3
Complementi

A. Numeri reali e rappresentazione sulla retta

1. I numeri interi e i numeri razionali sulla retta[1]

Quando si rappresentano i *numeri interi* su una retta, dove è fissata un'origine O e un'unità di misura (fig. 1), rimangono dei "tratti vuoti" fra un numero e l'altro, dei tratti cioè dove si trovano dei punti a cui non corrisponde nessun numero intero.

Se invece si rappresentano sulla retta i numeri razionali (fig. 2), si osserva una situazione completamente differente: fra due razionali, per esempio

$$\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4},$$

cade certamente almeno un razionale (fig. 3); è il numero

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{1}{2}$$

che si ottiene dalla media aritmetica dei due numeri dati.
E così, anche fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ ci sarà un altro razionale (fig. 3); è il numero

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{8}.$$

E ancora, fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$ c'è $\frac{5}{16}$ e così via...

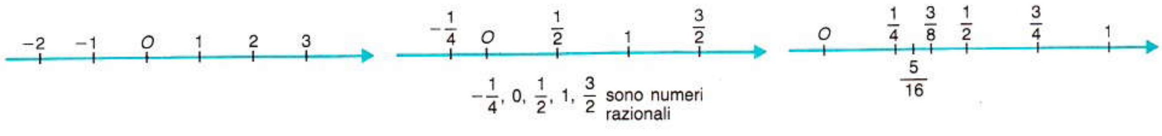


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Ci si rende dunque conto che, fra due numeri razionali, per quanto vicini, se ne può sempre inserire un altro. Si esprime questo fatto dicendo che **l'insieme dei numeri razionali è denso**.

Sembra davvero che questa "densità" non lasci nessun vuoto, nessuno spazio da riempire con altri numeri. Per scoprire che, oltre ai razionali, ci sono altri numeri, si considerano i numeri razionali scritti in forma decimale.

[1] La trattazione dei numeri reali esposta in questo Complemento è di tipo intuitivo-geometrico; per una trattazione assiomatica dei numeri reali vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, vol. III, pagg. 369-380.

2. La scrittura decimale dei numeri razionali. Decimali limitati e illimitati

Cominciamo col fissare l'attenzione su un esempio: scrivere in forma decimale il numero razionale $\frac{2}{7}$. Eseguendo la divisione 2:7, si ha:

$$\begin{array}{l|l} 2 & 7 \\ \hline 20 & 0{,}285714\ldots \\ \;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Si ottiene dunque un numero decimale illimitato che è certamente **periodico**: infatti una cifra o un gruppo di cifre del quoziente debbono ripetersi, dato che i resti della divisione debbono essere sempre minori del divisore 7; ora, non appena si ripetono i resti, si ripetono anche le cifre del quoziente.

Il ragionamento seguito ha carattere generale e può essere sempre ripetuto quando si scrive un numero razionale in forma decimale; si può dunque concludere che un numero razionale dà sempre luogo ad un numero decimale periodico[1].

Viceversa, è facile passare dalla scrittura decimale di un numero alla corrispondente **frazione generatrice**.

Fissiamo di nuovo l'attenzione su un esempio: scrivere la frazione generatrice del numero periodico

$$0,(2)=0,222222222\ldots$$

Questo numero si può anche scrivere nella forma seguente

$$0,2+0,02+0,002+\ldots$$

ossia

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{1}{10^2}\right)+\ldots$$

Il numero periodico 0,(2) è dunque la somma di una progressione geometrica di ragione

$$q=\frac{1}{10}$$

Perciò, per avere il numero scritto sotto forma di frazione, basta valersi della formula che dà la somma S dei termini di una progressione geometrica di ragione $q<1$ e cioè[2]

$$S=\frac{a}{1-q}$$

dove a è il primo termine.

Si ottiene in questo caso:

$$S=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$$

[1] Da notare che anche un numero decimale limitato, come per esempio 1,2, può essere considerato come un numero periodico; basta scrivere

1,2=1,20000000...

