1
Esercizi

1. Le funzioni nella storia e nella realtà

Le funzioni nella storia

Leggere i passi riportati negli esercizi 1 e 2 ed individuare:
– le grandezze variabili esaminate;
– la formula che esprime la relazione fra le due grandezze.

1. «Quando osservo una pietra che discende dall'alto a partire dalla quiete, acquista via via nuovi incrementi di velocità; ... dico che in tempi uguali acquista uguali incrementi di velocità» (da *Le nuove scienze* di Galileo).

2. «I volumi di cilindri di uguale superficie laterale sono inversamente proporzionali alle loro altezze» (da *Le nuove scienze* di Galileo).

3. Esaminare e commentare la fig. 1, tratta da un libro di Nicola d'Oresme, scienziato francese del XIV secolo: il grafico illustra come varia la velocità di un corpo che si muove ad accelerazione costante. Si tratta di uno dei primi esempi di grafici sperimentali che si conoscano.

4. Esaminare e commentare la fig. 2: vi è schematicamente descritta la rifrazione della luce, fissando l'attenzione sull'angolo di incidenza (i) e sull'angolo di rifrazione (r). La tabella stabilisce una relazione fra questi due angoli ed è stata, nel XVII secolo, la base per gli studi di Snell e di Cartesio alla ricerca della legge della rifrazione.

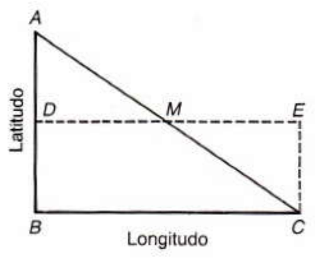
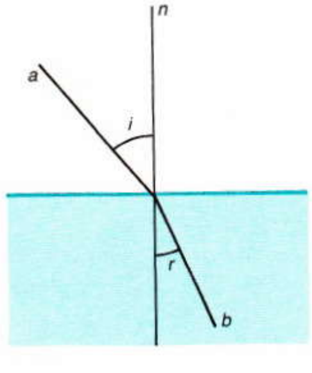


Fig. 1



i	r
10°	6°30′
20°	12°30′
30°	18°30′
40°	24°
50°	29°
60°	33°30′
70°	36°30′

Fig. 2

Le funzioni nella realtà

5. Esaminare le seguenti leggi fisiche:

A) in base al 2° principio della dinamica, la forza f impressa ad un corpo e la corrispondente accelerazione a sono legate dalla legge:

$$f=ma$$

dove m è una costante che indica la massa del corpo;

B) la massa m di un corpo ed il volume V che il corpo occupa sono legati dalla legge:

$$m=\delta V$$

dove δ è una costante che indica la densità della sostanza;

C) la celebre equazione

$$E=mc^2$$

stabilita da Einstein, permette di prevedere l'energia E che si ricava disintegrando una massa m; c indica la velocità della luce, data da:

$$c\approx 300.000 \text{ km/s}.$$

Esprimere le tre leggi con un'unica formula, indicando con x ed y le due grandezze variabili considerate.
Quale nome prende la formula ottenuta?
(Si ottiene la legge di proporzionalità diretta $y=kx$).

6. Ripetere l'esercizio 5, a partire dalle seguenti leggi fisiche:

A) nella descrizione dei fenomeni ondulatori si trova che la lunghezza d'onda λ e la frequenza f di un'onda periodica sono legate dalla legge:

$$\lambda f=v$$

dove v indica la velocità di propagazione dell'onda, che si mantiene costante se l'onda si propaga sempre nello stesso mezzo;

B) la corrente I consumata da una lampadina è legata alla tensione V applicata dalla seguente legge:

$$IV=W$$

dove W indica la potenza costante della lampadina;

C) un classico esperimento relativo ai circuiti elettrici consiste nel collegare un conduttore di resistenza R variabile ad una sorgente di tensione V costante. Misurando la corrente I che attraversa il conduttore al variare della resistenza, si trova la legge:

$$V=RI$$

(Si ottiene la legge di proporzionalità inversa $xy=k$).

7. Ripetere l'esercizio 5, a partire dalle seguenti leggi fisiche:

A) l'energia cinetica E_c di un corpo varia al variare della velocità v secondo la legge:

$$E_c=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$$

dove m indica la massa costante del corpo;

B) quando un conduttore di resistenza R costante viene attraversato da una corrente I, viene dissipata in calore una potenza W, data da

$$W=RI^2;$$

C) per ottenere che un corpo si muova di moto circolare uniforme, occorre imprimere una forza f, chiamata forza centripeta, che varia al variare della velocità v secondo la legge:

$$f=\frac{m}{r}\cdot v^2$$

dove

m indica la massa costante del corpo,
r indica il raggio costante della circonferenza.

(Si ottiene la legge parabolica $y=kx^2$).

8. Ripetere l'esercizio 5, a partire dalle seguenti tre leggi fisiche:

A) quando un punto materiale, che ha una velocità iniziale v_0, procede con accelerazione costante a su una traiettoria rettilinea, si trova la legge:

$$v=v_0+at$$

che regola la velocità v al variare del tempo t;

B) la lunghezza di un filo metallico varia al variare della temperatura secondo la legge:

$$l=l_0+kT$$

dove

l indica la lunghezza del filo al variare della temperatura T,
l_0 indica la lunghezza del filo alla temperatura di 0°,
k è una costante.

C) la lunghezza di una molla fissata ad un estremo, varia al variare della tensione applicata all'estremo libero secondo la legge:

$$l=l_0+kF$$

dove

l indica la lunghezza della molla, al variare della tensione F,
l_0 indica la lunghezza iniziale della molla,
k è una costante.

(Si ottiene la legge lineare $y=mx+q$).

9. Ripetere l'esercizio 5, a partire dalle seguenti tre leggi fisiche:

A) un pendolo, allontanato dalla sua posizione di equilibrio, si muove di moto armonico, regolato da una legge del tipo:

$$d=A\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t)$$

dove

d indica la distanza dalla posizione d'equilibrio al variare del tempo t,
A e ω sono due costanti legate all'ampiezza e frequenza del moto;

B) una particella d'aria, investita dal suono emesso da un flauto, oscilla intorno alla sua posizione iniziale secondo una legge del tipo:

$$d=A\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t)$$

dove

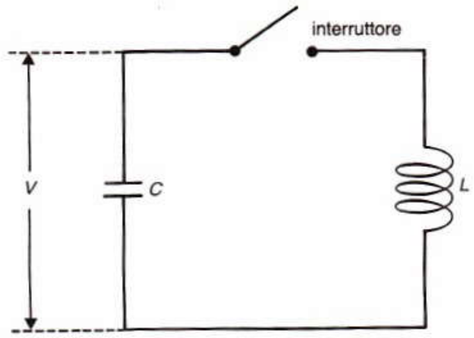
d indica la distanza della particella dalla posizione iniziale al variare del tempo t,
A e ω sono due costanti legate all'intensità e frequenza del suono;

C) in fig. 3 è rappresentato un circuito elettrico costituito da un condensatore e da un induttore; caricando il condensatore e chiudendo l'interruttore, la tensione V applicata al condensatore varia al variare del tempo t secondo una legge del tipo:

$$V=A\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t)$$

dove A e ω sono due costanti.

(Si ottiene la legge sinusoidale $y=A$ sen (ωx)).



C condensatore *L* induttore

Fig. 3

10. Ripetere l'esercizio 5, a partire dalle seguenti tre leggi:

A) nel 1798 l'economista inglese T. Malthus propose un modello di crescita della popolazione mondiale, sostenendo che la popolazione P variava al variare del tempo t secondo la legge:

$$P=P_0\cdot e^{r\cdot t}$$

dove P_0 indica la popolazione iniziale, r è una costante, $e\approx 2{,}7182$.

B) i materiali radioattivi decadono secondo la legge:

$$M=M_0\cdot e^{-k\cdot t}$$

dove

M indica la massa del materiale al variare del tempo t,
M_0 indica la massa iniziale, k è una costante.

C) l'intensità I della luce sotto la superficie del mare varia al variare della profondità h secondo la legge

$$I=I_0\cdot e^{-a\cdot h}$$

dove

I_0 è l'intensità della luce alla superficie del mare, a è una costante.

(Si ottiene la legge esponenziale $y=Ae^{kx}$).

2. Il concetto di funzione

Gli esercizi dall'11 al 19 conducono ad impadronirsi del concetto di funzione; per questo è opportuno ricordare che è data una funzione, quando sono date tre informazioni:

*1) un insieme **A**, chiamato **dominio**,*
*2) un insieme **B**, chiamato **codominio**,*
*3) una **legge** che fa corrispondere ad ogni elemento di A un solo elemento dell'insieme B; la legge può essere espressa con una formula, con una tabella o con un grafico.*

11. Esaminare le figg. 4 e 5, che rappresentano due grafici ricavati sperimentalmente: la fig. 4 è stata ricavata registrando la corrente I che attraversa un filo metallico al variare della tensione V; la fig. 5 è stata ottenuta registrando la corrente I che attraversa un tubo al neon al variare della tensione V.
Indicare la curva che rappresenta il grafico di una funzione. In quale caso si può esprimere con una semplice formula la legge di corrispondenza?

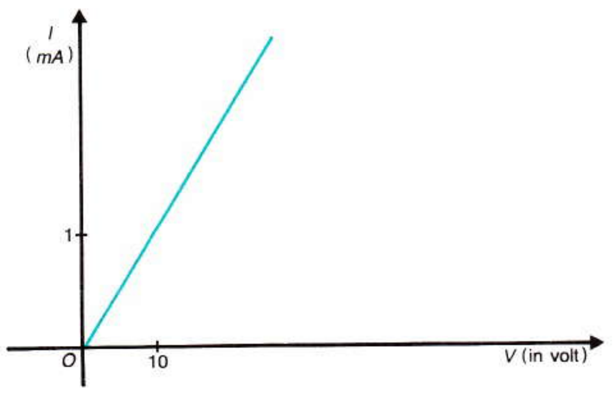


Fig. 4

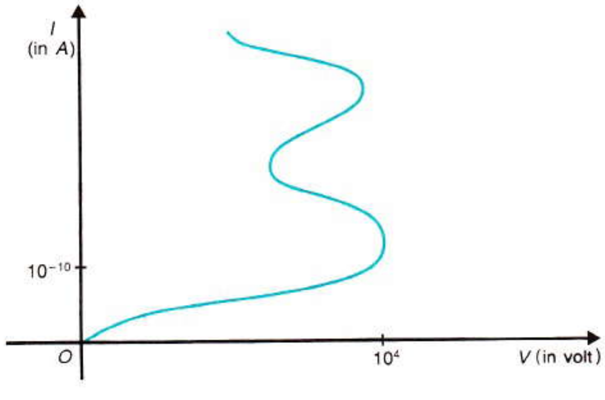


Fig. 5

12. Ripetere l'esercizio 11, a partire dalle figg. 6 e 7, che descrivono la relazione fra campo magnetico H e induzione magnetica B in un cilindro di ferro: nella fig. 6 si è applicato al ferro un campo magnetico crescente, fino ad arrivare al valore massimo H_m; nella fig. 7 si è successivamente diminuito H fino a riportarlo al valore $H=0$.

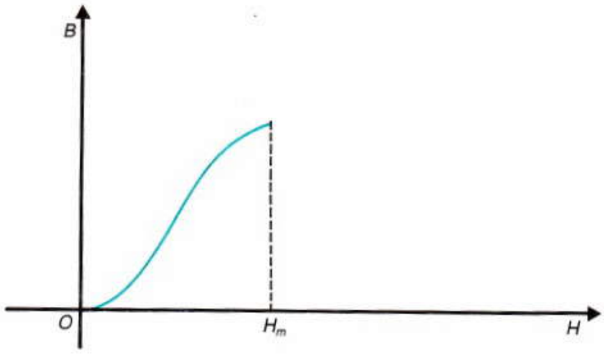


Fig. 6

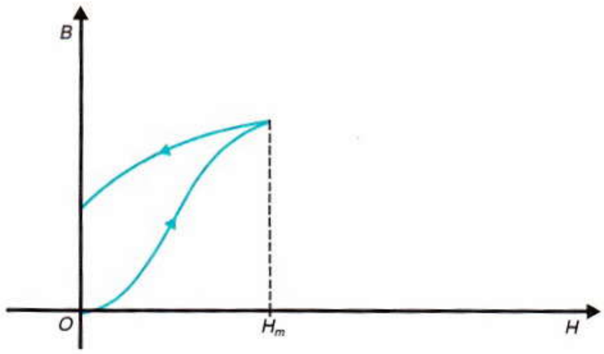


Fig. 7

13. La fig. 8 presenta il grafico di una funzione, ottenuta studiando i diodi a semiconduttore: il grafico stabilisce una relazione fra la tensione V applicata al diodo e la corrispondente densità di corrente j. Esaminare il grafico e determinare:
- dominio e codominio della funzione;
- la corrente corrispondente al valore $V=0{,}5$;
- il valore di V da cui proviene $j=20$.

14. La fig. 9 presenta il grafico di una funzione, ottenuta studiando i diodi ad effetto tunnel: il grafico stabilisce una relazione fra la tensione V applicata al diodo e la corrispondente corrente I. Esaminare il grafico e determinare:
- dominio e codominio della funzione;
- le correnti corrispondenti ai valori $V=0$ e $V=0{,}3$;
- il valore di V da cui provengono $I=2$ e $I=6$.

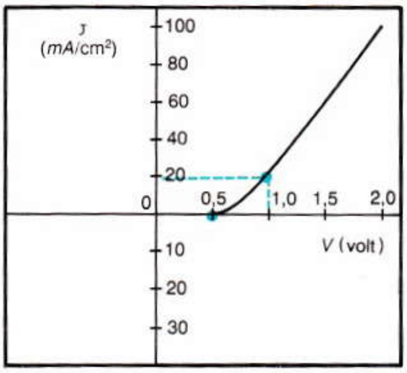


Fig. 8

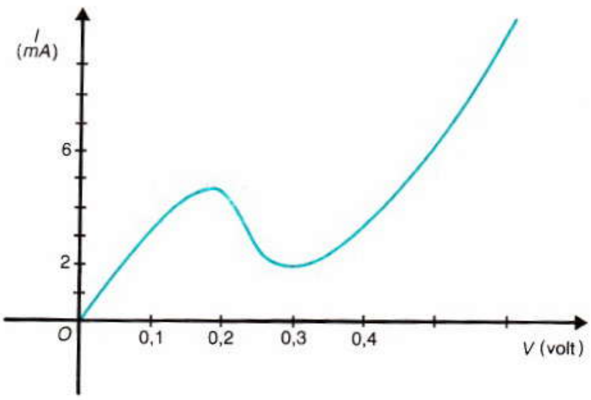


Fig. 9

15. Un pilota da corsa effettua delle prove su un circuito automobilistico lungo 15,3 chilometri. La velocità della macchina viene registrata al bordo della pista, ottenendo i risultati della tabella di fig. 10. Un altro apparecchio incorporato nell'auto registra la velocità in funzione della distanza percorsa; in fig. 11 si trova una rappresentazione grafica di quest'ultima registrazione. Esaminando le due figure, rispondere ai seguenti quesiti:
- i risultati della tabella sono in accordo con quelli del grafico?
- è noto che un pilota frena prima di affrontare una curva ed accelera non appena ha superato la curva. Disegnare approssimativamente il circuito, esaminando la funzione disegnata in fig. 11.

distanza	velocità
500 m	201 km/h
1600 m	52,5 km/h
5100 m	85 km/h
8500 m	210 km/h
13.400 m	117,5 km/h

Fig. 10

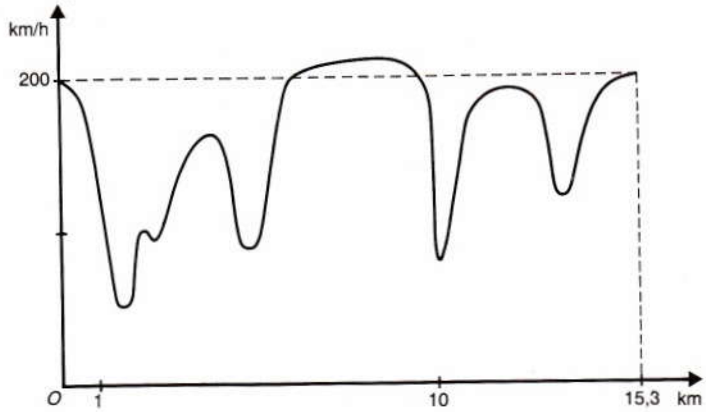


Fig. 11

16. Esaminare le figg. 12, 13 e 14 ed indicare le figure che rappresentano grafici di funzioni, di cui determinare graficamente dominio e codominio.

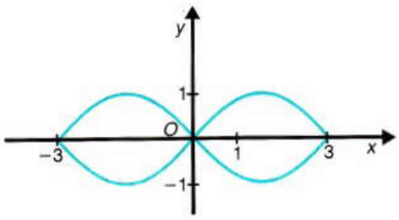


Fig. 12

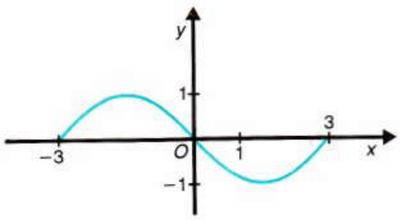


Fig. 13

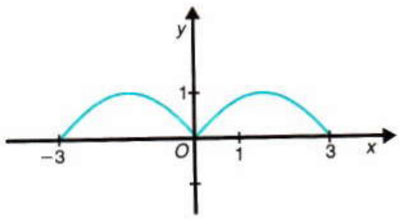


Fig. 14

17. Esaminare la fig. 15, che rappresenta il grafico di una funzione e:
- determinare dominio e codominio della funzione;
- completare la tabella indicata nella figura.

18. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalla fig. 16.

x	y
−2	
1	
0	
	0
	1
	−3

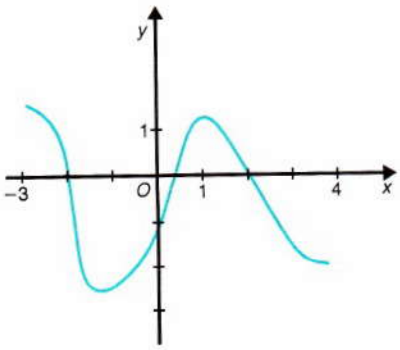


Fig. 15

x	y
−0,5	
0	
1	
	−0,5
	0
	1

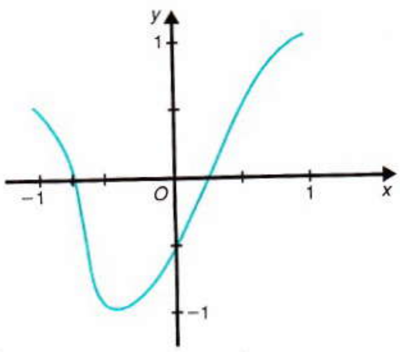


Fig. 16

19. Il concetto di funzione ha subito notevoli cambiamenti nel corso della storia. Individuare le principali differenze fra la definizione di funzione data nel testo e le seguenti, dovute ad illustri matematici:
- «Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione ha un'estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre. Se dunque x rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da x in un modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate funzioni di essa» (Eulero, 1755).
- «Due variabili reali, o, in altri termini, due quantità algebriche variabili diconsi funzioni una dell'altra, quando variano simultaneamente in modo che il valore dell'una determini il valore dell'altra» (Cauchy, 1857).
- «Se una quantità variabile, reale o complessa, che diremo y, è legata a un'altra quantità variabile, reale o complessa, x in guisa che ad un valore di x corrispondano entro certi limiti uno o più valori determinati per y, si dirà che y è funzione di x nel senso più generale del vocabolo funzione e si scriverà $y=f(x)$» (Weierstrass, 1878).
- «Siano E ed F due insiemi distinti o no. Una relazione tra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di funzione all'operazione che così associa ad ogni elemento x di E l'elemento y di F che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione» (Bourbaki, 1939 e Dieudonné, 1969).
- «In analisi si è spesso portati a considerare il termine "funzione" con un grado di generalità che varia secondo le questioni studiate... Vi sono casi in cui si rivela insufficiente la nozione classica di funzione, anche se intesa in senso più generale, cioè come una legge arbitraria che, ad ogni valore di x appartenente al dominio di definizione della funzione, fa corrispondere un numero $y=f(x)$» (Kolmogorov, 1974).

3. Le funzioni reali di variabile reale

Il campo di esistenza di una funzione reale di variabile reale

Gli esercizi dal 20 al 46 conducono ad impadronirsi del campo di esistenza di una funzione reale di variabile reale; per questo è opportuno ricordare che, quando una funzione è data solo mediante una formula, si indica come dominio il campo di esistenza, cioè il più vasto insieme di numeri reali per cui la formula ha significato.
Sono, in particolare, di frequente applicazione le seguenti regole:

1) per tutte le funzioni del tipo

$$y=\frac{N}{D}$$

si escludono dal campo di esistenza i valori di x per cui risulta

$$D=0$$

dato che non è possibile eseguire la divisione $N:0$.
Per determinare il campo di esistenza si è condotti dunque a risolvere delle equazioni;

2) per tutte le funzioni del tipo

$$y=\sqrt{N}$$

il campo di esistenza è costituito dai valori di x per cui risulta

$$N\geq 0$$

dato che la radice quadrata di un numero negativo non è reale.
Per determinare il campo di esistenza si è condotti a risolvere delle disequazioni.

Tenendo presente la regola 1), determinare il campo di esistenza delle funzioni assegnate negli esercizi dal 20 al 25.

20. $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{-3}{x}$, $y=\frac{1}{2x}$

(Attenzione all'ultimo caso: si deve escludere dal campo di esistenza il valore di x per cui risulta $2x=0$ e cioè...)

21. $y=\frac{3}{4x}$, $y=\frac{-2}{3x}$, $y=\frac{1}{3+x}$

(Attenzione all'ultimo caso: si deve escludere dal campo di esistenza il valore di x per cui risulta $3+x=0$ e cioè...)

22. $y=\frac{1}{4-x}$, $y=\frac{-2x}{3+2x}$, $y=\frac{1}{x^2+x}$

(Attenzione all'ultimo caso: si debbono escludere dal campo di esistenza le due soluzioni reali dell'equazione $x^2+x=0$ e cioè...)

23. $y=\frac{-5}{4-x^2}$, $y=\frac{3x^2-2}{x^2-3x+2}$, $y=\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$

Nell'ultimo caso, quanti numeri reali debbono essere esclusi dal campo di esistenza?

24. $y=\frac{3x}{4x^2}$, $y=\frac{4x^2}{(x-2)^2}$, $y=\frac{5x^4-1}{8x^3}$, $y=\frac{x^3}{(x+1)^4}$

25. $y=\frac{x^3-1}{4x^3-x}$, $y=\frac{4x^3-x}{x^3-1}$, $y=\frac{x^4-1}{8x^3+x^2}$, $y=\frac{8x^3+x^2}{x^4-1}$

Tenendo presente la regola 2), determinare il campo di esistenza delle funzioni assegnate negli esercizi dal 26 al 31.

26. $y=\sqrt{2\cdot x}$, $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$, $y=\sqrt{-x}$

(Il campo di esistenza della prima funzione è costituito dalle soluzioni della disequazione $2x\geq 0$ e cioè $x\geq 0$, ...)

27. $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{2-x}$, $y=\sqrt{x+2}$

28. $y=\sqrt{3x+4}$, $y=\sqrt{4x-3}$, $y=\sqrt{3-4x}$

29. $y=\sqrt{\frac{1}{2}x-1}$, $y=\sqrt{1-\frac{1}{2}x}$, $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+1}$

30. $y=\sqrt{x^2+x}$, $y=\sqrt{x-x^2}$, $y=\sqrt{3-x^2}$, $y=\sqrt{x^2-3}$

(Il campo di esistenza della prima funzione è costituito dalle soluzioni della disequazione $x^2+x\geq 0$ e cioè $x\leq -1$ o $x\geq 0$, ...)

31. $y=\sqrt{2x^2-3x+2}$, $y=\sqrt{-x^2+5x-4}$, $y=\sqrt{x^3}$, $y=\sqrt{x^3-x^2}$

Tenendo presenti contemporaneamente le regole 1) e 2), determinare il campo di esistenza delle funzioni assegnate negli esercizi dal 32 al 36.

32. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

(Il campo di esistenza della prima funzione è costituito dalle soluzioni della disequazione $x>0$; si tratta dunque dell'insieme dei numeri reali positivi, escluso 0, perché, ...)

33. $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{4x^2+3}{\sqrt{4x}}$, $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{5-2x}}$

34. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-4}$, $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x}}$

35. $y=\dfrac{\sqrt{3x+8}}{2x^2+x}$, $y=\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{3x+8}}$

36. $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4x^2-x+1}$, $y=\dfrac{4x^2-x+1}{\sqrt{16-x^2}}$

Spiegare perché tutte le funzioni presentate negli esercizi dal 37 al 42 hanno come campo di esistenza l'insieme dei reali.

37. $y=2x-7$, $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{7x+4}{3}$, $y=\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{3}$

38. $y=x^2+3x$, $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{4}$, $y=\dfrac{x^2-x+8}{19}$, $y=\sqrt{3}\cdot x^2-\sqrt{5}\cdot x$

39. $y=x^4-x^3$, $y=\dfrac{1}{5}x^4+\dfrac{6}{5}x^2$, $y=\dfrac{3x^5-2x}{8}$, $y=\sqrt{5}\cdot x^4-\sqrt{6}\cdot x^3$

40. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $y=\dfrac{x-3}{4x^2+3}$, $y=\dfrac{x}{2x^2-x+1}$, $y=\dfrac{2x^2-7x}{-3x^2+x-4}$

41. $y=\sqrt{x^2}$, $y=\sqrt{4x^2}$, $y=\sqrt{x^2-4x+4}$, $y=\sqrt{4x^2+3}$

42. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{x+1}$, $y=\sqrt[3]{4-x}$

(In quest'ultimo esercizio, tenere presente che l'estrazione di radice cubica, come tutte le radici di indice dispari, dà sempre un risultato reale).

Tenendo presenti le regole 1) e 2), determinare il campo di esistenza delle funzioni assegnate negli esercizi dal 43 al 46.

43. $y=x^2+\dfrac{3}{x}$, $y=x-\dfrac{1}{x^2}$, $y=x+\sqrt{x}$

44. $y=\dfrac{4x+5}{-3x^2-2}$, $y=\dfrac{4x+5}{-3x^2}$, $y=\dfrac{4x+5}{-3x^2+2}$

45. $y=\dfrac{x^2+6x+9}{3x^2-x+2}$, $y=\dfrac{3x^2-x+2}{x^2+6x+9}$, $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$

46. $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$

Concetto di funzione reale di variabile reale

47. Fra le formule seguenti indicare quelle che determinano una funzione reale di variabile reale:

$y=3x+1$, $y=-x$, $y=4$, $x=2$

(Tenere presente che la formula deve far corrispondere ad ogni x una sola y, perciò l'ultima formula non determina una funzione, come è confermato dal grafico di fig. 17).

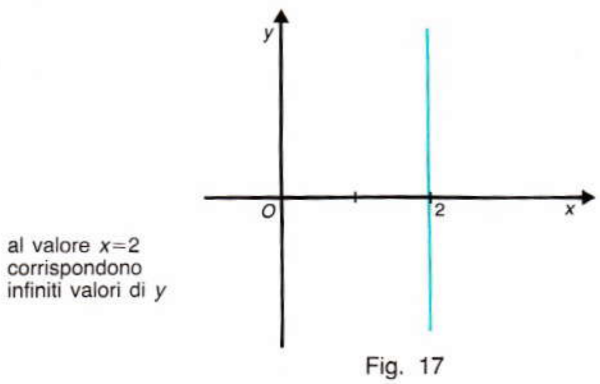


Fig. 17

48. Ripetere l'esercizio 47, a partire dalle seguenti formule:

$$y-x^3=0, \quad y+x^2-x+1=0, \quad y^3=x, \quad y^2=x$$

(Soltanto l'ultima formula non determina una funzione, perché, ricavando y, si ottiene $y=\pm\sqrt{x}$ *e quindi...)*

49. Ripetere l'esercizio 47, a partire dalle seguenti formule:

$$y-x^2=1, \quad y^2-x^2=1, \quad x^2+y^2-1=0, \quad y^4=x$$

(Soltanto la prima formula determina una funzione).

50. La fig. 18 rappresenta la curva d'equazione

$$x=y^2$$

si tratta di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x. La curva non è il grafico di una funzione, tuttavia può essere descritta valendosi delle due funzioni, rappresentate nelle figg. 19 e 20:

$$y=\sqrt{x} \quad \text{e} \quad y=-\sqrt{x}.$$

Determinare le due funzioni che descrivono la parabola d'equazione

$$x=y^2+1,$$

rappresentata in fig. 21; indicare il campo di esistenza e l'immagine delle funzioni ottenute.

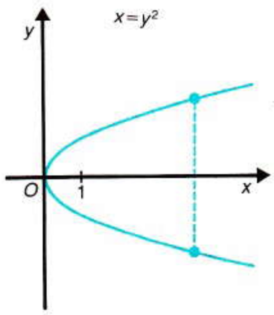


Fig. 18

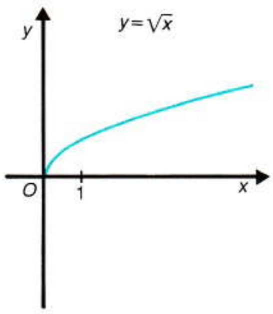


Fig. 19

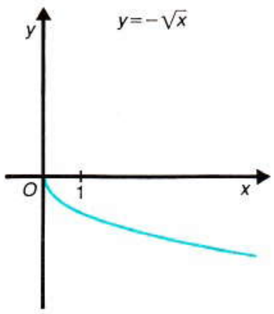


Fig. 20

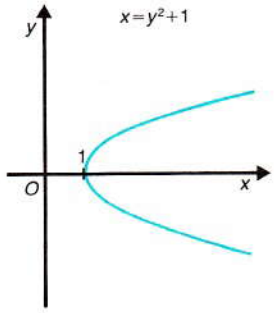


Fig. 21

51. La fig. 22 rappresenta la curva d'equazione

$$x^2+y^2=1;$$

si tratta della circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio lungo 1. La curva non è il grafico di una funzione, tuttavia può essere descritta valendosi di due funzioni, rappresentate nelle figg. 23 e 24:

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

Determinare le due funzioni che descrivono la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-2x=0,$$

rappresentata in fig. 25; indicare il campo di esistenza e l'immagine delle funzioni ottenute.

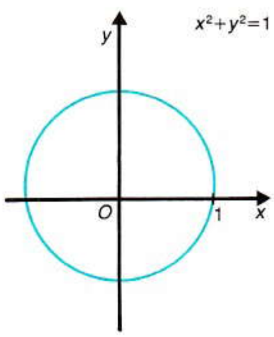


Fig. 22

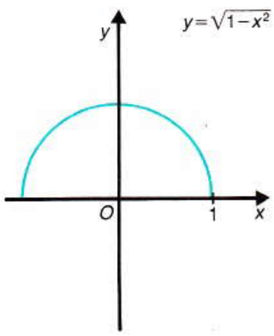


Fig. 23

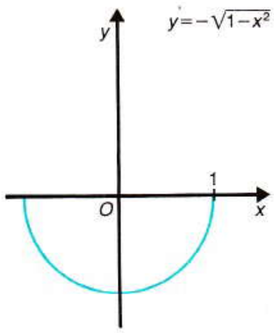


Fig. 24

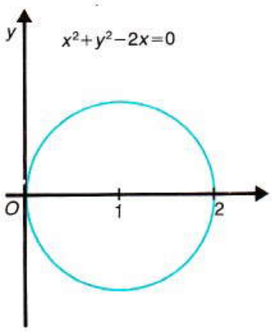


Fig. 25

52. Determinare le due funzioni che descrivono l'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

rappresentata in fig. 26. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.

53. Determinare le due funzioni che descrivono l'iperbole d'equazione

$$x^2-y^2=1$$

rappresentata in fig. 27. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.

54. Determinare le due funzioni che descrivono la curva d'equazione

$$x(x^2+y^2)=x^2-y^2$$

rappresentata in fig. 28. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.
La curva prende il nome di **strofoide** (dalla parola greca *strofos*, che significa nodo) e fu descritta per la prima volta nel 1645 dal matematico francese Roberval.

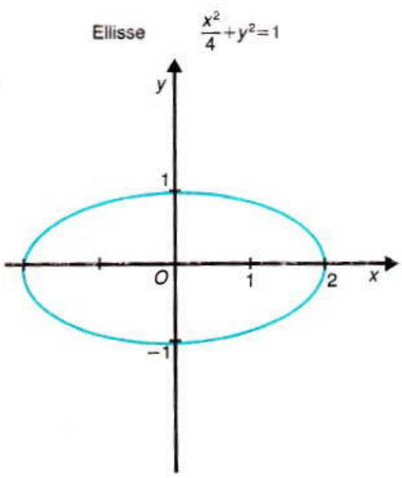


Fig. 26

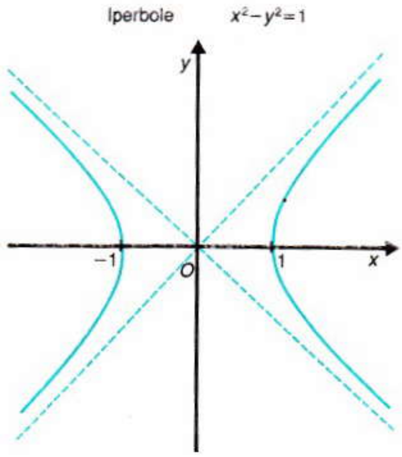


Fig. 27

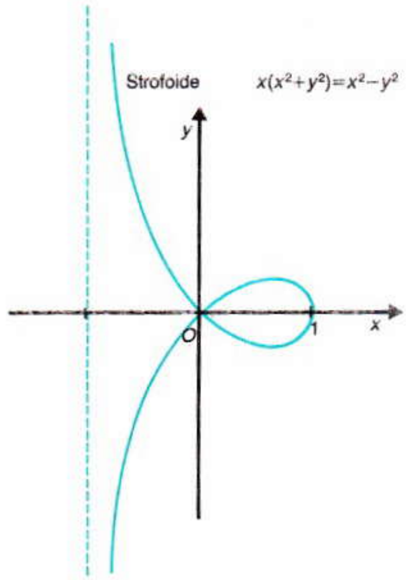


Fig. 28

55. Determinare le due funzioni che descrivono la curva d'equazione

$$xy^2=1-x$$

rappresentata in fig. 29. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.
La curva prende il nome di **curva di Agnesi** e fu descritta nel 1748 dalla matematica italiana Gaetana Agnesi.

56. Determinare le due funzioni che descrivono la curva d'equazione

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$$

rappresentata in fig. 30. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.
La curva prende il nome di **cruciforme** (dal termine latino *crucis*, che significa croce) e fu studiata particolarmente dal matematico olandese Schoute nel 1883.

57. Determinare le due funzioni che descrivono la curva d'equazione

$$x^4-2x^3+y^2=0$$

rappresentata in fig. 31. Tracciare il grafico di ciascuna funzione ottenuta, indicandone il campo di esistenza e l'immagine.
La curva prende il nome di **piriforme** (dal termine latino *pirus*, che significa pera) e fu studiata particolarmente dal matematico inglese Wallis (1616-1703).

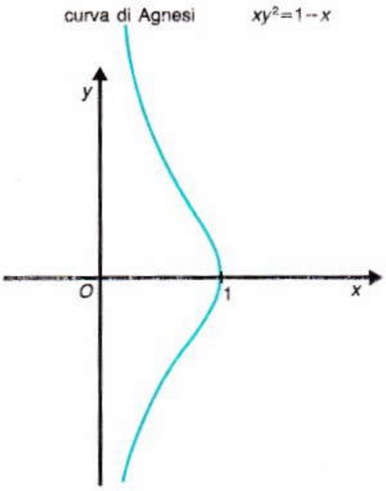


Fig. 29

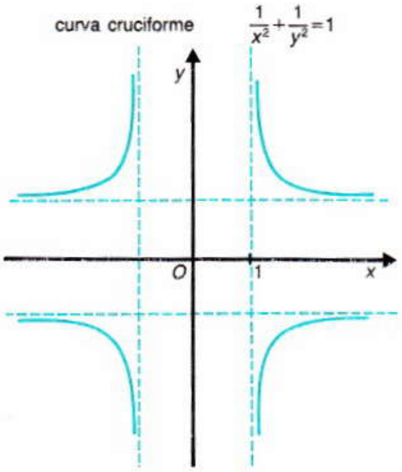


Fig. 30

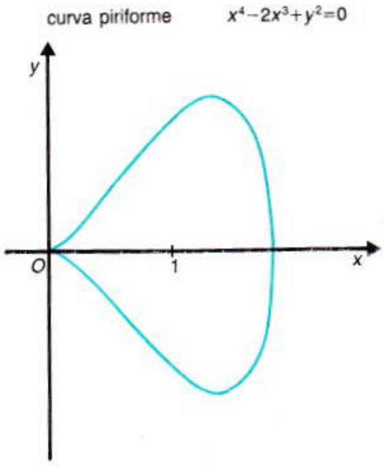


Fig. 31

Il simbolo $y=f(x)$

58. Riferendosi alla fig. 32, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(1), \quad f(3), \quad f(1+3), \quad f(1)+f(3), \quad f(1)+3$$

Risulta $f(1+3)=f(1)+f(3)$?

