1
Le funzioni

1. Le funzioni nella storia di ieri e nella realtà di oggi
2. Il concetto di funzione
3. Le funzioni reali di variabile reale
4. Alcune funzioni elementari e il loro grafico
5. Trasformazioni del piano che modificano il grafico di una funzione
6. L'algebra delle funzioni
7. Alcune proprietà che caratterizzano una funzione

1. Le funzioni nella storia di ieri e nella realtà di oggi

Il termine "funzione" non è certo recente: compare la prima volta nel 1673 in un manoscritto del filosofo e matematico tedesco Leibniz; ma l'idea di studiare il legame fra due grandezze variabili si trova già nei lavori di molti matematici e fisici del XVII secolo. Si tratta dunque di un termine e di un'idea nati a partire da studi di fisica e di matematica; ecco qualche situazione in cui si trovano le radici del concetto di funzione.

Gli studi di Galileo sulla caduta dei gravi

Nelle *Nuove Scienze* (pubblicato nel 1638) Galileo conclude la descrizione delle sue esperienze sulla caduta dei gravi con queste parole: «... Per esperienze ben cento volte replicate sempre si incontrava gli spazi percorsi esser tra loro come i quadrati dei tempi...».

Galileo fissa dunque l'attenzione su due grandezze variabili: la distanza (o spazio) percorsa dal grave ed il tempo. E sono proprio gli esperimenti a suggerire l'idea che le due grandezze siano fra loro legate da una legge che si può esprimere brevemente con la formula

$$s=kt^2,$$

dove

s indica lo spazio (variabile) percorso dal grave,
t indica il tempo (variabile),
k indica la costante di proporzionalità.

Gli studi sul lancio dei proiettili

È sempre nella prima metà del 1600 che vengono pubblicati vari studi sul lancio dei proiettili. La fig. 1 mostra un'incisione del 1621 relativa alle traiettorie seguite da una palla di cannone; il disegno (fig. 2) mostra le due grandezze variabili che caratterizzano la traiettoria del proiettile: lo spostamento x in direzione orizzontale e lo spostamento y in direzione verticale. La relazione fra queste due grandezze è rappresentata quindi da un grafico che permette di ricavare, per ogni valore di x, il relativo valore di y.

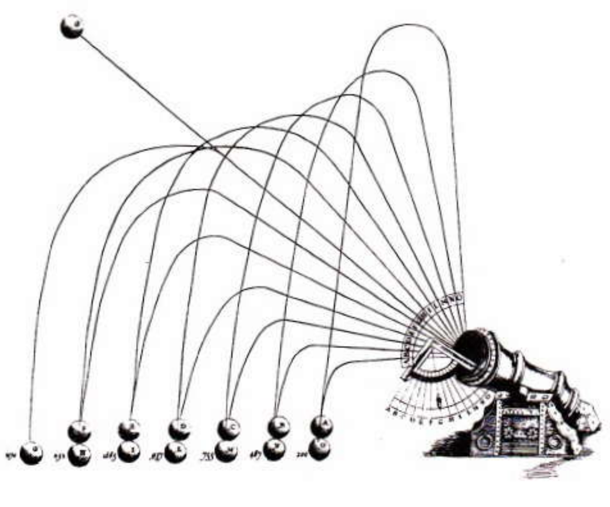


Fig. 1

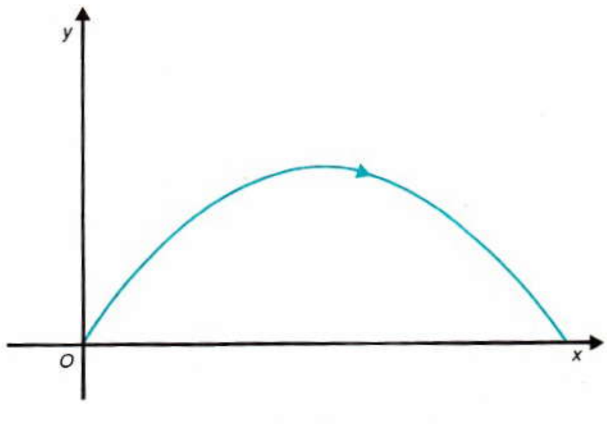


Fig. 2

Gli studi di Tycho Brahe

Alla fine del 1500 l'astronomo danese Tycho Brahe ideò un modello del sistema solare da contrapporre a quello proposto da Copernico. Per verificare la validità del suo modello condusse per anni delle osservazioni astronomiche molto precise, osservazioni che, in molti casi, sono ancora valide. Fra i lavori più famosi di Tycho ricordiamo quelli relativi ai pianeti del sistema solare: l'astronomo riuscì a valutare il raggio R dell'orbita dei pianeti allora conosciuti ed il relativo periodo di rotazione T, riunendo le misure trovate in una tabella (fig. 3); si ha così il modo di calcolare, per ogni valore di R, il corrispondente valore di T.

In questo caso è una tabella a stabilire una relazione fra le due variabili R e T.

pianeta	R	T
Mercurio	0,389	87,77
Venere	0,724	224,70
Terra	1	365,25
Marte	1,524	686,98
Giove	5,200	4.332,62
Saturno	9,510	10.759,20

R è dato dal rapporto fra il raggio dell'orbita del pianeta e quello della Terra.
T è misurato in giorni.

Vediamo dunque profilarsi tre metodi per scoprire delle relazioni fra grandezze variabili:
- scrivere una legge matematica,
- tracciare un grafico,
- compilare una tabella.

Questi tre metodi si sono gradualmente diffusi, fino a diventare propri di tutte le scienze sperimentali, e a costituire attualmente un patrimonio di tutti. Basta qualche esempio per rendersi conto dell'importanza di questi tre metodi oggi.

A) Nelle scienze sperimentali

Nello studio della fisica si trovano tre leggi sperimentali, che descrivono situazioni molto diverse.

1) Quando ci si avvicina o ci si allontana da una sorgente di luce (ad esempio un lampione), si percepisce chiaramente che l'intensità luminosa varia al variare della distanza dalla sorgente. Eseguendo opportune esperienze, si trova che l'intensità luminosa I varia al variare della distanza r dalla sorgente secondo la legge:

$$I=\frac{k}{r^2}.$$

2) La legge di gravitazione universale descrive la forza che si manifesta fra due corpi posti a distanza r: la forza è sempre attrattiva ed ha un'intensità F, che varia al variare della distanza r secondo la legge:

$$F=\frac{k}{r^2}.$$

3) La legge di Coulomb descrive la forza che si manifesta fra due corpi carichi elettricamente posti a distanza r: la forza può essere attrattiva o repulsiva ed ha un'intensità F, che varia al variare della distanza r secondo la legge:

$$F=\frac{k}{r^2}.$$

Si osserva subito che i tre fenomeni descritti sono differenti, tuttavia nelle tre situazioni si notano delle analogie:
- si considerano due grandezze variabili, che possiamo indicare genericamente con x ed y;
- si trova una legge dello stesso tipo che permette di ricavare un ben determinato valore di y a partire da un fissato valore di x.

La legge si può esprimere nella forma seguente:

$$y=\frac{k}{x^2}$$

e prende il nome di **legge dell'inverso del quadrato**.

Questo nome viene dal fatto che per determinare y occorre calcolare l'inverso del quadrato di x.

Ma nelle scienze sperimentali molto spesso non si arriva a trovare una formula che esprima una relazione fra due variabili; in questi casi sono i grafici o le tabelle a sintetizzare efficacemente i risultati sperimentali. Ecco due esempi: il grafico di fig. 4 fa parte di uno studio per prevedere i terremoti e rappresenta le deformazioni della crosta terrestre rilevate prima di un grande terremoto; la tabella di fig. 5 fa parte di uno studio sulla sopravvivenza di differenti microorganismi alla bollitura.

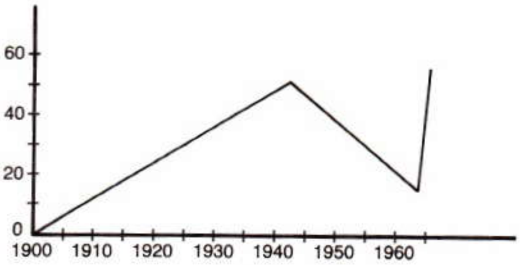


Fig. 4

Organismi	*Tempo di sopravvivenza in minuti*
Protozoi	0
Batteri: la maggior parte delle specie	0
Bacillus subtilis	14
Clostridium perfringens	20
Clostridium botulinum	360

Fig. 5

B) Nella vita quotidiana

Basta sfogliare un quotidiano o un settimanale di informazione per trovare grafici come quello rappresentato in fig. 6 o tabelle come quella di fig. 7: il grafico di fig. 6 visualizza l'andamento del tasso d'inflazione al passare del tempo, mentre la tabella di fig. 7 stabilisce una relazione fra le città e la loro temperatura in un dato giorno.

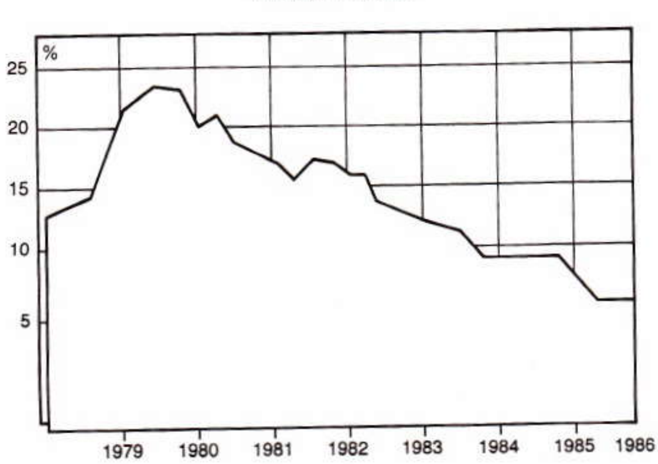


Fig. 6

Fig. 7. Temperature massime in varie città del mondo

Amsterdam	12	Lisbona	18
Atene	14	Londra	10
Belgrado	6	Los Angeles	25
Berlino	7	Madrid	16
Bruxelles	11	Miami	17
Chicago	11	Mosca	6
Copenaghen	5	New York	9
Dublino	7	Oslo	4
Francoforte	9	Parigi	12
Ginevra	7	Rio de Janeiro	36
Helsinki	4	S. Francisco	22
Honolulu	26	Stoccolma	3
Istanbul	14	Vienna	np
Kiev	2	Varsavia	5

Fig. 7

Ma non troviamo solo tabelle e grafici nella vita di tutti i giorni: ci si vale di formule, forse senza rendersene conto, tutte le volte che si usa un tariffario per calcolare il costo di una telefonata, di un viaggio in treno, ... o l'ammontare delle tasse da pagare ogni anno. Ecco un esempio. Per sapere quanto verrà a costare una telefonata interurbana in Italia ad una distanza superiore a 120 km si hanno queste indicazioni: il costo è valutato a partire da unità indivisibili di tempo composte di tre minuti; la prima unità costa £1350, le successive £735. Per valutare il costo della telefonata seguendo queste indicazioni, ci si vale dunque delle seguenti formule: se x è il tempo (in minuti) e y il costo (in lire), si ha che:

se $0 \leq x < 3$	$y = 1350$
se $3 \leq x < 6$	$y = 1350 + 735$
se $6 \leq x < 9$	$y = 1350 + 2 \cdot 735$

Troviamo dunque, nei settori scientifici più vari e nella vita di tutti i giorni, la necessità e l'abitudine di basarsi su formule, tabelle o grafici per esplorare la realtà. Vedremo nel prossimo paragrafo come la matematica sia riuscita a sintetizzare questi strumenti d'indagine in un unico concetto: il concetto di **funzione**.

2. Il concetto di funzione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto, attraverso vari esempi, che la realtà può essere "matematizzata" valendosi di tre strumenti: formule, grafici, tabelle. Si tratta di tre strumenti apparentemente molto diversi, dato che, generalmente, risulta facile leggere una tabella o interpretare un grafico, mentre è più difficile capire il significato di una formula. Eppure è proprio la formula quella più ricca di informazioni; basta un esempio per rendersene conto. A partire dalla legge dell'inverso del quadrato, espressa da

$$y = \frac{k}{x^2},$$

dopo aver scelto il valore di k, per esempio $k=1$, si può compilare una tabella: basta assegnare dei valori ad x e ricavare, in base alla formula, i corrispondenti valori di y.

Ma, nell'assegnare dei valori ad x, sorge un problema: quali numeri si possono sostituire alla variabile x?

Si risolve subito questo problema, tenendo presenti i fenomeni descritti dalla legge: x indica la distanza fra due corpi, perciò si possono sostituire ad x solo dei valori positivi. Si può allora compilare una tabella come quella di fig. 8, che può essere "infittita" o continuata con altri valori di x positivi, scelti a piacere.

In questo modo ci si rende conto che una formula esprime in modo sintetico una tabella, purché si dia, accanto alla formula, un'informazione essenziale: in quale insieme di numeri si possono scegliere i valori da sostituire ad x.

È facile poi capire che la tabella può essere visualizzata da un grafico (fig. 9): basta disegnare su un piano cartesiano tutti i punti P con le coordinate x ed y indicate dalla tabella.

x	$y=\frac{1}{x^2}$
⋮	⋮
0,5	4
1	1
1,5	0,44
⋮	⋮
2	0,25

Fig. 8

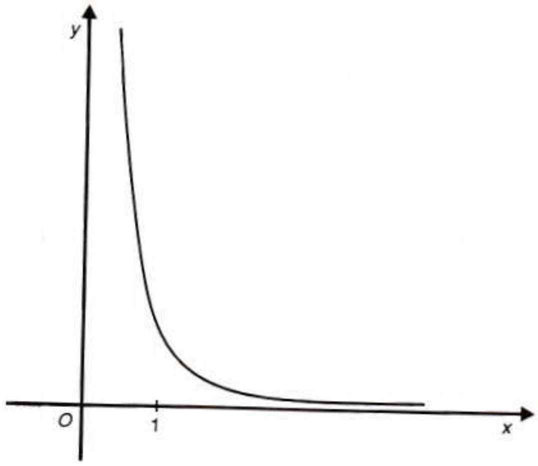


Fig. 9

In conclusione, *quando la relazione fra due variabili x ed y è data da una formula, si possono sempre ottenere una tabella ed un grafico, purchè sia indicato, accanto alla formula, l'insieme di numeri in cui scegliere x.*

Invece, a partire da un grafico non sempre si può ricavare una formula: si capisce infatti che si può tracciare su un piano cartesiano una linea a caso (fig. 10), senza avere nessuna formula che permetta di calcolare y a partire da x. Tuttavia, la linea di fig. 10 presenta un'importante caratteristica: se si sceglie un valore di x nell'intervallo $[-2, 2]$[1], si può determinare, a partire dalla curva, un solo valore di y; si capisce dunque che alla curva si potrebbe associare una tabella, come quella indicata in fig. 11.

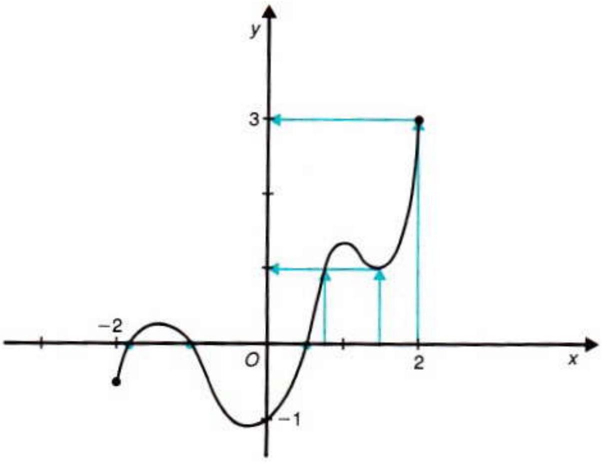


Fig. 10

x	y
−2	−0,5
−1	0
0	−1
0,5	0
0,75	1
1,5	1
2	3
⋮	⋮

Fig. 11

[1] Il simbolo $[-2, 2]$ indica l'insieme di tutti i numeri reali x, che soddisfano le disuguaglianze $-2 \leq x \leq 2$. Questo insieme prende anche il nome di intervallo.

Un'ultima osservazione: i dati che compaiono affiancati in una tabella non sono necessariamente legati da una formula e, inoltre, non sempre è interessante visualizzare una tabella con un grafico cartesiano. Basta un esempio per convincersi: la tabella in cui compaiono le temperature massime delle principali città del mondo in un dato giorno, potrebbe al più essere visualizzata con un grafico come quello di fig. 12.

città	temperatura massima
Amsterdam	12
Atene	14
Belgrado	6
Berlino	7
Bruxelles	11
Chicago	11
⋮	⋮

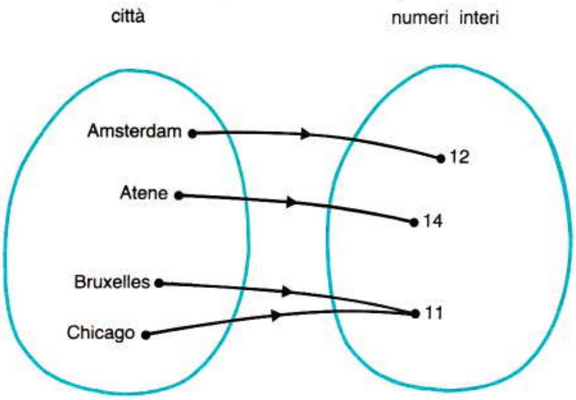


Fig. 12

Sembra dunque che formule, grafici e tabelle siano tre strumenti di indagine della realtà molto spesso indipendenti; eppure un'analisi più attenta porta a cogliere una proprietà comune di questi tre strumenti: permettono tutti e tre di stabilire una relazione fra gli elementi di due insiemi prefissati.

