1
Complementi

A. Cambiamenti di riferimento: traslazioni e rotazioni d'assi

In questo cap. 1 e nei relativi Esercizi sono spesso intervenute le trasformazioni del piano; in particolare le traslazioni hanno consentito di studiare facilmente funzioni che avevano un'espressione apparentemente complicata. Nelle figg. 1 e 2 riportiamo due esempi di questi risultati. Vediamo ora come studiare le traslazioni da due punti di vista differenti.

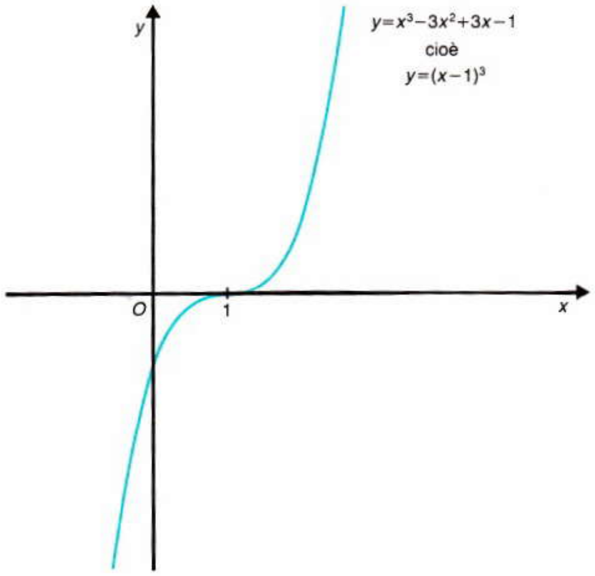

Fig. 1

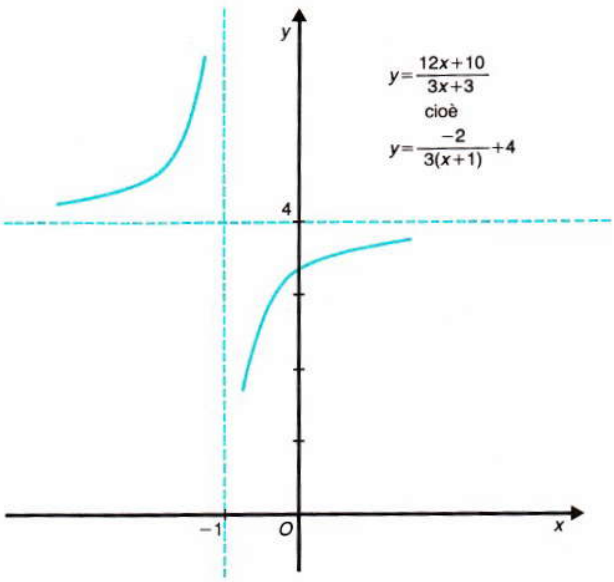

Fig. 2

1. Un punto di vista dinamico: le trasformazioni

È il punto di vista seguito nel testo: un piano cartesiano Oxy trasla nella direzione degli assi, mentre un riferimento $O'x'y'$, disegnato su un piano fisso, permette di confrontare le varie situazioni che si presentano (fig. 3). Si esamina così la seguente situazione: il piano Oxy subisce una traslazione che porta l'origine O ad assumere le coordinate $O(p, q)$; un punto $P(x, y)$ si porta nel punto P' che ha, nel riferimento $O'x'y'$, le coordinate seguenti

$$x' = x + p$$
$$y' = y + q.$$

2. Un punto di vista statico: i cambiamenti di riferimento

È disegnato sul piano un riferimento Oxy; successivamente si disegna un altro riferimento $O'x'y'$ con gli assi paralleli ai precedenti e l'origine nel punto $O'(-p, -q)$ (fig. 4).

In questo modo ogni punto del piano può essere individuato in due modi:

- con le coordinate (x, y), se riferito al "vecchio" riferimento,
- con le coordinate (x', y'), se riferito al "nuovo" riferimento.

È facile verificare che le coordinate sono legate dalle relazioni seguenti:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x=x'-p \\ y=y'-q. \end{cases}$$

Le (I) esprimono le "nuove" coordinate a partire dalle "vecchie", mentre le (II) risolvono il problema inverso.