59. Riferendosi alla fig. 33, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(4), \quad f(5), \quad f(4-5), \quad f(4)-f(5), \quad f(4)-5$$

Risulta $f(4-5)=f(4)-5$?

60. Riferendosi alla fig. 34, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(2), \quad f(3), \quad f(2\cdot 3), \quad f(2)\cdot f(3), \quad f(2)\cdot 3$$

Risulta $f(2\cdot 3)=f(2)\cdot f(3)$?

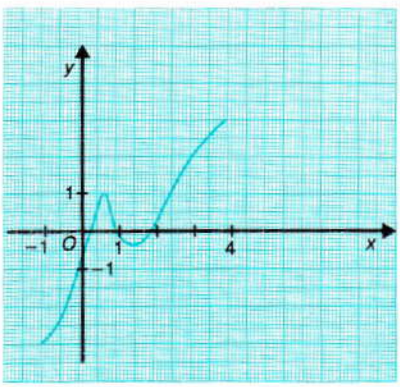


Fig. 32

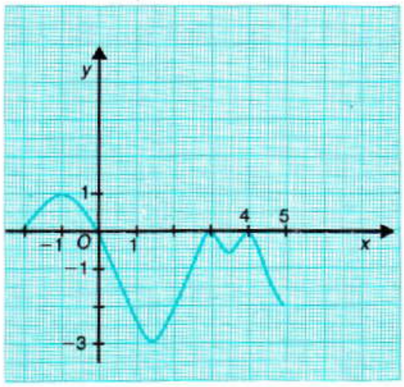


Fig. 33

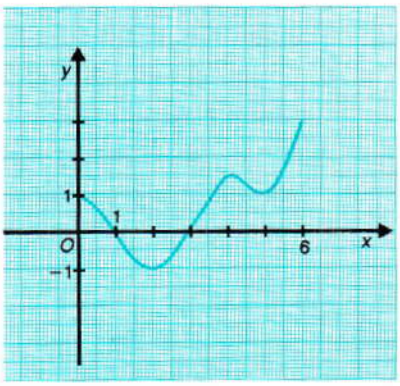


Fig. 34

61. Riferendosi alla tabella di fig. 35, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(0{,}5),\quad f(5),\quad f(5+0{,}5),\quad f(5+0{,}5)-f(5)$$

62. Riferendosi alla tabella di fig. 36, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(1{,}5),\quad f(3),\quad f(3+1{,}5),\quad \frac{f(3+1{,}5)}{3},\quad \frac{f(3+1{,}5)}{f(3)}$$

63. Riferendosi alla tabella di fig. 37, indicare con $y=f(x)$ la legge di corrispondenza e individuare i seguenti valori:

$$f(-4),\quad f(0{,}1),\quad f(-4+0{,}1),\quad f(-4+0{,}1)-f(0{,}1),\quad \frac{f(-4+0{,}1)-f(0{,}1)}{0{,}1}$$

x	y
0	3
0,5	4
5	8
5,5	9

Fig. 35

x	y
1	1,5
1,5	2
3	3,5
4,5	5

Fig. 36

x	y
−4	0
−3,9	1
0	2
0,1	3

Fig. 37

64. È data $f(x)=2x$; calcolare

$$f(3),\quad f(5),\quad f(3+5),\quad f(3)+f(5)$$

e verificare che risulta $f(3+5)=f(3)+f(5)$.
Dimostrare che, per la funzione $f(x)=mx$, **è sempre vera** l'uguaglianza

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

65. È data $f(x)=x^2$; calcolare:

$$f(-3),\quad f(7),\quad f(-3+7),\quad f(-3)+f(7)$$

verificare che **non** risulta $f(-3+7)=f(-3)+f(7)$.
Dimostrare che, per la funzione $f(x)=x^2$, **non è vera** l'uguaglianza

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

mentre **è vera** l'uguaglianza

$$f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab$$

(Ricordare la formula del quadrato del binomio $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$).

66. È data $f(x)=2^x$; calcolare:

$$f(-1),\quad f(3),\quad f(-1+3),\quad f(-1)+f(3)$$

verificare che **non** risulta $f(-1+3)=f(-1)+f(3)$.
Dimostrare che, per la funzione $f(x)=2^x$, **non è vera** l'uguaglianza

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

mentre **è vera** l'uguaglianza

$$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$$

(Ricordare la proprietà delle potenze $2^{a+b}=2^a\,2^b$).

4. Alcune funzioni elementari e loro grafico

67. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-3, \quad y=-\frac{2}{3}, \quad y=0, \quad y=\frac{5}{4}, \quad y=\sqrt{5}, \quad y=x$$

Basandosi anche sui grafici ottenuti, illustrare ogni formula con una frase.
(la prima formula si può illustrare, per esempio, con una delle frasi seguenti
- *«la funzione associa ad ogni valore reale di x il numero −3».*
- *«Il grafico della funzione è una retta r parallela all'asse delle x; sulla retta r si trovano i punti con l'ordinata fissa che vale −3» ...)*

68. Tracciare su carta millimetrata il grafico delle seguenti funzioni

$$y=x^2, \quad y=x^4, \quad y=x^6$$

definite nell'intervallo $[-1, 1]$. Confrontare i grafici ottenuti.
(Per svolgere l'esercizio risulta utile un calcolatore tascabile non programmabile per uso scientifico; conviene, in particolare, valersi del tasto $\boxed{y^x}$. *Ecco due esempi di applicazione:*

I) per calcolare $\boldsymbol{(0{,}5)^3}$*, si preme la sequenza di tasti*

$$\boxed{0}\quad\boxed{\bullet}\quad\boxed{5}\quad\boxed{y^x}\quad\boxed{3}\quad\boxed{=}$$

II) per calcolare $\boldsymbol{(-0{,}5)^3}$*, si preme la sequenza*

$$\boxed{0}\quad\boxed{\bullet}\quad\boxed{5}\quad\boxed{\pm}\quad\boxed{y^x}\quad\boxed{3}\quad\boxed{=}$$

*Un'**importante avvertenza**: alcuni calcolatori rispondono a quest'ultima sequenza con un segnale d'errore, perché non possono calcolare le potenze con base negativa.*
In questo caso, bisogna calcolare la corrispondente potenza con base positiva e tenere successivamente conto della regola dei segni; si calcola cioè

$$(0{,}5)^3=0{,}125$$

e si scrive successivamente

$$(-0{,}5)^3=-0{,}125).$$

69. Tracciare su carta millimetrata il grafico delle seguenti funzioni

$$y=x^2, \quad y=x^4, \quad y=x^6$$

definite nell'intervallo $[1, 3]$. Confrontare i risultati ottenuti.
(Tenere presenti le avvertenze dell'esercizio 68).

70. Ripetere l'esercizio 68, a partire dalle funzioni seguenti

$$y=x^3, \quad y=x^5, \quad y=x^7$$

(Tenere presenti le avvertenze dell'esercizio 68).

71. Ripetere l'esercizio 69, a partire dalle funzioni seguenti

$$y=x^3, \quad y=x^5, \quad y=x^7$$

(Tenere presenti le avvertenze dell'esercizio 68).

72. Tracciare su carta millimetrata il grafico delle seguenti funzioni

$$y=2^x, \quad y=3^x, \quad y=4^x$$

nell'intervallo $[-2, 2]$; elencare qualche proprietà comune ai vari grafici.
(Tenere presenti le avvertenze dell'esercizio 68).

73. Tracciare su carta millimetrata il grafico delle seguenti funzioni

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

nell'intervallo $[-2, 2]$; elencare qualche proprietà comune ai vari grafici.
(Tenere presenti le avvertenze dell'esercizio 68).

74. Spiegare perché non si può scegliere un numero negativo come base a della funzione esponenziale $y=a^x$.
(Si può basare la risposta sull'esame delle formule

$$y=0^x, \qquad y=(-2)^x,$$

calcolando, per esempio, il valore di y corrispondente a $x=-\frac{1}{2}$ *...)*

75. Confrontare i grafici delle due funzioni

$$y=x^2, \qquad y=2^x$$

Le due curve hanno dei punti in comune?
Si può decidere quale delle due curve cresce più rapidamente?

76. Tracciare su carta millimetrata il grafico della funzione

$$y=e^x$$

nell'intervallo $[-2, 2]$, completando una tabella come quella presentata a fianco.
(Per svolgere l'esercizio risulta utile tenere presente che un calcolatore tascabile per uso scientifico presenta abitualmente il tasto $\mathbf{e^x}$*; ecco un esempio d'applicazione:*
per calcolare e^2 *si preme la sequenza* $\boxed{2}$ $\boxed{e^x}$*).*

x	$y=e^x$
−2	
−1,5	
−1	
−0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	

77. Tracciare su carta millimetrata il grafico della funzione

$$y=\text{sen } x$$

definita nell'intervallo $[0, 2\pi]$, completando una tabella come quella presentata a fianco.
(Per svolgere l'esercizio risulta utile un calcolatore tascabile non programmabile per uso scientifico; conviene, in particolare, valersi del tasto ***sin****; ecco un esempio d'applicazione:*
per calcolare sin π *si preme la sequenza*

π ***sin***

*Un'****avvertenza importante****: per tracciare il grafico della sinusoide, si misurano gli angoli in radianti*[1]*, perciò, prima di iniziare i calcoli, occorre accertarsi che il calcolatore sia predisposto a valutare gli angoli in radianti).*

x	$y=\text{sen } x$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{5}{6}\pi$	
π	
$\frac{7}{6}\pi$	
$\frac{3}{2}\pi$	
$\frac{11}{6}\pi$	
2π	

[1] Per notizie sulla misura degli angoli in radianti e sulla funzione $y=\text{sen } x$, vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Trigonometria*, Firenze, La Nuova Italia, 1986, pagg. 67-74.

78. Dopo aver predisposto il calcolatore ad usare la misura degli angoli in radianti, completare le seguenti tabelle:

x	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01	0,005	0,001
sen x								

x	−0,25	−0,20	−0,15	−0,10	−0,05	−0,01	−0,005	−0,001
sen x								

Che cosa si osserva?

79. Sullo stesso piano cartesiano tracciare un grafico accurato delle funzioni

$$y=x, \qquad y=\text{sen } x$$

nell'intervallo $[-1, 1]$, basandosi su tabelle analoghe a quelle compilate nell'esercizio precedente. Che cosa si osserva?

80. Sulla base dei due esercizi precedenti, verificare la validità della seguente regola d'approssimazione: se la misura di un angolo x è inferiore a 0,25 radianti (ossia circa 14°), si può sostituire sen x con x, commettendo un errore che non supera 0,01.

5. Trasformazioni del piano

Dilatazioni nella direzione degli assi cartesiani

Gli esercizi dall'81 all'85 conducono a tracciare i grafici delle rette che si ottengono trasformando la retta d'equazione $y=x$.

81. Trasformare la retta d'equazione

$$y=x$$

con le dilatazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=5y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{4}{3}y \end{cases}$$

Rappresentare le tre rette trasformate. Che cosa si osserva?
(Per svolgere l'esercizio, si ricavano x ed y dalle equazioni delle trasformazioni e si sostituiscono nell'equazione y=x. Per esempio, nel 1° caso si ottiene

$$\frac{y'}{3}=x', \qquad \textit{ossia} \qquad y'=3x'$$

La retta ottenuta presenta le seguenti caratteristiche:
– passa per O'(0, 0),
– ha la pendenza che vale 3, ...)

82. Ripetere l'esercizio 81, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{3}{4}y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

83. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y=4x$, b) $y=\frac{1}{4}x$, c) $y=8x$, d) $y=\frac{1}{8}x$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$y=mx$.

Queste funzioni sono scritte nel testo nella forma

$y'=mx'$

per descrivere meglio l'effetto delle trasformazioni; ora invece le coordinate sono state indicate con x ed y per semplicità di scrittura.
Comunque, i grafici sono delle rette che passano per O(0, 0); per esempio nel 1° caso si ottiene la retta di fig. 38 a partire dalla relativa tabella).

x	y
0	0
1	$1\cdot 4=4$

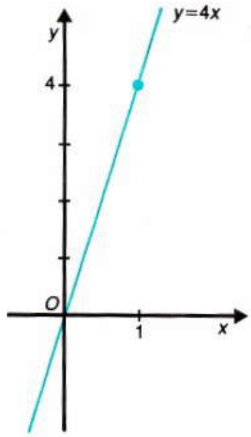


Fig. 38

84. Ripetere l'esercizio 83, a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\frac{4}{5}x$, b) $y=\frac{5}{4}x$, c) $y=\frac{3}{2}x$, d) $y=\frac{2}{3}x$

85. Ripetere l'esercizio 83, a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\sqrt{3}x$, b) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, c) $y=\sqrt{10}x$, d) $y=\frac{1}{\sqrt{10}}x$

Gli esercizi dall'86 al 100 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando le curve d'equazione $y=x^n$.

86. Trasformare la parabola d'equazione

$y=x^2$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\begin{cases}x'=x\\ y'=3y\end{cases}\qquad \text{II)}\begin{cases}x'=x\\ y'=4y\end{cases}\qquad \text{III)}\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{7}{4}y\end{cases}$$

rappresentare le tre curve trasformate. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 81. Nel 1° caso si ottiene la parabola che presenta le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=3x'^2$,
– ha il vertice in $O'(0, 0)$,
– ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y).

87. Ripetere l'esercizio 86, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{1}{3}y\end{cases}\qquad \text{II)}\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{3}{4}y\end{cases}\qquad \text{III)}\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}y\end{cases}$$

88. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y=4x^2$, b) $y=\frac{1}{4}x^2$, c) $y=7x^2$, d) $y=\frac{1}{7}x^2$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$y=ax^2$.

Queste funzioni sono scritte nel testo nella forma

$y'=ax'^2$

per descrivere meglio l'effetto delle trasformazioni; ora invece le coordinate sono indicate con x ed y per semplicità di scrittura.
Comunque, i grafici sono delle parabole che hanno l'asse delle y come asse di simmetria e vertice in O(0, 0); per esempio nel 1° caso si ottiene la parabola di fig. 39, a partire dalla relativa tabella).

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	4

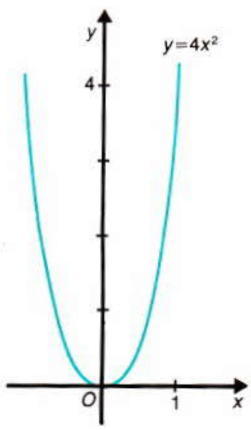


Fig. 39

89. Ripetere l'esercizio 88, a partire dalle seguenti funzioni:

$$a)\ y=\frac{8}{5}x^2,\quad b)\ y=\frac{5}{8}x^2,\quad c)\ y=\frac{3}{4}x^2,\quad d)\ y=\frac{4}{3}x^2$$

90. Ripetere l'esercizio 88, a partire dalle seguenti funzioni:

$$a)\ y=\sqrt{2}x^2,\quad b)\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2,\quad c)\ y=\sqrt{8}x^2,\quad d)\ y=\frac{1}{\sqrt{8}}x^2$$

91. Trasformare la curva d'equazione

$$y=x^3$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni;

$$I)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases}\quad II)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases}\quad III)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{4}{3}y \end{cases}$$

rappresentare le tre curve trasformate. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 81. Nel 1° caso si ottiene la curva, che presenta le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=3x'^3$,
– tocca l'asse delle x in $O'(0, 0)$).

92. Ripetere l'esercizio 91, operando le seguenti trasformazioni:

$$I)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases}\quad II)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}\quad III)\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{4}{5}y \end{cases}$$

93. Ripetere l'esercizio 91 per le curve d'equazione

$$y=x^4,\quad y=x^5$$

94. Ripetere l'esercizio 92 per le curve d'equazione

$$y=x^4,\quad y=x^5$$

95. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=4x^3,\quad y=\frac{1}{4}x^3,\quad y=\frac{3}{2}x^3,\quad y=\frac{2}{3}x^3$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$\boldsymbol{y=ax^n}$*;*

per esempio, nel 1° caso si ottiene la curva di fig. 40 a partire dalla relativa tabella).

x	$y=4x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	4
.	.
.	.

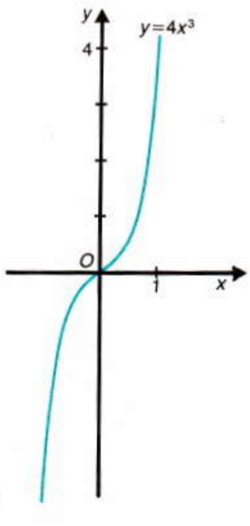


Fig. 40

96. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=3x^4,\quad y=\frac{1}{3}x^4,\quad y=\frac{5}{4}x^4,\quad y=\frac{4}{5}x^4$$

97. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2x^5,\quad y=\frac{1}{2}x^5,\quad y=\frac{5}{3}x^5,\quad y=\frac{3}{5}x^5$$

98. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{3}{4},\quad y=\frac{3}{4}x,\quad y=\frac{3}{4}x^2,\quad y=\frac{3}{4}x^3,\quad y=\frac{3}{4}x^4$$

99. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4}{3},\quad y=\frac{4}{3}x,\quad y=\frac{4}{3}x^2,\quad y=\frac{4}{3}x^3,\quad y=\frac{4}{3}x^4$$

100. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{10},\quad y=\sqrt{10}x,\quad y=\sqrt{7}x^2,\quad y=\sqrt{3}x^3,\quad y=\sqrt{5}x^4$$

Gli esercizi dal 101 al 112 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando la curva d'equazione $y=\text{sen}\ x$.