In effetti la tabella di fig. 12 stabilisce una particolare relazione fra l'insieme A delle città del mondo e l'insieme B dei numeri interi: a partire da ogni elemento dell'insieme A (una città), si può sempre determinare un solo elemento dell'insieme B (un numero intero); basta sapere la temperatura massima della città in un dato giorno.

E così la curva di fig. 10 stabilisce una relazione fra l'insieme A di numeri reali contenuti nell'intervallo $[-2, 2]$ e l'insieme B dei numeri reali: a partire da un valore "letto" sull'asse delle x, si trova il corrispondente numero sull'asse delle y.

E, infine, anche una formula come

$$y=\frac{1}{x^2}$$

porta a stabilire una corrispondenza fra due insiemi di numeri: se si precisa che si intende scegliere x nell'insieme A dei numeri reali positivi, si ottiene anche y nell'insieme dei reali positivi.

In tutti i casi esaminati si stabiliscono dunque, tra due insiemi, delle relazioni che hanno le seguenti caratteristiche:
- si distingue l'insieme A "di partenza" dall'insieme B "di arrivo",
- ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B.

Una relazione con queste caratteristiche prende il nome di **funzione**; l'insieme $\boldsymbol{A}$ prende il nome di **dominio** della funzione, l'insieme $\boldsymbol{B}$ prende il nome di **codominio**.

Una funzione è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di un insieme A un solo elemento di un insieme B; è data quindi una funzione, quando sono date tre informazioni:
1) un insieme A, chiamato dominio;
2) un insieme B, chiamato codominio;
3) una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di A un solo elemento di B.

Due osservazioni importanti:

I) La legge per determinare un elemento di B, a partire da un elemento di A, può essere espressa in molti modi, in particolare con una tabella, un grafico cartesiano o una formula. Tuttavia **una tabella, un grafico o una formula non sempre descrivono una funzione**.

Ecco qualche esempio su cui riflettere:

1) La tabella di fig. 13 indica, accanto ad ogni città, la temperatura massima e la temperatura minima nello stesso giorno. La tabella stabilisce ancora una relazione fra l'insieme A delle città del mondo e l'insieme B degli interi, ma, ora, la relazione non è più una funzione, perché la tabella non fa corrispondere ad ogni città un solo numero intero.
2) In fig. 14 è disegnata la circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio $r=2$; è chiaro che la circonferenza stabilisce una relazione fra l'insieme A dei numeri reali contenuti nell'intervallo $[-2, 2]$ e l'insieme B dei reali, ma, ora, la relazione non è una funzione, perché ad un elemento di A, scelto sull'asse delle x, non corrisponde un solo elemento di B, letto sull'asse delle y.
3) La circonferenza di fig. 14 è descritta dalla seguente formula (o equazione cartesiana):

$$x^2+y^2=4.$$

Questa formula stabilisce una relazione fra l'insieme A dei reali contenuti nell'intervallo $[-2, 2]$ e l'insieme B dei reali, ma la relazione non è una funzione, dato che, ad ogni valore di x scelto nell'intervallo $[-2, 2]$ corrispondono due valori di y, dati da

$$y=\sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad y=-\sqrt{4-x^2}.$$

città	temp. max.	temp. min.
Amsterdam	12	8
Atene	14	10
Belgrado	6	1
Berlino	7	2

Fig. 13

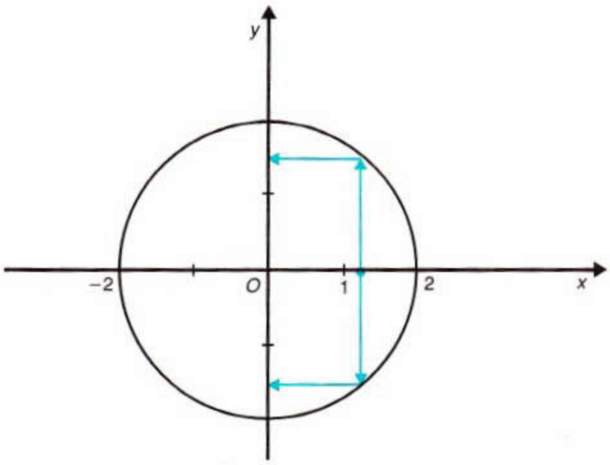


Fig. 14

II) Nella definizione di funzione è chiaramente precisato che ogni elemento del dominio A deve avere un solo corrispondente nel codominio B. Invece **non è detto che ogni elemento del codominio *B* provenga da un elemento del dominio *A***.

Perciò possiamo trovare nel codominio B:

– elementi che non provengono da alcun elemento del dominio A;
– elementi che provengono da due o più elementi di A.

Qualche esempio chiarisce meglio l'idea.

1) Nella funzione che associa ad ogni città la sua temperatura massima in un dato giorno (fig. 15), ad ogni elemento di A (una città) possiamo associare un elemento di B (un intero): basta conoscere la temperatura massima della città in quel giorno. Tuttavia le temperature massime delle varie città non esauriscono certo l'insieme degli interi; inoltre uno stesso numero intero può indicare la temperatura di due o più città.
2) Nella funzione descritta dal grafico cartesiano di fig. 16, il dominio A è l'intervallo $[-2, 2]$ e il codominio B è l'insieme dei reali; ad ogni elemento di A (un numero letto sull'asse delle x) possiamo associare un solo elemento di B (il corrispondente numero letto sull'asse delle y). Tuttavia i valori y così ottenuti non esauriscono l'insieme dei reali, dato che sono tutti contenuti nell'intervallo $[-1; 3]$; si notano inoltre dei valori di y (per esempio 0) che provengono da più valori di x.

Può essere talvolta utile indicare il sottoinsieme del codominio formato dagli elementi che provengono da uno o più elementi del dominio; questo sottoinsieme prende il nome di **immagine** (o immagine della funzione). Così, nell'ultimo esempio esaminato, il codominio B è l'insieme dei reali, ma l'immagine della funzione è l'intervallo $[-1; 3]$.

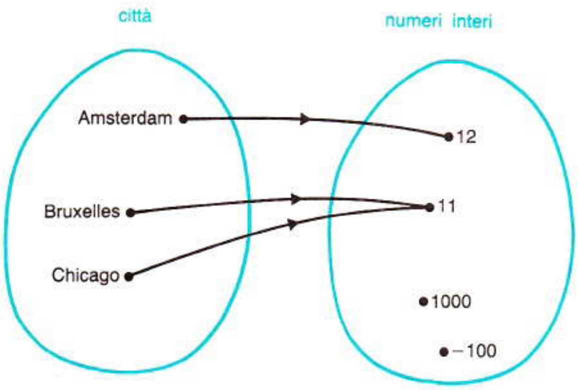


Fig. 15

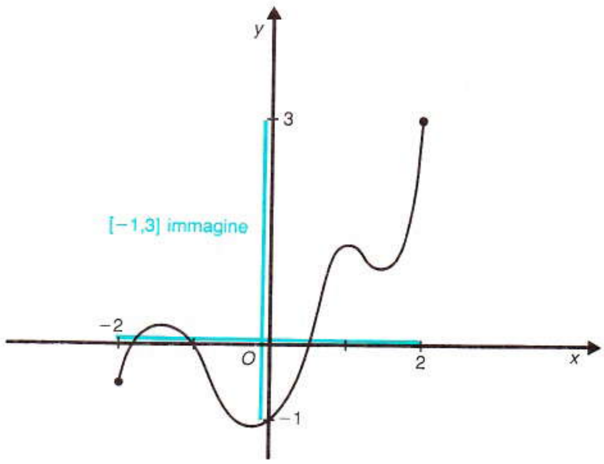


Fig. 16

3. Le funzioni reali di variabile reale

Anche se il concetto di funzione è uno dei più ricchi di applicazioni, questo volume si occupa soprattutto di particolari funzioni, che possono essere descritte sinteticamente nel modo seguente:

- il dominio A è un insieme di numeri reali;
- il codominio B è un insieme di numeri reali;
- una formula esprime la legge che fa corrispondere ad ogni numero x, scelto in A, un solo numero y, che appartiene a B.

Funzioni di questo tipo prendono anche il nome di **funzioni reali di variabile reale.**

Quando si studiano queste funzioni, molto spesso non se ne indica esplicitamente il dominio e codominio; in questo caso sono sottintese le seguenti indicazioni:

- **il dominio A è l'insieme di tutti i numeri reali per cui è possibile eseguire le operazioni indicate nella formula;**
- **il codominio B è l'insieme dei numeri reali.**

Vediamo meglio questa idea riflettendo su qualche esempio di funzione data solo per mezzo di una formula.

1) $y=\frac{1}{x}$

Questa formula fa corrispondere ad ogni numero reale x, il suo reciproco y, risultato della divisione $1:x$.

Ora, è chiaro che non esiste il reciproco di 0, dato che non si può eseguire la divisione $1:0$. Perciò la formula (1) descrive la funzione che ha:
- come dominio l'insieme $\mathbb{R}_0$ dei reali[1], escluso 0;
- come codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

2) $y=\sqrt{x}$

La formula fa ora corrispondere ad ogni numero reale x la sua radice quadrata ed è noto che la radice quadrata di un numero reale x dà un risultato reale solo se x è positivo o nullo.

Perciò la formula (2) descrive la funzione che ha:
- come dominio l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi;
- come codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

3) $y=x^2$

Questa formula fa corrispondere ad ogni numero reale x il suo quadrato y, risultato della moltiplicazione $x \cdot x$, ed è noto che questa moltiplicazione dà sempre un risultato reale.

Perciò la formula (3) descrive la funzione che ha:
- come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali;
- come codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

È chiaro che, mediante la formula (3), si può descrivere anche una funzione che abbia come dominio A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; per esempio, si può considerare la funzione, che ha:
- come dominio l'insieme $\mathbb{R}^+$,
- come codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali;

mentre la legge per ottenere y, a partire da x è ancora data dalla formula

$$y=x^2$$

In definitiva, quando una funzione è data solo mediante una formula, si indica come dominio il più vasto insieme di numeri reali per cui la formula ha significato. In questi casi il dominio prende anche il nome di **campo di esistenza della funzione**.

Concludiamo segnalando un simbolo che comparirà molto spesso in questo volume: quando si studiano delle proprietà valide per tutte le funzioni reali di una variabile reale, occorre spesso fissare l'attenzione su una qualunque funzione; in tal caso ci si vale del simbolo[2]:

$$y=f(x)$$

[1] L'insieme dei reali si indica convenzionalmente con il simbolo $\mathbb{R}$, mentre l'insieme dei reali, escluso 0, si indica con $\mathbb{R}_0$, che si legge "erre con zero".

[2] Il simbolo si legge: "y uguale ad effe di x".

Questa notazione è stata introdotta per la prima volta nel 1734 dal grande matematico svizzero Leonardo Eulero; i simboli x, y, f che vi compaiono hanno abitualmente il seguente significato:

x rappresenta i singoli elementi del dominio e prende il nome di **variabile indipendente**;
y rappresenta l'elemento del codominio corrispondente ad x e prende il nome di **variabile dipendente**;
f indica una generica formula per ottenere y, a partire da x.

4. Alcune funzioni elementari e il loro grafico

In questo paragrafo esamineremo alcune delle funzioni reali di variabile reale, che più frequentemente si incontrano nello studio della matematica e delle scienze sperimentali. Di ogni funzione tracceremo il grafico cartesiano, che ne visualizza l'andamento e, in qualche caso, segnaleremo delle caratteristiche particolarmente interessanti.

1) $\boldsymbol{y=0}$

Si tratta di una funzione semplicissima: fa corrispondere ad ogni numero reale x, il numero 0.

Il grafico cartesiano di questa funzione è l'asse delle x (fig. 17): su quest'asse si trovano infatti tutti i punti con l'ordinata y che vale 0.

È chiaro che, in modo analogo, si possono considerare le funzioni rappresentate in fig. 18 e descritte dalle seguenti formule:

$$y=3, \quad y=-2, \quad y=\sqrt{2}, \quad y=-\pi \ldots \tag{1}$$

Spesso una funzione descritta da formule come le (1) si indica con

$$\boldsymbol{y=k}$$

dove k indica un qualunque numero reale fissato.

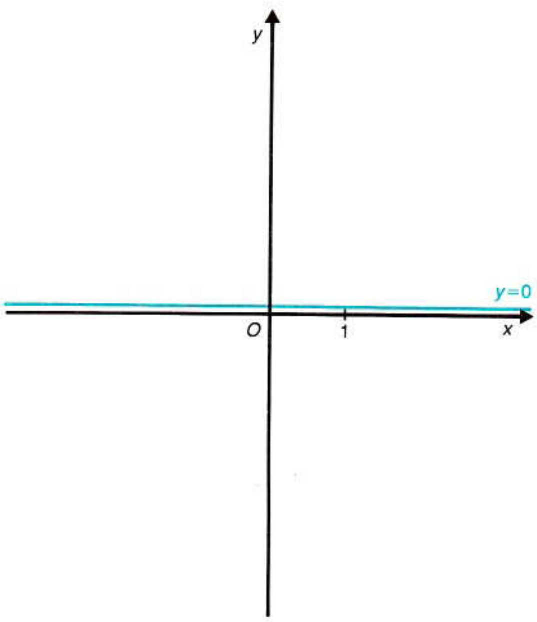


Fig. 17

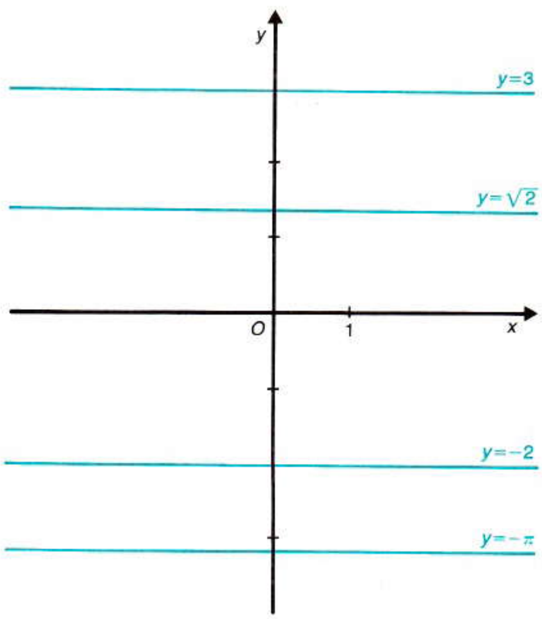


Fig. 18

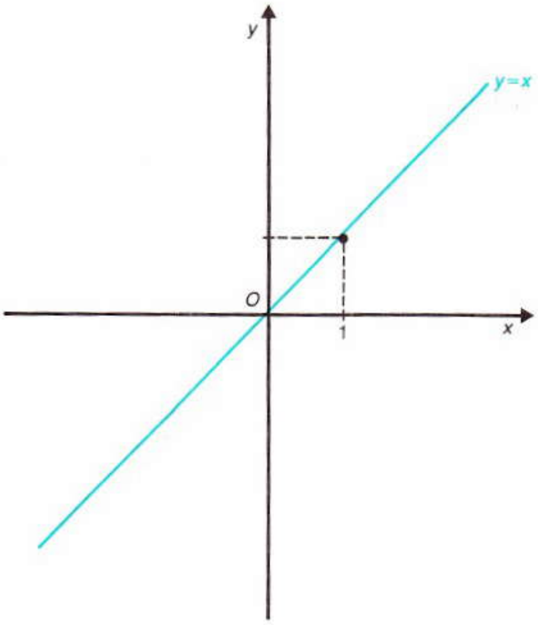


Fig. 19

2) $y=x$

La formula descrive un'altra funzione molto semplice: questa funzione fa corrispondere ad ogni numero reale x lo stesso valore x.

Il grafico di questa funzione è costituito dunque da tutti i punti che hanno l'ascissa x uguale all'ordinata y: si tratta della retta b, bisettrice del I e III quadrante rappresentata in fig. 19.

La funzione $y=x$ fa parte di una più vasta categoria di funzioni: le potenze di x, che possiamo descrivere con la formula

3) $y=x^n$

Secondo questa formula, ad ogni numero reale x corrisponde la sua potenza con esponente fisso, dato dal numero n. È chiaro che, se si considera $n=1$, si ottiene, appunto, la funzione $y=x$.

