3
Esercizi

1. Fenomeni continui e discontinui

1. Per studiare la dilatazione termica di una sostanza, per esempio la paraffina, si può procedere così: si riscalda un blocchetto di paraffina, inizialmente mantenuto alla temperatura di 0°, e si misura il volume V del blocchetto al variare della temperatura T.
Il fenomeno è descritto, in prima approssimazione, da una legge del tipo

$$V=V_0+kT,$$

dove k è una costante e V_0 indica il volume alla temperatura di 0°. Questa legge descrive però il fenomeno solo se la temperatura si mantiene inferiore alla temperatura di fusione T_F, che è di circa 50°. Infatti, quando avviene la fusione, si ha un brusco aumento di volume, senza alcun cambiamento di temperatura. Continuando poi a scaldare la paraffina liquida, senza però raggiungere la temperatura di ebollizione T_E, si ha ancora un graduale aumento di volume descritto dalla legge

$$V=V_F+hT,$$

dove h è una costante (diversa da k) e V_F indica il volume della paraffina liquida alla temperatura di fusione.
La dilatazione della paraffina è regolata dunque dalla seguente legge:

$$V=V_0+kT, \quad \text{per } 0°\leq T<T_F,$$
$$V=V_F+hT, \quad \text{per } T_F\leq T\leq T_E.$$

Rappresentare graficamente la legge nell'intervallo $0°\leq T\leq T_E$ e scegliere fra le seguenti frasi quelle che descrivono correttamente il fenomeno e il corrispondente grafico:

a) – il fenomeno è continuo,
– il grafico della legge è continuo;

b) – il fenomeno è continuo solo nell'intervallo $0°\leq T<T_F$,
– il grafico è continuo solo nell'intervallo $0°\leq T<T_F$;

c) – il fenomeno ha una discontinuità in corrispondenza alla fusione,
– il grafico è discontinuo nel punto d'ascissa $T=T_F$.

2. Le figg. 1, 2, 3 e 4 rappresentano alcuni dei segnali elettrici che sono visualizzati più frequentemente sullo schermo di un oscilloscopio.
Esaminare ed interpretare le varie figure, distinguendo le curve continue da quelle discontinue.

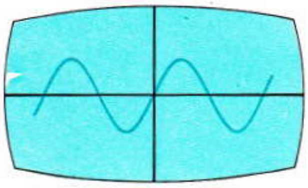


Fig. 1 segnale sinusoidale

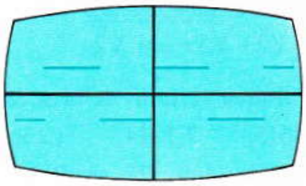


Fig. 2 onda quadra

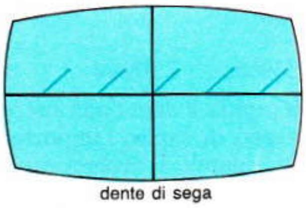


Fig. 3 dente di sega

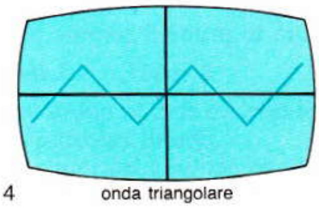


Fig. 4 onda triangolare

3. Esaminare i due seguenti sistemi di tassazione del reddito:

A) per redditi annui fino a 15 milioni, si paga il 18% del reddito,
per redditi annui fino a 20 milioni, si paga il 22% del reddito,
per redditi annui fino a 25 milioni, si paga il 26% del reddito,
per redditi annui fino a 30 milioni, si paga il 30% del reddito,
....

B) per i primi 15 milioni annui, l'imposta è il 18% del reddito,
per la parte eccedente i 15 milioni fino a 20 milioni, si paga il 22%,
per la parte eccedente i 20 milioni fino a 25 milioni, si paga il 26%,
per la parte eccedente i 25 milioni fino a 30 milioni, si paga il 30%,
....

risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega l'imposta I che si paga al reddito annuo R nel caso A) e tracciarne il grafico,
- scrivere la legge che lega l'imposta I che si paga al reddito annuo R nel caso B) e tracciarne il grafico,
- illustrare le principali differenze fra le due leggi, fissando in particolare l'attenzione sulla continuità o discontinuità delle funzioni ottenute.

4. Intorno al 1897, l'economista italiano Vilfredo Pareto osservò una certa regolarità nella distribuzione dei redditi nei paesi capitalisti.
Esaminando dati statistici rilevati in diversi paesi, Pareto considerava il numero y di persone che avevano un reddito annuo superiore o uguale ad un valore x; rappresentando graficamente i dati ordinati in questo modo, trovava che, nella maggior parte dei casi, i dati venivano ben raccordati da curve d'equazione

$$y=\frac{A}{(x-b)^n}$$

dove A è una costante caratteristica del paese esaminato, la costante b indica il minimo reddito rilevato e l'esponente n assume generalmente valori vicini a 1,5.
Tracciare un grafico approssimativo delle curve indicate, chiamate anche **curve di Pareto**, e descrivere il comportamento delle curve in corrispondenza del valore $x=b$, spiegandone il significato economico.

2. Definizione di funzione continua

Sulla definizione

Nel testo è data la seguente definizione di funzione continua in un punto:
una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Esaminare le definizioni di funzione continua in punto esposte negli esercizi dal 5 al 13 e verificare che sono equivalenti a quella data nel testo.

5. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risultano verificate le seguenti condizioni:

I) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

II) $\ell=f(a)$

6. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risultano verificate le seguenti condizioni:

I) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell_1$

II) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell_2$

III) $\ell_1=\ell_2=f(a)$

7. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{x\to a} [f(x)-f(a)]=0$$

8. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \quad .$$

(Scrivendo $x=a+h$, si ha che, quando $h\to 0$, $x\to a$ ...)

9. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]=0$$

(Vedere anche lo svolgimento dell'esercizio precedente ...)

10. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se, scelto un qualunque numero positivo ε, si può trovare un corrispondente intorno $I(a)$, tale che risulti

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon, \qquad \text{quando si sceglie } x \text{ in } I(a).$$

(Basarsi sulla definizione di funzione continua esposta nell'esercizio 7 e tenere presente la definizione di limite data nel paragrafo 6 del cap. 2).

11. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se, scelto un qualunque numero positivo ε, si può trovare un corrispondente valore δ_ε, tale che risulti

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon, \qquad \text{per qualunque } x \text{ che soddisfa la disuguaglianza } |x-a|<\delta_\varepsilon.$$

(Tenere presente lo svolgimento dell'esercizio precedente e la definizione di limite, data nel paragrafo 6 del cap. 2).

12. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se, scelto un qualunque numero positivo ε, si può trovare un corrispondente intorno $I(0)$, tale che risulti

$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon, \qquad \text{quando si sceglie } h \text{ in } I(0).$$

(Basarsi sulla definizione di funzione continua esposta negli esercizi 8 e 9 e tenere presente la definizione di limite, data nel paragrafo 6 del cap. 2).

13. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se, scelto un qualunque numero positivo ε, si può trovare un corrispondente valore δ_ε, tale che risulti

$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon, \qquad \text{per qualunque } h \text{ che soddisfa la disuguaglianza } |h|<\delta_\varepsilon.$$

(Tenere presente lo svolgimento dell'esercizio precedente e la definizione di limite, data nel paragrafo 6 del cap. 2).

Le definizioni di funzione continua esposte negli esercizi dal 14 al 18 sono tratte da opere di grandi matematici; confrontare tali definizioni con quella esposta nel testo rilevando analogie e differenze.

14. La linea curva continua è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata di x. Ma se la linea curva è composta da differenti parti BM, MD, DM, ... determinate da più funzioni di x, ... noi chiamiamo queste specie di linee curve discontinue o miste o irregolari, giacché esse non sono formate secondo una legge costante e sono composte di porzioni di differenti curve continue (Eulero 1748).

15. La legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato ad un altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge (Arbogast 1791).

16. Sia $f(x)$ una funzione della variabile x e supponiamo che, per ogni valore di x entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso entro questi limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α, la funzione stessa riceverà per incremento la differenza

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x. Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x, funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di x compreso fra questi due limiti, il valore numerico della differenza

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrescerà indefinitamente insieme a quello di α (Cauchy 1821).

17. La continuità è ancora un'idea confusa, che definisce come continua una funzione reale $f(x)$ di una variabile x quando, fissata una quantità δ, piccola quanto si vuole, si possa rendere

$$f(x)-f(x')<\delta$$

e questa disuguaglianza sussista poi ponendo in luogo di x' qualunque altro valore che più di esso si accosti ad x (Kronecker, negli appunti di Casorati del 1864).

18. È molto utile l'interpretazione geometrica della continuità quando si rappresenta la funzione $y=f(x)$ con il suo grafico (fig. 5). Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto del grafico. I punti $P(x, y)$ con

$$y_0-\varepsilon<x<y_0+\varepsilon$$

formano una "striscia orizzontale" J che contiene P_0. La continuità di f in x_0 significa che, data una qualunque striscia orizzontale J, comunque sottile, si può trovare una striscia verticale I, data da

$$x_0-\delta<y<x_0+\delta,$$

tanto sottile che ogni punto P del grafico appartenente ad I, cade anche in J (Richard Courant 1934).