101. Trasformare la curva d'equazione

$$y=\text{sen}\ x$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases}$$

Rappresentare le tre curve trasformate nell'ordine indicato.
Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 81. Le trasformazioni sono delle dilatazioni lungo l'asse delle y; per esempio, nel 1° caso si ottiene la curva di fig. 41, che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
- *ha equazione $y'=2\ \text{sen}\ x'$,*
- *è periodica con periodo 2π,*
- *ha come immagine l'intervallo $[-2, 2]$, ...)*

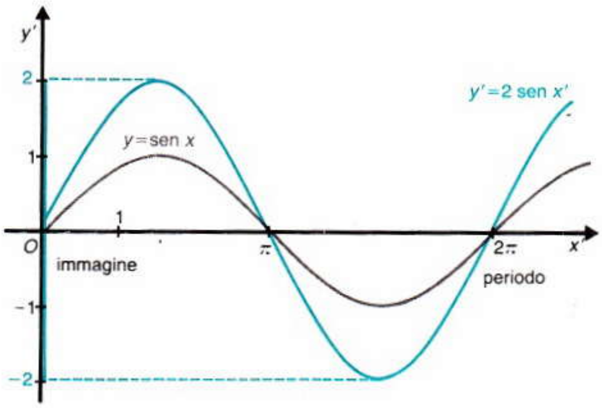


Fig. 41

102. Ripetere l'esercizio 101, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

103. Ripetere l'esercizio 101, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=3x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=4x \\ y'=y \end{cases}$$

(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 81.
Le trasformazioni sono delle dilatazioni nella direzione dell'asse delle x; per esempio, nel 1° caso si ottiene la curva di fig. 42, che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
- *ha equazione $y'=\text{sen}\left(\frac{x'}{2}\right)$*
- *è periodica con periodo 4π,*
- *ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$, ...)*

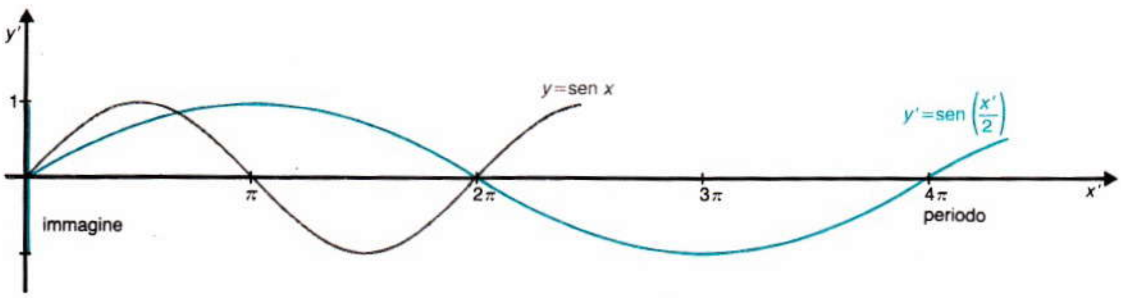


Fig. 42

104. Ripetere l'esercizio 101, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=y \end{cases} \quad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

105. Ripetere l'esercizio 101, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=3y \end{cases} \quad \text{II)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \quad \text{III)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=4y \end{cases}$$

(Tenere presente che le trasformazioni assegnate agiscono nella direzione di entrambi gli assi; nel 1° caso, per esempio, si ha:
– una contrazione nella direzione dell'asse delle x,
– una dilatazione nella direzione dell'asse delle y.
Si ottiene la curva di fig. 43, che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=3$ sen $(2x')$,
– è periodica con periodo π,
– ha come immagine l'intervallo $[-3, 3]$, ...)

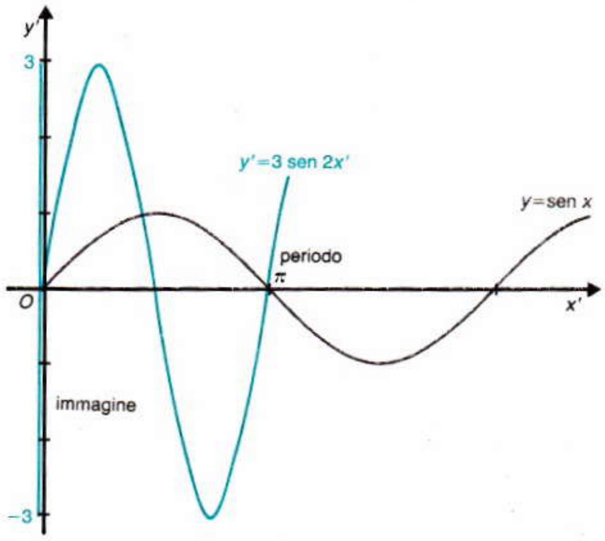


Fig. 43

106. Ripetere l'esercizio 101, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=3y \end{cases} \quad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \quad \text{III)}\ \begin{cases} x'=4x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

107. Dopo aver svolto gli esercizi 101-106, descrivere le curve che si ottengono a partire dalla sinusoide d'equazione $y=$sen x, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=ky \end{cases} \quad \text{II)}\ \begin{cases} x'=hx \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)}\ \begin{cases} y'=hk \\ y'=ky \end{cases}$$

Distinguere i vari casi possibili.
(Con le trasformazioni (I), si ottengono curve che hanno le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=k$ sen x',
– sono periodiche di periodo 2π,
– hanno come immagine l'intervallo $[-k, k]$.
Con le trasformazioni (II), si ottengono curve che hanno le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=\text{sen}\left(\frac{x'}{h}\right)$,
– sono periodiche con periodo $h\cdot 2\pi$,
– hanno come immagine l'intervallo $[-1, 1]$.
Con le trasformazioni (III), si ottengono curve che hanno le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=k\cdot\text{sen}\left(\frac{x'}{h}\right)$,
– sono periodiche con periodo $h\cdot 2\pi$,
– hanno come immagine l'intervallo $[-k, k]$, ...)

108. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2 \text{ sen } x, \qquad y=\frac{1}{2} \text{ sen } x, \qquad y=\frac{4}{5} \text{ sen } x, \qquad y=\sqrt{3}\cdot\text{sen } x$$

indicandone immagine e periodo.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=k\cdot \text{sen } x}$$

con k numero reale positivo; per tracciare il grafico tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 107).

109. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \qquad y=\text{sen }(2x), \qquad y=\text{sen}\left(\frac{4}{5}x\right), \qquad y=\text{sen }(\sqrt{3}x)$$

indicandone immagine e periodo.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=\text{sen}\left(\frac{x}{h}\right)}$$

dove h indica un numero reale positivo; per tracciare il grafico tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 107).

110. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen }(3x), \qquad y=4 \text{ sen } x, \qquad y=4 \text{ sen }(3x)$$

indicandone immagine e periodo.
(Tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 107).

111. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$y=\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right), \qquad y=\frac{1}{3} \text{ sen } x, \qquad y=\frac{1}{3} \text{ sen}\left(\frac{x}{4}\right)$$

indicandone immagine e periodo.
(Tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 107).

112. Data una funzione del tipo

$$y=A \text{ sen }(b\cdot x)$$

- determinare l'immagine della funzione,
- determinare il periodo della funzione,
- descrivere l'andamento della curva.

Gli esercizi dal 113 al 120 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando la curva d'equazione $y=e^x$.

113. Trasformare la curva d'equazione

$$y=e^x$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=3x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$$

rappresentare le tre curve ottenute. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 81. Nel 1° caso si ottiene la curva di fig. 44, che presenta le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=2e^{x'}$,
– incontra l'asse delle y in $A'(0, 2)$).

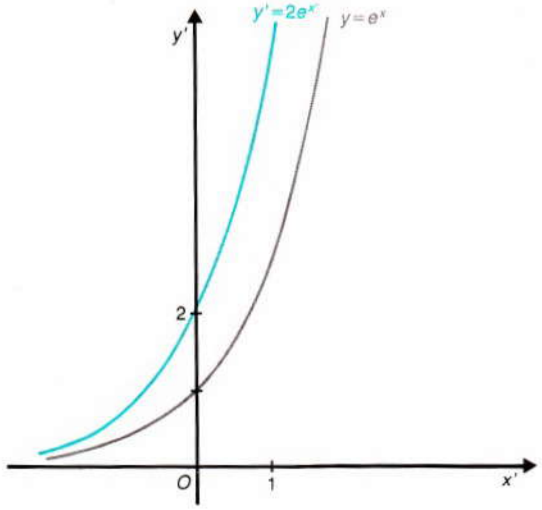


Fig. 44

114. Ripetere l'esercizio 113, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

115. Dopo aver svolto gli esercizi 113 e 114, descrivere le curve che si ottengono a partire dall'esponenziale d'equazione $y=e^x$ con trasformazioni del tipo:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=ky \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=hx \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=hx \\ y'=ky \end{cases}$$

Distinguere i vari casi possibili.
(Con le trasformazioni (I), si ottengono curve d'equazione $y'=ke^{x'}$.
Con le trasformazioni (II), si ottengono curve d'equazione $y'=e^{\frac{x'}{h}}$.
Con le trasformazioni (III), si ottengono curve d'equazione $y'=ke^{\frac{x'}{h}}$*).*

116. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2e^x, \qquad y=\frac{1}{2}e^x, \qquad y=\frac{3}{4}e^x, \qquad y=\sqrt{2}e^x$$

Confrontare i risultati ottenuti.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=ke^x}$$

dove k indica un numero reale positivo; per tracciare il grafico tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 115).

117. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=e^{\frac{1}{2}x}, \qquad y=e^{2x}, \qquad y=e^{\frac{3}{4}x}, \qquad y=e^{\sqrt{2}x}$$

Confrontare i risultati ottenuti.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=e^{\frac{x}{h}}}$$

dove h indica un numero reale positivo; per tracciare il grafico tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 115).

118. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=e^{3x}, \qquad y=4e^x, \qquad y=4e^{3\cdot x}$$

(Tenere presenti i risultati ottenuti nell'esercizio 115).

119. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=e^{\frac{x}{4}}, \qquad y=\frac{1}{3}e^{x}, \qquad y=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{4}}$$

(Tenere presenti i risultati ottenuti nell'esercizio 115).

120. Data una funzione del tipo

$$y=Ae^{bx}$$

- determinare il punto in cui la curva incontra l'asse delle y,
- calcolare l'ordinata del punto d'ascissa 1,
- descrivere l'andamento della curva.

Gli esercizi dal 121 al 127 conducono a tracciare grafici ottenuti dalle varie funzioni elementari mediante dilatazioni nella direzione degli assi cartesiani.

121. $y=3x, \quad y=3x^2, \quad y=3x^3, \quad y=3e^x, \quad y=3\text{sen } x$

122. $y=\frac{1}{4}x, \quad y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=\frac{1}{4}x^4, \quad y=\frac{1}{4}e^x, \quad y=\frac{1}{4}\text{ sen } x$

123. $y=e^{3x}, \quad y=\text{sen }(3x)$

124. $y=e^{\frac{x}{3}}, \quad y=\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

125. $y=\frac{1}{3}e^{3x}, \quad y=\frac{1}{3}\text{ sen }(3x)$

126. $y=3e^{\frac{1}{3}x}, \quad y=3\text{ sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$

127. $y=3e^{3x}, \quad y=3\text{ sen }(3x)$

Simmetrie rispetto agli assi cartesiani

Gli esercizi dal 128 al 132 conducono a disegnare rette d'equazione $y=mx$, con $m<0$, valendosi delle simmetrie rispetto agli assi cartesiani.

128. Trasformare con la simmetria rispetto all'asse delle x le rette che hanno le seguenti equazioni:

$$y=2x, \qquad y=4x, \qquad y=\frac{5}{4}x, \qquad y=\sqrt{3}x$$

Scrivere l'equazione delle rette trasformate e tracciare i relativi grafici, descrivendone le caratteristiche più importanti.
(Per svolgere l'esercizio, basta modificare l'equazione cambiando segno all'ordinata; per esempio nel primo caso si ottiene l'equazione

$$y'=-2x'.$$

La retta ottenuta presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– passa per $O'(0, 0)$,
– ha la pendenza che vale -2, ...)

129. Ripetere l'esercizio 128 a partire dalle rette seguenti:

$$y=\frac{1}{2}x, \qquad y=\frac{1}{4}x, \qquad y=0{,}2x, \qquad y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

130. Dopo aver svolto gli esercizi 128 e 129, descrivere le rette che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle x, a partire dalle rette d'equazione $y=mx$, con $m>0$.
(Si ottengono sempre delle rette con le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=mx'$ e perciò passano per $O'(0, 0)$,
– hanno pendenza $m<0$, ...)

131. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x, \quad y=-3x, \quad y=-\frac{5}{3}x, \quad y=-\sqrt{3}x$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$y=mx \quad \text{con} \quad m<0.$$

I grafici saranno delle rette che passano per O(0, 0); per esempio nel 1° caso si ottiene la retta di fig. 45, a partire dalla relativa tabella).

x	$y=-x$
0	0
1	−1

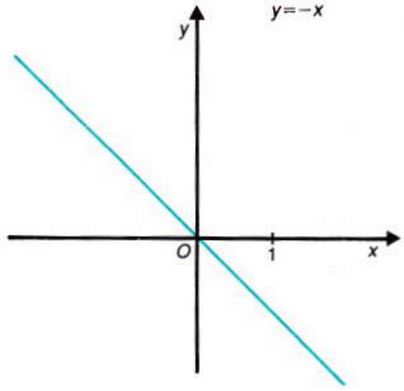


Fig. 45

132. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{2}x, \quad y=-\frac{2}{5}x, \quad y=-0{,}6x, \quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Gli esercizi dal 133 al 149 conducono a tracciare i grafici delle curve che si ottengono trasformando le curve d'equazione $y=ax^n$ con simmetrie rispetto agli assi cartesiani.

133. Trasformare con la simmetria rispetto all'asse delle x le parabole che hanno le seguenti equazioni:

$$y=2x^2, \quad y=4x^2, \quad y=\frac{4}{3}x^2, \quad y=\sqrt{2}x^2$$

Scrivere l'equazione delle curve trasformate e tracciare i relativi grafici, descrivendone le caratteristiche più importanti.
(Per svolgere l'esercizio, basta modificare l'equazione cambiando segno all'ordinata; per esempio, nel 1° caso si ottiene l'equazione

$$y'=-2x'^2.$$

La parabola corrispondente presenta le seguenti caratteristiche:
– ha il vertice in O′(0, 0),
– ha la concavità rivolta verso il basso, ...)

134. Ripetere l'esercizio 133, a partire dalle parabole seguenti:

$$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=\frac{3}{5}x^2, \quad y=0{,}6x^2, \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$$

135. Dopo aver svolto gli esercizi 133 e 134, descrivere le parabole che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle x, a partire dalle parabole d'equazione $y=ax^2$, con $a>0$.
(Si ottengono sempre delle parabole che presentano, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=ax'^2$, con $a<0$,
– hanno vertice in O′(0, 0),
– hanno la concavità rivolta verso il basso, ...)

136. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^2, \quad y=-3x^2, \quad y=-\frac{7}{4}x^2, \quad y=-\sqrt{5}x^2$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$y=ax^2 \quad \text{con} \quad a<0$$

I grafici saranno delle parabole che hanno:
– il vertice in O(0, 0),
– la concavità rivolta verso il basso.
Per esempio nel 1° caso si ottiene la parabola di fig. 46 a partire dalla relativa tabella).

x	$y=-x^2$
⋮	⋮
0	0
1	−1
2	−4
⋮	⋮

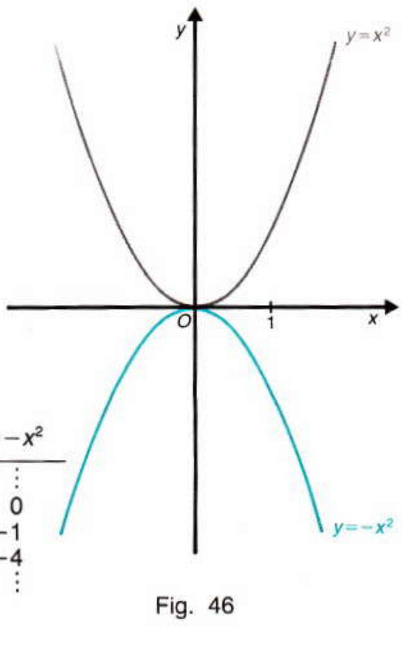


Fig. 46

137. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{4}x^2, \quad y=-\frac{2}{3}x^2, \quad y=-0{,}8x^2, \quad y=-\frac{1}{\sqrt{8}}x^2$$

138. Trasformare con la simmetria rispetto all'asse delle x le curve che hanno le seguenti equazioni:

$$y=3x^3, \quad y=\frac{1}{3}x^3, \quad y=\frac{3}{2}x^5, \quad y=\frac{2}{3}x^5$$

Scrivere l'equazione delle curve trasformate e tracciare i relativi grafici, descrivendone le caratteristiche più importanti.
(Vedi anche esercizio 133. Nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 47).

139. Ripetere l'esercizio 138, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=2x^4, \quad y=\frac{1}{4}x^4, \quad y=1{,}5x^6, \quad y=\frac{1}{8}x^6$$

(Vedi anche esercizio 133. Nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 48).

140. Dopo aver svolto gli esercizi 138 e 139 descrivere le curve che si ottengono operando una simmetria rispetto all'asse delle x, a partire da curve d'equazione $y=ax^n$, con $a>0$.
(Le curve presentano, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– hanno equazione $y'=ax'^n$, con $a<0$,
– toccano l'asse delle x' in $O'(0, 0)$,
– hanno andamento analogo a quello della curva in colore di fig. 47, se n è dispari,
– hanno andamento analogo a quello della curva in colore di fig. 48, se n è pari, ...)

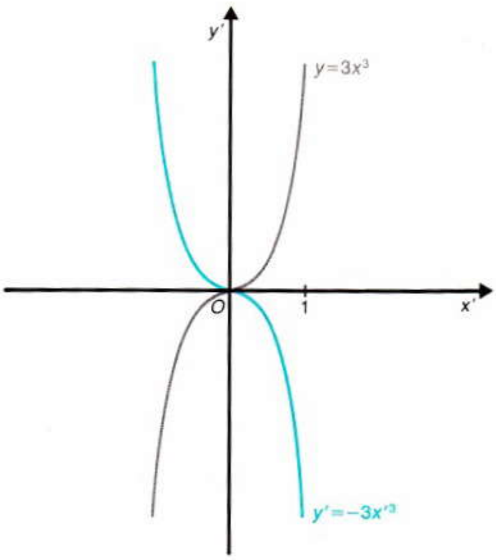


Fig. 47

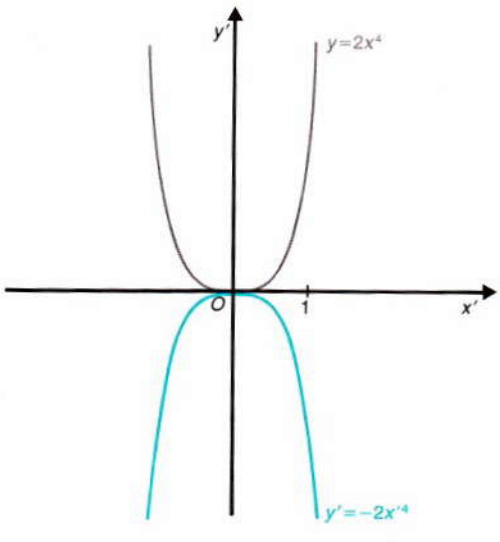


Fig. 48

141. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^3, \quad y=-3x^3, \quad y=-\frac{1}{3}x^3$$

(Si tratta di funzioni del tipo

$$\boldsymbol{y=ax^n}, \quad \textit{con} \quad \boldsymbol{a<0}$$

Per tracciare i grafici, basta tenere presenti i risultati suggeriti dall'esercizio 140).

142. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^4, \quad y=-2x^4, \quad y=-\frac{1}{2}x^4$$

143. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^5, \quad y=-\frac{3}{2}x^5, \quad y=-\frac{2}{3}x^5$$

144. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^6, \quad y=-\frac{1}{4}x^6, \quad y=-\frac{5}{4}x^6$$

145. Operare la simmetria rispetto all'asse delle y sulle seguenti funzioni:

$$y=x^2, \quad y=x^4, \quad y=x^6$$

Che cosa si osserva?