Esaminiamo ora altre funzioni che si ottengono assegnando all'esponente n alcuni valori interi positivi:
- per $n=2$ si ottiene la funzione $y=x^2$, rappresentata in fig. 20;
- per $n=3$ si ottiene la funzione $y=x^3$, rappresentata in fig. 21;
- per $n=4$ si ottiene la funzione $y=x^4$, rappresentata in fig. 22;
- per $n=5$ si ottiene la funzione $y=x^5$, rappresentata in fig. 23 ...

x	$y=x^2$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

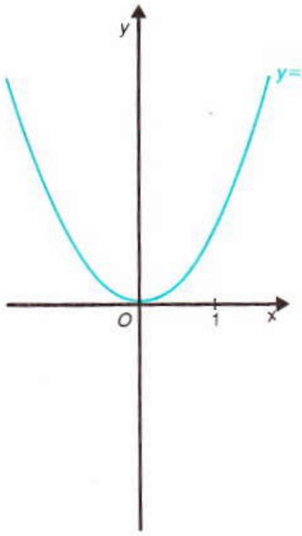


Fig. 20

x	$y=x^3$
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

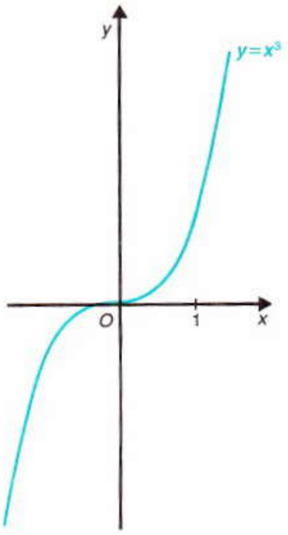


Fig. 21

x	$y=x^4$
-2	16
-1	1
0	0
1	1
2	16

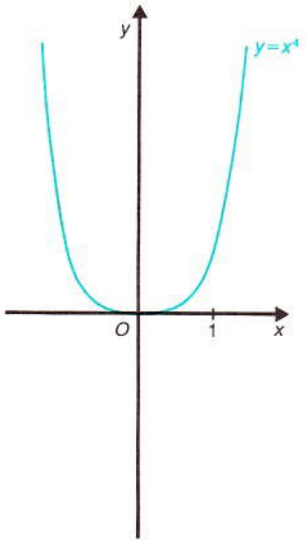


Fig. 22

x	$y=x^5$
-2	-32
-1	-1
0	0
1	1
2	32

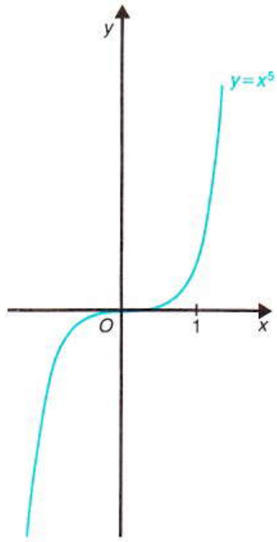


Fig. 23

Le curve ottenute visualizzano alcune proprietà interessanti di queste funzioni; fra le varie proprietà segnaliamo le seguenti:

a) il campo di esistenza di tutte le funzioni è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali;
b) tutte le curve toccano l'asse delle x in $O(0,0)$;
c) le curve grafico delle funzioni $y=x^2$ e $y=x^4$ hanno un andamento simile:
   - tutti i loro punti hanno ordinata y positiva, dato che qualunque numero reale x, elevato ad un esponente pari, dà una potenza y positiva;
   - sono simmetriche rispetto all'asse delle y, dato che si ottiene lo stesso valore di y, a partire da valori opposti di x;

   queste caratteristiche si possono trovare nel grafico di qualunque funzione del tipo $y=x^n$, con l'esponente n pari;
d) le curve grafico delle funzioni $y=x^3$ e $y=x^5$ hanno un andamento simile:
   - i loro punti hanno ordinata y con lo stesso segno dell'ascissa x, dato che qualunque numero reale x, elevato ad un esponente dispari, mantiene lo stesso segno della base;
   - sono simmetriche rispetto all'origine O, dato che si ottengono valori opposti di y, a partire da valori opposti di x;

   queste caratteristiche si possono trovare nel grafico di qualunque funzione del tipo $y=x^n$, con l'esponente n dispari.

Un'altra funzione suggerita dall'operazione di elevazione a potenza si ottiene considerando la variabile x come esponente di una base fissa; si ottengono così le **funzioni esponenziali**, descritte dalla formula seguente:

4) $\quad y=a^x$

Queste funzioni fanno corrispondere, ad ogni numero reale x, la potenza a^x, dove la base a è un numero positivo.

Nelle figg. 24 e 25 sono rappresentate, in particolare, le funzioni

$$y=2^x \quad \text{e} \quad y=3^x;$$

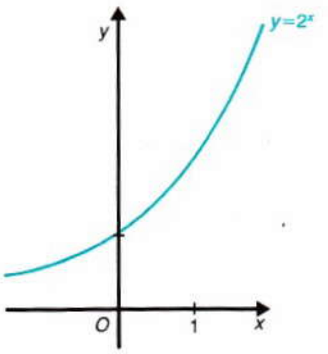
in fig. 26 è rappresentata poi la funzione

$$y=e^x,$$

dove e è il numero di Nepero, cioè il numero irrazionale, le cui prime cifre rappresentative sono date da[1]

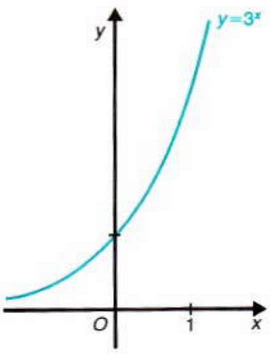
$$e \approx 2{,}718.$$

Fra le funzioni esponenziali è quest'ultima ad avere un'importanza fondamentale sia negli sviluppi teorici dell'analisi matematica, sia nelle più varie applicazioni.



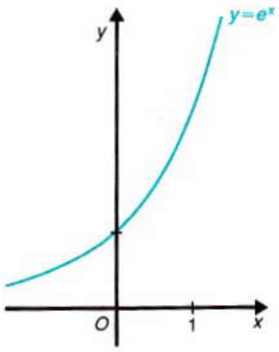
x	$y=2^x$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$
0	$2^0=1$
1	$2^1=2$
2	$2^2=4$

Fig. 24



x	$y=3^x$
-1	$3^{-1}=\frac{1}{3}$
0	$3^0=1$
1	$3^1=3$
2	$3^2=9$

Fig. 25



x	y
-1	$e^{-1}\cong 0{,}37$
0	$e^0=1$
1	$e^1\cong 2{,}72$
2	$e^2\cong 7{,}4$

Fig. 26

Le curve rappresentate nelle figg. 24-26 visualizzano alcune proprietà interessanti delle funzioni esponenziali; fra le varie proprietà segnaliamo le seguenti:

a) il campo di esistenza di tutte le funzioni è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali;
b) tutti i loro punti hanno l'ordinata y positiva, dato che un numero positivo a, elevato a qualunque esponente x, dà sempre una potenza a^x positiva;
c) tutte le curve passano per il punto $A(0, 1)$, dato che, per qualunque base a, risulta

$$a^0=1.$$

Consideriamo infine la funzione, su cui si basa non solo tutta la trigonometria, ma anche lo studio fisico-matematico delle oscillazioni[2]:

5) $\quad y = \text{sen}\, x$

[1] Vedi anche Complementi del cap. 2.
[2] Vedi Complemento A del cap. 7.

Questa funzione ha come campo di esistenza l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali; la legge per ottenere y a partire da un numero x è basata sulla circonferenza goniometrica (fig. 27):

x è lunghezza dell'arco AP, percorso dal punto P
sen x è l'ordinata del punto P.

In fig. 28 è rappresentato il grafico della funzione $y=\text{sen } x$.
La curva ottenuta prende il nome di **sinusoide** e presenta una caratteristica del tutto particolare: è formata da tanti archi tutti uguali all'arco che si ottiene disegnando la curva nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Questa proprietà si descrive brevemente dicendo che **la funzione $y=\text{sen } x$ è periodica**, con periodo 2π.

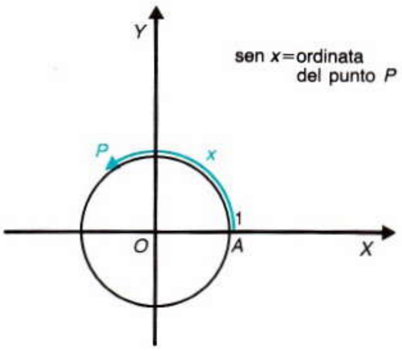


Fig. 27

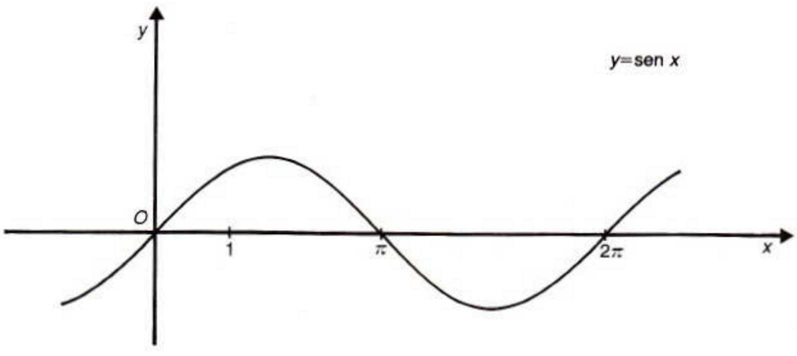


Fig. 28

Le funzioni che abbiamo finora considerato hanno un'importanza fondamentale nello sviluppo dell'analisi; vedremo infatti nei prossimi due paragrafi come si possano costruire la maggior parte delle funzioni note, a partire da queste poche funzioni elementari: basta valersi delle trasformazioni del piano (paragrafo 5) e dell'algebra delle funzioni (paragrafo 6).

5. Trasformazioni del piano che modificano il grafico di una funzione

In questo paragrafo parliamo brevemente[1] di alcune trasformazioni del piano:
A) dilatazioni nella direzione degli assi cartesiani;
B) simmetrie rispetto agli assi cartesiani;
C) traslazioni nella direzione degli assi cartesiani.

Vedremo soprattutto come agiscono queste trasformazioni sulla forma o sulla posizione di una curva disegnata sul piano, modificando la relativa equazione cartesiana. In questo modo si riesce a tracciare rapidamente il grafico di tutte le funzioni che si ottengono trasformando le funzioni elementari descritte nel paragrafo precedente.

[1] Per maggiori informazioni sulle trasformazioni del piano, vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, vol. III, pagg. 50-69.

A) Dilatazioni nella direzione degli assi cartesiani

Per visualizzare queste trasformazioni, si può immaginare il piano cartesiano disegnato su una tela elastica, che possa essere dilatata nella direzione degli assi coordinati; le fotografie delle figg. 29 e 30 mostrano la forma di una curva disegnata sul piano prima e dopo la trasformazione.

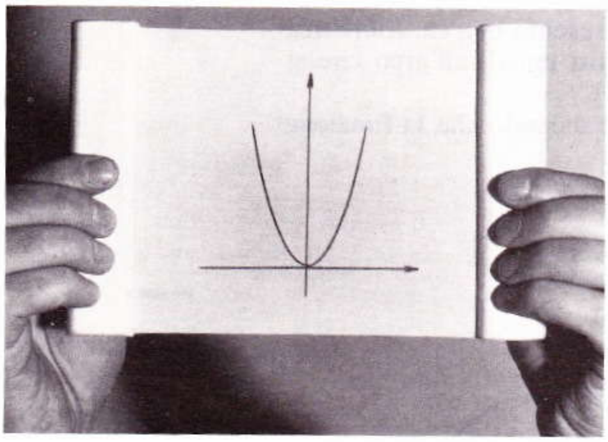


Fig. 29

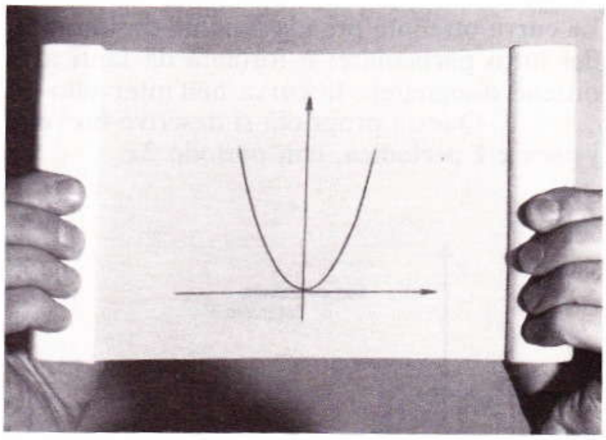


Fig. 30

Per descrivere poi l'effetto di queste trasformazioni sull'equazione di una curva, bisogna confrontare la situazione finale con quella iniziale, che immaginiamo di fissare su una lastra di vetro, indicando il riferimento con $O'x'y'$: inizialmente un qualunque punto P ha le stesse coordinate nei due riferimenti (fig. 31); ma, dopo aver effettuato le dilatazioni nella direzione degli assi, lo stesso punto P avrà, per esempio, l'ascissa x' raddoppiata e l'ordinata y' triplicata (fig. 32). Risulta dunque:

$$x' = 2x$$
$$y' = 3y.$$

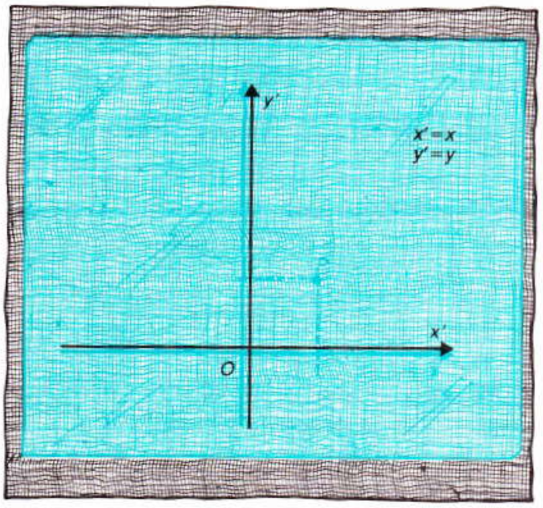


Fig. 31

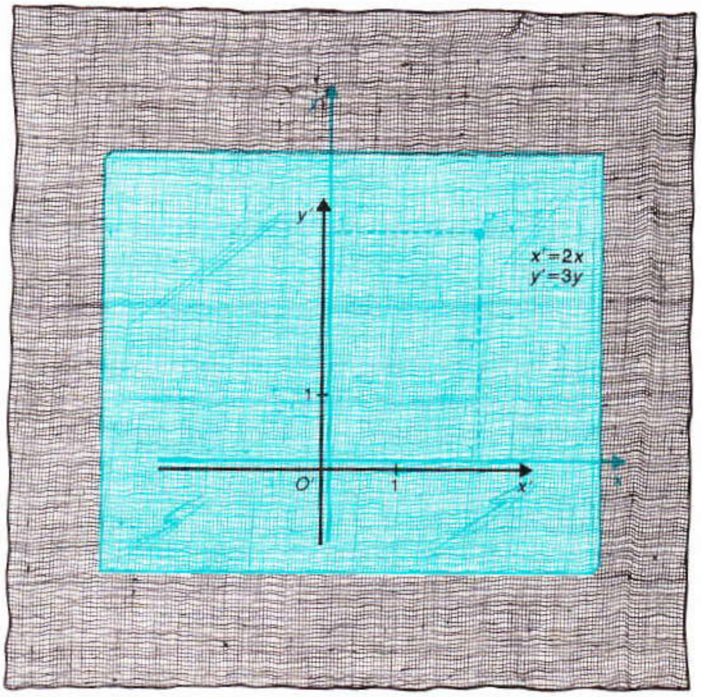


Fig. 32

Ora, è chiaro che si può dilatare la tela con maggior forza, fino a triplicare, quadruplicare, ... le coordinate. In generale, in seguito ad una dilatazione lungo gli assi, si ottengono le ascisse moltiplicate per un numero h e le ordinate moltiplicate per un numero k; si ha dunque:

$$\begin{aligned} x' &= hx \\ y' &= ky. \end{aligned} \tag{1}$$

I coefficienti h e k possono anche assumere valori più piccoli di 1: basta immaginare di disegnare il riferimento Oxy sulla tela già dilatata e, poi, lasciar contrarre il piano lungo i due assi.

Vediamo ora come agiscono queste trasformazioni su alcune funzioni; altri casi di funzioni trasformate saranno esaminate negli esercizi.

1) $\boldsymbol{y=x}$

In fig. 33 è rappresentato il grafico della funzione

$$y=x \tag{2}$$

è la bisettrice del I e III quadrante.