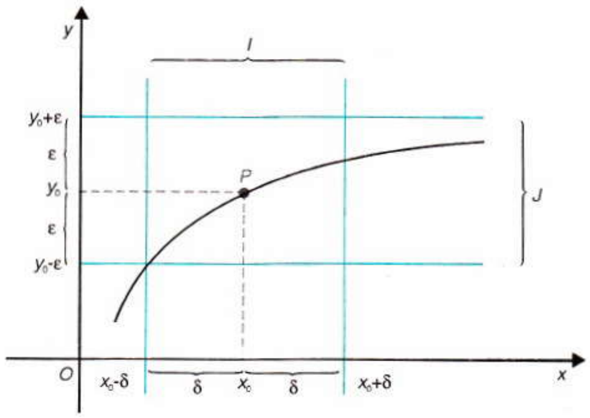


Fig. 5

Sulla continuità delle funzioni elementari

19. Dimostrare che è continua nel punto d'ascissa $x=2$ la funzione

$$y=3.$$

(Si può dimostrare che la funzione è continua nel suo punto $A(2, 3)$, basandosi sulla definizione data nell'esercizio 10. Si calcola

$$|f(x)-f(2)|=|3-3|=0\ \ldots)$$

20. Dimostrare che è continua in tutto il suo campo di esistenza la funzione

$$y=k$$

(Ripetere il procedimento seguito nell'esercizio precedente)

21. Dimostrare che è continua nel punto d'ascissa $x=4$ la funzione

$$y=x$$

(Si può dimostrare che la funzione è continua nel suo punto $A(4, 4)$, basandosi sulla definizione data nell'esercizio 10, Si calcola

$$|f(x)-f(4)|=|x-4|$$

e si risolve la disequazione

$$|f(x)-f(4)|<\varepsilon,$$

verificando che le soluzioni formano un intorno $I(4)$).

22. Dimostrare che è continua in tutto il suo campo di esistenza la funzione

$$y=x.$$

(Ripetere il procedimento seguito nell'esercizio precedente)

23. Dimostrare che è continua in tutto il suo campo di esistenza la funzione

$$y=\text{sen } x.$$

(Si può dimostrare che la funzione è continua in un suo qualunque punto $A(a, \text{sen } a)$, basandosi ancora sulla definizione di continuità indicata nell'esercizio 10. Si comincia dunque col calcolare

$$|f(x)-f(a)|=|sen\ x-sen\ a|$$

– si tengono quindi presenti le formule di prostaferesi[1]*, scrivendo*

$$|sen\ x-sen\ a|=2\cdot\left|cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|$$

– si ricorda che, per qualunque x reale, risulta

$$0\leq|sen\ x|\leq|x| \qquad e \qquad 0\leq|cos\ x|\leq 1$$

e perciò si ha

$$2\cdot\left|cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|\leq 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|$$

– in definitiva si ottiene

$$|sen\ a\text{–}sen\ a|\leq|x-a|$$

e perciò per avere

$$|sen\ x-sen\ a|<\varepsilon,\ \ldots)$$

24. Dimostrare che è continua in tutto il suo campo di esistenza la funzione

$$y=e^x$$

(Si può dimostrare che la funzione è continua in un suo qualunque punto $A(a, e^a)$, basandosi sulla definizione di continuità indicata nell'esercizio 13. Si comincia dunque col calcolare

$$|f(a+h)-f(a)|=|e^{a+h}-e^a|$$

e, scelto $\varepsilon>0$, si cerca di risolvere la disequazione

$$|e^{e+h}-e^a|<\varepsilon.$$

La risoluzione della disequazione non è immediata e deve avvenire in più passi successivi.

– Si tiene presente che risulta

$$e^a>0 \qquad \text{per qualunque numero reale } a$$
$$e^{a+h}=e^a\ e^h;$$

si scrive perciò

$$|e^{a+h}-e^a|=e^a|e^h-1|.$$

– Indicato allora

$$\beta=\frac{\varepsilon}{e^a}, \tag{1}$$

si passa a risolvere la disequazione

$$|e^h-1|<\beta.$$

– Per studiare quest'ultima disequazione si considera

$$h=\frac{1}{n} \tag{2}$$

[1] Le formule di prostaferesi applicate qui sono le seguenti sen $p-$sen $q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$

e si trova un valore $n>n_\beta$, per cui risulti

$$e<1+n\beta;$$

ora, dato che risulta

$$1+n\beta<(1+\beta)^n,$$

si ha pure

$$e<(1+\beta)^n \quad \text{e quindi} \quad e^{\frac{1}{n}}<1+\beta \quad \text{ossia} \quad e^{\frac{1}{n}}-1<\beta$$

In definitiva si trova, per $n>n_\beta$,

$$e^a\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<e^a\cdot\beta$$

Tenendo ora presenti le (1) e (2), si riesce a concludere ...)

25. Tracciare il grafico della funzione definita nel modo seguente:

$$y=-2 \quad \text{per } x\leq-2,$$
$$y=x \quad \text{per } x>-2$$

e stabilire se la funzione è continua nel punto $A(-2, -2)$.
(Ci si può basare sulla definizione di continuità indicata nell'esercizio 6).

26. Tracciare il grafico della funzione definita nel modo seguente:

$$y=x \quad \text{per } x\leq0$$
$$y=\text{sen } x \quad \text{per } x>0$$

e stabilire se la funzione è continua nel punto $O(0, 0)$.
(Ci si può basare sulla definizione di continuità indicata nell'esercizio 6).

27. Tracciare il grafico della funzione definita nel modo seguente:

$$y=1 \quad \text{per } x\leq0,$$
$$y=e^x \quad \text{per } x>0$$

e stabilire se la funzione è continua nel punto $A(0, 1)$.
(Ci si può basare sulla definizione di continuità indicata nell'esercizio 6).

28. Una funzione $y=f(x)$ presenta la seguente caratteristica:
risulta $|f(c)-f(d)|\leq|c-d|$ per tutti i numeri c e d di un dato intervallo $[a, b]$.
Dimostrare che la funzione $y=f(x)$ è continua in tutto l'intervallo $[a, b]$.
(Conviene basarsi sulla definizione indicata nell'esercizio 10).

3. Casi di discontinuità

Per risolvere gli esercizi dal 29 al 45 bisogna valersi delle nozioni relative ai punti di discontinuità, che ora richiamiamo.
Una funzione $y=f(x)$ può presentare, in corrispondenza all'ascissa $x=a$,

– un punto di discontinuità infinita, se si verifica che

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

– un punto di salto, se si verificano le condizioni seguenti

I) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell_1$

II) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell_2$

III) $\ell_1\neq\ell_2$

– ***un punto di discontinuità eliminabile, se si verificano le condizioni seguenti***

I) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

II) $f(a) \neq \ell$

oppure

II') ***non esiste*** $f(a)$.

29. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di discontinuità infinita:

$$y=\frac{1}{x}, \qquad y=\frac{1}{x}-1, \qquad y=\frac{1}{x-1}$$

30. Ripetere l'esercizio 29 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x^2}, \qquad y=\frac{1}{x^2}+1, \qquad y=\frac{1}{(x+1)^2}$$

31. Ripetere l'esercizio 29 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x, \qquad y=\text{tg}\, x$$

32. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di salto:

$$y=\frac{|x|}{x}, \qquad y=x+\frac{|x|}{x}, \qquad y=x^2+\frac{|x|}{x}$$

33. Ripetere l'esercizio 32 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x-[x], \qquad y=x\cdot[x], \qquad y=2^{[x]}$$

34. Ripetere l'esercizio 32 a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\leq 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=3x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\geq \pi & y=\cos x \\ \text{per } x<\pi & y=\text{sen}\, x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\geq 0 & y=2^x \\ \text{per } x<0 & y=x^2 \end{cases}$$

35. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di discontinuità eliminabile. Spiegare come si potrebbe modificare la definizione della funzione in modo da eliminare tali discontinuità:

$$y=\frac{x^2+3x}{x}, \qquad y=\frac{2x^2-x-1}{x-1}, \qquad y=\frac{x^3+1}{x+1}$$

36. Ripetere l'esercizio 35 a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\neq 1 & y=x \\ \text{per } x=1 & y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\neq 0 & y=e^x \\ \text{per } x=0 & y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\neq \pi & y=\text{sen}\, x \\ \text{per } x=\pi & y=1 \end{cases}$$

37. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni; individuare gli eventuali punti di discontinuità, indicandone il tipo:

$$y=\ln|x|, \qquad y=[x^2], \qquad \begin{cases} \text{per } x\neq 0 & y=\dfrac{1}{x} \\ \text{per } x=0 & y=0 \end{cases}$$

38. Ripetere l'esercizio 37 a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\leq 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\geq 1 & y=2x \\ \text{per } x<1 & y=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

39. Ripetere l'esercizio 37 a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=x^2 \\ \text{per } 0<\leq 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=2^x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=2^x \\ \text{per } 0<x\leq 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=2x \\ \text{per } 0<x\leq 1 & y=x^2 \\ \text{per } x>1 & y=2^x \end{cases}$$