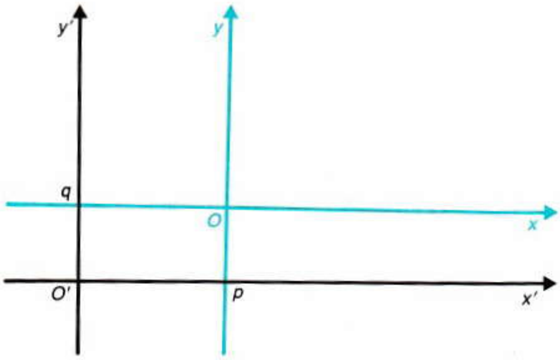

Fig. 3

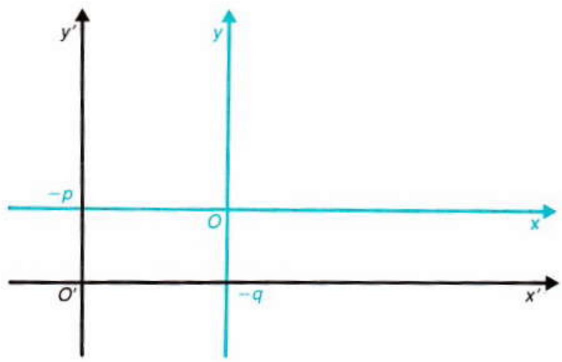

Fig. 4

Si osserva subito che le relazioni (I) sono identiche a quelle trovate prima; i due diversi modi di procedere portano dunque a risultati uguali.

Proviamo ora ad impadronirci meglio dei cambiamenti di riferimento, esaminando un'altra situazione.

3. Rotazioni d'assi

Cominciamo ad esaminare un caso particolare che permetterà di arrivare facilmente a risultati più generali. In fig. 5 è disegnato il riferimento Oxy, dove abbiamo indicato il punto $P(3, 4)$. Ruotiamo ora il riferimento di un angolo α in senso antiorario; si otterrà un nuovo riferimento $Ox'y'$.

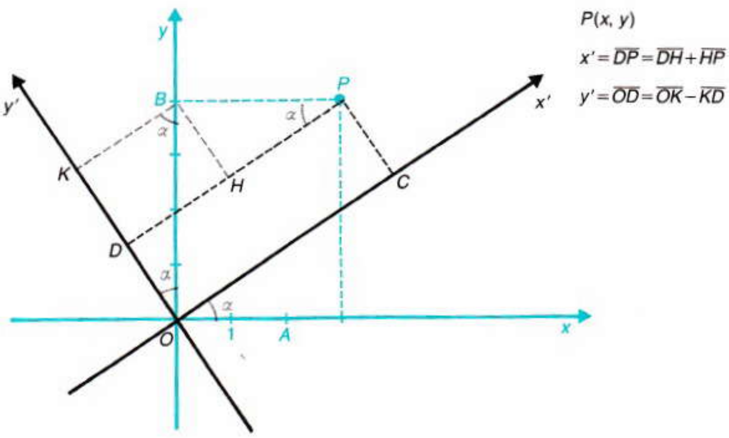

Fig. 5

Determiniamo le coordinate x' e y' del punto P nel nuovo riferimento. Le nuove coordinate sono

$$x'=\overline{OC}=\overline{DP} \quad \text{e} \quad y'=\overline{OD}=\overline{CP}.$$

Si ha quindi, per l'ascissa x':

$$\overline{DP}=\overline{DH}+\overline{HP},$$

con

$$\overline{DH}=\overline{KB}=\overline{OB}\ \text{sen}\ \alpha=4\ \text{sen}\ \alpha \quad \text{e} \quad \overline{HP}=\overline{BP}\cos\alpha=3\cos\alpha.$$

In definitiva risulta

$$\mathbf{x'=3\cos\alpha+4\ sen\ \alpha.}$$

Si ha poi, per l'ordinata y':

$$\overline{OD}=\overline{OK}-\overline{KD}$$

con

$$\overline{OK}=\overline{OB}\cos\alpha=4\cos\alpha \quad \text{e} \quad \overline{KD}=\overline{BH}=\overline{BP}\ \text{sen}\ \alpha=3\ \text{sen}\ \alpha.$$

In conclusione

$$\mathbf{y'=4\cos\alpha-3\ sen\ \alpha.}$$

Dunque, ruotando il riferimento di un angolo α, le coordinate del punto P, che erano $x=3$ e $y=4$, diventano

$$\mathbf{x'=3\cos\alpha+4\ sen\ \alpha}$$
$$\mathbf{y'=4\cos\alpha-3\ sen\ \alpha.}$$

È chiaro che lo stesso procedimento si può seguire a partire da un qualunque altro punto P; si arriva dunque alla seguente conclusione: ruotando il riferimento di un angolo α, le coordinate di un punto P, che erano x ed y, diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{x'} &= \mathbf{x\cos\alpha+y\ sen\ \alpha} \\ \mathbf{y'} &= \mathbf{y\cos\alpha-x\ sen\ \alpha.} \end{aligned} \tag{1}$$

Le formule per il passaggio inverso si ricavano risolvendo le (1) rispetto ad x ed y. Si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x'\cos\alpha-y'\ sen\ \alpha} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y'\cos\alpha+x'\ sen\ \alpha.} \end{aligned} \tag{2}$$

Le (1) e (2) prendono anche il nome di **formule per la rotazione d'assi**.