Si effettua una dilatazione solo nella direzione dell'asse delle y, ottenendo ancora una retta (fig. 34), che però ha una pendenza diversa da quella iniziale. Per determinare l'equazione di questa retta, si tiene presente che la trasformazione considerata lascia le ascisse inalterate ed è descritta da equazioni come quelle seguenti:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= my. \end{aligned} \tag{3}$$

Basta allora ricavare y e x dalle (3) e sostituirle nella (2) per ottenere

$$\boldsymbol{y'=mx'}.$$

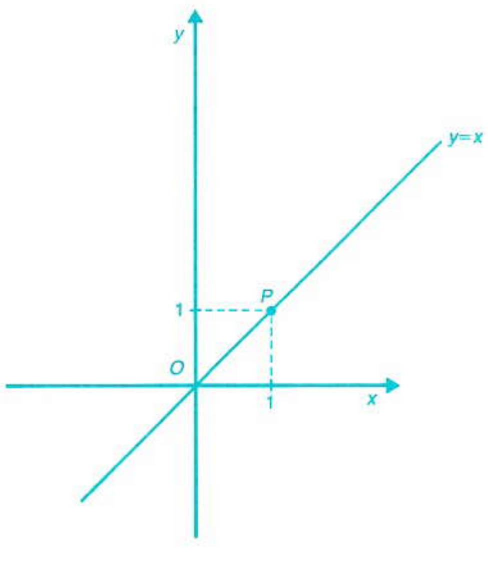


Fig. 33

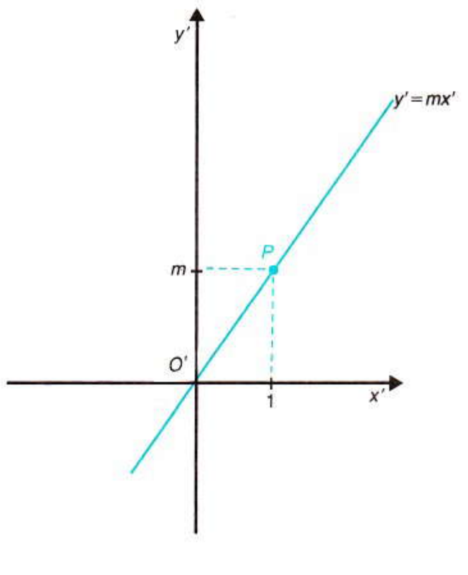


Fig. 34

2) $y=x^n$

Cominciamo ad esaminare il caso particolare della funzione $y=x^2$. Operiamo dunque una dilatazione lungo l'asse delle y, descritta dalle equazioni

$$x'=x$$
$$y'=ay,$$

dopo aver disegnato (fig. 35) la curva d'equazione

$$y=x^2.$$

Si ottiene una delle curve di fig. 36, che hanno equazione

$$y'=ax'^2.$$

Sono tutte parabole con le seguenti caratteristiche:
- il vertice coincide con il punto $O(0, 0)$;
- l'asse di simmetria coincide con l'asse delle y;
- la concavità è rivolta verso l'alto;
- la curva è "più stretta" di quella iniziale se è dato $a>1$;
- la curva è "più larga" di quella iniziale, se è dato $0<a<1$.

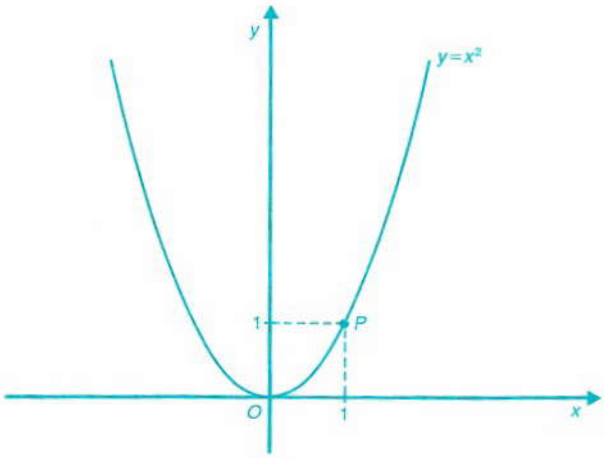


Fig. 35

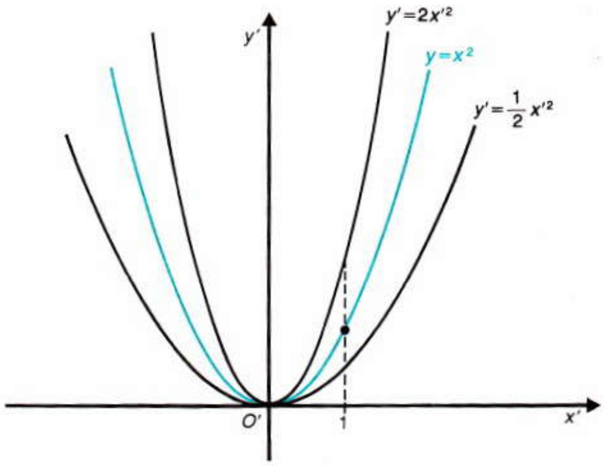


Fig. 36

È facile ora estendere i risultati precedenti al caso delle funzioni del tipo

$$y=x^n;$$

quando si effettua una dilatazione lungo l'asse delle y, si modifica sia la forma che l'equazione della curva; comunque l'equazione è sempre del tipo

$$\boldsymbol{y'=ax'^n}.$$

Le figg. 37 e 38 illustrano questa situazione nel caso delle curve d'equazione

$$y=x^3 \quad \text{e} \quad y=x^4.$$

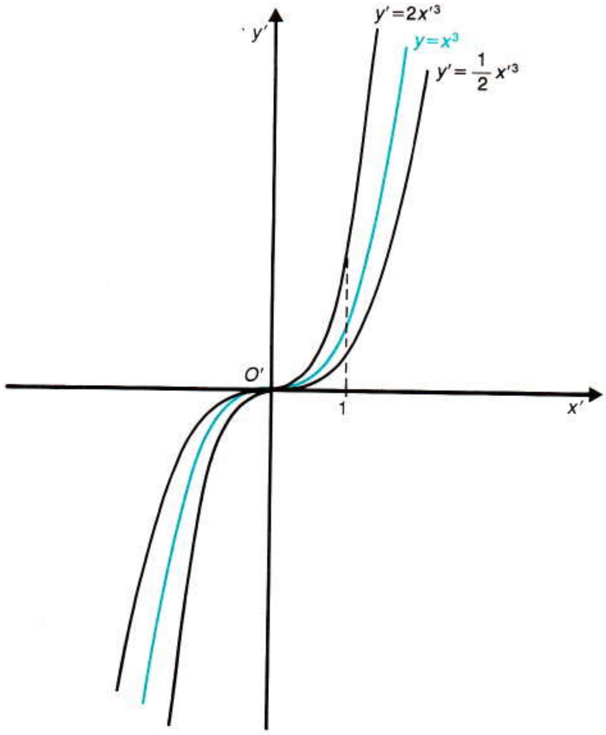


Fig. 37

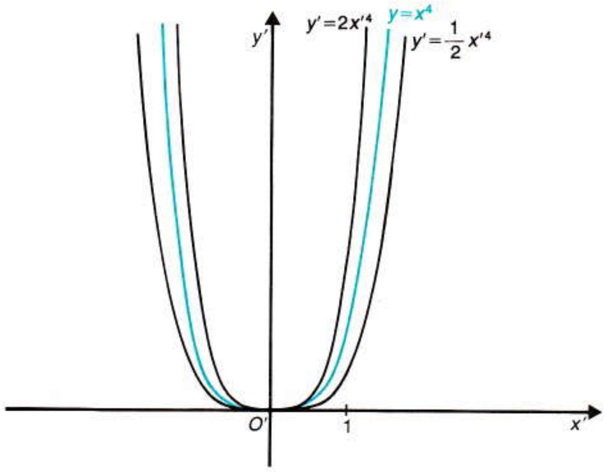


Fig. 38

B) Simmetrie rispetto agli assi cartesiani

Si può ottenere una simmetria rispetto all'asse delle x, ribaltando il piano cartesiano attorno all'asse delle x (fig. 39): in questo modo, ogni punto P del piano mantiene la stessa ascissa, ma ha l'ordinata di segno opposto. La simmetria rispetto all'asse delle x è dunque descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{4}$$

E così, la simmetria rispetto all'asse delle y (fig. 40) è descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y, \end{aligned} \tag{5}$$

dato che le ascisse di tutti i punti cambiano segno, mentre restano inalterate le ordinate.

Se poi si operano successivamente le due simmetrie rispetto agli assi cartesiani, si ha la trasformazione descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{6}$$

Questa trasformazione (fig. 41) è la simmetria rispetto all'origine O, dato che porta un qualunque punto P nel punto P', simmetrico di P rispetto ad O.

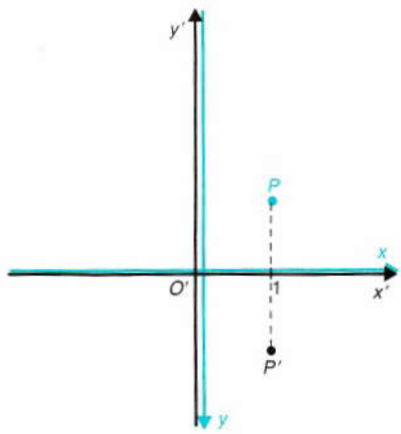


Fig. 39

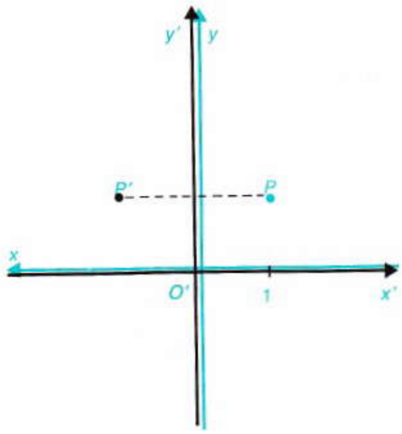


Fig. 40

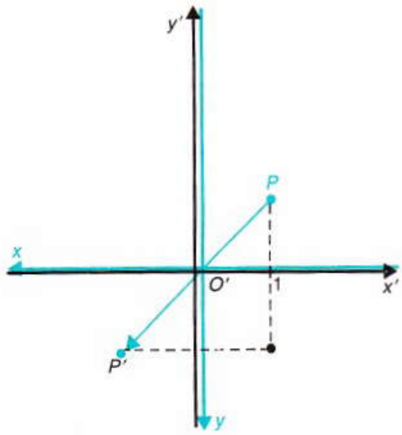


Fig. 41

Ci si rende facilmente conto che le equazioni di queste simmetrie "rientrano" nelle equazioni

$$x' = hx$$
$$y' = ky,$$

quando i coefficienti h e k valgono 1 o -1. In questi casi si viene però a perdere il significato "elastico" del piano su cui si opera, dato che la simmetria non altera la forma di una curva, ma solo la sua posizione nel piano cartesiano.

Vediamo ora come agiscono queste simmetrie su alcune funzioni; altre funzioni saranno esaminate negli esercizi.

1) $\boldsymbol{y = x}$

La retta d'equazione $y = x$ (fig. 42) viene trasformata nella retta d'equazione

$$y' = -x'$$

sia dalla simmetria rispetto all'asse delle x che da quella rispetto all'asse delle y (fig. 43).

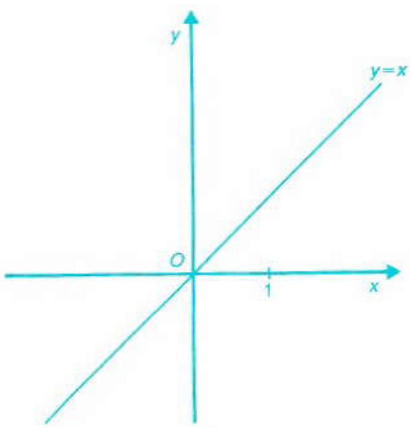


Fig. 42

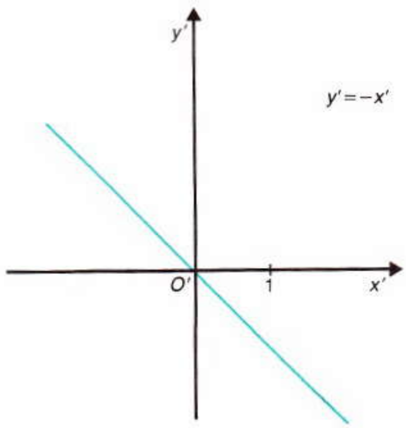


Fig. 43

2) $y=x^n$

Esaminiamo prima il caso particolare della funzione $y=x^2$.

Operiamo dunque le simmetrie rispetto agli assi, dopo aver disegnato (fig. 44) la parabola d'equazione

$$y=x^2.$$

La simmetria rispetto all'asse delle x modifica la posizione della parabola nel piano (fig. 45): il vertice è sempre l'origine O, ma la curva rivolge la concavità verso il basso. Per ottenere la corrispondente equazione basta valersi delle equazioni (4); si ha:

$$y'=-x'^2$$

La simmetria rispetto all'asse delle y lascia inalterata la parabola (fig. 46); questo corrisponde al fatto che le equazioni (5) trasformano la funzione

$$y=x^2$$

in

$$y'=(-x')^2$$

e, dato che risulta

$$(-x')^2=x'^2,$$

l'espressione della funzione resta inalterata.
In tal caso si dice che:
- la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y;
- la funzione è pari.

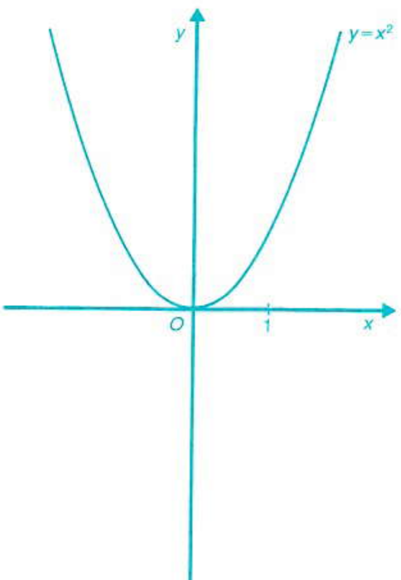


Fig. 44

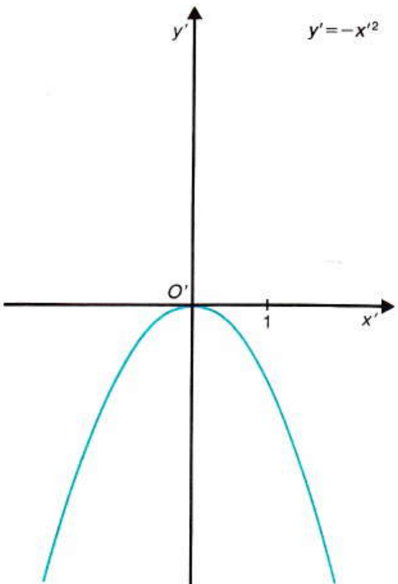


Fig. 45

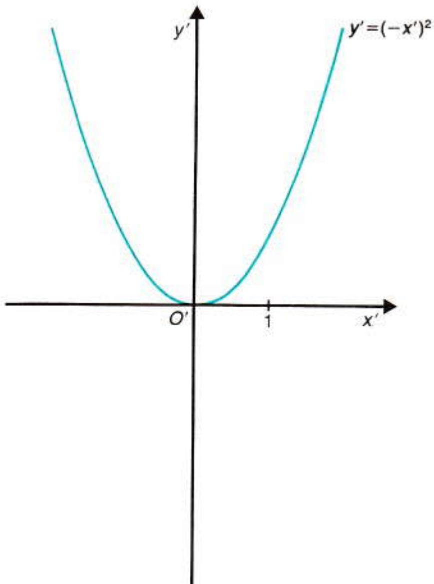


Fig. 46

Operiamo infine le simmetrie rispetto agli assi dopo aver disegnato (fig. 47) la curva d'equazione

$$y=x^3.$$

La simmetria rispetto all'asse delle x trasforma la funzione in

$$y'=-x'^3,$$

mentre quella rispetto all'asse delle y la trasforma in

$$y'=(-x')^3.$$

Si osserva subito che si arriva in tutti e due i casi alla stessa curva (fig. 48) e questo corrisponde al fatto che risulta

$$(-x')^3=-x'^3.$$

È chiaro allora che la simmetria rispetto all'origine O lascia inalterata la curva.
In tal caso si dice che:
- la curva è simmetrica rispetto all'origine O;
- la funzione è dispari.