40. Ripetere l'esercizio 37 a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=x \\ \text{per } 0<x\leq 1 & y=\sqrt{x} \\ \text{per } x>1 & y=\ln x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=\ln(-x) \\ \text{per } 0<x\leq 1 & y=x \\ \text{per } x>1 & y=\sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=\sqrt{-x} \\ \text{per } 0>x\leq 1 & y=x \\ \text{per } x>1 & y=\ln x \end{cases}$$

41. Disegnare almeno due curve che possono rappresentare una funzione $y=f(x)$, definita nell'insieme dei reali, di cui sono date le seguenti informazioni:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-1, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=1, \quad f(3)=0$$

42. Ripetere l'esercizio 41, a partire dalle seguenti informazioni

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=-3, \quad f(2)=1$$

43. Ripetere l'esercizio 41, a partire da una funzione $y=f(x)$, che è definita nell'insieme dei reali, escluso il numero -3, e di cui sono date le seguenti informazioni:

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to \infty} f(x)=-3$$

44. Ripetere l'esercizio 41, a partire da una funzione $y=f(x)$, che è definita nell'insieme dei reali, escluso il numero 4, e di cui sono date le seguenti informazioni:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x)=0$$

45. Portare almeno due esempi di funzioni $y=f(x)$ che soddisfano una sola delle seguenti coppie di condizioni:

I) risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ e $\ell\neq f(a)$

II) risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ e $\ell=f(a)$

III) risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ e non esiste $f(a)$

IV) non esiste $\lim_{x\to a} f(x)$ e esiste $f(a)$

(Per portare esempi di funzioni che soddisfano l'ultima coppia di condizioni si può pensare alla funzione di Dirichelet ...)

4. Dalla continuità al calcolo di limiti. Limiti di funzioni elementari

Calcolo di limiti basato sulla continuità delle funzioni elementari

Per risolvere gli esercizi dal 46 al 51 occorre valersi della continuità delle funzioni elementari, ricordando la seguente definizione:

Se una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$, risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Perciò, per calcolare il limite di una funzione in un punto d'ascissa $x=a$, in cui la funzione è continua, basta sostituire ad x il numero a.

46. Calcolare il risultato dei seguenti limiti, basandosi sulla continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x\to 0} 2, \quad \lim_{x\to 2} 0, \quad \lim_{x\to\sqrt{5}} (-1), \quad \lim_{x\to -1} \sqrt{5}$$

47. Ripetere l'esercizio 46, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} x, \quad \lim_{x\to -1} x, \quad \lim_{x\to \frac{3}{4}} x, \quad \lim_{x\to\sqrt{7}} x$$

48. Ripetere l'esercizio 46, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to 2\pi} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} x$$

49. Ripetere l'esercizio 46, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} e^x, \quad \lim_{x\to 1} e^x, \quad \lim_{x\to -1} e^x, \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}} e^x$$

50. Ripetere l'esercizio 46, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to \frac{-1}{2}} \sqrt[3]{2}, \quad \lim_{x\to \frac{-1}{2}} x, \quad \lim_{x\to \frac{-1}{2}} e^x$$

51. Ripetere l'esercizio 46, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to \pi} x, \quad \lim_{x\to \pi} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to \pi} e^x$$

Limiti di funzioni elementari per $x\to\infty$

52. Basandosi sulla definizione di limite, data nel paragrafo 3 del cap. 2, dimostrare che risulta

$$\lim_{x\to +\infty} 3=3, \quad \lim_{x\to -\infty} 3=3, \quad \lim_{x\to \infty} 3=3$$

(Per la dimostrazione si fissa un numero positivo ε, piccolo a piacere, e si risolve la disequazione

$$|f(x)-\ell)|<\varepsilon.$$

In questo caso si ha

$$|3-3|<\varepsilon$$

che è vera per qualunque x ...)

53. Basandosi sulla definizione di limite, data nel paragrafo 3 del cap. 2, dimostrare che risulta

$$\lim_{x\to +\infty} k=k, \quad \lim_{x\to -\infty} k=k, \quad \lim_{x\to \infty} k=k$$

(Ripetere il procedimento seguito nell'esercizio precedente).

54. Basandosi sulla definizione di limite data nel paragrafo 3 del cap. 2, dimostrare che risulta

$$\lim_{x\to +\infty} x=+\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x=-\infty, \quad \lim_{x\to \infty} x=\infty$$

(Per svolgere, per esempio, la prima dimostrazione si fissa un numero positivo M, grande a piacere e si risolve la disequazione

$$f(x)>M.$$

In questo caso si ha

$$x>M$$

che è vera per qualunque $x>M$ ...)

55. Basandosi sulla definizione di limite data nel paragrafo 3 del cap. 2, dimostrare che risulta

$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} e^x=0$$

(Per svolgere, per esempio, la prima dimostrazione si fissa un numero positivo M, grande a piacere e si risolve la disequazione

$$f(x)>M.$$

In questo caso si deve risolvere la disequazione

$$e^x>M$$

che ha come soluzioni i numeri seguenti

$$x>\ln M \ ...)$$

56. Basandosi sulle definizioni di limite date nel paragrafo 3 del cap. 2, dimost. $y=\text{sen }x$ non ammette limite né per $x\to+\infty$, né per $x\to-\infty$.
(Si può cominciare con l'escludere immediatamente che risulti

$$\lim_{x\to\infty} \text{sen }x=\infty$$

dato che si ha, per qualunque valore reale di x,

$$|\text{sen }x|\leq 1.$$

Resta così da escludere che sia

$$\lim_{x\to\infty} \text{sen }x=\ell$$

Si prova perciò a vedere se è possibile risolvere la disequazione

$$|\text{sen }x-\ell|<\varepsilon, \qquad \text{ossia} \qquad \ell-\varepsilon<\text{sen }x<\ell+\varepsilon, \tag{1}$$

ottenendo delle soluzioni del tipo

$$|x|>x_\varepsilon. \tag{2}$$

Ma ci si rende subito conto che in un insieme di numeri come quello descritto nella disequazione (2) ci sono infiniti valori di x per cui risulta

$$\text{sen }x=1 \qquad \text{e perciò deve essere } 1<\ell+\varepsilon, \tag{3}$$

ma ci sono anche infiniti valori di x per cui risulta

$$\text{sen }x=-1 \qquad \text{e perciò deve essere} \qquad \ell-\varepsilon<-1. \tag{4}$$

Ora è chiaro che le (3) e (4) debbono valere contemporaneamente, perciò si deve sempre avere

$$1-\varepsilon<\ell \qquad \text{e} \qquad \ell<\varepsilon-1, \qquad \text{da cui} \qquad 1-\varepsilon<\varepsilon-1, \qquad \text{ossia} \qquad \varepsilon>1 \ldots)$$

5. L'algebra dei limiti

Algebra dei limiti finiti

Per svolgere gli esercizi dal 57 all'80 occorre valersi delle regole relative all'algebra dei limiti finiti, che ora richiamiamo:

Se risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x)=m, \qquad \text{con } \ell \text{ ed } m \text{ finiti,}$$

risulta anche

(1) $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\ell+m,$

(2) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]=\ell\cdot m,$

(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{m},$ ***purché sia $m\neq 0$***

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\ell}{m},$ ***purché sia $m\neq 0$***

Calcolare i risultati dei limiti esposti negli esercizi dal 57 al 69, indicando, in ogni caso, le regole applicate.

57. $\lim_{x\to 2} (x+5)$, $\quad \lim_{x\to \pi} (\text{sen }x+1)$, $\quad \lim_{x\to -\infty} (e^x+2)$

58. $\lim_{x\to 2\pi} (x+\text{sen }x)$, $\quad \lim_{x\to 0} (\text{sen }x+e^x)$, $\quad \lim_{x\to 1} (e^x+x)$

59. $\lim_{x\to 2} (4x)$, $\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (2\text{ sen }x)$, $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2}e^x$

60. $\lim_{x\to 2}(-x)$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(-\text{sen } x)$, $\lim_{x\to 0}(-e^x)$

(Tenere presente che risulta $-f(x)=(-1)\cdot f(x)$.)

61. $\lim_{x\to -3}\left(-\frac{2}{3}x\right)$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(-2\text{ sen } x)$, $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(-4e^x)$

62. $\lim_{x\to -1} x^2$, $\lim_{x\to \frac{1}{2}} x^3$, $\lim_{x\to \sqrt{2}} x^4$

(Tenere presente che risulta $x^2=x\cdot x$, $x^3=x^2\cdot x$, ...)

63. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\text{sen}^2 x$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\text{sen}^4 x$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\text{sen}^4 x$

(Tenere presente che risulta $\text{sen}^2 x=\text{sen } x\cdot \text{sen } x$, ...)