146. A partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x, \quad y=x^3, \quad y=x^5$$

operare le seguenti trasformazioni:
I) la simmetria rispetto all'asse delle y,
II) la simmetria rispetto all'asse delle x.
Confrontare i grafici ottenuti; che cosa si osserva?

147. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=x^4$$

ed esaminare le seguenti espressioni:

$$f(-x)=(-x)^4, \quad -f(x)=-x^4$$

Spiegare perché l'uguaglianza

$$f(-x)=-f(x)$$

non è vera per qualunque valore di x, mentre è vera l'uguaglianza

$$f(-x)=f(x).$$

148. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=x^5$$

ed esaminare le seguenti espressioni:

$$f(-x)=(-x)^5, \quad -f(x)=-x^5$$

Spiegare perché in questo caso l'uguaglianza

$$f(-x)=-f(x)$$

è vera per qualunque valore di x.

149. Dopo aver svolto gli esercizi 147 e 146, esprimere in forma sintetica i risultati ottenuti.
(Si può sintetizzare riferendosi ad una funzione $y=f(x)$ e dicendo che:
- *se risulta* $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$*, la funzione è* ***pari****; la curva corrispondente è simmetrica rispetto all'asse delle x;*
- *se risulta* $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$*, la funzione è* ***dispari****; la curva corrispondente è simmetrica rispetto all'origine $O(0, 0)$).*

Gli esercizi dal 150 al 152 conducono a tracciare i grafici delle curve che si ottengono trasformando le curve d'equazione $y=\text{sen } x$ e $y=e^x$.

150. Basandosi sui risultati esposti nel testo, tracciare il grafico delle seguenti funzioni, indicandone immagine e periodo:

$$y=-\text{sen } x, \quad y=\text{sen }(-x), \quad y=-\text{sen }(-x).$$

151. Trasformare la curva d'equazione

$$y=e^x$$

con le seguenti trasformazioni:
I) la simmetria rispetto all'asse delle x,
II) la simmetria rispetto all'asse delle y,
III) la simmetria rispetto all'origine $O(0, 0)$.
Rappresentare le tre curve ottenute nell'ordine indicato.

(Si ottengono le curve che hanno l'equazione seguente:
I) $y'=-e^{x'}$ *(fig. 49),*
II) $y'=e^{-x'}$ *(fig. 50),*
III) $y'=-e^{-x'}$ *(fig. 51).)*

152. Dopo aver svolto l'esercizio 151, si riesce facilmente a tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-e^x, \qquad y=e^{-x}, \qquad y=-e^{-x}.$$

Sulla base dei grafici ottenuti, rispondere ai seguenti quesiti, motivando adeguatamente la risposta:
- si può dire se la funzione esponenziale è una funzione pari o dispari?
- è possibile tracciare anche il grafico di $y=(-e)^x$?

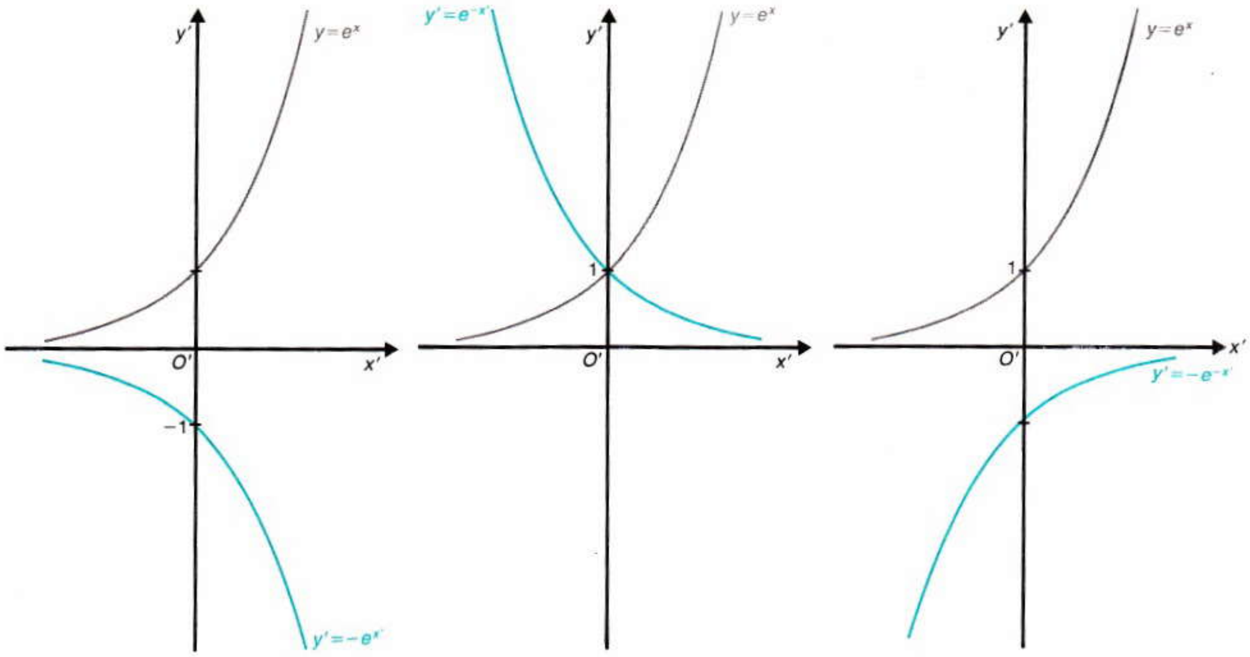


Fig. 49 Fig. 50 Fig. 51

Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani

Gli esercizi dal 153 al 160 conducono a tracciare i grafici delle rette che si ottengono trasformando le rette d'equazione $y=mx$.

153. Trasformare la retta d'equazione

$$y=x$$

con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2. \end{cases}$$

Rappresentare le due rette trasformate nell'ordine indicato. Che cosa si osserva?
(Per svolgere l'esercizio, si ricavano x ed y dalle equazioni delle trasformazioni e si sostituiscono nell'equazione $y=x$. Per esempio, nel 1° caso si ha:

$$y'-3=x', \qquad \textit{ossia} \qquad y'=x'+3.$$

La retta ottenuta presenta le seguenti caratteristiche:
- *ha ancora la pendenza che vale 1,*
- *passa per $A'(0, 3)$, ...).*

154. Ripetere l'esercizio 153, operando le seguenti trasformazioni

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-\frac{1}{4}, \end{cases}$$

sulla retta d'equazione $y=3x$.

155. Ripetere l'esercizio 153, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-1, \end{cases}$$

sulla retta d'equazione $y=-\frac{1}{2}x$.

156. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=4x-2, \qquad y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}, \qquad y=-x-3, \qquad y=\frac{5}{8}x-\frac{7}{2}.$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$\boldsymbol{y=mx+q}.$$

Queste funzioni sono scritte nel testo nella forma

$$y'=mx'+q'$$

per descrivere meglio l'effetto delle trasformazioni; ora invece le coordinate sono state indicate con x ed y per semplicità di scrittura. Comunque, i grafici sono delle rette; per esempio nel 1° caso si ottiene la retta di fig. 52 a partire dalla relativa tabella).

x	y
0	−2
1	$4\cdot1-2=2$

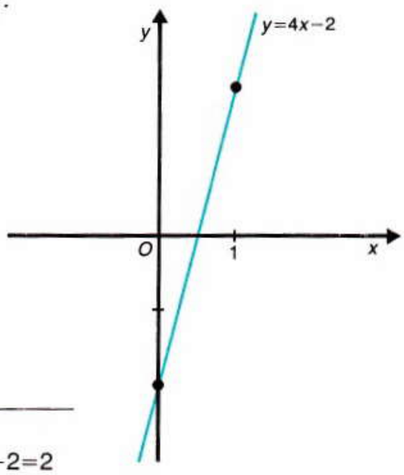


Fig. 52

157. Ripetere l'esercizio 156, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}, \qquad y=-\frac{5}{4}x+1, \qquad y=-\frac{4}{5}x-2, \qquad y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{4}$$

158. Ripetere l'esercizio 156, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\sqrt{3}x-1, \qquad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+3, \qquad y=\sqrt{3}x+4, \qquad y=-\sqrt{3}x-5$$

159. Basarsi sulla trigonometria per calcolare l'angolo che ciascuna retta dell'esercizio precedente forma con l'asse delle x.

(Per una retta d'equazione

$$y=mx+q,$$

si ha (fig. 53):

$$m=\operatorname{tg}\alpha,$$

dove m è la ***pendenza della retta****.*
Così, nel 1° caso si ha $m=-\sqrt{3}$, cioè $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$, da cui $\alpha=120°$, ...).

160. Fra le equazioni assegnate negli esercizi 157 e 158, scegliere quelle che rappresentano coppie di rette parallele o perpendicolari.
(Tenere presente che due rette d'equazione

$$y=mx+q \qquad e \qquad y=m'x+q'$$

– sono parallele, se risulta $m=m'$,
– sono perpendicolari, se risulta $mm'=-1$).

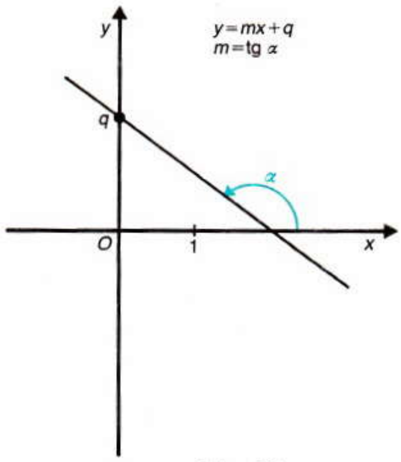


Fig. 53

Gli esercizi dal 161 al 177 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando le curve d'equazione $y=ax^n$.

161. Trasformare la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

con le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+1 \end{cases}$$

rappresentare le tre curve trasformate. Che cosa si osserva?
(Vedi le indicazioni esposte nell'esercizio 153. Nel 1° caso si ottiene la parabola che presenta le seguenti caratteristiche:
– ha l'equazione $y'=x'^2+1$,
– ha il vertice in $V'(0, 1)$,
– ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y).

162. Ripetere l'esercizio 161, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-3 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-3 \end{cases}$$

163. Operare le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$x'=x+2$$
$$y'=y-4$$

sulle parabole che hanno le seguenti equazioni:

$$y=\frac{1}{2}x^2, \qquad y=-\frac{1}{2}x^2$$

164. Operare le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$x'=x-\frac{1}{2}$$
$$y'=y+\frac{3}{2}$$

sulle parabole che hanno le seguenti equazioni:

$$y=4x^2, \qquad y=-4x^2$$

165. Dopo aver svolto gli esercizi 161-164, descrivere le curve che si ottengono a partire dalla parabola d'equazione

$$y=ax^2$$

con traslazioni del tipo

$$x'=x+p$$
$$y'=y+q.$$

(Le curve presentano, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– mantengono la stessa forma della parabola assegnata,
– hanno il vertice in $V'(p, q)$,
– hanno l'asse di simmetria di equazione $x'=p$,
– hanno equazione $y'=a(x'-p)^2+q$.
L'equazione si può anche scrivere nella forma

$$y'=ax'^2-2apx+ap^2+q, \qquad \textit{ossia} \qquad \boldsymbol{y'=ax'^2+bx'+c},$$

con $b=-2ap$, $c=ap^2+q$).

166. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=3x^2-6x+5, \qquad y=3x^2-6x, \qquad y=3x^2+2.$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}.$$

Queste funzioni sono state scritte nell'esercizio 165 nella forma

$$y'=ax'^2+bx'+c$$

per descrivere meglio l'effetto delle traslazioni; ora invece le coordinate sono indicate con x ed y per semplicità di scrittura.
Per tracciare rapidamente il grafico, si può procedere così (fig. 54):
– si calcola l'ascissa p del vertice, tenendo presente che risulta

$$b=-2ap \quad \text{e quindi} \quad p=-\frac{b}{2a};$$

– si calcola l'ordinata q del vertice V, tenendo presente che V è il punto della curva con ascissa $x=p$; si trova dunque:

$$q=ap^2+bp+c;$$

– si determina qualche altro punto della parabola, assegnando alla x valori opportuni e ricavando i corrispondenti valori di y.
Nel 1° caso si ottiene il grafico di fig. 55).

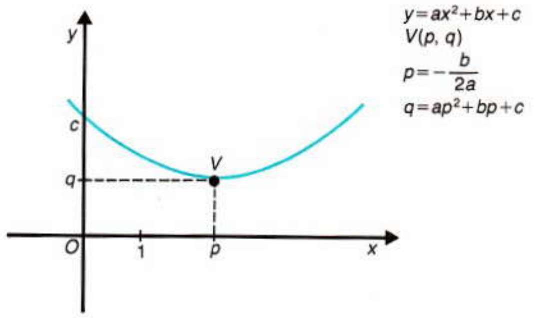


Fig. 54

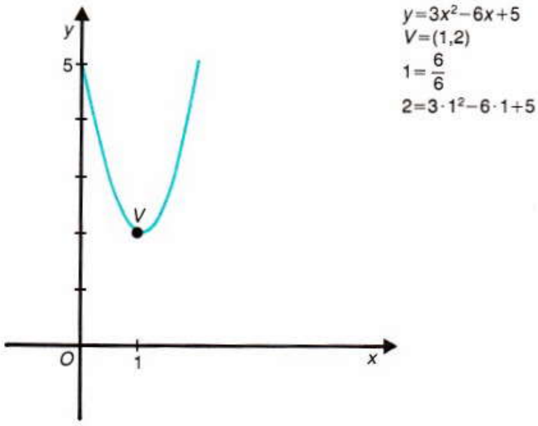


Fig. 55

167. Ripetere l'esercizio 166, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{4}x^2-2, \qquad y=-\frac{1}{4}x^2+x, \qquad y=-\frac{1}{4}x^2+x-2$$

168. Ripetere l'esercizio 166, a partire dalle seguenti funzioni

$$y=\sqrt{2}x^2-1, \qquad y=-\sqrt{2}x^2+2x, \qquad y=2x^2-2\sqrt{2}x+1$$

169. Trasformare la curva d'equazione

$$y=x^3$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-3 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y \end{cases}$$

Rappresentare le curve ottenute. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 153. Nel 1° caso si ottiene la curva di fig. 56, che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– ha l'equazione $y'=x'^3-3$,
– incontra l'asse delle y' in $A'(0, -3)$.

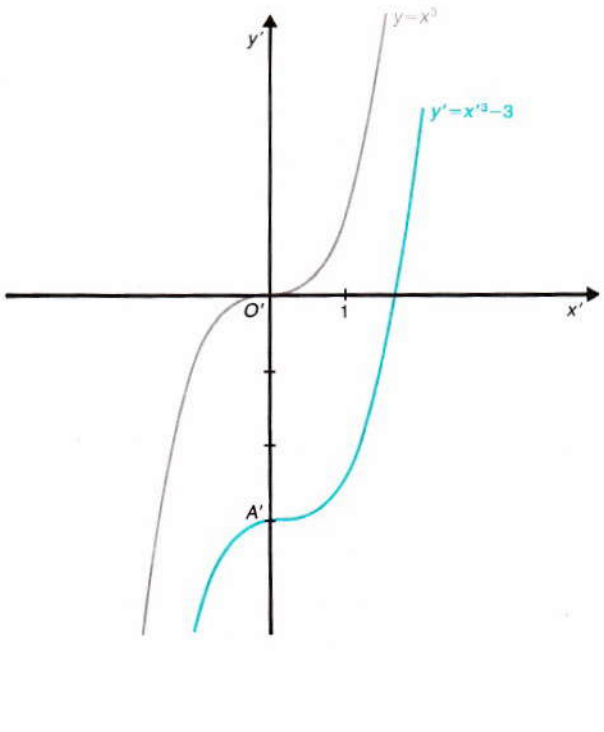


Fig. 56

Nel 2° caso si ottiene la curva di fig. 57, che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– ha l'equazione $y'=(x'+3)^3$,
– incontra l'asse delle x' in $B'(-3, 0)$).

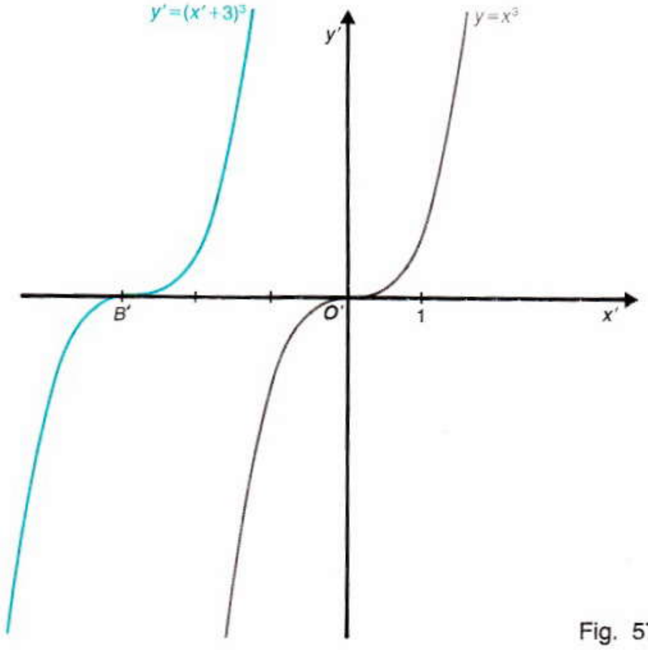


Fig. 57

170. Ripetere l'esercizio 169, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases}$$

a partire dalla curva d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x^3$$

171. Ripetere l'esercizio 169, a partire dalle curve d'equazione

$$y=x^4, \qquad y=x^5$$

172. Ripetere l'esercizio 169, a partire dalle curve d'equazione

$$y=\frac{1}{4}x^4, \qquad y=\frac{1}{4}x^5$$

173. Dopo aver svolto gli esercizi 169-172 descrivere le curve che si ottengono a partire dalle curve d'equazione

$$y=ax^n,$$

operando con le seguenti traslazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+q, \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y \end{cases}$$

Distinguere i vasi casi possibili.
(Si ottengono con le traslazioni (I) curve d'equazione

$$y'=ax'^n+q,$$

che incontrano l'asse delle y' in $A'(0, q)$.
Con le traslazioni (II) si arriva invece a curve d'equazione

$$y'=a(x'-p)^n,$$

che incontrano l'asse delle x' in $B'(p, 0)$, ...)

174. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{4}x^3+2, \qquad y=\frac{1}{4}x^4+2, \qquad y=\frac{1}{4}x^5+2, \qquad y=\frac{1}{4}x^6+2$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$y=ax^n+q.$$

Queste funzioni sono scritte nell'esercizio 173 nella forma

$$y'=ax'^n+q$$

per descrivere meglio l'effetto delle trasformazioni; ora invece le coordinate sono indicate con x ed y per semplicità di scrittura).

175. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{4}(x+2)^3, \quad y=\frac{1}{4}(x+2)^4, \quad y=\frac{1}{4}(x+2)^5, \quad y=\frac{1}{4}(x+2)^6$$

(Tenere presente che si tratta di funzioni del tipo

$$y=a(x-p)^n,$$

Queste funzioni sono scritte nell'esercizio 173 nella forma

$$y'=a(x'-p)^n$$

per descrivere meglio l'effetto delle trasformazioni; ora invece le coordinate sono indicate con x ed y per semplicità di scrittura).

176. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-2x+1, \quad y=-2x^2+1, \quad y=-2x^3+1, \quad y=-2x^4+1$$

177. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-2(x-1)^2, \quad y=-2(x+1)^3, \quad y=-2(x+1)^4, \quad y=-2(x+1)^5$$

Gli esercizi dal 178 al 185 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando la curva d'equazione $y=\text{sen } x$.

178. Trasformare la curva d'equazione

$$y=\text{sen } x$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-1; \end{cases}$$

rappresentare le curve ottenute. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 153.
Nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 58 che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=\text{sen } x'+1$,
– è periodica con periodo 2π,
– ha come immagine l'intervallo $[0, 2]$, ...)

179. Ripetere l'esercizio 178, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+\pi \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-\pi \\ y'=y. \end{cases}$$

(Nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 59 che presenta, fra l'altro, le seguenti caratteristiche:
– ha equazione $y'=\text{sen } (x'-\pi)$,
– è periodica con periodo 2π,
– ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$, ...)

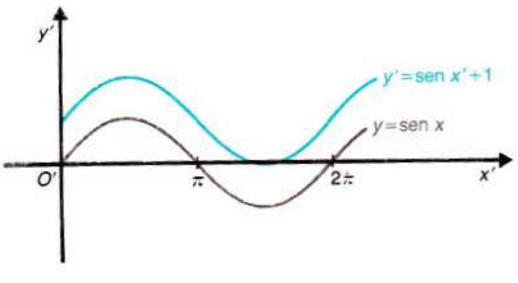


Fig. 58

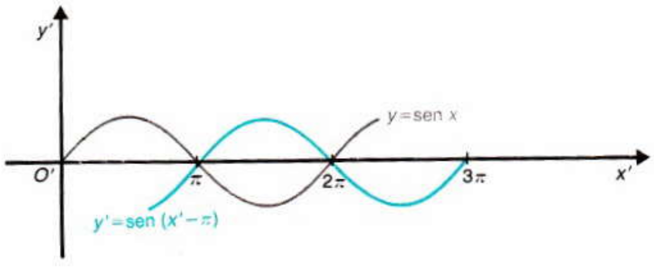


Fig. 59

180. Ripetere l'esercizio 179, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x-\dfrac{\pi}{3} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-\dfrac{\pi}{3} \\ y'=y+2 \end{cases}$$

181. Dopo aver svolto gli esercizi 178-180, descrivere le curve che si ottengono a partire dalla sinusoide d'equazione $y=\text{sen}\ x$ con trasformazioni del tipo

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+q \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q. \end{cases}$$

(Si ottengono con le traslazioni (I) curve d'equazione

$$y'=sen\ x'+q,$$

con le traslazioni (II) curve d'equazione

$$y'=sen\ (x'-p)$$

con le traslazioni (III) curve d'equazione

$$y'=sen\ (x'-p)+q).$$

182. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen}\ x+2, \qquad y=\text{sen}\ x-3$$

indicandone immagine e periodo.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=sen\ x+q},$$

con q numero reale; perciò è opportuno tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 181).

183. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \qquad y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

indicandone immagine e periodo.
(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\boldsymbol{y=sen\ (x-p)}$$

dove p indica un numero reale; tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 181).

184. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right), \qquad y=\text{sen}\ x-3, \qquad y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3$$

indicandone immagine e periodo.
(Tenere presenti i risultati dell'esercizio 181).

185. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$y=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \qquad y=\text{sen}\ x+\frac{1}{2}, \qquad y=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$$

indicandone immagine e periodo.
(Tenere presenti i risultati dell'esercizio 181).

Gli esercizi dal 186 al 191 conducono a studiare le curve che si ottengono trasformando la curva d'equazione $y=e^x$.

186. Trasformare la curva d'equazione

$$y=e^x$$

con le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-1 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases}$$

rappresentare le curve ottenute. Che cosa si osserva?
(Vedi indicazioni esposte nell'esercizio 153.
Nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 60 che ha equazione

$$y'=e^{x'}-1;$$

Nel 2° caso si ottiene invece la curva in colore di fig. 61, che ha equazione

$$y' = e^{x'+1}).$$

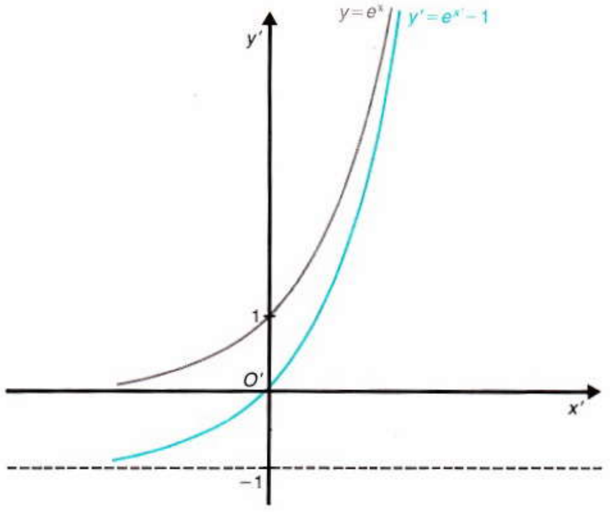


Fig. 60

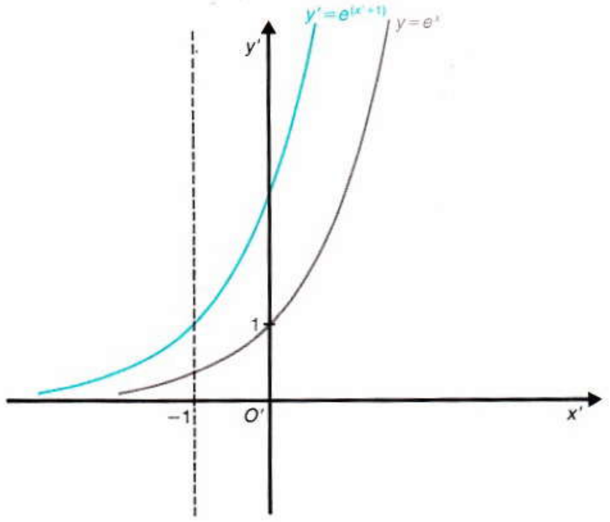


Fig. 61

187. Ripetere l'esercizio 186, operando le seguenti trasformazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

188. Dopo aver svolto gli esercizi 186 e 187, descrivere le curve che si ottengono a partire dall'esponenziale d'equazione $y = e^x$ operando le seguenti traslazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

Distinguere i vari casi possibili.
(Si ottengono con le traslazioni (I) curve d'equazione

$$y' = e^x + q,$$

che incontrano l'asse delle y' in A'(0, q).
Con le traslazioni (II) si arriva a curve d'equazione

$$y' = e^{x'-p}.$$

Con le traslazioni (III) si arriva a curve d'equazione

$$y' = e^{x'-p} + q).$$

189. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = e^x + 2, \qquad y = e^x - 3$$

(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\mathbf{y = e^x + q}$$

dove q indica un qualunque numero reale; perciò è opportuno tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 188).

190. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = e^{x-2}, \qquad y = e^{x+3}$$

(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$\mathbf{y = e^{x+p}}$$

dove p indica un qualunque numero reale; perciò è opportuno tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 188).

191. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=e^{x-2}+3, \qquad y=e^{x+3}-2$$

(Si tratta di funzioni scritte nella forma

$$y=e^{x+p}+q$$

dove p indica un qualunque numero reale; perciò è opportuno tenere presenti i risultati suggeriti nell'esercizio 188).

Composizione di trasformazioni

Gli esercizi dal 192 al 202 conducono a tracciare i grafici delle curve che si ottengono a partire dalle funzioni elementari operando più trasformazioni.

192. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=x, \qquad y=\frac{5}{3}x, \qquad y=-\frac{5}{3}x, \qquad y=-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$$

(Si può osservare che, a partire dalla 1ª funzione, si ottiene:
– la seconda con una dilatazione nella direzione dell'asse delle y,
– la terza, operando successivamente una simmetria rispetto all'asse delle x, ...)

193. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=x^2, \qquad y=\frac{1}{5}x^2, \qquad y=-\frac{1}{5}x^2, \qquad y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{5}$$

194. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-x^3, \qquad y=-2x^3, \qquad y=-2x^3-2, \qquad y=-2(x-1)^3, \qquad y=-2(x-1)^3-2$$

Scrivere le ultime due funzioni in altra forma, valendosi della regola relativa alla potenza del binomio.

195. Ripetere l'esercizio 194 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-x^4, \qquad y=-2x^4, \qquad y=-2x^4+2, \qquad y=-2(x+1)^4, \qquad y=-2(x+1)^4+2$$

196. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=-\operatorname{sen} x, \qquad y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x, \qquad y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(3\cdot x), \qquad y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(3\cdot x)+2$$

197. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen} x, \qquad y=2\operatorname{sen} x, \qquad y=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right), \qquad y=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$$

Scrivere le ultime due funzioni in altra forma, valendosi delle formule di addizione.

198. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen} x, \qquad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x, \qquad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x), \qquad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+1$$

Scrivere le ultime due funzioni in altra forma, valendosi delle formule di duplicazione.

199. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x), \qquad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \qquad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$$

Scrivere le funzioni in altra forma, valendosi delle formule di duplicazione e di sottrazione.

200. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2e^x, \qquad y=-2e^x, \qquad y=2e^{-x}, \qquad y=-2e^{-x}$$

201. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=e^{2x}, \quad y=-e^{2x}, \quad y=-e^{-2x}, \quad y=-e^{-2\cdot x}$$

202. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=3e^{2x}, \quad y=3e^{2(x+1)}, \quad y=3e^{2x}-4, \quad y=3e^{2(x+1)}-4$$

6. L'algebra delle funzioni

Somma e differenza di funzioni

Tracciare i grafici delle funzioni proposte negli esercizi dal 203 al 218, sulla base delle nozioni esposte nel testo.

203. $y=x^3-3x, \quad y=x^3-3x+2, \quad y=x^3-3x-2$

In quanti modi si può eseguire l'addizione grafica?
(Tenere presenti le seguenti possibilità:
- *tracciare il 1° grafico come somma grafica e gli altri due con traslazioni nella direzione dell'asse delle y,*
- *tracciare il 1° grafico come somma di $y_1=x^3$ e $y_2=-3x$,*
  il 2° come somma di $y_1=x^3$ e $y_2=-3x+2$,
  il 3° come somma di $y_1=x^3$ e $y_2=-3x-2$,
- *tracciare il 1° grafico come somma di $y_1=x^3$ e $y_2=-3x$,*
  il 2° come somma di $y_1=x^3+2$ e $y_2=-3x$,
  il 3° come somma di $y_1=x^3-2$ e $y_2=-3x$).

204. $y=x^3+x^2, \quad y=x^3-x^2, \quad y=x^2-x^3$

Indicare il metodo più rapido per tracciare il terzo grafico, dopo aver tracciato il secondo.

205. $y=x^4+x^2, \quad y=x^4-x^2, \quad y=x^2-x^4$

Indicare il metodo più rapido per tracciare il terzo grafico.

206. $y=3x^4+6x^3, \quad y=3x^4-6x^3, \quad y=6x^3-3x^4$

Indicare il metodo più rapido per tracciare il terzo grafico.

207. $y=x^3, \quad y=-3x^2+3x, \quad y=x^3-3x^2+3x$

208. $y=2x^3, \quad y=-3x^2+1, \quad y=2x^3-3x^2+1$

209. $y=x^4, \quad y=-x^2+1, \quad y=x^4-2x^2+1$

210. $y=x^4, \quad y=-5x^2+4, \quad y=x^4-5x^2+4$

211. $y=x+\cos x, \quad y=x-\cos x, \quad y=\cos x-x$

212. $y=x+2 \operatorname{sen} x, \quad y=2 \operatorname{sen} x-x, \quad y=x-2 \operatorname{sen} x$

213. $y=\cos x-\operatorname{sen} x, \quad y=\operatorname{sen} x-\cos x, \quad y=\operatorname{sen} x-\cos x+1$

214. $y=\operatorname{sen} x+\sqrt{3} \cos x, \quad y=\sqrt{3} \operatorname{sen} x+\cos x, \quad y=\sqrt{3} \operatorname{sen} x+\cos x-1$

215. $y=2 \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x, \quad y=2 \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x, \quad y=\operatorname{sen} 2x-2 \operatorname{sen} x$

216. $y=3 \cos 2x+4 \cos x, \quad y=3 \cos 2x-4 \cos x, \quad y=4 \cos x-3 \cos 2x$

217. $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \quad y=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

218. $y=2 \operatorname{sen} x+\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \quad y=\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

219. $y=e^x+e^{-x}$, $\quad y=e^x-e^{-x}$.

(Nel 1° caso, si ottiene una curva che prende il nome di ***catenaria****. Il nome è legato alla seguente proprietà: un filo omogeneo pesante, per esempio una catena, fissato in due dei suoi punti si dispone lungo una curva come quella di equazione $y=e^x+e^{-x}$).*

220. $y=e^x+x$, $\quad y=e^x-x$.

Prodotto e quoziente di funzioni

221. Scrivere almeno 6 funzioni ottenute moltiplicando due funzioni elementari.
(Tenere presenti le seguenti funzioni elementari:

$y=k$, $\quad y=x^n$ *(con n intero positivo)*, $\quad y=e^x$, $\quad y=sen\ x$).

222. Indicare le funzioni elementari che sono state utilizzate per generare ciascuna delle seguenti funzioni:

$y=x^4 \operatorname{sen} x$, $\quad y=x^3e^x$, $\quad y=e^x \operatorname{sen} x$, $\quad y=\operatorname{sen}^2 x$

223. Tracciare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni:

$y=e^x \operatorname{sen} x$, $\quad y=x \operatorname{sen} x$, $\quad y=xe^x$

(Si può avere un'idea dell'andamento della funzione prodotto di due funzioni note, tenendo presenti alcune regole base, fra le quali:

$a\cdot 0=0$,	*qualunque sia il numero a,*
$a\cdot 1=a$,	*qualunque sia il numero a,*
$a(-1)=-a$	*qualunque sia il numero a,*
$ab>0$	*solo se a e b hanno lo stesso segno.*

Basandosi su queste regole, è stato tracciato il grafico della prima funzione, in colore in fig. 62).

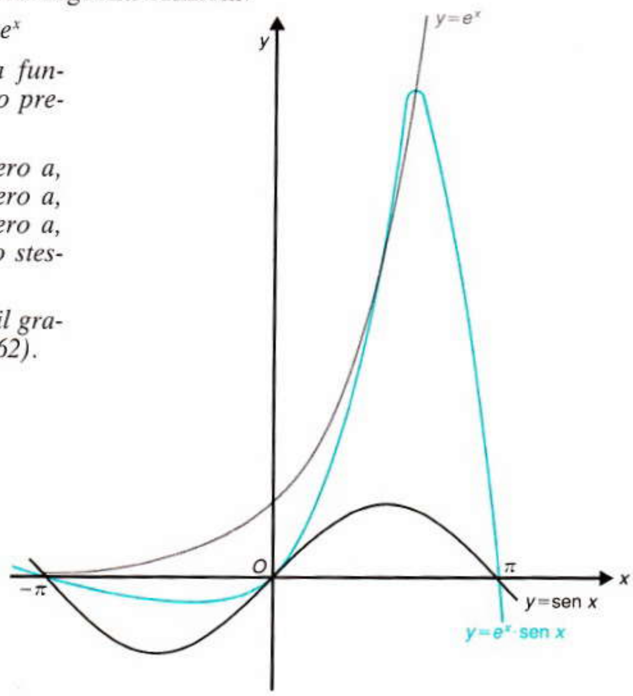


Fig. 62

224. Ripetere l'esercizio 223, a partire dalle seguenti funzioni:

$y=e^{-x} \operatorname{sen} x$, $\quad y=\operatorname{sen}^2 x$, $\quad y=\cos^2 x$, $\quad y=\operatorname{sen}^3 x$.

(Tenere presente che risulta

$sen^2\ x=sen\ x\cdot sen\ x \quad e \quad sen^3\ x=sen^2\ x\cdot sen\ x$).

225. Scrivere almeno 6 funzioni ottenute calcolando il reciproco di funzioni elementari.
(Tenere presenti le seguenti funzioni elementari:

$y=k$, $\quad y=x^n$ *(con n intero positivo)*, $\quad y=e^x$, $\quad y=sen\ x$).

226. Indicare le funzioni elementari che sono state utilizzate per generare ciascuna delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{\operatorname{sen} x},\quad y=\frac{1}{x^3},\quad y=\frac{1}{x^4}$$

227. Tracciare approssimativamente il grafico delle funzioni indicate nell'esercizio precedente.
(Si può tracciare un grafico approssimativo del reciproco di una funzione nota, tenendo presenti alcune regole base, fra le quali:
– non si può eseguire l'operazione 1:0, perciò 0 non ha reciproco.
Questa imposiibilità è dovuta alle seguenti regole dell'aritmetica

se risulta $n:d=q$, *allora si ha* $n=qd$,

risulta $a\cdot 0=0$ *per qualunque numero reale a.*

È perciò chiaro che, se esistesse il risultato q della divisione 1:0, si avrebbe $1:0=q$, *da cui* $q\cdot 0=1$!
– se n è un numero molto vicino a 0 (per esempio −0,5, −0,1, oppure 0,5, 0,1, ...), il suo reciproco $\frac{1}{n}$ *è un numero grande in valore assoluto; per esempio*

$$\frac{1}{0{,}5}=2,\quad \frac{1}{-0{,}5}=-2,\quad \frac{1}{0{,}1}=10,\quad \frac{1}{-0{,}1}=-10$$

– se n è un numero grande in valore assoluto (−2, −10, oppure 2, 10, ...), il suo reciproco $\frac{1}{n}$ *è un numero vicino a 0:*

$$\frac{1}{2}=0{,}5,\quad \frac{1}{-2}=-0{,}5,\quad \frac{1}{10}=0{,}1,\quad \frac{1}{-10}=-0{,}1$$

Basandosi su queste considerazioni è stato tracciato il grafico della prima funzione, riportato in fig. 63).