Vediamo ora un'applicazione di queste formule di rotazione. Consideriamo la funzione

$$y=\frac{1}{x}$$

e tracciamone il grafico (fig. 6): si ottiene un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.

Operiamo una rotazione d'assi di 45° (fig. 7) e vediamo come cambia l'equazione di questa curva: basta valersi delle equazioni (2), considerando

$$\alpha=45°.$$

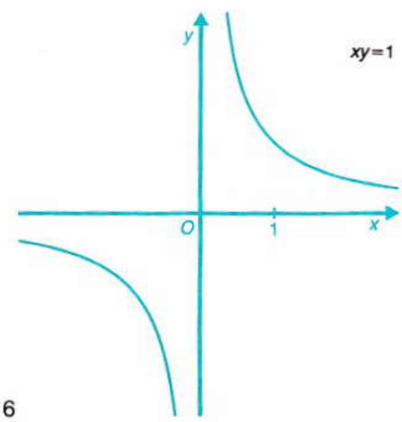

Fig. 6

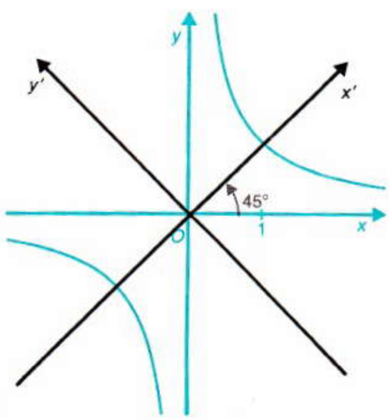

Fig. 7

Dato che risulta

$$\cos 45° = \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si ha:

$$x = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si sostituiscono ora queste espressioni ad x ed y nell'equazione assegnata, che conviene scrivere nella forma

$$xy = 1.$$

Si ottiene

$$\left(x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

ossia

$$x'^2 \cdot \frac{1}{2} - y'^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

e infine

$$\boldsymbol{x'^2 - y'^2 = 2}.$$

La formula ottenuta descrive la curva di fig. 8: è ovviamente la stessa iperbole equilatera considerata all'inizio; ora però ha come asintoti le rette d'equazione

$$y' = x' \quad \text{e} \quad y' = -x'.$$

È immediato osservare che formula e grafico non descrivono più una funzione. La stessa curva può essere tuttavia descritta dalle due funzioni seguenti (figg. 9 e 10):

$$y' = \sqrt{x'^2 - 2} \quad \text{e} \quad y' = -\sqrt{x'^2 - 2}$$

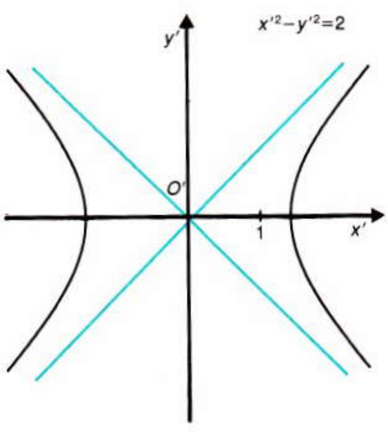

Fig. 8

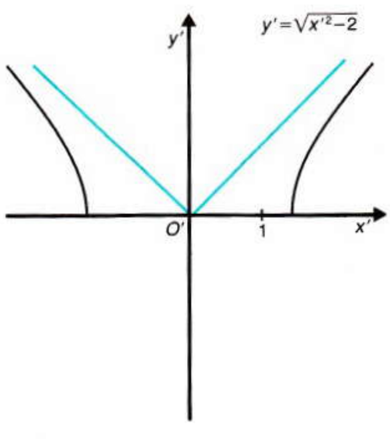

Fig. 9

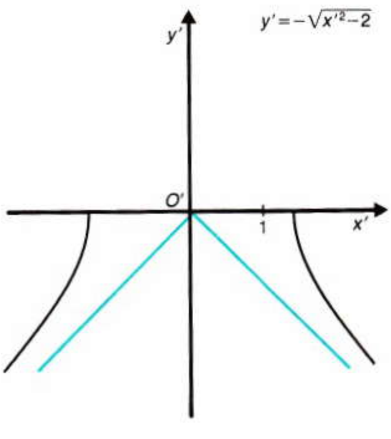

Fig. 10