64. $\lim_{x\to 1}(-2x^2)$, $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}(9x^3)$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}(4\text{ sen}^2 x)$

65. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(e^x\text{ sen } x)$, $\lim_{x\to 2}(xe^x)$, $\lim_{x\to \pi}(x^2\text{ sen } x)$

66. $\lim_{x\to 1}(2x-3)$, $\lim_{x\to -1}\frac{1}{2}x^2-x$, $\lim_{x\to \sqrt{2}}(-x^4+3x^2)$

67. $\lim_{x\to 0}(3x^4-x^3+5x^2-1)$, $\lim_{x\to -1}(x^3+3x^2+3x+1)$, $\lim_{x\to -\sqrt{3}}(4x^4+x^2-1)$

68. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\text{ sen}^2 x-\text{sen } x)$, $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}(\text{sen } x+2x)$, $\lim_{x\to 0}(x^2+e^x)$

69. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x\to \frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Esaminare i limiti indicati negli esercizi dal 70 all'80 e risolvere i seguenti quesiti:

- **calcolare i risultati che si possono ottenere valendosi dell'algebra dei limiti finiti, indicando, in ogni caso, le regole applicate;**
- **indicare i limiti che non si possono calcolare valendosi solo dell'algebra dei limiti finiti.**

70. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)$

71. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{4x^2-2x}\right)$, $\lim_{x\to \frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4x^2-2x}\right)$, $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4x^2-2x}\right)$

72. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3+1}\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^3+1}\right)$, $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x^3+1}\right)$

73. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)$, $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)$

74. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$

75. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$, $\lim_{x\to \sqrt{2}}\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$

76. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-2x^2}{x+2}\right)$, $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3-2x^2}{x+2}\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-2x^2}{x+2}\right)$

77. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^3-x^2-1}{x^2-3x+2}\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-1}{x^2-3x+2}\right)$, $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^3-x^2-1}{x^2-3x+2}\right)$

78. $\lim_{x\to\pi}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$, $\quad \lim_{x\to\pi}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$, $\quad \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

79. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{e^x-1}\right)$, $\quad \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x-1}\right)$, $\quad \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

80. $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3\cdot e^x}{e^x+1}\right)$, $\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{e^x+1}{3\cdot e^x}\right)$, $\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$

Algebra dei limiti infiniti

Per svolgere gli esercizi dall'81 al 90 occorre valersi delle regole dell'algebra dei limiti riassunte nella tabella seguente:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$	$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$	$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$\ell\neq 0$	∞	∞	∞	0	0
∞	$m\neq 0$	∞	∞	$\dfrac{1}{m}$	∞
0	∞	∞	**?**	0	0
∞	0	∞	**?**	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	**?**
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	**?**
$+\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$	0	**?**

Calcolare i risultati dei limiti indicati negli esercizi dall'81 al 90, indicando, in ogni caso, le regole applicate.

81. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$, $\quad \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$

82. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$, $\quad \lim_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$, $\quad \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

83. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)$, $\quad \lim_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)$, $\quad \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)$

84. $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$, $\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

85. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$, $\quad \lim_{x\to\pi}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

86. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}\right)$, $\quad \lim_{x\to -1}\left(\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}\right)$, $\quad \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}\right)$

87. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x^3-x}\right)$, $\quad \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x^3-x}\right)$, $\quad \lim_{x\to -1}\left(\dfrac{x+1}{x^3-x}\right)$

88. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$, $\quad \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$, $\quad \lim_{x\to -1}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-2}{x^3-4x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^3-4x}\right)$, $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x-2}{x^3-4x}\right)$

C'è qualche limite che non si può calcolare, valendosi solo delle regole relative all'algebra dei limiti?

90. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$, $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$

C'è qualche limite che non si può calcolare, valendosi solo delle regole relative all'algebra dei limiti?

Riconoscere le forme indeterminate

Gli esercizi dal 91 al 101 conducono a riconoscere limiti che danno luogo a forme indeterminate. Per svolgere gli esercizi occorre ricordare le seguenti forme indeterminate presentate nel testo:

- ***la forma del tipo*** $\dfrac{\infty}{\infty}$,
- ***la forma del tipo*** $\dfrac{0}{0}$,
- ***la forma del tipo*** $0\cdot\infty$,
- ***la forma del tipo*** $\infty-\infty$.

Tenere presente che in questi casi non si riesce a calcolare il risultato di un limite, valendosi solo dell'algebra dei limiti.

91. Esaminare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4\cdot x^2),\qquad \lim_{x\to+\infty}(x^4-x^2),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^2}\right)$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il risultato dei limiti che si possono calcolare valendosi solo dell'algebra dei limiti;
- individuare i limiti che si presentano in forma indeterminata;
- accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con opportuni grafici.

92. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4\cdot x^3),\qquad \lim_{x\to-\infty}(x^4+x^3),\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^4}\right)$$

93. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}[(x^2+x)\cdot(x+1)],\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)$$

94. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2}[(x^2-2x)-(4-x^2)],\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{4-x^2}{x^2-2x}\right),\qquad \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2x}{4-x^2}\right)$$

95. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+3),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x+3}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+3}\right)$$

96. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot \operatorname{sen} x),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x+1}\right)$$

97. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^x),\qquad \lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^x),\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)$$

98. Ripetere l'esercizio 91, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^x\right),\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^x\right),\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-e^x\right)$$

99. Sapendo che per le tre funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ risulta:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a} g(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a} h(x)=0$$

esaminare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+h(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- determinare il risultato dei limiti che si possono calcolare valendosi solo dell'al
- individuare i limiti che si presentano in forma indeterminata.

100. Ripetere l'esercizio 99, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to a}[f(x)h(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)],\quad \lim_{x\to a}[h(x)g(x)]$$

101. Ripetere l'esercizio 99, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{h(x)}\right],\quad \lim_{x\to a}\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right],\quad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

Limiti di funzioni composte e funzioni inverse

Gli esercizi dal 102 al 116 conducono a completare l'algebra dei limiti considerando le funzioni composte di più funzioni di cui è noto il limite.

102. Esaminare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to\pi} e^{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to\pi}\operatorname{sen} x,\quad \lim_{z\to 0} e^z$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- indicare le funzioni utilizzate per generare la funzione composta $y=e^{\operatorname{sen} x}$, che compare nel 1° limite,
- calcolare il risultato del 2° e 3° limite,
- valersi di questi due risultati per determinare il risultato del 1° limite.

103. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2} e^{-x},\quad \lim_{x\to 2}(-x),\quad \lim_{z\to -2} e^z$$

104. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -1} e^{x^2},\quad \lim_{x\to -1}(x^2),\quad \lim_{z\to 1} e^z$$

105. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} e^{(2x+3)},\quad \lim_{x\to 0}(2x+3),\quad \lim_{z\to 3} e^z$$

106. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}(2\cdot x),\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2\cdot x),\quad \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} z$$

107. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x},\quad \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} z$$

108. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \qquad \lim_{z\to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} z$$

109. Ripetere l'esercizio 102 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad \lim_{z\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} z$$

Valersi dei risultati ottenuti per calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0} \cos x$$

tenendo presente che risulta

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

110. Dimostrare il seguente teorema relativo ad una funzione $y=f[g(x)]$, ottenuta componendo due funzioni $z=g(x)$ e $y=f(z)$:

se risulta $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$ e $\lim_{z\to \ell} f(z)=m$, risulta anche $\lim_{x\to a} f[g(x)]=m$.

(Per dimostrare il teorema, ci si può basare sulla definizione di limite data nel paragrafo 6 del cap. 2.
Si deve dimostrare che, scelto un numero positivo ε, piccolo a piacere, si può trovare un numero δ, tale che sia

$|f[g(x)]-m|<\varepsilon$ *per qualunque x che soddisfa* $|x-a|<\delta$.

In base alle ipotesi, scelto ε, si può trovare δ^*, tale che sia

I) $|f(z)-m|<\varepsilon$ *per qualunque z che soddisfa* $|z-\ell|<\delta^*$, *ossia* $|g(x)-\ell|<\delta^*$.

Inoltre, a partire da δ^*, si può trovare un valore δ, tale che risulti:

II) $|g(x)-\ell|<\delta^*$ *per qualunque x che soddisfa* $|x-a|<\delta$.

Infine, considerando insieme le condizioni I e II ...)

111. Valersi del teorema dimostrato nell'esercizio 110 per dimostrare che sono vere le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to a} \cos x=\cos a, \qquad \text{non esiste } \lim_{x\to \infty} \cos x$$

(Per la seconda affermazione, ricordare che non esiste $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$).

112. Il teorema dimostrato nell'esercizio 110 va applicato con cautela, quando non esiste il limite di una delle funzioni utilizzate per ottenere la funzione composta. Per esempio, esaminando i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \qquad \lim_{z\to \infty} \operatorname{sen} z$$

che cosa si può dire del 1° limite assegnato?

113. Ripetere l'esercizio 112 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}, \qquad \lim_{z\to \infty} \cos z$$

114. Estendere i risultati dimostrati nell'esercizio 110 alla funzione inversa della funzione esponenziale e cioè

$y=\ln x$, ossia $x=e^y$ (definita solo per $x>0$)

per verificare che

- risulta $\lim_{x\to a} \ln x=\ln a$ per qualunque numero $a>0$,
- risulta $\lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$,
- non ha senso calcolare $\lim_{x\to -\infty} \ln x$, $\lim_{x\to \infty} \ln x$ e $\lim_{x\to 0} \ln x$.