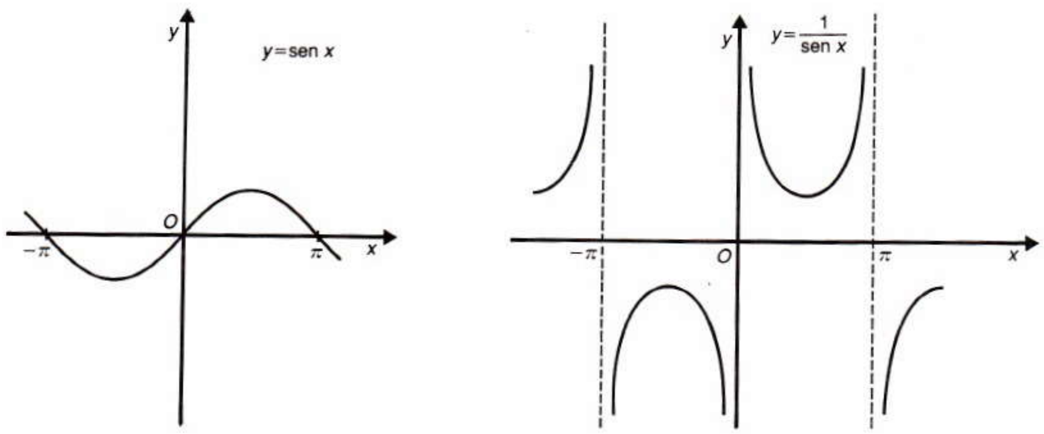


Fig. 63

228. Tracciare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni

$$y=\frac{1}{e^x},\quad y=\frac{1}{\cos x},\quad y=\frac{1}{x^2+1},\quad y=\frac{1}{x^2-1}$$

Qual è il modo più semplice per tracciare il grafico della prima funzione?
(Tenere presente che, per le proprietà delle potenze, risulta

$\frac{1}{e^x}=e^{-x}$).

229. Scrivere almeno 6 funzioni quoziente di due funzioni elementari.
(Tenere presenti le seguenti funzioni elementari:

$y=k$, $\quad y=x^n$ *(con n intero positivo)*, $\quad y=e^x$, $\quad y=sen\ x$).

230. Indicare le funzioni elementari che sono state utilizzate per generare ciascuna delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{\text{sen } x}{x},\quad y=\frac{x}{\text{sen } x},\quad y=\frac{e^x}{x},\quad y=\frac{x}{e^x}$$

231. Tracciare approssimativamente il grafico delle funzioni indicate nell'esercizio precedente.
(È opportuno tenere presente prima di tutto che risulta:

$$\frac{n}{d}=n\cdot\frac{1}{d};$$

cioè una divisione si può sempre considerare come una moltiplicazione del numeratore n per il reciproco del denominatore d.
Perciò, per avere un'idea del grafico del quoziente di due funzioni, occorre valersi simultaneamente delle proprietà richiamate negli esercizi 223 e 227. Si ha in particolare che:
- *non si può eseguire la divisione* $n:0$,
- *risulta* $0:d=0$, *per qualunque numero* $d\neq 0$,
- *risulta* $n:1=n$, *per qualunque numero* n,
- *risulta* $n:(-1)=-n$, *per qualunque numero* n,
- *risulta* $n:d>0$, *solo se n e d hanno lo stesso segno.*

Basandosi su queste regole, è stato tracciato il grafico della prima funzione, riportato in fig. 64).

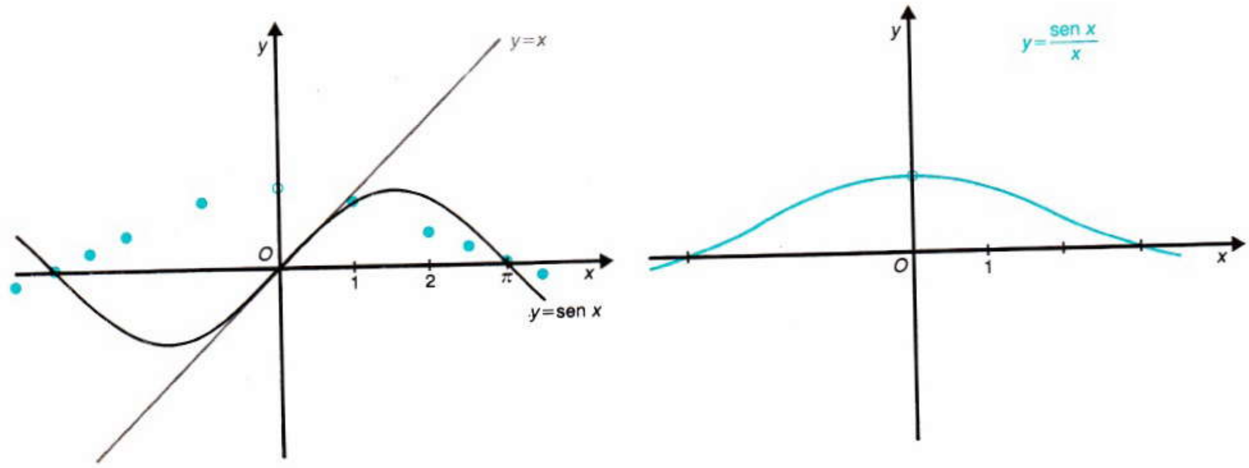


Fig. 64. La funzione non esiste per $x=0$.

232. Ripetere l'esercizio 231, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{\cos x}{x},\qquad y=\frac{e^x}{x^2},\qquad y=\frac{x}{x^2+1},\qquad y=\frac{x^2}{x^2-1}$$

L'inversa di una funzione

Sulla base delle nozioni esposte nel testo determinare le inverse delle funzioni proposte negli esercizi dal 233 al 240; per ciascuna funzione tracciare affiancati il grafico della funzione data e della sua inversa.

233. $y=x^2$, $\quad y=x^4$, $\quad y=x^6$

234. $y=x^3$, $\quad y=x^5$, $\quad y=x^7$

235. $y=\sqrt[3]{x}$, $\quad y=\sqrt[5]{x}$

236. $y=\sqrt{x}$, $\quad y=\sqrt[4]{x}$

Le funzioni inverse ottenute coincidono con le funzioni $y=x^2$ e $y=x^4$?
(La funzione $y=x^2$ ha come campo di esistenza l'insieme di tutti i reali positivi e negativi, mentre l'inversa di $y=\sqrt{x}$ risulta definita nell'insieme dei reali positivi, ...)

237. $y=\text{sen } x$, $\quad y=\cos x$, $\quad y=\text{tg } x$

(L'inversa della funzione $y=\cos x$ prende il nome di $y=\arccos x$ ed è rappresentata in colore in fig. 65; l'inversa della funzione $y=\text{tg } x$ prende il nome di $y=\text{arctg } x$ ed è rappresentata in colore in fig. 66).

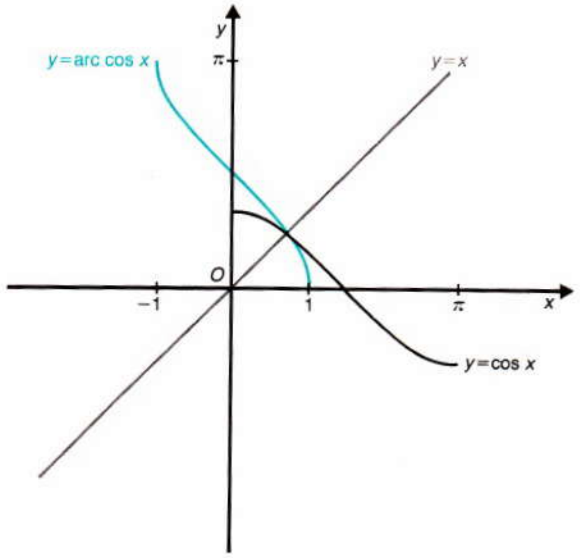


Fig. 65

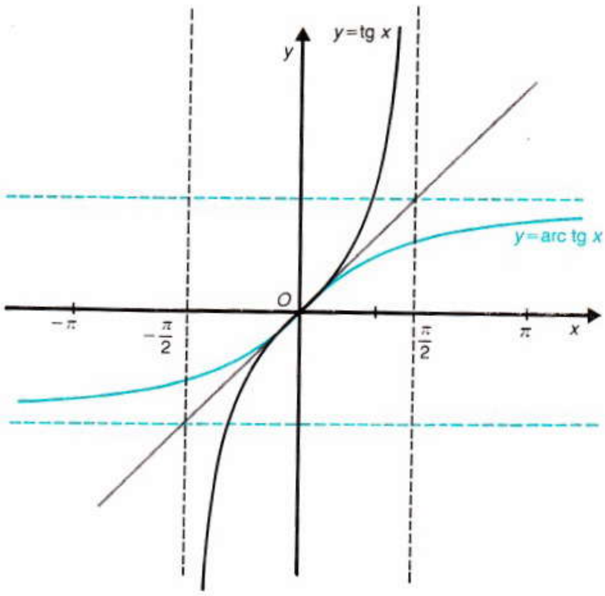


Fig. 66

238. $y=\text{arcsen } x$, $\quad y=\arccos x$, $\quad y=\text{arctg } x$.

Le funzioni inverse ottenute coincidono con le funzioni $y=\text{sen } x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg } x$?
(La funzione $y=\text{sen } x$ ha come campo di esistenza l'insieme dei reali; l'inversa di $y=\text{arcsen } x$ risulta definita nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ...).

239. $y=2^x$, $\quad y=3^x$, $\quad y=e^x$

240. $y=\log_2 x$, $\quad y=\log_3 x$, $\quad y=\ln x$

241. Dimostrare che, se x varia nell'intervallo $[-1, 1]$, risulta

$$\arccos x+\text{arcsen } x=\frac{\pi}{2}$$

(Si può procedere per esempio così: scrivere

$$\alpha=\arccos x \quad e \quad \beta=\text{arcsen } x$$

e osservare che i due archi α e β sono tali che

$$\cos\alpha=\text{sen }\beta=x,$$

perciò risulta

$$\alpha+\beta=90°, \quad \text{ossia} \quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \ldots).$$

242. Basandosi sui risultati dell'esercizio precedente, spiegare come si potrebbe ricavare il grafico di $y=\arccos x$, a partire da quello di $y=\text{arcsen } x$.
(Si ha che la funzione $y=\arccos x$ si può anche scrivere nella forma

$$y=-\text{arcsen } x+\frac{\pi}{2} \ldots).$$

Funzioni composte

243. Scrivere almeno 6 funzioni che si ottengono componendo le funzioni elementari.
(Tenere presenti le seguenti funzioni elementari:

$$y=k, \quad y=x^n \text{ (con } n \text{ intero positivo)}, \quad y=e^x, \quad y=\text{sen } x).$$

244. Indicare le funzioni elementari che sono state utilizzate per generare ciascuna delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x^2, \quad y=\text{sen}^2 x, \quad y=\cos x^2, \quad y=\cos^2 x$$

(Fissare l'attenzione sulla differenza fra la prima e la seconda funzione: la 1ª è ottenuta componendo le seguenti funzioni

$$y=\text{sen } z \quad e \quad z=x^2,$$

mentre $y=\text{sen}^2 x$, ossia $y=(\text{sen } x)^2$, è ottenuta componendo

$$y=z^2 \quad e \quad z=\text{sen } x.$$

Analoghe considerazioni valgono per la terza e quarta funzione ...).

245. Ripetere l'esercizio 244, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=(x-1)^4, \quad y=x^4-1, \quad y=\text{sen } (x+\pi), \quad y=\text{sen } x+\pi$$

247. Ripetere l'esercizio 244, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } (3x), \quad y=3 \text{ sen } x, \quad y=e^{3\cdot x}, \quad y=3e^x$$

248. Ripetere l'esercizio 244, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{\text{sen } x}, \quad y=\text{sen } \sqrt{x}, \quad y=\sqrt{\cos x}, \quad y=\cos \sqrt{x}$$

249. Ripetere l'esercizio 244, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x+1}, \quad y=\sqrt[3]{x}+1, \quad y=e^{\sqrt{x}}, \quad y=\sqrt{e^x}$$

250. Ripetere l'esercizio 244, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln (x+1), \quad y=\ln x+1, \quad y=\ln (2x), \quad y=2 \ln x$$

251. Tracciare approssimativamente il grafico delle funzioni seguenti:

$$y=e^{-x^2}, \quad y=e^{\sqrt{x}}$$

(Per tracciare il grafico di funzioni composte si può utilizzare il procedimento illustrato in fig. 67 a proposito della prima funzione:
– sullo stesso piano cartesiano si sono rappresentate le funzioni

$$y=e^z, \quad z=-x^2, \quad y=x;$$

– fissata una qualunque ascissa a, si è determinato sulla curva $z=-x^2$ il punto $A(a, -a^2)$;
– da A si è tracciata la parallela all'asse delle x, per determinare sulla retta $y=x$ il punto $B(-a^2, -a^2)$;
– da B si è tracciata la parallela all'asse delle y, per determinare sulla curva $y=e^z$ il punto $C[-a^2, e^{-a^2}]$
– da C si è tracciata la parallela all'asse delle x, per trovare infine il punto $P[a, e^{-a^2}]$.
Ripetendo questa costruzione per molti valori dell'ascissa a, si arriva a tracciare il grafico di fig. 68, che rappresenta la funzione

$$y=e^{-x^2}$$

*La curva ottenuta è la famosa **curva a campana**, studiata particolarmente dal matematico tedesco Gauss (1777-1855). Un procedimento analogo si può seguire per tracciare il grafico dell'altra funzione).*

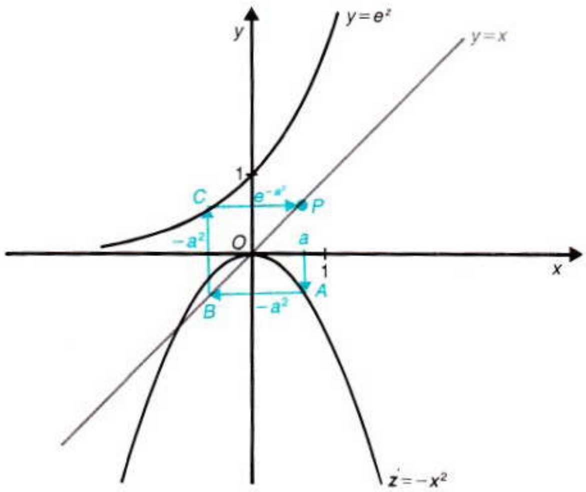


Fig. 67

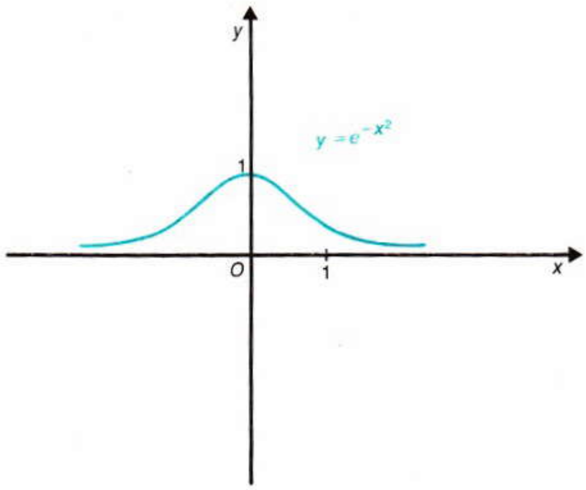


Fig. 68

252. Ripetere l'esercizio 251, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x^4+2}, \qquad y=\ln(x^4+2)$$

253. Ripetere l'esercizio 251, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen}(x^2+3), \qquad y=\sqrt[3]{x^2+3}$$

254. Ripetere l'esercizio 251, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \qquad y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Qual'è il campo di esistenza delle due funzioni?

255. Nel testo si è detto che componendo le funzioni

$$y=\sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad z=x^2$$

si ottiene la funzione $y=x$.
Descrivere la funzione che si ottiene componendo le funzioni

$$y=z^2 \qquad \text{e} \qquad z=\sqrt{x}.$$

(Si ottiene la funzione $y=x$, definita però nell'insieme dei reali positivi, perché la funzione $z=\sqrt{x}$ ha come campo di esistenza ⋯)

256. Descrivere la funzione che si ottiene componendo le due funzioni:

$$y=z^3 \qquad \text{e} \qquad z=\sqrt[3]{x}$$

(Tenere presente che la radice cubica è definita per qualunque x reale).

257. Descrivere la funzione che si ottiene componendo le due funzioni:

$$y=e^z \qquad \text{e} \qquad z=\ln x.$$

(Si ottiene la funzione $y=x$, definita però ...)

258. Descrivere la funzione che si ottiene componendo le due funzioni:

$$y=\operatorname{arcsen} z \qquad \text{e} \qquad z=\operatorname{sen} x.$$

259. Descrivere la funzione che si ottiene componendo le due funzioni;

$$y=\operatorname{sen} z \qquad \text{e} \qquad z=\operatorname{arcsen} x.$$

(Si ottiene la funzione $y=x$, definita però ...)

260. Descrivere la funzione che si ottiene componendo le due funzioni:

$$y=\operatorname{arctg} z \qquad \text{e} \qquad z=\operatorname{tg} x,$$

Componendo le due funzioni

$$y=\operatorname{tg} z \qquad \text{e} \qquad z=\operatorname{arctg} x$$

si ottiene la stessa funzione? Motivare la risposta.

7. Alcune proprietà delle funzioni

Funzioni continue e discontinue

261. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=x^2 \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x^2}, \qquad y=x^3 \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{x^3}$$

Individuare le funzioni discontinue, indicando i punti di discontinuità.

262. Ripetere l'esercizio 261 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{\text{sen } x}, \qquad y=\cos x \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{\cos x}$$

263. Ripetere l'esercizio 261 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x, \quad y=x, \quad y=\frac{\text{sen } x}{x}, \quad y=\frac{x}{\text{sen } x}$$

264. Ripetere l'esercizio 261 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x, \quad y=\frac{1}{x}, \quad y=x+\frac{1}{x}, \quad y=x\cdot\frac{1}{x}$$

L'ultima funzione coincide con la funzione $y=1$?
(Tenere presente che l'ultima funzione non è definita per $x=0$ e dunque coincide con la funzione $y=1$ per tutti i valori di x, escluso 0; il corrispondente grafico è rappresentato in fig. 69).

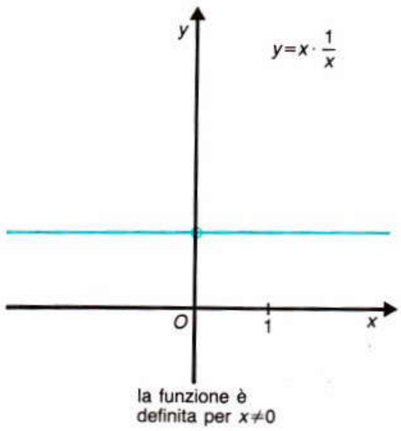


Fig. 69

265. Ripetere l'esercizio 261 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^3, \quad y=\frac{1}{x^2}, \quad y=\frac{1}{x^2}-x^3, \quad y=x^3\cdot\frac{1}{x^2}$$

L'ultima funzione coincide con la funzione $y=x$?
Accompagnare la risposta con il corrispondente grafico.

