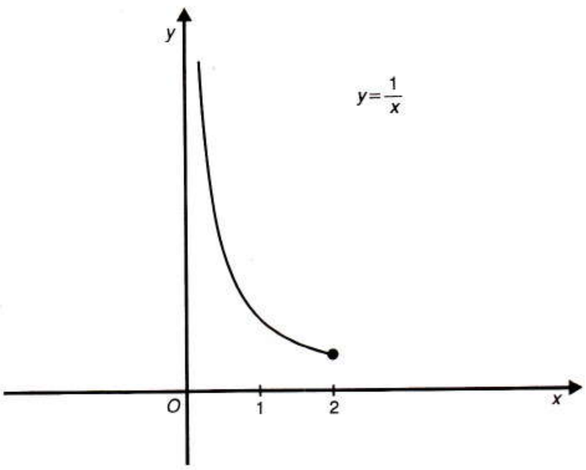


Fig. 47. La funzione $y=\dfrac{1}{x}$ è esaminata nell'intervallo $0<x\leq 2$. L'intervallo è limitato, ma aperto a sinistra (0 non fa parte dell'intervallo); la funzione non ha massimo assoluto.

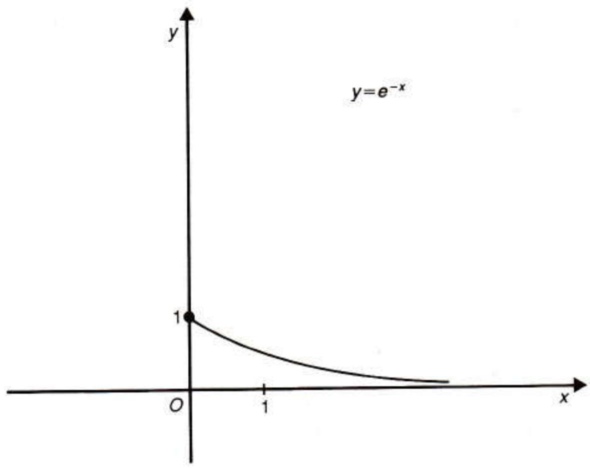


Fig. 48. La funzione $y=e^{-x}$ è esaminata nell'intervallo $x>0$. L'intervallo è illimitato a destra. La funzione non raggiunge il minimo assoluto.