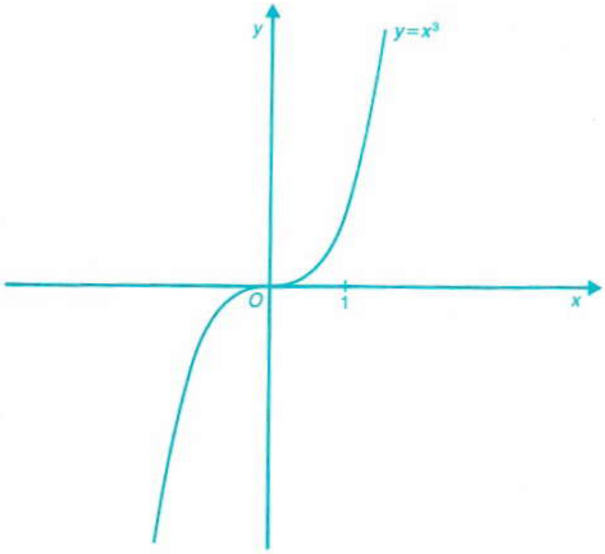


Fig. 47

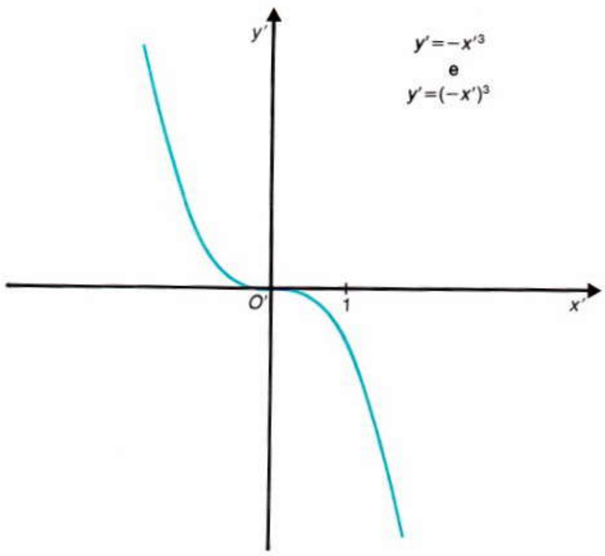


Fig. 48

I risultati ora ottenuti si estendono facilmente alle altre funzioni elementari: si trova, per esempio, che la funzione $y=\text{sen}\,x$ è un'altra funzione dispari (fig. 49).

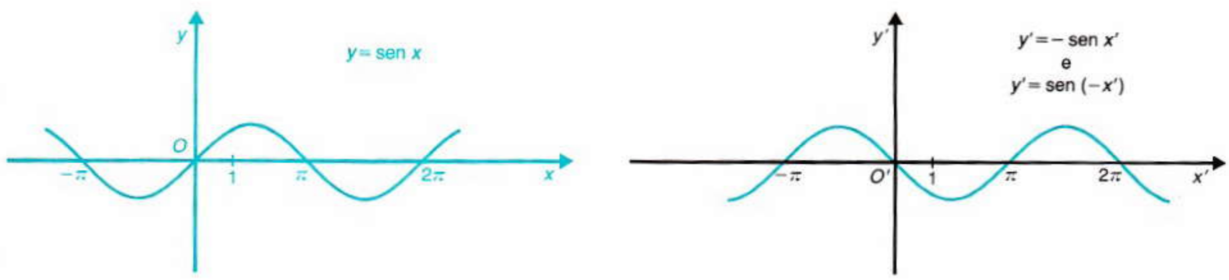


Fig. 49

C) Traslazioni lungo gli assi cartesiani

Vediamo un altro tipo di trasformazione che modifica solo la posizione di una curva nel piano cartesiano: immaginiamo che il riferimento Oxy sia disegnato su una lastra trasparente che facciamo scivolare lungo una direzione prefissata; il riferimento $O'x'y'$ disegnato su un cartone permetterà di confrontare la situazione iniziale con quella finale (fig. 50).

In fig. 51 abbiamo fatto scivolare la lastra prima nella direzione dell'asse delle x di 2 unità verso destra e poi nella direzione dell'asse delle y di 3 unità verso l'alto: un punto A, che aveva inizialmente le stesse coordinate nei due riferimenti, si porta nel punto A', punto che ha le coordinate (x', y'), date da

$$x' = x + 2$$
$$y' = y + 3;$$

in particolare, in questo caso O assume le coordinate (2, 3).
In generale, una traslazione del piano è descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'} &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{y'} &= \boldsymbol{y} + \boldsymbol{q}; \end{aligned} \qquad (7)$$

i numeri p e q possono essere anche negativi, quando le traslazioni avvengono "verso sinistra" o "verso il basso", cioè in verso opposto a quello fissato sugli assi.

Vediamo ora come le traslazioni modificano l'equazione di una curva, alterandone la posizione rispetto agli assi cartesiani.

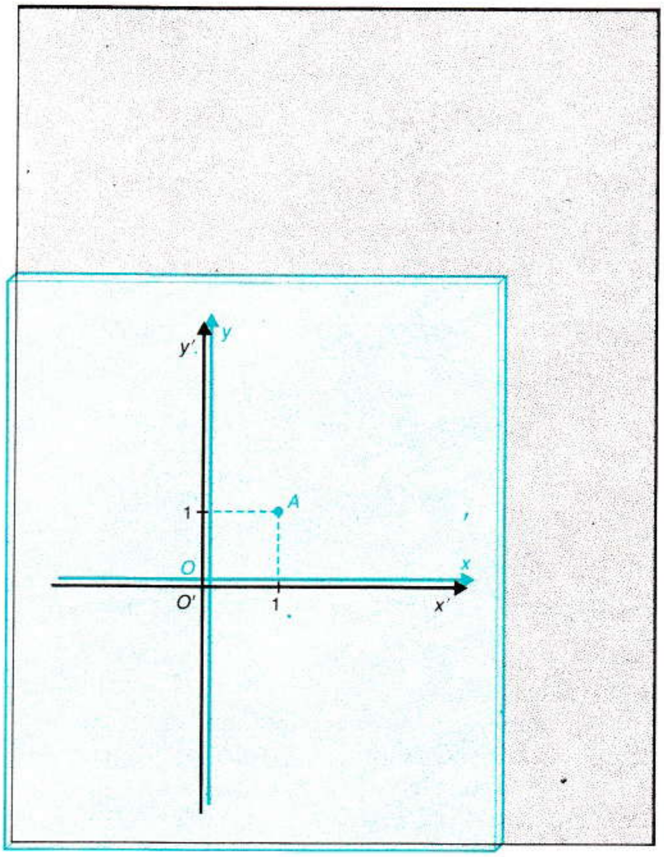


Fig. 50

1) $\boldsymbol{y = mx}$

In fig. 52 è rappresentata una funzione del tipo

$$y = mx. \qquad (8)$$

Si è quindi effettuata una traslazione nella direzione dell'asse delle y, descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + q. \end{aligned} \qquad (9)$$

La traslazione non ha cambiato la pendenza della retta, ma solo la sua posizione rispetto al riferimento (fig. 53). Per scrivere la corrispondente equazione, basta ricavare y dalle (9) e sostituirla nella (8); si ha:

$$\boldsymbol{y' = mx' + q},$$

dove q indica l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate.

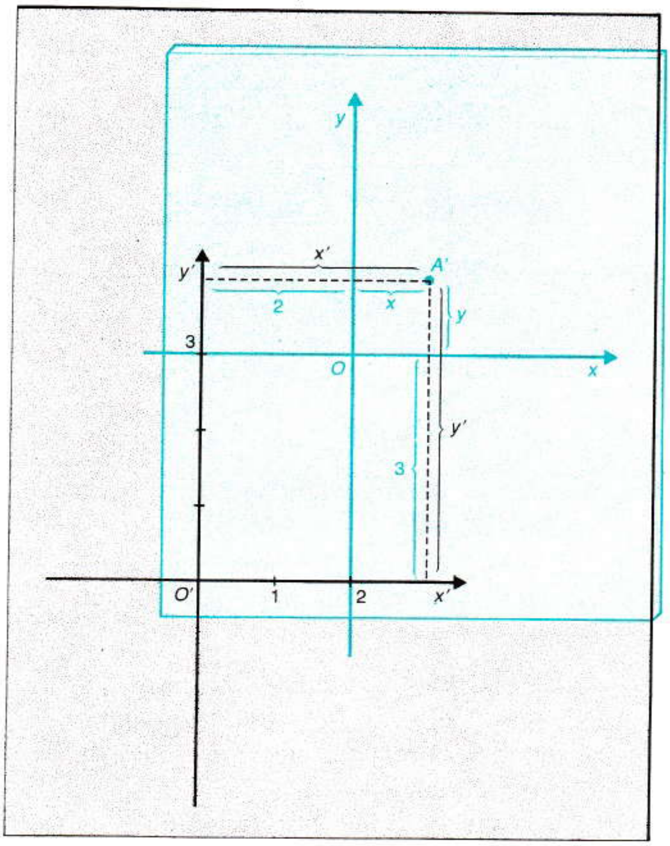


Fig. 51

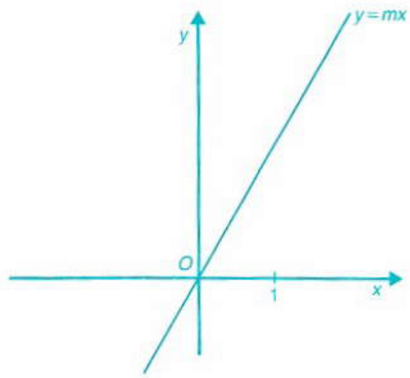


Fig. 52

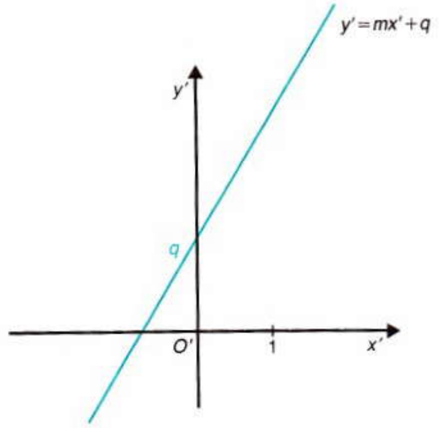


Fig. 53

2) $\boldsymbol{y=ax^n}$

Cominciamo ad esaminare il caso della funzione

$$y=ax^2 \tag{10}$$

rappresentata in fig. 54.

Operando una traslazione lungo gli assi, si ottiene una parabola uguale, ma disposta diversamente nel riferimento (fig. 55):
- l'asse di simmetria ha equazione $x=p$;
- il vertice è $V(p,\, q)$.

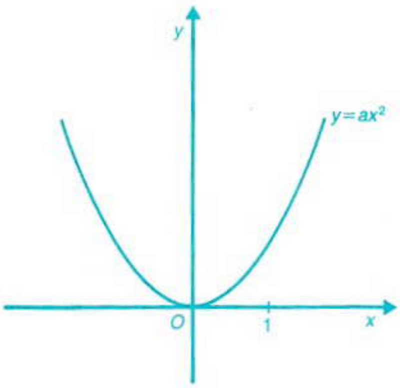


Fig. 54

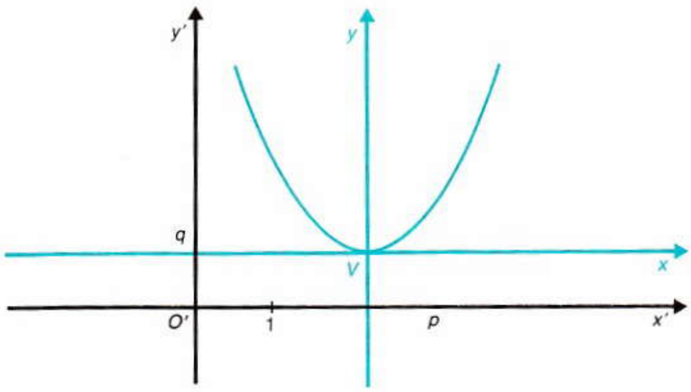


Fig. 55

Per ottenere la corrispondente equazione, basta ricavare x e y dalle (7) e sostituirle nella (10); si ha:

$$y'-q=a(x'-p)^2, \quad \text{ossia} \quad y'=a(x'-p)^2+q.$$

È facile ora estendere i risultati precedenti al caso delle funzioni del tipo

$$y=ax^n:$$

quando si effettuano delle traslazioni lungo gli assi, si modifica la posizione della curva rispetto al riferimento, perciò l'equazione della curva cambia, assumendo comunque una forma del tipo

$$\boldsymbol{y'=a(x'-p)^n+q}.$$

Le figg. 56-58 mostrano due esempi di tale situazione, relativi alla funzione

$$y=x^3.$$

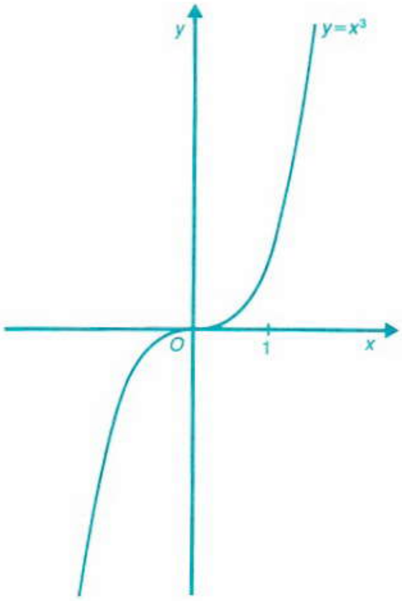


Fig. 56

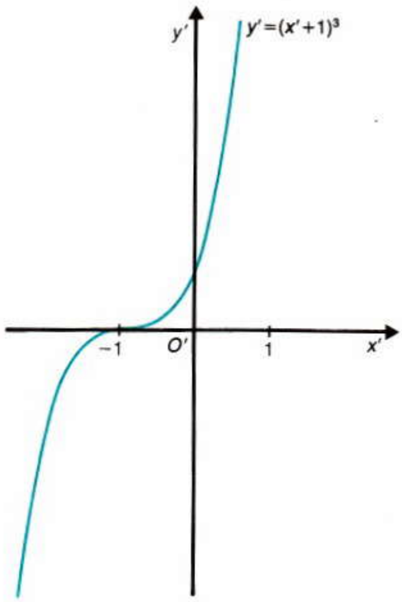


Fig. 57

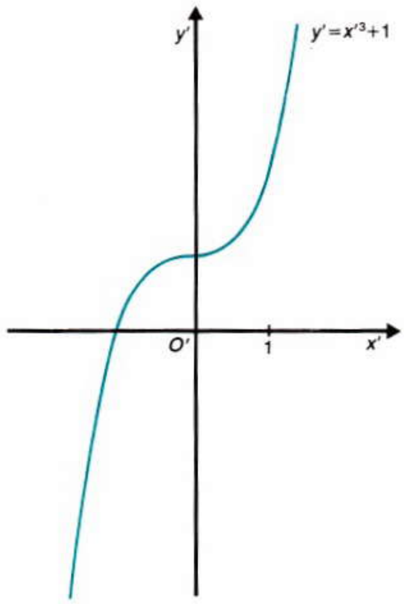


Fig. 58

I risultati relativi alle traslazioni hanno un'interessante applicazione in trigonometria: mediante una traslazione lungo l'asse delle x si può introdurre la funzione $y=\cos x$, a partire dalla funzione $y=\text{sen}\ x$ (fig. 59).

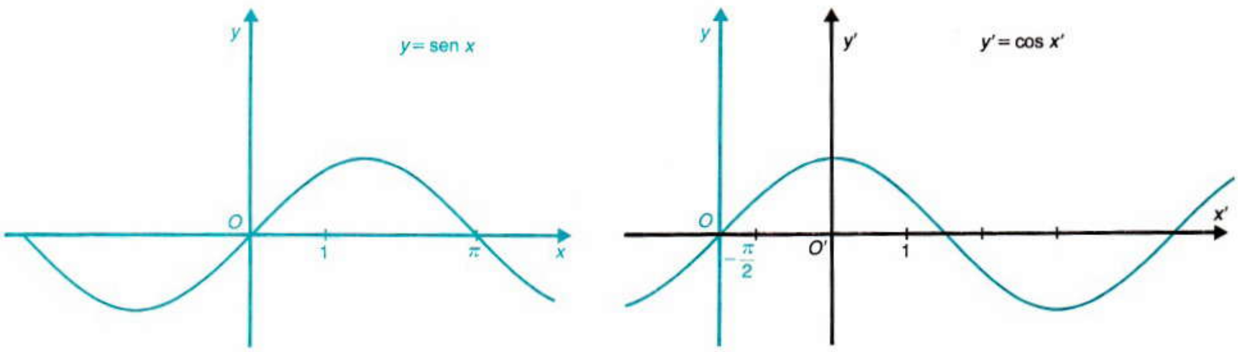


Fig. 59

Concludiamo con due importanti osservazioni:

1) Per descrivere rapidamente l'effetto delle trasformazioni abbiamo indicato il "riferimento fisso" con $O'x'y'$, ottenendo equazioni di curve scritte con le lettere x' e y'; ma, quando non c'è pericolo di confusione, si possono indicare le coordinate con x ed y, rendendo più agevole la scrittura delle formule.
2) Si possono applicare contemporaneamente (o successivamente) più trasformazioni, arrivando anche a descrivere funzioni dall'espressione analitica piuttosto complicata; viceversa, si può tracciare facilmente il grafico di una funzione, riconducendola ad una funzione elementare che ha subito più trasformazioni.

Ecco un esempio di quest'ultimo procedimento, che fornisce uno strumento prezioso per visualizzare rapidamente molte funzioni. La funzione

$$y=x^3+3x^2+3x+1$$

si può scrivere, basandosi sui prodotti notevoli, nella forma

$$y=(x+1)^3.$$

Così il grafico si traccia immediatamente, a partire dalla funzione $y=x^3$; si ottiene la curva già disegnata in fig. 57.