[2] Vedi Complemento A del cap. 2.

Il numero periodico 0,(2) è dunque la scrittura decimale della frazione $\frac{2}{9}$. Anche ora l'esempio indica un procedimento di carattere generale che si può sempre ripetere per trovare la frazione generatrice di un numero decimale periodico. Si arriva così alla seguente conclusione di carattere generale: **un qualunque numero razionale può essere rappresentato come un numero decimale illimitato periodico, e, viceversa, ogni decimale periodico rappresenta un numero razionale**.

3. I numeri irrazionali

Dalla conclusione del paragrafo precedente risulta che: **se un numero decimale illimitato non è periodico, ad esso non può corrispondere un numero razionale.**

Ora, non è difficile scrivere un numero decimale senza periodo; ecco qualche esempio:

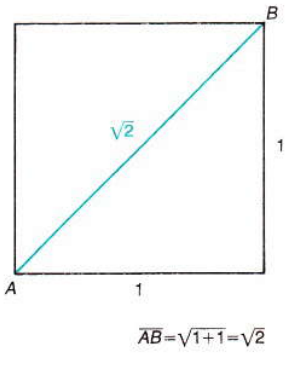
0,1234567891011...
1,357911131517...
2,4681012141618...

Questi numeri non sono certamente periodici, anche se è facile cogliere la legge con cui sono state scritte le successive cifre.

Ad un numero decimale illimitato non periodico si dà il nome di numero irrazionale (cioè non razionale).

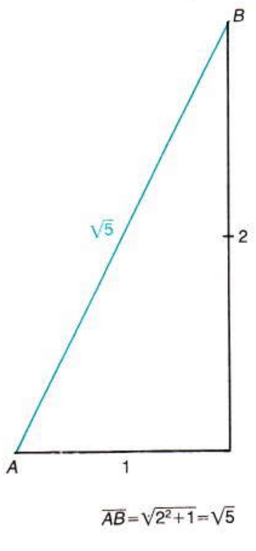
D'altra parte, l'introduzione dei numeri irrazionali non è solo frutto di fantasia, ma è anche legata a semplici problemi di geometria; ecco qualche esempio:

- è irrazionale il numero $\sqrt{2}$, che esprime la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 (fig. 4)[1];
- applicando i teoremi di Pitagora o di Euclide, si scoprono altri numeri irrazionali, come $\sqrt{5}$ (fig. 5) o $\sqrt{3}$ (fig. 6);
- è irrazionale il numero π, che esprime la lunghezza della circonferenza con il diametro lungo 1;
- è irrazionale il numero e, base dei logaritmi naturali...[2].



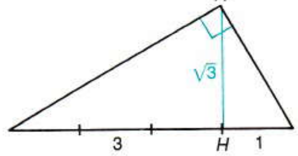
$\overline{AB}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

Fig. 4



$\overline{AB}=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$

Fig. 5



$\overline{AH}=\sqrt{3\cdot 1}=\sqrt{3}$

Fig. 6

[1] Vedi anche il Complemento B di questo capitolo.
[2] Vedi anche il Complemento A del cap. 2.

Eppure, tutti questi numeri che non sono razionali "trovano ancora posto" sulla retta. Per convincersene, basta seguire le costruzioni indicate nelle figg. 7-11,