115. Ripetere l'esercizio 114 esaminando le funzioni inverse di $y=x^n$, cioè

$$y=\sqrt[n]{x}, \qquad \text{ossia} \qquad x=y^n$$

verificando che:

– se ***n*** **è dispari**, risulta

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$$

– se ***n*** **è pari**, risulta

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a} \quad \text{solo per} \quad a>0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\sqrt[n]{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty, \quad \text{ma non ha senso calcolare} \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}$$

(Ricordare che la funzione $y=\sqrt[n]{x}$ è definita
– solo per $x\geq 0$, se n è pari,
– nell'insieme dei reali, se n è dispari ...)

116. Ripetere l'esercizio 114 a partire dalla funzione inversa di $y=\text{sen}\,x$, cioè

$$y=\text{arc sen}\,x, \qquad \text{ossia} \qquad x=\text{sen}\,y, \qquad \text{definita solo nell'intervallo } [-1,\ 1],$$

verificando che

– risulta $\lim\limits_{x\to a}\text{arcsen}\,x=\text{arcsen}\,a$ per qualunque numero a tale che $-1\leq a\leq 1$,

– non ha senso calcolare $\lim\limits_{x\to\infty}\text{arcsen}\,x$.

Esercizi vari

Gli esercizi dal 117 al 134 richiedono di applicare simultaneamente varie nozioni introdotte nel paragrafo 5 e nei relativi esercizi.

117. Esaminare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}$$

e risolvere i seguenti quesiti:

– determinare il risultato dei limiti che si possono calcolare valendosi dell'algebra dei limiti, elencando le regole applicate;
– individuare i limiti che si presentano in forma indeterminata;
– individuare i limiti che non ha senso calcolare.

118. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-4}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x-4}), \qquad \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x-4}), \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{x-4}$$

119. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{-x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{x}$$

120. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2-x}, \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{\sqrt{2-x}}, \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{\sqrt{2-x}}$$

121. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

122. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2+x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} (x+\sqrt{x^2+x}), \qquad \lim_{x\to \frac{-1}{2}} \sqrt{x^2+x}$$

123. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}, \qquad \lim_{x\to \infty} \sqrt[3]{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (x-\sqrt[3]{x}), \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

124. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -9} \sqrt[3]{x+1}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x+1}, \qquad \lim_{x\to -\infty} (x^2+\sqrt[3]{x+1}), \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$$

125. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to -\infty} e^{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (e^{-x}\cdot e^{\sqrt{x}})$$

126. Ripetere l'esercizio 117, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to \infty} \left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$$

127. Esaminare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arc\,sen} x$$

ed indicare

- il limite che si presenta in forma indeterminata,
- il limite che non ha senso calcolare,
- il limite che non esiste.

Completare lo svolgimento dell'esercizio spiegando la differenza fra queste tre situazioni.

128. Ripetere l'esercizio 127, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 2} \operatorname{arc\,cos} x$$

129. Ripetere l'esercizio 127, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(\operatorname{tg} x), \qquad \lim_{x\to -\infty} \ln x, \qquad \lim_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x)$$

130. Ripetere l'esercizio 127, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} (e^x+\ln x), \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(1-x), \qquad \lim_{x\to -\infty} e^{\operatorname{sen} x}$$

131. Scegliere fra le seguenti frasi quella che è ricavata correttamente dalle regole dell'algebra dei limiti finiti o infiniti:

I) se esiste il limite della somma di due funzioni per $x\to a$, allora esiste anche il limite delle singole funzioni per $x\to a$,
II) se esiste il limite di due funzioni per $x\to a$, allora esiste anche il limite della somma per $x\to a$.

132. Verificare che risulta:

$$\lim_{x\to \infty} (\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)=1$$

ma non esistono

$$\lim_{x\to \infty} \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \infty} \cos^2 x.$$

Questi risultati contraddicono le regole dell'algebra dei limiti?
(Ricordare che, per una nota relazione trigonometrica, risulta

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \qquad \textit{per qualunque } x \textit{ reale.}$$

Per rispondere all'ultimo quesito, tenere presente l'esercizio 131).

133. Scegliere fra le seguenti frasi quella che è ricavata correttamente dalle regole dell'algebra dei limiti finiti o infiniti:

I) se esiste il limite del quoziente di due funzioni per $x \rightarrow a$, allora esiste anche il limite delle singole funzioni per $x \rightarrow a$,
II) se esiste il limite di due funzioni per $x \rightarrow a$, allora esiste anche il limite del quoziente per $x \rightarrow a$.

134. Verificare che risulta:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 0$$

ma non esiste

$$\lim_{x \to \infty} \text{sen } x.$$

Questi risultati contraddicono le regole dell'algebra dei limiti?
(Ricordare che risulta

$$|\text{sen } x| \leq 1 \qquad \textit{per qualunque } x \textit{ reale.}$$

Per rispondere all'ultimo quesito, tenere presente l'esercizio 133).

6. Risoluzione di forme indeterminate

Gli esercizi dal 135 al 172 conducono a determinare il risultato di limiti che si presentano in forma indeterminata. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presente che:

- ***non si riesce a calcolare tale risultato valendosi direttamente dell'algebra dei limiti:***
- ***particolari artifici algebrici consentono in alcuni casi di eliminare l'indeterminazione, cioè di riscrivere il limite in un'altra forma, che permette di arrivare al risultato valendosi dell'algebra dei limiti.***

Forme indeterminate del tipo $\infty - \infty$

135. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right), \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^3), \qquad \lim_{x \to \infty} (3x^3 - 4x)$$

(L'artificio algebrico che permette di eliminare l'indeterminazione consiste nel riscrivere il polinomio, mettendo in evidenza la potenza di x di grado più elevato ...)

136. Ripetere l'esercizio 135, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^4 - \frac{5}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \right), \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{3} x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^2 - 4 \right), \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} \right)$$

137. Ripetere l'esercizio 135, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \infty} (x^6 + x^4 - x^2), \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^5 + 2x^4 + x^2), \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^5 + 4x^3 - x)$$

138. Esaminare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^n + x^{n-1}), \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^n + x^{n-1}), \qquad \lim_{x \to \infty} (x^n + x^{n-1})$$

dove l'esponente n è intero positivo, e risolvere i seguenti quesiti:

- indicare le forme indeterminate, distinguendo il caso in cui n è pari dal caso in cui n è dispari,
- calcolare il risultato dei limiti nei vari casi.

139. Ripetere l'esercizio 138, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^n - x^{n-1}), \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^n - x^{n-1}), \qquad \lim_{x \to \infty} (x^n - x^{n-1})$$

140. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}),\qquad \lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{x}),\qquad \lim_{x\to\infty}(x^2-\sqrt[3]{x^2})$$

(Si può ancora eliminare l'indeterminazione mettendo in evidenza le potenze di x di grado elevato; tenere presente che risulta

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\qquad \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},\qquad \sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$$

e quindi

$$x-\sqrt{x}=x-x^{\frac{1}{2}}=x\cdot\left(1-x^{\frac{-1}{2}}\right)=x\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ \ldots)$$

141. Ripetere l'esercizio 140, a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt[4]{x}),\qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2+\sqrt[3]{x}),\qquad \lim_{x\to\infty}(2x+1-\sqrt[3]{x})$$

Forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

142. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{2x^2+1},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x+1}$$

(L'artificio algebrico che permette di eliminare l'indeterminazione è il seguente:

- *riscrivere il quoziente di polinomi mettendo in evidenza la potenza di x di grado più elevato sia al numeratore che al denominatore,*
- *operare le opportune semplificazioni ...)*

143. Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x}{5x-3},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{3x^3-x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x}{2x^3+x^2}$$

144. Ripetere l'esercizio 142 a partire dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$$

145. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x-1}{x^2+2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{2x-1}}$$

(Anche in questi casi si segue un procedimento analogo a quello seguito per risolvere gli esercizi 142-144; per esempio, nel 1° caso si scrive:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}=\sqrt{\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}=\ldots)$$

146. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+8}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^4+2}}$$

(Anche in questi casi si segue un procedimento analogo a quello seguito per risolvere gli esercizi 142-145; per esempio, nel 1° caso si scrive:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=\ldots)$$

Forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$

147. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-1)}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$$

(Tenendo presente che risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

conviene scrivere

$$\frac{2\cdot(e^x-1)}{x}=2\cdot\frac{e^x-1}{x},\qquad \frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x},\qquad \frac{e^x-1}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x-1}{x}$$

e calcolare il risultato dei limiti, valendosi dell'algebra dei limiti).

148. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3}{4x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x}$$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

149. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$$

(I limiti indicati si possono considerare tutti come limiti di funzioni composte; per esempio nel 1° caso

$$y=\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

si può considerare funzione composta di

$$z=2x \qquad e \qquad y=\frac{e^z-1}{z}$$

e dunque il limite assegnato vale 1, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0}2x=0 \qquad e \qquad \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$$

Procedere analogamente negli altri casi).

150. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{x-1},\qquad \lim_{x\to -1}\frac{e^{x^2-1}}{x^2-1},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x}$$

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio precedente).