6. L'algebra delle funzioni

In questo paragrafo vediamo come si possono ottenere molte nuove funzioni, a partire dalle funzioni elementari esaminate nei paragrafi 4 e 5, mediante le seguenti operazioni:

A) addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione;
B) passaggio alla funzione inversa;
C) composizione di funzioni.

A) Somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni

L'idea di estendere alle funzioni le operazioni con le quali si compongono dei numeri può sembrare molto astratta; eppure sono le scienze sperimentali a suggerire spesso la composizione di più funzioni.

In particolare, l'idea di considerare la somma di due funzioni può essere suggerita da un fenomeno molto comune: ascoltare due suoni emessi contemporaneamente.

Ecco un esempio molto semplice: i due suoni sono descritti dalle leggi

$$y_1=\text{sen } x \quad \text{e} \quad y_2=\cos x,$$

in cui la variabile x indica il tempo e la variabile y lo spostamento di una particella d'aria investita dal suono. Il suono complessivo che arriva all'orecchio dell'ascoltatore è dato dalla sovrapposizione dei due suoni ed è dunque descritto dalla funzione

$$y=\text{sen } x+\cos x. \tag{1}$$

È facile costruire il grafico di questa nuova funzione a partire dal grafico delle prime due: in fig. 60 sono disegnate $y_1=\text{sen } x$ (in grigio) e $y_2=\cos x$ (in nero); quindi, in corrispondenza a numerosi valori di x, si è individuato graficamente il punto che ha come ordinata y la somma algebrica delle ordinate y_1 e y_2. Raccordando i punti ottenuti (in colore), si riesce a tracciare il grafico della funzione (1), che è stato riportato in fig. 61; la nuova curva è ancora periodica con periodo 2π, perciò si può continuare il grafico, ripetendo tanti archi uguali a quello tracciato nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

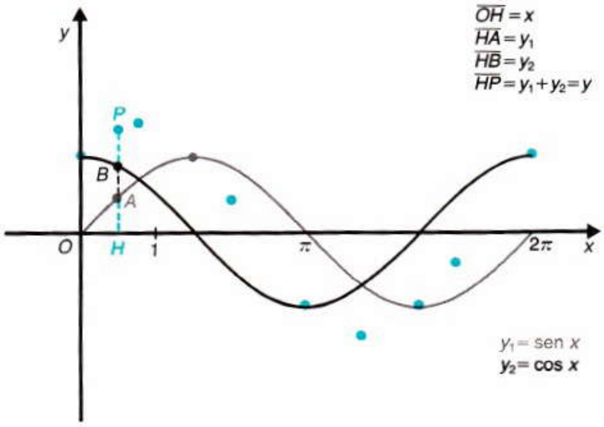


Fig. 60

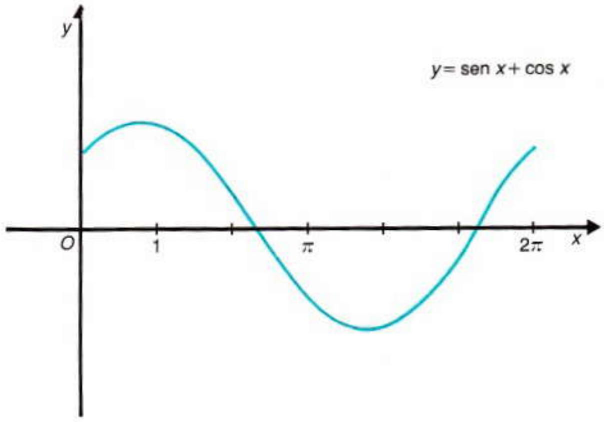


Fig. 61

Il procedimento seguito prende il nome di **addizione grafica** e può essere ripetuto a partire da qualunque coppia di funzioni definite in uno stesso dominio.

È facile poi estendere il procedimento per visualizzare la differenza di due funzioni: basta addizionare la prima con l'opposto della seconda.

Viceversa, si traccia facilmente il grafico di una funzione, quando si riesce a considerare la funzione data come somma di due funzioni note. Ecco un esempio di quest'ultimo procedimento, che fornisce uno strumento prezioso per visualizzare rapidamente molte funzioni. Si è tracciato (in colore in fig. 62) il grafico della funzione

$$y=x^3-3x$$

mediante l'addizione grafica delle funzioni

$$y_1=x^3 \text{ (in nero)} \qquad \text{e} \qquad y_2=-3x \text{ (in grigio)};$$

per maggior chiarezza, la curva ottenuta è stata poi disegnata in fig. 63.

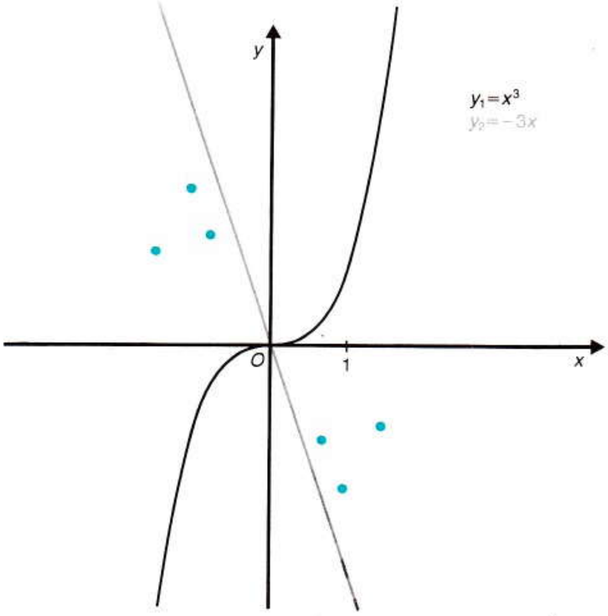


Fig. 62

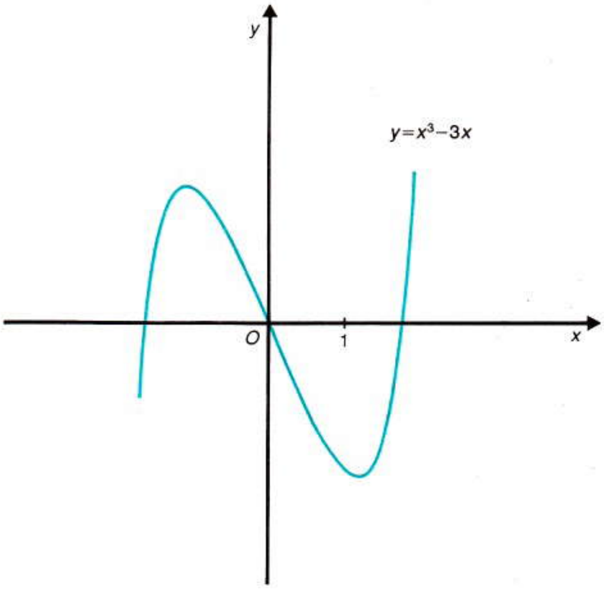


Fig. 63

È chiaro che, così come si possono addizionare più di due numeri, si potranno addizionare più di due funzioni. In particolare addizionando successivamente funzioni del tipo

$$y=ax^n,$$

si ottengono tutti **i polinomi**, ossia **le funzioni razionali intere**; queste funzioni si possono scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}$$

dove

n indica un numero intero positivo,
$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ indicano numeri reali.

Dopo aver esaminato qualche funzione ottenuta addizionando delle funzioni note, è più facile rendersi conto del significato del prodotto di due funzioni.
Per esempio, la funzione

$$y=e^x \cdot \text{sen } x$$

è il prodotto delle seguenti funzioni elementari:

$$y_1=e^x \quad \text{e} \quad y_2=\text{sen}\, x;$$

questo vuol dire che, per ogni valore reale di x, si ha:

$$y=y_1 \cdot y_2.$$

E così si può estendere la moltiplicazione a più di due funzioni; si può inoltre moltiplicare una funzione più volte per se stessa, ottenendone il quadrato, il cubo, ..., le successive potenze ad esponente intero positivo. In particolare, si potrebbero generare tutte le funzioni del tipo

$$y=x^n,$$

Moltiplicando più volte per se stessa la funzione

$$y=x.$$

Dal prodotto di due funzioni è poi facile passare al quoziente: basta interpretare la divisione come moltiplicazione del primo termine per il reciproco del secondo; si scrive per esempio:

$$y=\text{sen}\, x \cdot \frac{1}{\cos x}, \quad \text{ossia} \quad y=\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}.$$

In questo modo si è condotti ad esaminare, assieme ad ogni funzione nota, il suo reciproco. Un caso semplice ma espressivo è fornito dalle funzioni

$$y=\frac{1}{x^n}$$

che si ottengono calcolando il reciproco delle funzioni

$$y=x^n.$$

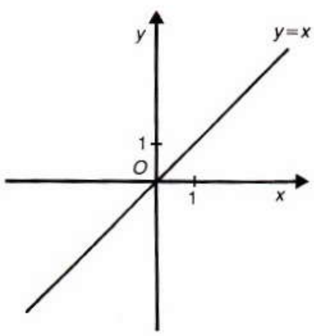
Si capisce dunque come si riesca ad "inventare" un gran numero di funzioni componendo le funzioni elementari con le operazioni algebriche. Tuttavia non c'è un metodo efficace come l'addizione grafica per visualizzare rapidamente il prodotto o il quoziente di due funzioni; saranno gli argomenti sviluppati nei capitoli successivi, in particolare i limiti e le derivate, che permetteranno di tracciare il grafico accurato di una funzione anche in questi casi. Per ora ci limitiamo a dare un'idea dell'andamento di alcune funzioni di cui è facile tracciare un sommario grafico per punti. Cominciamo col considerare qualche caso particolare delle funzioni

$$y=\frac{1}{x^n}.$$

Le figg. 64 e 65 mostrano il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=x \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x}, \qquad y=x^2 \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x^2}.$$

x	$y=x$
-2	-2
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1
2	2
$\vdots$	$\vdots$



x	$y=\frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
0	non esiste
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

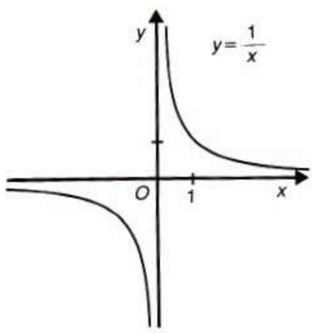
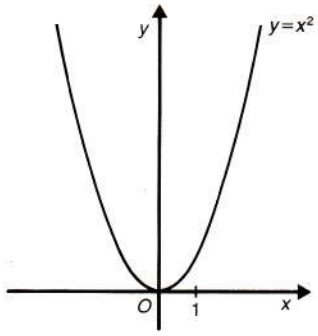


Fig. 64

x	$y=x^2$
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4



x	$y=\frac{1}{x^2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	4
0	non esiste
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$

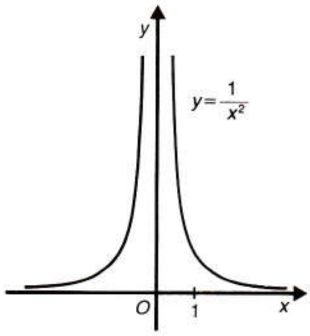


Fig. 65

Le funzioni ora esaminate forniscono i più semplici esempi di un vasto insieme di funzioni e cioè l'insieme delle **funzioni razionali fratte o quozienti di polinomi**, che possono essere descritte con formule del tipo:

$$y=\frac{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n}{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_m\cdot x^m}$$

dove

m ed n indicano numeri interi positivi,
$a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ indicano dei numeri reali.

Nelle figg. 66 e 67 sono poi rappresentate le funzioni

$$y=\text{sen }x, \quad y=\cos x$$

e, nella fig. 68, il loro quoziente

$$y=\frac{\text{sen }x}{\cos x}, \quad \text{ossia} \quad y=\text{tg }x.$$

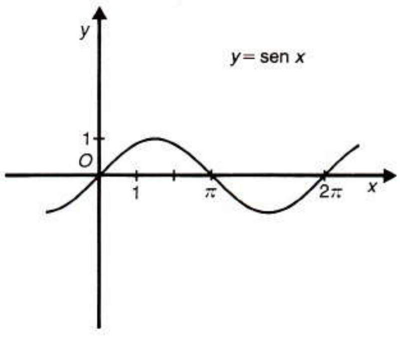


Fig. 66

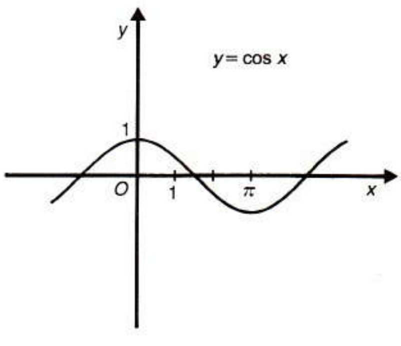


Fig. 67

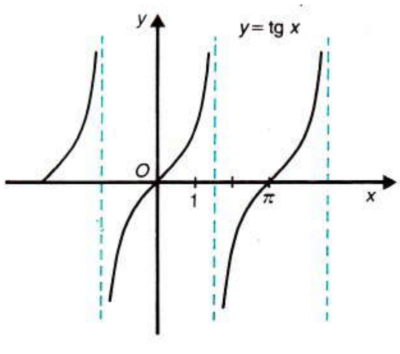


Fig. 68

Nel grafico della funzione $y=\text{tg }x$ (fig. 68), si notano tanti archi uguali a quello disegnato nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; basta dunque esaminare solo quest'ultimo arco per avere un'idea dell'intero grafico.

B) L'inversa di una funzione

Cominciamo con l'esaminare schematicamente uno dei tanti problemi concreti che conduce a ricercare l'inversa di una data funzione: il problema di determinare l'età di un fossile basandosi sul decadimento radioattivo di una particolare sostanza (il Carbonio 14).

Si tratta di questo: ogni organismo contiene una quantità di C_{14} che rimane costante fino a che l'organismo vive; non appena l'organismo muore, inizia il decadimento del C_{14} con un tempo di dimezzamento di 6000 anni (cioè il C_{14} dimezza ogni 6000 anni).

In prima approssimazione, la legge che regola questo fenomeno si può scrivere così:

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

dove

M indica la massa di C_{14},
t indica il tempo, misurato dal numero di tempi di dimezzamento trascorsi.

Questa legge può essere considerata da due punti di vista:
- previsione: è dato il tempo t e si vuole prevedere la massa M dopo che è trascorso il tempo t;
- datazione: si trova un fossile che contiene una data massa M e si vuole risalire al tempo t trascorso.

Si distinguono i due casi indicando con x la variabile che si conosce e con y la variabile che si vuole ricavare. In questo modo la legge (1) si scrive:

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ se è dato } t=x \text{ e si vuole calcolare } M=y$$

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^y, \text{ se è data } M=x \text{ e si vuole risalire a } t=y$$

La seconda espressione si scrive introducendo il termine logaritmo e cioè:

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x, \quad \text{invece di} \quad x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$$

Dal punto di vista grafico si ottengono le curve delle figg. 69 e 70; le due curve sono simmetriche rispetto alla retta d'equazione $y=x$ (fig. 71).

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

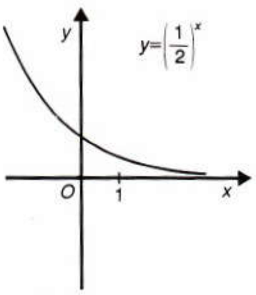


Fig. 69

x	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1

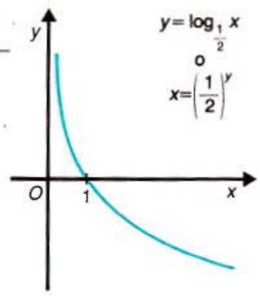


Fig. 70

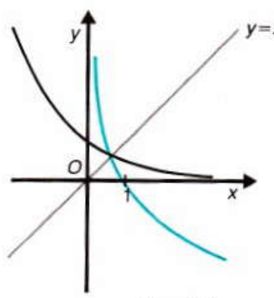


Fig. 71

Rivediamo schematicamente la linea seguita per trattare il problema:
- si è scritta la formula che definisce la funzione esponenziale, cioè

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

– nella formula si è scambiato x con y, ottenendo l'equazione

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y};$$

– si è ricavato y da quest'equazione, ottenendo la formula

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x$$

che definisce la funzione logaritmica.

Le figg. 69 e 70 mettono in rilievo alcune caratteristiche della funzione esponenziale (fig. 69) e della funzione logaritmica (fig. 70):
– la funzione esponenziale ha come campo di esistenza l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, e come immagine l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi;
– la funzione logaritmica ha come campo di esistenza l'insieme $\mathbb{R}^+$, e come immagine l'insieme $\mathbb{R}$;
– per passare dalla funzione esponenziale alla funzione logaritmica si scambia x con y, ossia **si inverte la legge di corrispondenza**; per questo si dice che **la funzione esponenziale e la funzione logaritmica sono l'una l'inversa dell'altra**.