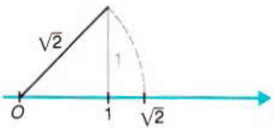


Fig. 7

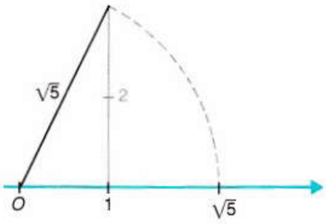


Fig. 8

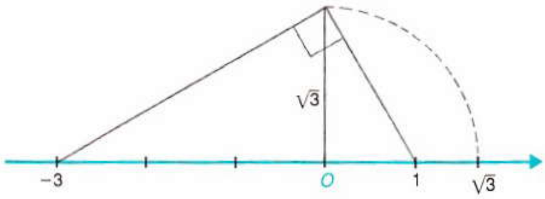


Fig. 9

rettificando
la semicirconferenza
di raggio $r=1$
si ottiene un segmento
lungo π

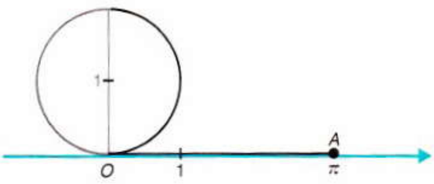


Fig. 10

dall'equazione
della curva
logaritmica
$y=\ln x$, ossia $x=e^y$
si ha
per $y=1$, $x=e$

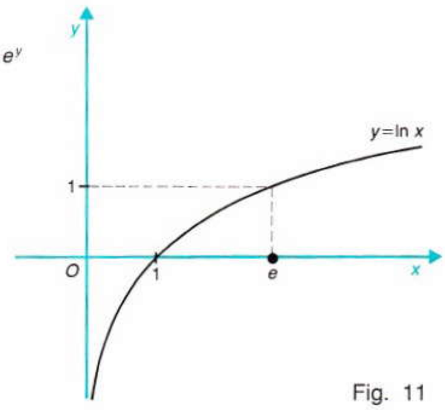


Fig. 11

4. Rappresentazione dei numeri reali sulla retta. L'assioma della continuità

Nel paragrafo precedente l'interpretazione dei numeri come punti di una retta ha condotto a scoprire che gli irrazionali occupano dei "vuoti invisibili" lasciati sulla retta dai razionali, cioè da numeri così "fitti" che sembrava non dovessero lasciare nessuno spazio libero.

Sulla retta si trovano dunque rappresentati numeri razionali e irrazionali; è per questo che si è dato un unico nome a tutto questi numeri: **numeri razionali e irrazionali formano l'insieme dei numeri reali.**
E così, la retta su cui sono rappresentati i numeri reali prende il nome di **retta reale**.

Questo ampio insieme numerico e la sua rappresentazione sulla retta fa sorgere una domanda: «i numeri reali riempiono completamente la retta o restano ancora dei "fori invisibili"?».

A questa domanda hanno dato una risposta definitiva i matematici Richard Dedekind e George Cantor, che, alla fine del secolo scorso, stabilirono come assioma (o postulato) la seguente proprietà:
ogni punto della retta corrisponde ad un solo numero reale e, viceversa, ogni numero reale può essere rappresentato in un solo modo con un punto della retta.

Questo assioma prende anche il nome di **assioma della continuità**, perché garantisce che la retta reale non ha "fori", cioè è continua.

Ed è proprio su questo assioma che sono basati i ragionamenti ed i procedimenti relativi alla definizione e al calcolo dei limiti: solo se la retta è continua, si possono sostituire ad x valori sempre più vicini ad un dato numero.

Dedekind stesso si rese conto dell'importanza di questo assioma nel calcolo differenziale, dato che nella prefazione di una sua famosa opera scrive: «Spesso si dice che il calcolo differenziale si occupa di grandezze continue, eppure non si dà mai una definizione rigorosa di questa continuità. Le trattazioni più rigorose che si hanno del calcolo differenziale non basano le loro dimostrazioni sulla continuità, ma fanno invece appello, più o meno coscientemente, a rappresentazioni geometriche o si servono di teoremi che, a loro volta, non furono mai dimostrati con mezzi puramente aritmetici... L'uso di argomenti geometrici è didatticamente efficace e forse anche indispensabile, se si vuole evitare un'eccessiva perdita di tempo, ma nessuno, credo, vorrà sostenere che una tale introduzione del calcolo differenziale possa vantarsi di essere scientifica...».