Limiti di quozienti di polinomi

Completiamo lo studio delle forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, esaminando un ultimo caso in cui è possibile eliminare l'indeterminazione con un semplice artificio algebrico: il limite di un quoziente di polinomi.
Cominciamo con l'esaminare il seguente esempio numerico

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}$$

È immediato verificare che, se si sostituisce ad x il valore 1, sia il numeratore che il denominatore valgono 0; questo vuol dire, in base al teorema di divisibilità[1], *che i due polinomi sono divisibili per il binomio $(x-1)$. Risulta infatti, effettuando la divisione*[2] *di ciascun polinomio per il binomio $(x-1)$,*

$$x^3-x^2-2x+2=(x-1)\cdot(x^2-2) \qquad e \qquad x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$$

Così si ha

$$\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x^2-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-2}{x+1}$$

È opportuno osservare che l'ultima semplificazione effettuata non è valida, se si ha $x=1$; tuttavia, il calcolo del limite non richiede di valutare il quoziente assegnato per $x=1$ e dunque si può scrivere

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Questo procedimento si può sempre ripetere, quando si deve calcolare

$$\lim_{x\to p}\frac{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n}{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_m\cdot x^m}$$

e i due polinomi assegnati valgono zero per $x=p$. Infatti, in tal caso, sia il numeratore che il denominatore sono divisibili per $(x-p)$ e, dividendo entrambi per il binomio $(x-p)$, si può eliminare l'indeterminazione.

Calcolare i limiti indicati negli esercizi dal 151 al 162.

151. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$ $\qquad [0,\ 2,\ -1]$

152. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}, \quad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$ $\qquad \left[\infty,\ -\frac{3}{2},\ 5\right]$

153. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$ $\qquad$ [tutti 0]

154. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$ $\qquad$ [tutti ∞]

155. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}, \quad \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x-3}, \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}$ $\qquad [6,\ 0,\ 3]$

156. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}, \quad \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x-a}, \quad \lim_{x\to a}\frac{x^2-ax}{x-a}$ $\qquad [2a,\ 0,\ a]$

157. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$ $\qquad [\infty,\ 2,\ 0]$

158. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{(x-a)^2}, \quad \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2-ax}, \quad \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x^2-ax}$ $\qquad [\infty,\ 2,\ 0]$

159. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)^3}$ $\qquad [3,\ \infty,\ \infty]$

160. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}, \quad \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{(x-a)^2}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-a^3}{(x-a)^3}$ $\qquad [3a^2,\ \infty,\ \infty]$

161. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}, \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$ $\qquad \left[-3,\ -6,\ -\frac{3}{8}\right]$

162. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}, \quad \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-ax}, \quad \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$ $\qquad \left[\frac{3}{2}a,\ 3a,\ \frac{3}{4a}\right]$

[1] Vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica oggi*, vol. 2, pagg. 391-393.
[2] Vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica oggi*, vol. 2, pagg. 397-399.

Esercizi vari

Gli esercizi dal 163 al 172 richiedono di applicare simultaneamente varie nozioni introdotte nel paragrafo 6 e nei relativi esercizi.

163. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

(I due limiti si presentano nella forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$, che però è facile risolvere, tenendo presente che risulta

$$\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^4}\qquad e\qquad \left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-x}{x^3+x^2}\right)$$

Il risultato è in entrambi i casi ∞).

164. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\right),\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)$$

(Tenendo presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente, si ottiene, in entrambi i casi, il risultato ∞).

165. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}),\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}-\sqrt{x}\right)$$

(I limiti si presentano nella forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$; in questo caso, per eliminare l'indeterminazione, ci si vale di un nuovo artificio, che vediamo studiando, per esempio, il 1° limite. Si ha:

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

e quindi ...)

166. Generalizzare il procedimento seguito nell'esercizio 165 per indicare il risultato di tutti i limiti del tipo seguente

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

167. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}),\qquad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x})$$

(Ora, per eliminare l'indeterminazione, si scrive, per esempio nel 1° caso

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}=\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{+4})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}).$$

168. Generalizzare il procedimento seguito nell'esercizio 167 per indicare il risultato di tutti i limiti del tipo seguente:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}),\qquad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})$$

170. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

(I limiti si presentano nella forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; in questi casi si riesce ad eliminare l'indeterminazione, valendosi ancora della scomposizione in fattori, scrivendo, per esempio nel 1° limite:

$$x-1=\sqrt{x}^{\,2}-1^2=(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)$$

Si ha così:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}).$$

171. Generalizzare il procedimento seguito nell'esercizio 170, per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a},\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

(Tenere presente che si può considerare

$$\sqrt{x}=\sqrt[4]{x}^{\,2})$$

172. Determinare il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}-2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}-x}$$

(I due limiti si presentano nella forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$*, che si può eliminare mettendo in evidenza la potenza di x di grado più elevato sia al numeratore che al denominatore ...)*

7. Applicazioni del teorema del confronto

Tenendo presente che risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

calcolare i limiti assegnati negli esercizi dal 173 al 180.

173. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen} x}{x},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2x},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

(Basta scrivere

$$\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{x}=2\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x},\qquad \frac{\mathrm{sen}\,x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x},\qquad \frac{\mathrm{sen}\,x}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$$

per arrivare ai risultati 2, $\frac{1}{2}$*,* ∞*)*

174. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen} x}{4x},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x}{x}$ $\left[\frac{3}{4},\ 1,\ -1\right]$

175. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}},\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

(I limiti indicati si possono considerare tutti come limiti di funzioni composte; per esempio nel 1° caso

$$y=\frac{\mathrm{sen}\,2\,x}{2x}$$

si può considerare funzione composta di

$$z=2x \qquad e \qquad y=\frac{\mathrm{sen}\,z}{z}$$

e dunque il limite assegnato vale 1, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0} 2x=0 \qquad e \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,z}{z}=1.$$

Analogamente si può verificare che gli altri due limiti valgono 1).

176. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\text{sen}\, x}{x}}$, $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\text{sen}\, x}{x}}$

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio precedente; i risultati sono 1, 1, e).

177. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^3}$

(Conviene scrivere

$$\frac{sen\, 2x}{x} = 2 \cdot \frac{sen\, 2x}{2x}, \quad \frac{sen^2 x}{x} = x \cdot \frac{sen^2 x}{x^2}, \quad \frac{sen^2 x}{x^3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2}$$

così si arriva rapidamente ai risultati 2, 0, ∞).

178. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, 2x}{2x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, 2x}{x}$

(Per calcolare il 1° limite conviene scrivere

$$\frac{tg\, x}{x} = \frac{\frac{sen\, x}{cos\, x}}{x} = \frac{sen\, x}{x \cdot cos\, x} = \frac{sen\, x}{x} \cdot \frac{1}{cos\, x}$$

così si arriva a determinare subito il risultato 1. Per il 2° limite ci si può valere dei limiti di funzioni composte, ottenendo ancora il risultato 1. Per l'ultimo limite si può ripetere il procedimento dell'esercizio precedente, ottenendo il risultato 2).

179. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, kx}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, kx}{x}$

(Generalizzando il procedimento suggerito nei due esercizi precedenti, si arriva in ambedue i casi al risultato k).

180. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x + 2\, \text{sen}\, x}{x}$, $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \text{sen}\, \frac{1}{x}$ [0, 3, ∞]

Tenendo presente che risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

calcolare i limiti assegnati negli esercizi dal 181 al 184.

181. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x - 1}$ [0, 0, ∞]

182. $\lim_{x\to 0} \frac{2 - \cos x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(Per il primo limite conviene scrivere

$$\frac{2 - cos\, x}{x} = \frac{1 + 1 - cos\, x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1 - cos\, x}{x}$$

così si ottiene rapidamente il risultato ∞.
Per arrivare al risultato del 2° limite, occorre invece scrivere

$$\frac{1 - cos\, x}{x^2} = \frac{1 - cos\, x}{x^2} \cdot \frac{1 + cos\, x}{1 + cos\, x} = \frac{1 - cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + cos\, x)} = \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + cos\, x}$$

in tal modo si può arrivare al risultato $\frac{1}{2}$).

183. Verificare che, per qualunque valore reale β, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x+\beta) - \text{sen}\, \beta}{x} = \cos \beta$$

(Ci si può valere, per esempio, delle formule di addizione del seno, per scrivere

$$\frac{sen\,(x+\beta) - sen\, \beta}{x} = \frac{sen\, x \cdot cos\, \beta + cos\, x \cdot sen\, \beta - sen\, \beta}{x}$$

e quindi

$$\frac{sen\,(x+\beta) - sen\, \beta}{x} = cos\, \beta \cdot \frac{sen\, x}{x} + sen\, \beta \cdot \frac{1 - cos\, x}{x}).$$

184. Verificare che, per qualunque valore reale β, risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+\beta)-\cos\beta}{x}=-\operatorname{sen}\beta$$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

8. Teoremi sulle funzioni continue

Sui teoremi per verificare la continuità di una funzione

Per svolgere gli esercizi dal 185 al 193 occorre tenere presenti le seguenti nozioni:

- ***una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto d'ascissa $x=a$, se risulta***

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a);$$

- ***una funzione $y=f(x)$ è continua in un intervallo, se è continua in tutti i punti di quell'intervallo;***
- ***sono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni elementari***

$$y=k,\qquad y=x,\qquad y=\operatorname{sen} x,\qquad y=e^x;$$

- ***date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, continue in un punto d'ascissa $x=a$, risultano continue nello stesso punto anche le seguenti funzioni:***

  I) $y=f(x)+g(x)$,

  II) $y=f(x)g(x)$,

  III) $y=\dfrac{1}{g(x)}$, ***purché risulti*** $g(a)\neq 0$,

  IV) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ***purché risulti*** $g(a)\neq 0$.