È chiaro che la stessa linea può essere seguita per cercare la funzione inversa di una qualunque funzione $y=f(x)$; si procede così:
– si scrive la formula $y=f(x)$, che definisce la funzione;
– si scambia x con y, ottenendo l'equazione $x=f(y)$;
– si ricava y dall'equazione, ottenendo una nuova formula;
– se la formula ottenuta definisce una funzione $y=g(x)$, quest'ultima funzione è l'inversa di quella data[1].

In base al procedimento seguito si ha che:
– il grafico di una funzione e della sua inversa sono due curve simmetriche rispetto alla retta d'equazione $y=x$;
– l'immagine di una funzione è il campo di esistenza della sua inversa.

Completiamo l'argomento esaminando rapidamente le inverse di alcune funzioni elementari, presentate nel paragrafo 4.
Calcolando l'inversa della funzione

$$y=e^x$$

rappresentata in fig. 72, si ottiene la funzione $y=\log_e x$ (fig. 73), molto spesso indicata con il simbolo[2]:

$$y=\ln x.$$

x	$y=e^x$
$\vdots$	
-1	$e^{-1}=\frac{1}{e}\cong 0{,}37$
0	$e^0=1$
1	$e^1=e\cong 2{,}72$

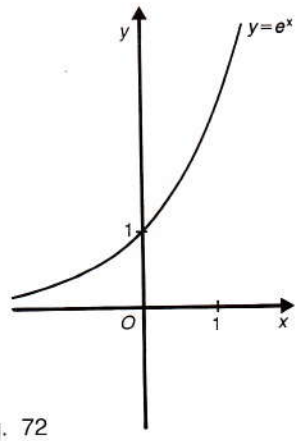


Fig. 72

x	$y=\ln x$
$\frac{1}{e}$	-1
1	0
e	1

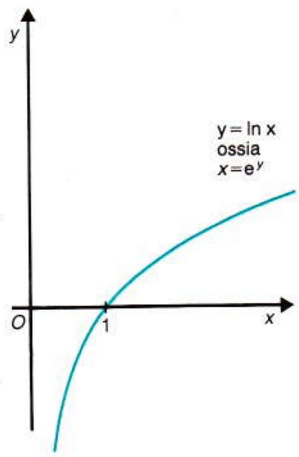


Fig. 73

[1] La funzione inversa di $y=f(x)$ si indica talvolta con $y=f^{-1}(x)$.
[2] Il simbolo $y=\ln x$ è un'abbreviazione di logaritmo naturale; il termine "naturale" è forse legato al fatto che i primi logaritmi introdotti erano molto vicini ai logaritmi in base e.

Determinare la funzione inversa della funzione

$$y=x^2,$$

rappresentata in fig. 74, presenta qualche difficoltà particolare: la formula $x=y^2$ non descrive una funzione, dato che ad un valore di x non corrisponde un solo valore di y (fig. 75).

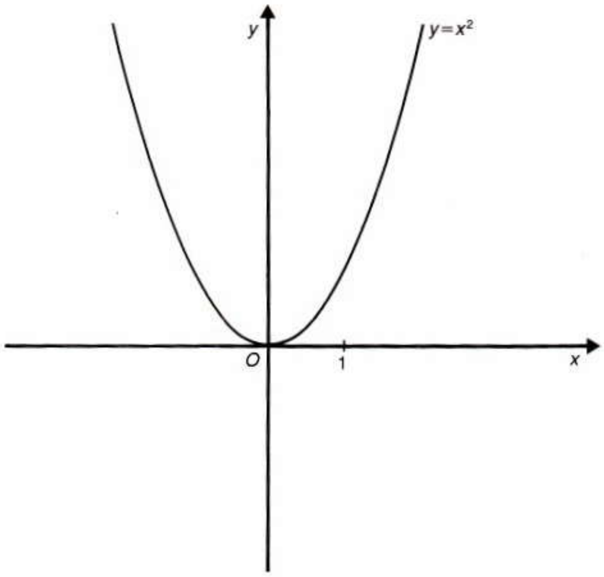


Fig. 74

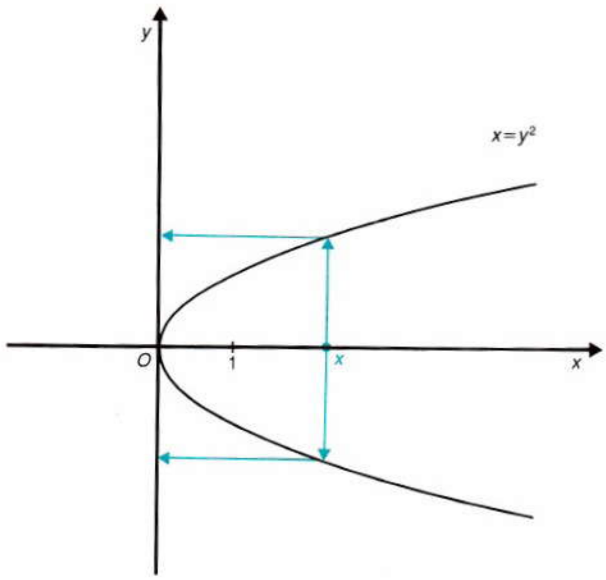


Fig. 75

Queste difficoltà vengono superate, limitandosi a considerare la funzione $y=x^2$ nell'insieme dei reali positivi. Quest'ultima funzione, rappresentata in fig. 76, è invertibile, perché ogni y proviene da una sola x; la funzione inversa è definita dalla formula:

$$y=\sqrt{x}$$

ed è rappresentata in fig. 77.

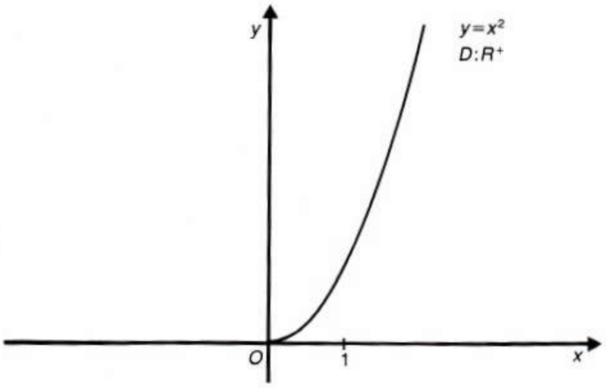


Fig. 76

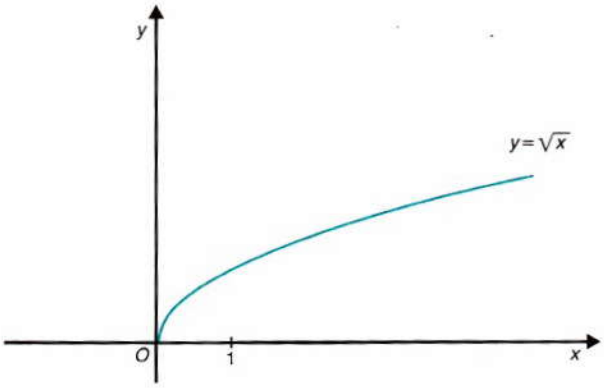


Fig. 77

È facile trovare la funzione inversa della funzione

$$y=x^3,$$

rappresentata in fig. 78: è la funzione rappresentata in fig. 79 e definita dall'equazione $x=y^3$, cioè dalla formula

$$y=\sqrt[3]{x}$$

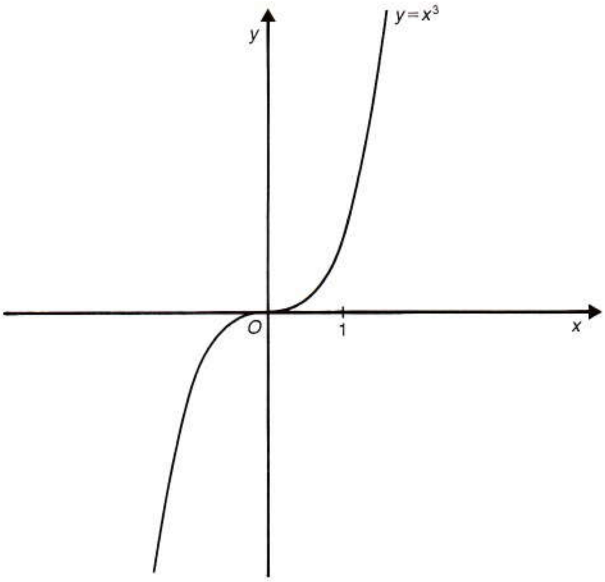


Fig. 78

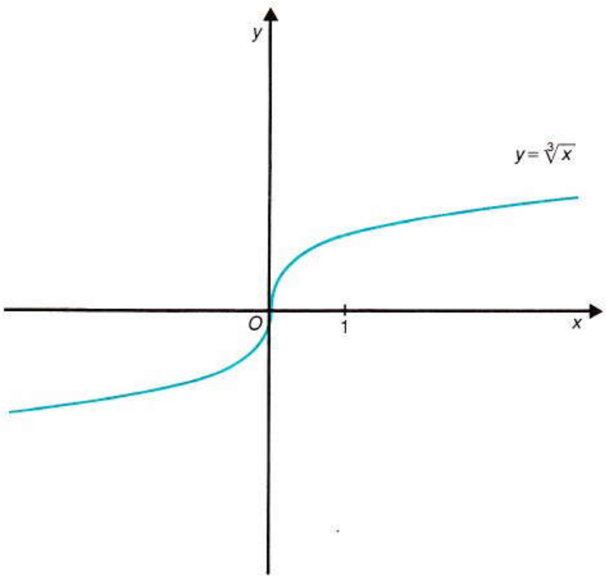


Fig. 79

Qualche difficoltà si trova di nuovo per invertire la funzione

$$y=\text{sen } x,$$

rappresentata in fig. 80, dato che un valore di y può provenire da infiniti valori di x. Anche in questo caso, per superare le difficoltà, si considera la funzione in un dominio più ristretto e cioè nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La funzione così definita ha ancora come immagine l'intervallo $[-1, 1]$, ma è invertibile (fig. 81); la funzione inversa è abitualmente definita mediante la formula

$$y=\text{arcsen } x$$

ed è rappresentata in fig. 82.

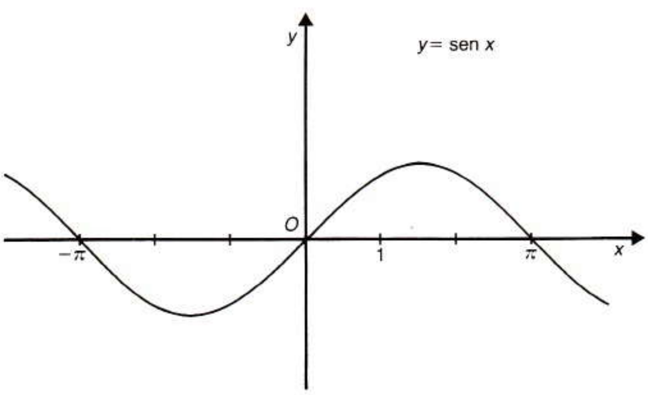


Fig. 80

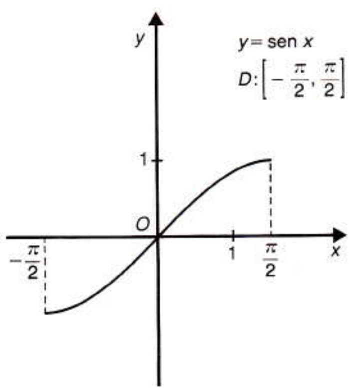


Fig. 81

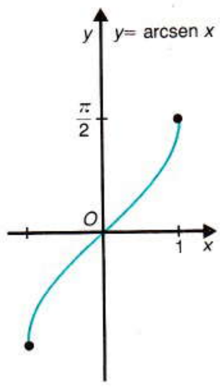


Fig. 82

C) Funzioni composte

Cominciamo col riflettere su uno dei tanti problemi che conducono ad effettuare la composizione di funzioni. Da una falla in un pozzo petrolifero sottomarino esce del petrolio che si spande sulla superficie dell'acqua formando una macchia circolare con il raggio che aumenta al passare del tempo. In base a ripetute rilevazioni, si è constatato che il raggio r della macchia varia al variare del tempo t secondo la legge

$$r=1+0{,}2t,$$

dove r è il raggio misurato in chilometri e t il tempo misurato in ore. Come varia la superficie della macchia al variare del tempo?

La superficie S della macchia circolare varia al variare del raggio r secondo la legge

$$S=\pi\cdot r^2 \tag{1}$$

ma r varia, a sua volta, al variare del tempo t secondo la legge

$$r=1+0{,}2t. \tag{2}$$

Perciò per sapere come varia S al variare di t dobbiamo comporre le due funzioni (1) e (2), ricavando r dalla (2) e sostituendolo nella (1); si ottiene la legge:

$$S=\pi\cdot(1+0{,}2t)^2 \tag{3}$$

La funzione (3), ottenuta componendo le funzioni (1) e (2) prende il nome di **funzione composta**.

Il procedimento ora esposto ha carattere generale e può essere seguito per comporre due funzioni note; ecco qualche altro esempio:

– componendo le funzioni $y=e^z$, $z=\text{sen}\ x$, si ottiene

$$y=e^{\text{sen}\ x},$$

– componendo le funzioni $y=\text{sen}\ z$, $z=x-p$, si ottiene

$$y=\text{sen}\ (x-p),$$

– componendo le funzioni $y=z-p$, $z=\text{sen}\ x$, si ottiene

$$y=\text{sen}\ x-p.$$

In generale, componendo le funzioni $y=f(z)$ e $z=g(x)$, si ottiene **la funzione composta**

$$y=f[g(x)]; \tag{4}$$

talvolta si distingue la "funzione interna" da quella "esterna", osservando la posizione che le funzioni occupano nella formula (4). Una funzione composta come la (4) porta dunque a determinare y in più passi:

I) si sceglie x nel campo di esistenza della funzione $z=g(x)$;
II) si calcola $g(x)$, ottenendo un valore $z=g(x)$, che fa parte dell'immagine della funzione g;
III) se z cade nel campo di esistenza della funzione f, si calcola $y=f(z)$.

Viceversa, l'idea di funzione composta è spesso utile per individuare, in una formula complicata, le formule più semplici che l'hanno generata. Ecco un esempio: la formula

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

conduce a determinare y nel modo seguente:

I) si sceglie x positivo (per poter calcolare $\sqrt{x}$);
II) si calcola $z=\sqrt{x}$;
III) si calcola $y=\frac{1}{z}$, purché risulti $z\neq0$.

Dunque la funzione assegnata è ottenuta dalla composizione delle funzioni

$$y=\frac{1}{z} \quad \text{e} \quad z=\sqrt{x}.$$

Un'ultima osservazione: si ottiene un risultato molto particolare componendo una funzione con la sua inversa; ecco qualche esempio.

- Componendo $y=\sqrt{z}$ e $z=x^2$, si ottiene $y=\sqrt{x^2}=x$
- Componendo $y=\sqrt[3]{z}$ e $z=x^3$, si ottiene $y=\sqrt[3]{x^3}=x$,
- Componendo $y=\ln z$ e $z=e^x$, si ottiene $y=\ln(e^x)=x$.

Si trova dunque un risultato che era facile prevedere:
componendo una funzione e la sua inversa, si ottiene sempre $y=x$.

7. Alcune proprietà che caratterizzano le funzioni

Le considerazioni svolte negli ultimi tre paragrafi permettono di costruire un insieme abbastanza vasto di funzioni, che presentano varie proprietà interessanti non solo dal punto di vista teorico ma anche da quello applicativo.

Lo scopo principale dell'analisi matematica è proprio lo studio di alcune di queste proprietà, che sono presentate rapidamente in questo paragrafo e verranno successivamente approfondite nei capitoli seguenti.

A) Funzioni continue e discontinue

Quando si traccia il grafico di una funzione, c'è una proprietà che risulta subito evidente: in qualche caso si traccia una linea continua, senza mai alzare la matita dal foglio; in altri casi il grafico presenta delle interruzioni. Per esempio, le funzioni

$$y=x \quad \text{e} \quad y=\text{sen } x$$

hanno come grafico una linea continua (figg. 83 e 84); mentre le funzioni

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y=\text{tg } x$$

hanno un grafico che presenta delle interruzioni (figg. 85 e 86).