185. Verificare che le funzioni seguenti sono continue nel loro campo di esistenza:

$$y=3x^4+\frac{1}{2}x^3-2,\qquad y=e^x\cdot\operatorname{sen} x,\qquad y=\frac{x}{e^x}$$

186. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1},\qquad y=\frac{x^2+1}{x^2-1},\qquad y=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

187. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$y=x,\qquad y=-x,\qquad y=|x|$$

e verificare, in particolare, che l'ultima funzione è continua nel punto $O(0, 0)$.

188. Studiare la continuità delle funzioni seguenti:

$$y=\operatorname{sen} x,\qquad y=-\operatorname{sen} x,\qquad y=|\operatorname{sen} x|$$

e verificare, in particolare, che l'ultima funzione è continua nel punto $O(0, 0)$.

189. Dimostrare che è vera l'affermazione seguente:
se $y=f(x)$ è una funzione continua, anche $y=|f(x)|$ è continua.

190. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad y=\frac{\operatorname{sen} x}{|x|},\qquad y=\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$$

Esaminare, in particolare, il comportamento delle tre funzioni in corrispondenza all'ascissa $x=0$.

191. Verificare che sono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{per } x\neq 2 \\ y=\dfrac{1}{4} & \text{per } x=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{x+1}{x^3+1} & \text{per } x\neq -1 \\ y=\dfrac{1}{3} & \text{per } x=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{\text{sen}\, x}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ y=1 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

192. Determinare i valori del parametro k che rendono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x^2+k}, \qquad y=\frac{x}{x^2-kx+1}, \qquad y=\frac{e^x}{x^4-k}$$

193. Determinare i valori del parametro k che rendono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\neq 1 & y=\dfrac{x-1}{x^2-1} \\ \text{per } x=1 & y=k \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\leq 0 & y=x^2+2x+1 \\ \text{per } x=1 & y=x+k \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x<\dfrac{1}{2} & y=kx^2 \\ \text{per } x\geq\dfrac{1}{2} & y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Continuità di funzioni composte e funzioni inverse

Gli esercizi dal 194 al 202 conducono a completare i teoremi per verificare la continuità di funzioni, considerando anche funzioni composte o inverse di funzioni continue.

194. Basarsi sul teorema esposto nell'esercizio 110 per dimostrare i teoremi seguenti:
- è continua in tutto il suo campo di esistenza una funzione composta di funzioni continue;
- è continua la funzione inversa di una funzione continua.

195. Basarsi sul teorema presentato nell'esercizio precedente per verificare che sono continue in tutto il loro campo di esistenza le funzioni seguenti:

$$y=\text{sen}\,(2x), \qquad y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad y=\cos x$$

196. Ripetere l'esercizio 195, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x}, \qquad y=\sqrt[3]{x}, \qquad y=\sqrt[4]{x}.$$

197. Ripetere l'esercizio 195, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x, \qquad y=\text{arc sen}\, x, \qquad y=\text{arc cos}\, x.$$

198. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$y=\text{tg}\, x, \qquad y=\text{arc tg}\, x, \qquad y=e^{\text{sen}\, x}.$$

199. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x^2+1}, \qquad y=\sqrt{x^2-1}, \qquad y=\sqrt{\text{sen}\, x}$$

200. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:
se la funzione $y=f(x)$ è continua e non negativa in un intervallo $[a, b]$, allora è continua nello stesso intervallo anche la funzione

$$y=\sqrt{f(x)}.$$

201. Determinare i valori del parametro k che rendono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ y=k & \text{per } x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{e^x-1}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ y=k & \text{per } x=0 \end{cases}$$

202. Determinare i valori del parametro k che rendono continue in tutto il loro campo di esistenza le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} y=x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ y=k & \text{per } x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x^2} & \text{per } x\neq 0 \\ y=k & \text{per } x=0 \end{cases}$$

Proprietà delle funzioni continue

Gli esercizi dal 203 al 214 conducono a riflettere sui seguenti teoremi:

Teorema di Bolzano

Data una funzione $y=f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e fissati due valori r ed s interni ad $[a, b]$, tali che $f(r)\neq f(s)$, si verifica che, quando x varia in $[r, s]$ la funzione $y=f(x)$ assume tutti i valori compresi fra $f(r)$ e $f(s)$.

Teorema dell'esistenza degli zeri

Se una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ e risulta che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, è sempre possibile trovare almeno un valore c dell'intervallo $[a, b]$, tale che risulti $f(c)=0$.

203. Esaminare la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e verificare che

– risulta $f(-1)=-1$ e $f(1)=1$,
– non esiste nessun valore c tale che risulti $f(c)=0$.

Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

204. Esaminare la funzione $f(x)=x^2-2x+1$ nell'intervallo $[0; 2]$ e verificare che esiste all'interno dell'intervallo il valore 1, per cui risulta

$$f(1)=0,$$

ma $f(0)$ e $f(2)$ hanno lo stesso segno.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

205. Esaminare la funzione $f(x)=\operatorname{tg} x$ nell'intervallo $(0; 2\pi)$ e verificare che esiste all'interno dell'intervallo il valore π, per cui risulta

$$f(\pi)=0,$$

anche se la funzione è considerata in un intervallo aperto e ivi discontinua.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

206. Tenere presenti le considerazioni sull'implicazione svolte alle pagg. 338-340 ed esaminare il teorema dell'esistenza degli zeri, indicando ipotesi e tesi nel modo seguente:

Ip «La funzione $y=f(x)$ è continua in $[a, b]$ e risulta $f(a)f(b)<0$»,
Th «Esiste almeno uno zero della funzione nell'intervallo (a, b)».

Scegliere fra i seguenti simboli quello che esprime il teorema:

(I) $Ip \Rightarrow Th$, (II) $Ip \Leftrightarrow Th$, (III) $Th \Rightarrow Ip$

(Solo il primo simbolo è corretto, ...)

207. Valendosi degli stessi simboli introdotti nell'esercizio 206, scegliere fra le frasi seguenti quelle che esprimono correttamente il teorema dell'esistenza degli zeri:

I) *Ip* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Th*,
II) *Ip* è condizione necessaria e sufficiente per *Th*,
III) *Ip* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Th*,
IV) *Th* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Ip*,
V) *Th* è condizione sufficiente ma non necessaria per *Ip*.

Portare dei controesempi per spiegare perché alcune frasi sono errate.

208. In ciascuno dei seguenti casi proposti, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(0)=2, \quad f(3)=-1 \quad \text{e} \quad f(1)=f(2)=0;$$

II) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(0)=2, \quad f(3)=-1 \quad \text{e} \quad f(x)\neq 0 \quad \text{per qualunque } x \text{ nell'intervallo } [0; 3];$$

III) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(1)=f(2)=0, \quad f(0)=2 \quad \text{e} \quad f(3)=4.$$

209. Dimostrare che l'equazione

$$e^x-x^2=0$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-2; 0]$.

(Basta esaminare la funzione $f(x)=e^x-x^2$ e verificare che è continua in $[-2, 0]$ e risulta

$$f(-2)<0 \quad e \quad f(0)>0.)$$

210. Compilare la tabella seguente relativa alla funzione $y=2$ sen $x-x+1$

x	0	1	2	3
y				

indicare in quale intervallo cade una soluzione dell'equazione

$$x=2 \text{ sen } x+1.$$

Spiegare come si potrebbe ottenere il valore della soluzione con un'approssimazione di 0,1.

211. Compilare la tabella seguente relativa alla funzione $y=x^x-4x$

x	0	1	2	3
y				

indicare in quale intervallo cade una soluzione dell'equazione

$$x^x=4x.$$

Spiegare come si potrebbe ottenere il valore della soluzione con un'approssimazione di 0,1.

212. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=2x-1, \quad y=-4x^2+3x+1, \quad y=x^3+x^2-4x-4, \quad y=-x^4+x^2+2$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- hanno il primo e l'ultimo coefficiente di segno opposto,
- risulta $y=0$ in corrispondenza ad almeno un valore positivo di x.

Dimostrare che, in generale, per un polinomio del tipo

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

se risulta $a_0a_n<0$, allora esiste almeno un valore $c>0$, per cui risulta

$$f(c)=0.$$

213. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=x-1, \quad y=x^3+3x^2+3x+1, \quad y=x^5+x^3-2x$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- sono in grado dispari,
- risulta $y=0$ in corrispondenza ad almeno un valore reale di x.

Dimostrare che, in generale, un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno uno zero reale.

214. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=x^2+1, \quad y=4x^2-1, \quad y=x^4-3x^2+2, \quad y=x^6-x^2$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- sono di grado pari,
- l'equazione $y=0$ ha un numero pari di soluzioni reali (oppure non ha soluzioni reali).

Dimostrare che, in generale, un polinomio di grado pari ammette sempre un numero pari di zeri reali (oppure non si annulla mai).

Gli esercizi dal 215 al 223 conducono a riflettere sul teorema di Weierstrass: una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] ammette sempre un massimo ed un minimo assoluti.

215. Esaminare la funzione $f(x)=\frac{1}{x-2}$ nell'intervallo [1, 3] e verificare che la funzione non ammette né massimo, né minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

216. Esaminare la funzione $y=\ln x$ nell'intervallo [0; 1] e verificare che la funzione è continua, ammette il massimo assoluto, ma non ammette il minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

217. Esaminare la funzione $f(x)=\frac{1}{x+1}$ nell'intervallo $[-1, 0]$ e verificare che la funzione è continua, ammette il minimo assoluto, ma non ha il massimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

218. Esaminare la funzione continua $y=\text{sen}\, x$ nell'intervallo aperto $]0, \pi[$ e verificare che la funzione ammette sia il massimo che il minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

219. Esaminare la funzione $y=[x]$ nell'intervallo [0, 2] e verificare che la funzione non è continua nell'intervallo, ma ammette massimo e minimo assoluti.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

220. Dopo aver svolto gli esercizi 215-219, tenere presenti le considerazioni sull'implicazione svolte alle pagg. 338-340 ed esaminare il teorema di Weierstrass, indicando ipotesi e tesi nel modo seguente:

Ip «La funzione $y=f(x)$ è continua in [a, b]»,
Th «La funzione $y=f(x)$ ammette massimo e minimo assoluto».

Scegliere fra i seguenti simboli quelli che esprimono correttamente il teorema:

(I) $Ip \Rightarrow Th$, (II) $Ip \Leftrightarrow Th$, (III) $Th \Rightarrow Ip$

(Solo il primo simbolo è corretto, ...)

221. Valendosi degli stessi simboli introdotti nell'esercizio 220, scegliere fra le frasi seguenti quelle che esprimono correttamente il teorema di Weierstrass:

I) *Ip* è condizione sufficiente, ma non necessaria per *Th*,
II) *Ip* è condizione necessaria e sufficiente per *Th*,
III) *Ip* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Th*,
IV) *Th* è condizione necessaria, ma non sufficiente per *Ip*,
V) *Th* è condizione sufficiente ma non necessaria per *Ip*.

Portare dei controesempi per spiegare perché alcune frasi sono errate.

222. In ciascuno dei seguenti casi proposti, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo aperto $]-1; 4[$ e ammette sia il massimo che il minimo assoluto;
II) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[-1; 4]$ ed ammette il massimo assoluto, ma non il minimo assoluto;
III) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo chiuso $[-1; 4]$, ammette massimo e minimo assoluto, ma non è continua in tutti i punti dell'intervallo.

223. Verificare che il teorema di Weierstrass può essere anche enunciato nel modo seguente: una funzione continua definita in un intervallo chiuso ha come immagine un intervallo chiuso.

224. Completare lo studio dei teoremi che descrivono proprietà delle funzioni continue, dimostrando il seguente teorema:

Teorema di permanenza del segno

Se una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto A d'ascissa a e risulta $f(a)\neq 0$, esiste allora un intorno $I(a)$, tale che se x varia in $I(a)$, $f(x)$ mantiene lo stesso segno di $f(a)$.

(Il teorema è una diretta conseguenza del teorema della permanenza del segno relativo ai limiti, dimostrato nel paragrafo 8 del cap. 2).

Esercizi vari

Gli esercizi dal 225 al 233 conducono ad applicare le nozioni introdotte nel cap. 3 e nei relativi esercizi per risolvere vari problemi.

225. Esaminare le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di 2° grado $ax^2+bx+c=0$, con $a>0$ e $b\neq 0$ e verificare che, quando il coefficiente a tende a 0, una soluzione tende ad ∞ e l'altra al valore $-\frac{c}{b}$, soluzione dell'equazione $bx+c=0$.

(Tenere presente che le soluzioni dell'equazione sono date da

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad e \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Possono dunque aversi due casi:

I) $b>0$ *II)* $b<0$.

Nel primo caso risulta $\lim\limits_{a\to 0} x_1=\infty$, *mentre* $\lim\limits_{x\to 0} x_2$ *si presenta come una forma indeterminata del tipo* $\frac{0}{0}$. *Per risolvere l'indeterminazione si può scrivere*

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\cdot(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\cdot(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

e quindi

$$\lim_{a\to 0} x_2=\lim_{a\to 0}\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{c}{b}.$$

Procedere in modo analogo nel secondo caso).

226. Visualizzare i risultati ottenuti nell'esercizio precedente, interpretando le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ come ascisse dei punti di intersezione della parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$ con l'asse delle x. Per semplicità si può fissare l'attenzione, per esempio, su equazioni della forma $ax^2+4x+3=0$, oppure $ax^2+2x-3=0$.

227. Considerare un cono ed un cilindro circolari retti che hanno le basi e le altezze uguali fra loro; calcolare il limite del rapporto delle superfici totali, al tendere a zero del raggio di base. [1]

228. Trovare il limite dell'angolo interno di un poligono regolare di n lati, quando il numero $n\to\infty$. [Il risultato è π]

229. Dimostrare che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r tende alla lunghezza della circonferenza, quando $n\to\infty$.

(Basandosi sulla fig. 6 si trova

$$\overline{AC}=r\cdot sen\,\frac{\pi}{n} \quad e\ quindi \quad \overline{AB}=2r\cdot sen\,\frac{\pi}{n}$$

Perciò il poligono ha il perimetro p_n *dato da*

$$p_n=2rn\cdot sen\,\frac{\pi}{n}.$$

Per calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, *si considera la funzione*

$$y=sen\,\frac{\pi}{n}$$

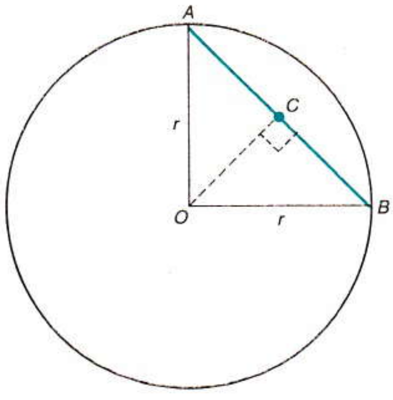
come funzione composta di

$$z=\frac{\pi}{n} \quad e \quad y=sen\,z.$$

Così risulta anche $n=\frac{\pi}{z}$ *e* p_n *assume la forma seguente*

$$p_n=2\pi r\cdot\frac{sen\,z}{z}$$

Tenendo infine presente che, quando $n\to\infty$, $z\to 0$...*)*



AB lato del poligono
OC apotema
$A\hat{O}B=\frac{2\pi}{n}$ radianti

Fig. 6

230. Il segmento AB lungo 1 è diviso in n segmenti uguali (fig. 7) e su ciascuno di essi, preso come base, si è costruito un triangolo rettangolo isoscele, ottenendo una linea spezzata con il perimetro lungo p. Verificare che, quando $n \to \infty$, p non tende ad 1, anche se la spezzata "tende a confondersi" con il segmento AB.

(Si trova che $p \to \sqrt{2}$).

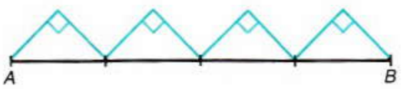


Fig. 7

231. Il segmento AB lungo 1 è diviso in n segmenti uguali (fig. 8) e su ciascuno di essi, preso come diametro, si è costruito un semicerchio, ottenendo una linea lunga c. Verificare che, quando $n \to \infty$, c non tende ad 1, anche se la linea "tende a confondersi" con il segmento AB.

(Si trova che $c \to \pi$).

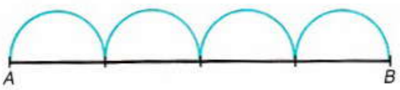


Fig. 8

232. In un riferimento cartesiano Oxy si considera un punto P sull'arco OA di parabola d'equazione $y=x^2$ limitato dai punti O e $A(1, 1)$. Si traccia la retta t tangente alla parabola in A e si valuta la distanza PT del punto P dalla retta t. Determinare il limite del rapporto seguente:

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PT}}$$

quando P tende ad A.

(Per valutare le distanze PA e PT, ricordare le seguenti formule:

– dati $A(a, b)$ e $B(c, d)$, si ha $\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(b-d)^2}$

– dati $A(a, b)$ e $r: y=nx+q$, si ha $\overline{Ar}=\dfrac{|b-(ma+q)|}{\sqrt{1+m^2}}$.

Il risultato è $5\sqrt{5}$).

233. Disegnare le due curve che hanno le equazioni seguenti:

$$\text{I)}\quad y=\frac{x+1}{2x+1}, \qquad \text{II)}\quad y=\frac{4x}{1-2x}$$

Una retta d'equazione $x=h$ $\left(\text{con } h>\dfrac{1}{2}\right)$ incontra nel punto P la prima curva e nel punto Q la seconda; fissato quindi il punto $A(1, 0)$, si considerano i seguenti triangoli:

POA, che ha area S_1,
QOA, che ha area S_2.

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{S_1}{S_2}, \qquad \lim_{h\to\frac{1}{2}}\frac{S_1}{S_2}$$

(Per tracciare il grafico delle due funzioni, vedi esercizi 297-299 del cap. 1; i risultati sono $\frac{1}{4}$ e 0).