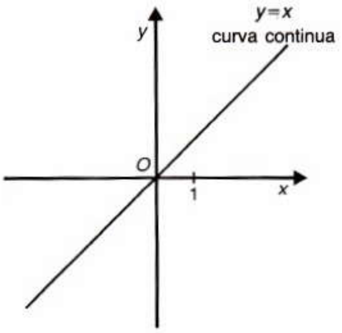


Fig. 83

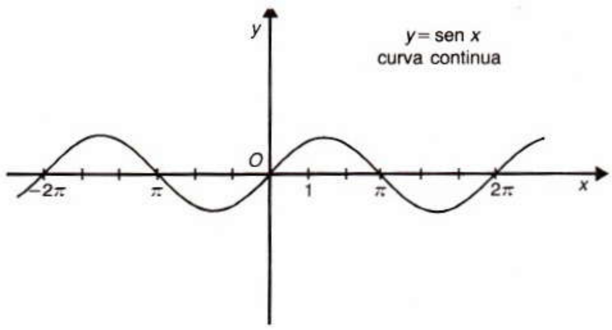


Fig. 84

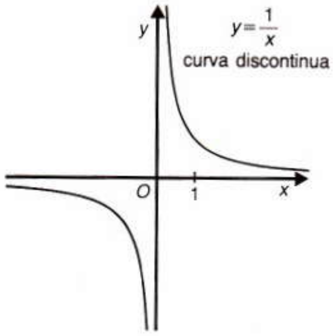


Fig. 85

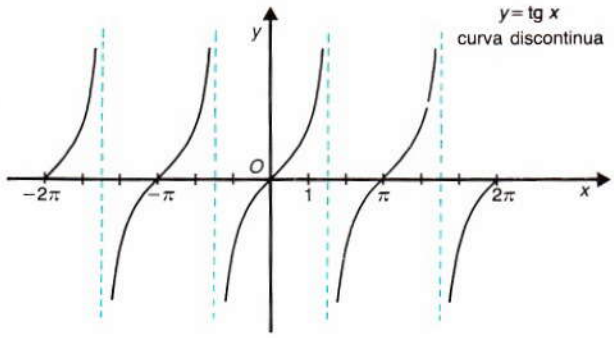


Fig. 86

In particolare, quando si traccia il grafico di fig. 85, occorre alzare la matita dal foglio per passare da sinistra a destra del punto d'ascissa 0; si dice allora che il punto d'ascissa 0 è un **punto di discontinuità**. Il grafico di fig. 86 presenta dunque infiniti punti di discontinuità.

Le curve esaminate sono il grafico di funzioni descritte da una formula; ci si chiede allora se la continuità di una curva è legata alla formula che la descrive, in modo da poter prevedere le discontinuità indipendentemente dal grafico. Problemi di questo tipo saranno trattati nei capitoli 2 e 3.

B) Funzioni crescenti e descrescenti

Ecco un'altra proprietà che si osserva subito, percorrendo il grafico di una funzione da sinistra verso destra (cioè nel verso stabilito sull'asse delle x): in qualche caso si traccia una linea "in salita", in altri casi si ottiene un tratto "in discesa". Per esempio, le funzioni

$$y=x \quad \text{e} \quad y=x^3$$

hanno come grafico una linea "in salita" (figg. 87 e 88); si dice, più propriamente che i grafici sono **curve crescenti**, dato che al crescere di x cresce anche y. Invece le funzioni

$$y=-x \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x}$$

hanno come grafico delle curve decrescenti (figg. 89 e 90), dato che al crescere di x, y decresce.

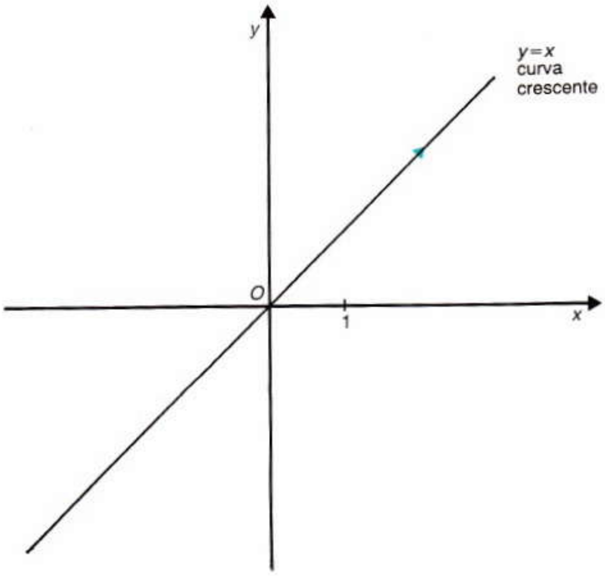


Fig. 87

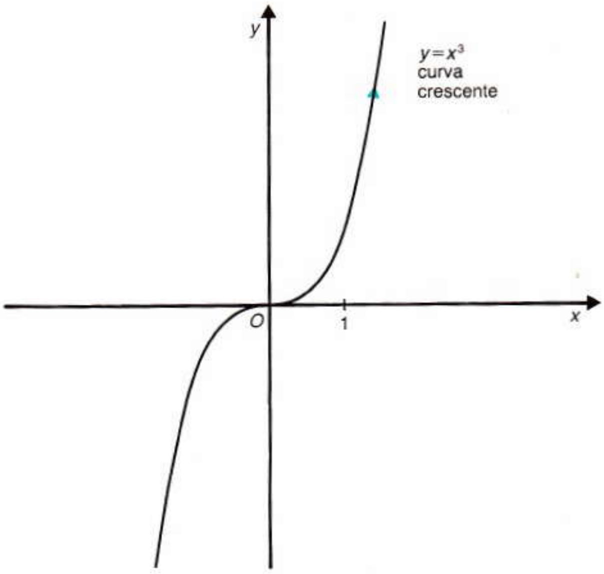


Fig. 88

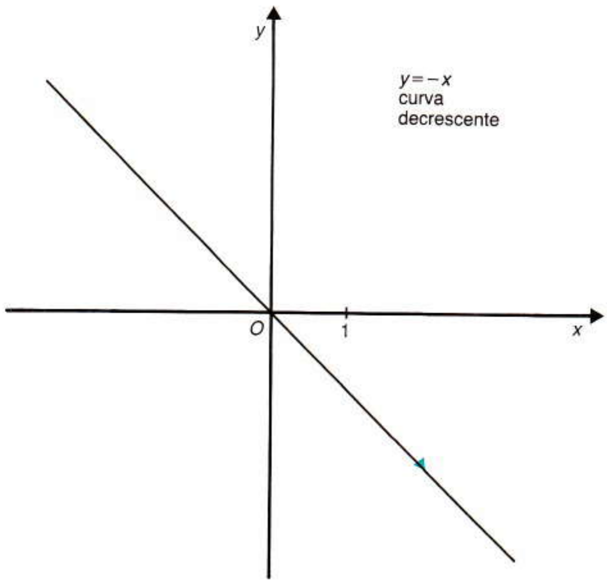


Fig. 89

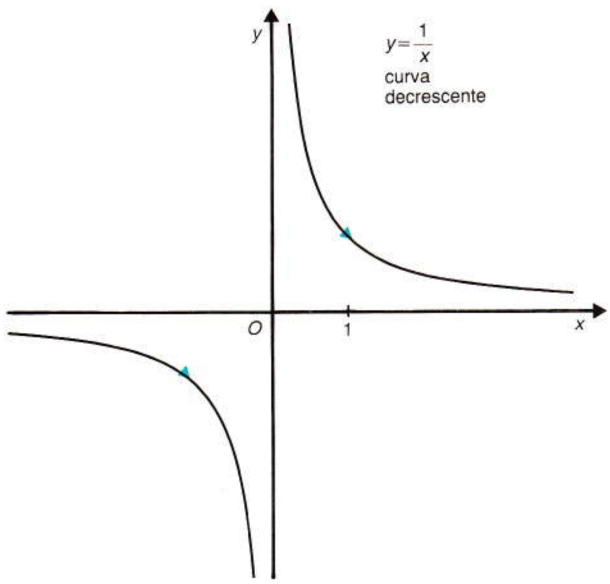


Fig. 90

In molti casi si hanno grafici formati in parte da archi crescenti e in parte da archi decrescenti; per esempio, i grafici delle funzioni

$y=x^2+1$ e $y=-x^2+2$

sono formati da un arco decrescente e da un arco crescente (fig. 91 e 92).

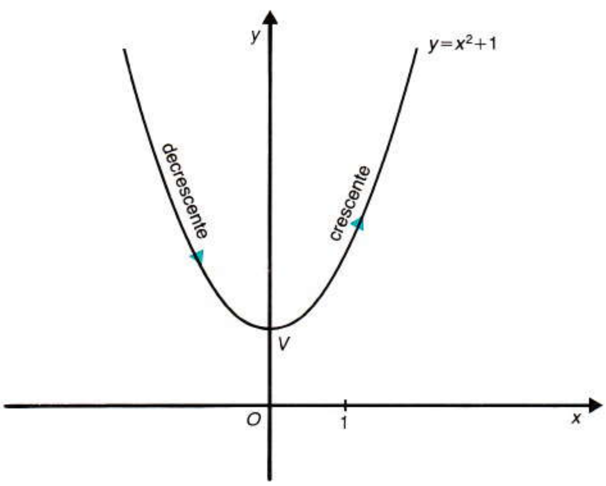


Fig. 91

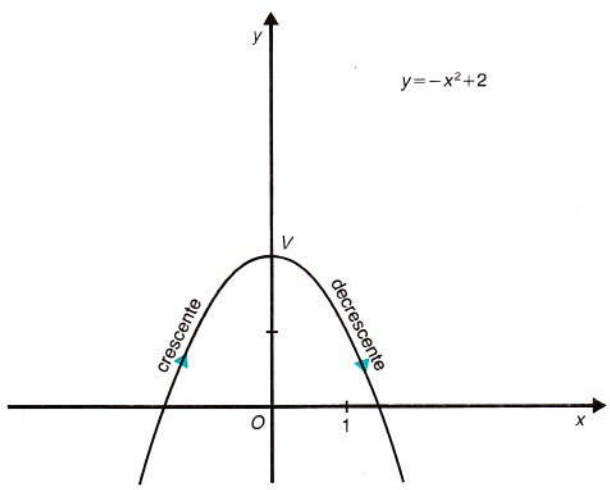


Fig. 92

Osserviamo, in particolare, che, in fig. 91, l'arco decrescente si ferma al punto $V(0\ ,1)$, dove inizia l'arco crescente; così è chiaro che l'ordinata y di un punto della curva non può scendere al disotto del **valore minimo** 1. Analogamente, in fig. 92, l'arco crescente si ferma nel punto $V(0,\ 2)$, dove inizia l'arco decrescente; in tal caso l'ordinata y non può superare il **valore massimo** 2.

Nelle figg. 93 e 94 si trovano poi i grafici delle funzioni

$$y=\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad y=-\frac{1}{x^2};$$

si tratta ancora di due curve formate da archi crescenti e decrescenti, ma in questi due casi non si riesce ad individuare né un massimo, né un minimo.

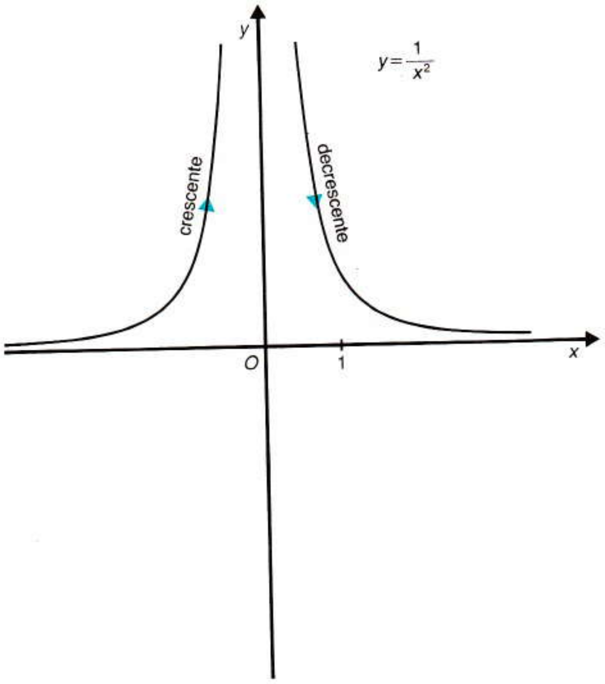


Fig. 93

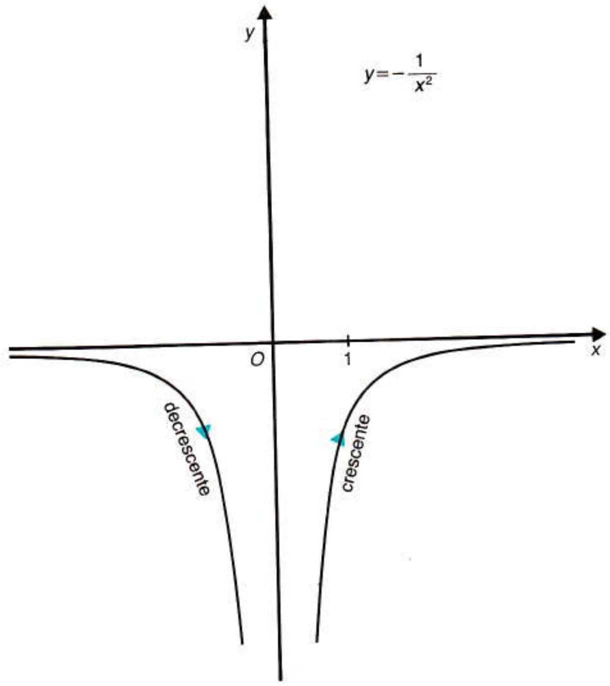


Fig. 94

Anche ora, le curve esaminate sono il grafico di una funzione descritta da una formula; ci si chiede quindi se la crescenza o decrescenza della curva è legata alla formula che la descrive, in modo da poter scoprire eventuali massimi o minimi, indipendentemente dal grafico. Problemi di questi tipo saranno affrontati nei capp. 4 e 5.

C) Funzioni razionali, irrazionali e trascendenti

Esaminiamo infine una caratteristica delle funzioni certamente meno espressiva: il tipo di legge che permette di ricavare y a partire da x. Quando la legge è rappresentata da una formula, si hanno le **funzioni analitiche**, che vengono classificate nel modo seguente:

1) **funzioni razionali**, quando la formula è costruita applicando ripetutamente operazioni razionali (addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione); si hanno, in particolare:
   - le funzioni razionali intere (cioè i polinomi);
   - le funzioni razionali fratte (cioè i quozienti di polinomi);
2) **funzioni irrazionali**, quando la formula è costruita valendosi anche dell'operazione irrazionale di estrazione di radice;
3) **funzioni trascendenti**, quando la formula è costruita con procedimenti diversi dalle operazioni razionali o irrazionali (ossia i procedimenti trascendono le operazioni algebriche); ecco qualche esempio:

$y=\text{sen}\, x, \quad y=\cos x, \quad y=\text{arcsen}\, x, \quad y=e^x, \quad y=\ln x.$

Vediamo ora qualche altra funzione trascendente che può essere costruita facilmente e presenta delle caratteristiche del tutto particolari.

$y=[x]$ o $y=\mathbf{int}(x)$

Ambedue i simboli si leggono "y uguale alla parte intera di x"; è facile capire come è costruita la funzione: ad ogni valore reale di x si fa corrispondere la sua parte intera, cioè il più grande numero intero che non supera x; la funzione è rappresentata in fig. 95 e presenta chiaramente infiniti punti di discontinuità.

$y=|x|$

Ora y è data dal valore assoluto di x, cioè

se $x \geq 0$, $y=x$,
se $x<0$, $y=-x$.

La funzione ha il grafico rappresentato in fig. 96: la curva presenta un punto spigoloso in O.

x	$y=[x]$
$-1{,}9$	-2
$-1{,}5$	-2
-1	-1
$-0{,}8$	-1
0	0
$0{,}5$	0
1	1
⋮	

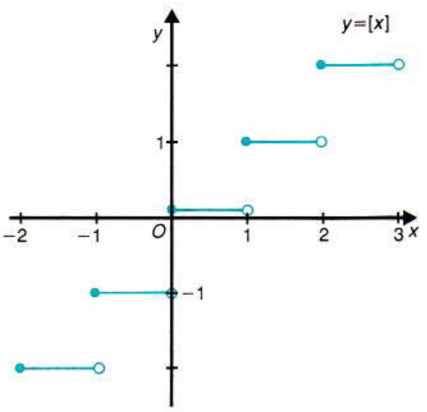


Fig. 95

x	$y=\|x\|$
2	2
1	1
0	0
-1	$\|-1\|=1$
-2	$\|-2\|=2$

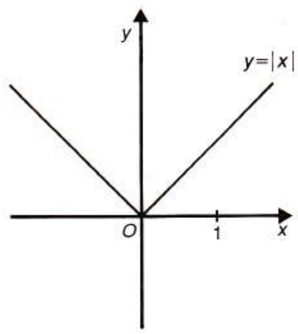


Fig. 96

Segnaliamo infine una funzione molto particolare, creata da Dirichlet[1]; si tratta della funzione definita nel modo seguente:

$y=0$ per tutti i valori di x razionali,
$y=1$ per tutti i valori di x irrazionali.

Si tratta di una funzione chiaramente definita, che però non si riesce a rappresentare graficamente!

Quest'ultimo esempio fa intuire quanto vaste e varie siano le possibilità di costruire funzioni, al difuori di quelle descritte in questo capitolo. Nel cap. 6 si avrà poi l'occasione di avvicinarsi ad una notevole "sorgente" di nuove funzioni: l'operazione di integrazione.

[1] Matematico francese (1805-1859), che ha lasciato lavori fondamentali in tre diversi campi: teoria dei numeri, fondamenti dell'analisi, meccanica e fisica matematica.