266. Esaminare le seguenti funzioni, di cui A è il dominio e B il codominio:

I) $y=2x$;
II) $y=2x$ dove A è l'insieme degli interi, e B è l'insieme dei reali.

Tracciare i corrispondenti grafici e rispondere ai seguenti quesiti:
- sul secondo grafico si può trovare un punto con l'ordinata che vale 1?
- il secondo grafico è formato da una linea continua?

267. Esaminare le seguenti funzioni, di cui A è il dominio e B il codominio:

I) $y=\frac{1}{x}$, dove A è l'insieme dei reali positivi e B è l'insieme dei reali;

II) $y=\frac{1}{x}$, dove A è l'insieme degli interi positivi e B l'insieme dei reali.

Tracciare i corrispondenti grafici e rispondere ai seguenti quesiti:
- qual'è l'immagine di ciascuna funzione?
- sul secondo grafico si trovano punti con l'ordinata maggiore di 1?
- uno dei due grafici è formato da una linea continua?

268. Esaminare le seguenti funzioni, di cui A è il dominio e B il codominio:

I) $y=2^x$;
II) $y=2^x$ dove A è l'insieme degli interi e B l'insieme dei reali.

Tracciare i corrispondenti grafici e rispondere ai seguenti quesiti:
- qual'è l'immagine di ciascuna funzione?
- il secondo grafico è formato da una linea continua?

Funzioni crescenti e decrescenti

269. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=x^3+2, \quad y=-x^3+2, \quad y=x^4+2, \quad y=-x^4+2$$

Tracciare i corrispondenti grafici e rispondere ai seguenti quesiti:
- individuare su ciascuna curva gli archi crescenti e gli archi decrescenti;
- individuare eventuali punti di massimo e minimo.

270. Ripetere l'esercizio 269 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^2, \quad y=-x^2, \quad y=\frac{1}{x^2}, \quad y=\sqrt{x}$$

271. Ripetere l'esercizio 269 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen} x, \quad y=-\operatorname{sen} x, \quad y=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad y=\operatorname{arcsen} x$$

(Tenere presente che, per le funzioni periodiche, basta studiare l'andamento in un periodo).

272. Ripetere l'esercizio 269 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=e^x, \quad y=-e^x, \quad y=e^{-x}, \quad y=\ln x$$

273. Sfogliando un libro di economia politica, si incontra spesso l'esigenza di visualizzare un discorso con un grafico. Ecco un primo esempio:
Nell'economia politica tradizionale si trova una legge, chiamata **legge della domanda e dell'offerta**, che si può esprimere così:
- la quantità di una merce che si riesce a vendere (cioè la domanda d) diminuisce all'aumentare del prezzo p della merce;
- la quantità di merce che un'industria è disposta ad immettere sul mercato (cioè l'offerta s) aumenta all'aumentare del prezzo p.

Si tratta di una legge empirica, legata all'osservazione dei fenomeni economici che si sono rilevati in paesi diversi e in epoche diverse. In questo caso non c'è una formula per ricavare quanto vale la domanda d, corrispondente ad un certo prezzo p; tuttavia molto spesso un grafico visualizza il legame fra le due variabili d e p.
Fra le curve di fig. 70 scegliere quella che può visualizzare la relazione fra le variabili d e p, motivando la scelta.
Tracciare un grafico che visualizzi ragionevolmente il legame fra s e p.

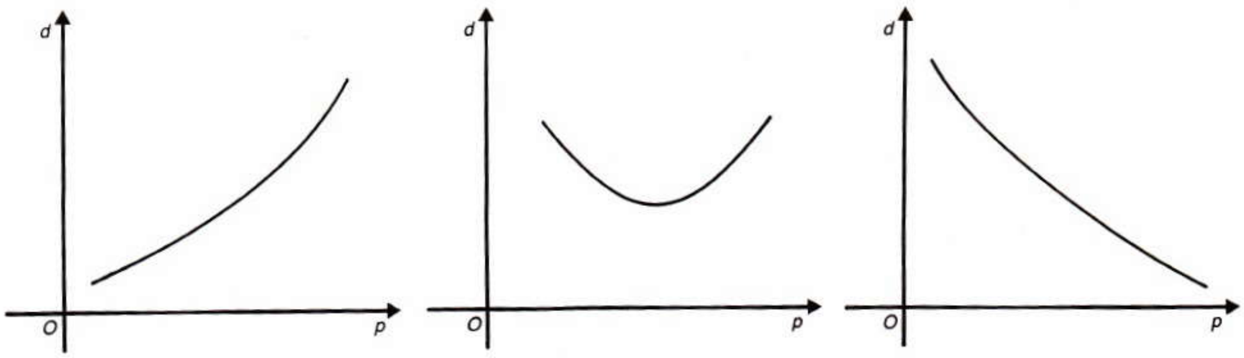


Fig. 70

274. Ecco un altro esempio di legge che compare nei testi di economia politica; si tratta di una legge che riassume le seguenti considerazioni. Un bene disponibile in quantità limitata e insufficiente al fabbisogno acquista importanza economica proprio per la limitatezza della sua disponibilità. Tuttavia l'urgenza del bisogno non è costante: maggiore è la quantità disponibile di un bene e minore è il bisogno che resta insoddisfatto dopo aver esaurito le provviste di quel bene. Perciò, in relazione alla decrescenza del bisogno, decresce anche la soddisfazione ricavata da ciascuna dose del bene. Si arriva così a formulare **la legge dell'utilità decrescente**: l'utilità u di una dose di un bene decresce all'aumentare della quantità q disponibile di quel bene.
Visualizzare con qualche grafico il legame fra le variabili u e q.

Funzioni razionali, irrazionali, trascendenti

275. Esaminare le seguenti funzioni e dire quali sono razionali intere, quali razionali fratte:

$$y=3x-7, \qquad y=\frac{3x-7}{5}, \qquad y=\frac{3x-7}{5x}, \qquad y=\frac{1}{x^2}$$

(Solo le ultime due sono razionali fratte perché ...)

276. Esaminare le seguenti funzioni e dire quali sono razionali e quali irrazionali:

$$y=\sqrt{3}x+2, \qquad y=\sqrt{3x+2}, \qquad y=\sqrt{2}x^3+x, \qquad y=\sqrt{2x^3+x}$$

(Solo la seconda e quarta funzione sono irrazionali perché ...)

277. Esaminare le seguenti funzioni e dire quali sono trascendenti:

$$y=3^x, \qquad y=x^3, \qquad y=\frac{1}{4}\cdot x, \qquad y=\frac{1}{4^x}$$

(Solo la prima e l'ultima funzione sono trascendenti ...).

278. Scrivere almeno 6 funzioni razionali intere, 6 razionali fratte, 6 irrazionali e 6 trascendenti.

279. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=|x|-x, \qquad y=|x|+x$$

I grafici ottenuti sono continui?
(Nel testo si è data la seguente definizione di $y=|x|$:

$$y=x \quad \textit{per} \quad x\geq 0,$$
$$y=-x \quad \textit{per} \quad x<0;$$

perciò nel 1° caso si ottiene la funzione definita nel modo seguente:

$$y=0 \quad \textit{per} \quad x\geq 0,$$
$$y=-2x \quad \textit{per} \quad x<0.$$

La funzione è rappresentata in fig. 71).

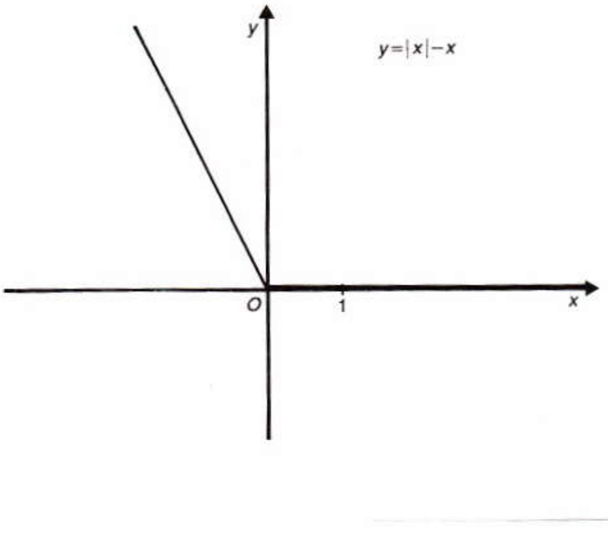


Fig. 71

280. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{|x|}{x}, \qquad y=|x|\cdot x$$

(Tenere presente la definizione di $y=|x|$ richiamata nell'esercizio 279; nel 1° caso si ottiene la funzione definita nel modo seguente:

$$y=1 \quad per \quad x>0,$$
$$y=-1 \quad per \quad x<0;$$

la funzione prende anche il nome di $y=sgn\ (x)$ (cioè y uguale al segno di x) ed è rappresentata in fig. 72).

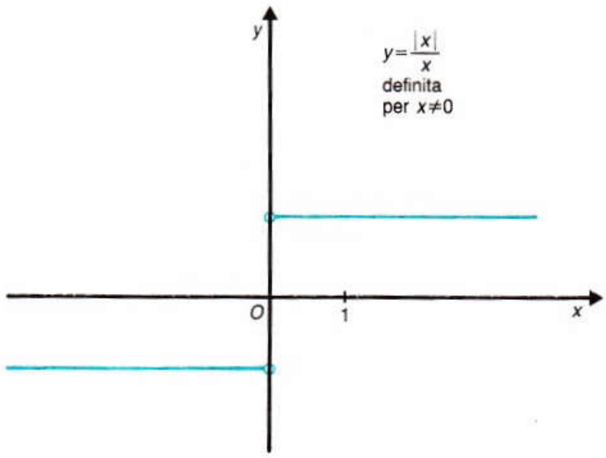


Fig. 72

281. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\operatorname{sen}|x|, \qquad y=|\operatorname{sen} x|.$$

(In base alla definizione di valore assoluto richiamata nell'esercizio 279, si ha che $y=sen\ |x|$ è definita nel modo seguente

$$y=sen\ x \quad per \quad x\geq 0,$$
$$y=sen\ (-x) \quad per \quad x<0.$$

Analogamente, $y=|\ sen\ x|$ è definita nel modo seguente:

$$y=sen\ x \quad per \quad x\geq 0,$$
$$y=-sen\ x \quad per \quad x<0).$$

282. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\cos|x|, \qquad y=|\cos x|.$$

(Vedi osservazioni suggerite nell'esercizio 281).

283. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=|x^2+2x|, \qquad y=x^2+2|x|.$$

(Vedi osservazioni suggerite nell'esercizio 281).

284. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=|2x+1|, \qquad y=2|x|+1.$$

(Vedi osservazioni suggerite nell'esercizio 281).

285. Tenendo presente la definizione di $y=[x]$, data nel testo, rappresentare le seguenti funzioni:

$$y=[x]-x, \qquad y=[x]+x$$

286. Esprimere in formula e rappresentare graficamente la seguente funzione che decide il prezzo di un telegramma: il prezzo è di £ 2800 fino a 10 parole; per ogni parola in più oltre le 10 si pagano £ 100. Indicare con x il numero di parole e con y il prezzo.

287. Esprimere in formula e rappresentare graficamente la seguente funzione che descrive come varia un capitale di 1 milione depositato in una banca che offre i seguenti tassi d'interesse:
- tasso dell'8% annuo per i primi due anni,
- tasso del 10% per i successivi cinque anni,
- tasso del 15% per gli anni successivi.

Indicare con x il tempo misurato in anni e con y il capitale.
(La funzione è definita nell'insieme degli interi nel modo seguente:

$$y=(1+0{,}08)^{[x]} \quad per \quad 0<x\leq 2,\ \ldots).$$

288. Esprimere in formula e rappresentare graficamente la seguente funzione che decide le tariffe telefoniche: il costo è valutato a partire da unità indivisibili di tempo composte di tre minuti; la prima unità costa £ 135, le successive £ 735. Indicare con x il tempo in minuti e con y il costo in lire.

289. Tracciare il grafico della funzione definita nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} y=x^2 & \text{per} & x<-1, \\ y=-x^2+2 & \text{per} & -1\leq x\leq 1, \\ y=x^2 & \text{per} & x>1. \end{array}$$

290. Tracciare il grafico della funzione definita nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} y=e^{-x} & \text{per} & x\leq 0, \\ y=-x+1 & \text{per} & 0<x\leq 1, \\ y=\ln x & \text{per} & x>1. \end{array}$$

Esercizi vari

Gli esercizi dal 291 al 307 conducono a tracciare il grafico di funzioni razionali, valendosi delle nozioni esposte nel cap. 1 e nei relativi esercizi.

291. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$y=x^2+2x+1, \quad y=x^3+3x^2+3x+1, \quad y=x^2-2x+1, \quad y=x^3-3x^2+3x-1$$

(Tenendo presenti le nozioni sui prodotti notevoli si ha:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2, \quad x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3, \ldots)$$

292. Ripetere l'esercizio 291 a partire dalle seguenti funzioni

$$y=x^2+4x+4, \quad y=x^3+6x^2+12x+8, \quad y=x^2-4x+4, \quad y=x^3-6x^2+12x-8.$$

293. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x}, \quad y=\frac{2}{x}, \quad y=\frac{1}{3x}, \quad y=\frac{2}{3x}$$

Precisare il campo di esistenza delle funzioni assegnate e tracciarne il grafico, descrivendo qualche elemento caratteristico delle curve ottenute.

(La prima funzione presenta le seguenti caratteristiche:
- *è definita nell'insieme $\mathbb{R}_0$ dei reali escluso 0,*
- *quando si attribuiscono ad x valori sempre più vicini a 0, la curva si avvicina sempre di più all'asse delle y, cioè l'asse delle x è un asintoto della curva;*
- *quando si attribuiscono ad x valori sempre più grandi in modulo, la curva si avvicina sempre di più all'asse delle x, cioè l'asse delle x è un asintoto della curva;*
- *la curva ottenuta è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.*

Si può passare dalla prima funzione alle altre con dilatazioni nella direzione dell'asse delle y, tenendo presente che si può scrivere

$$\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{2}{3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}).$$

294. Ripetere l'esercizio 293, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x}, \quad y=-\frac{1}{x}, \quad y=-\frac{2}{x}, \quad y=-\frac{2}{3x}$$

(Si può passare dalla prima alla seconda funzione con una simmetria rispetto all'asse delle x, ...)

295. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$y=\frac{2}{x}$$

ed operare le seguenti traslazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \quad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+3 \end{cases}$$

In ciascun caso, descrivere la funzione ottenuta e tracciarne il grafico, precisando:
- campo d'esistenza,
- equazione degli asintoti.

(Per svolgere l'esercizio si ricavano x ed y dalle equazioni della trasformazione e si sostituiscono nell'espressione della funzione assegnata. Per esempio, nel 1° caso si ha un'iperbole equilatera che presenta le seguenti caratteristiche:

- *ha equazione* $y' = \frac{2}{x'} + 3$,
- *ha come campo d'esistenza l'insieme* $\mathbb{R}_0$,
- *ha per asintoti l'asse delle* y' *d'equazione* $x' = 0$ *e la retta d'equazione* $y' = 3$*).*

296. Ripetere l'esercizio 295, a partire dalla funzione

$$y = -\frac{2}{3x}$$

operando le seguenti trasformazioni;

$$\text{I)} \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 4 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y - 4. \end{cases}$$

297. Dopo aver svolto gli esercizi 295 e 296, descrivere le curve che si ottengono, a partire dall'iperbole d'equazione

$$y = \frac{k}{x}$$

operando traslazioni del tipo

$$x' = x + p$$
$$y' = y + q.$$

(Si ottengono sempre delle iperboli equilatere, che presentano fra l'altro, le seguenti caratteristiche:

- *hanno equazione* $$y' = \frac{k}{x' - p} + q \qquad (1)$$
- *hanno come campo di esistenza l'insieme dei reali escluso* p,
- *hanno come asintoti le rette d'equazione* $x' = p$ *e* $y' = q$.
- *l'equazione della curva si può sempre scrivere nella forma*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (2)$$

svolgendo le operazioni indicate e chiamando x ed y le coordinate).

298. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{1}{2x}, \qquad y = \frac{1}{2x} - 3, \qquad y = \frac{1}{2(x+5)}, \qquad y = \frac{1}{2(x+5)} - 3$$

precisando il campo d'esistenza e l'equazione degli asintoti.
Scrivere l'ultima funzione in altra forma eseguendo le operazioni indicate.
(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 297. La 4ª funzione, che è rappresentata in fig. 73, si può scrivere nella forma

$$y = \frac{-6x - 29}{2x + 10}).$$

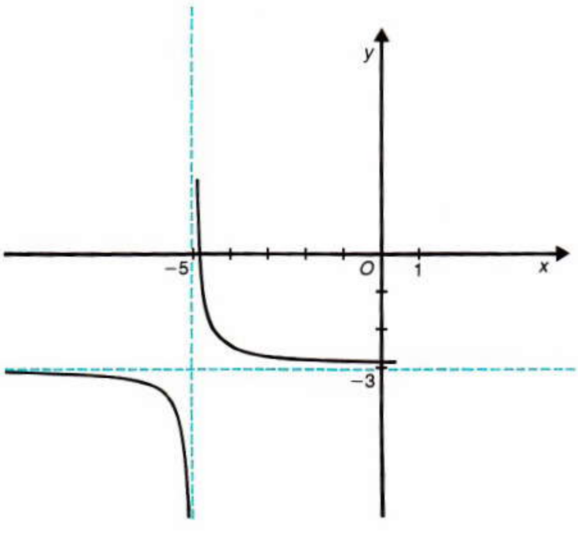


Fig. 73

299. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{12x+10}{3x+3}, \qquad y=\frac{-3x+10}{3x-6}, \qquad y=\frac{2x-5}{x-3}$$

precisandone il campo d'esistenza e l'equazione degli asintoti.
(Le funzioni sono tutte scritte nella forma (2); perciò si tratta sempre di iperboli equilatere. Per tracciare rapidamente il grafico conviene esprimere ciascuna equazione nella forma (1), valendosi della divisione dei polinomi. Per esempio, nel 1° caso si ottiene

$$\begin{array}{r|l} 12x+10 & 3x+3 \\ \hline 12x+12 & 4 \\ // \; -2 & \end{array}$$

Risulta dunque

$$12x+10=4(3x+3)-2 \qquad \text{e perciò} \qquad \frac{12x+10}{3x+3}=\frac{-2}{3x+3}+4$$

Si conclude che la prima funzione assegnata si può scrivere nella forma seguente

$$y=\frac{-2}{3(x+1)}+4$$

ed ha quindi come grafico la curva di fig. 74).

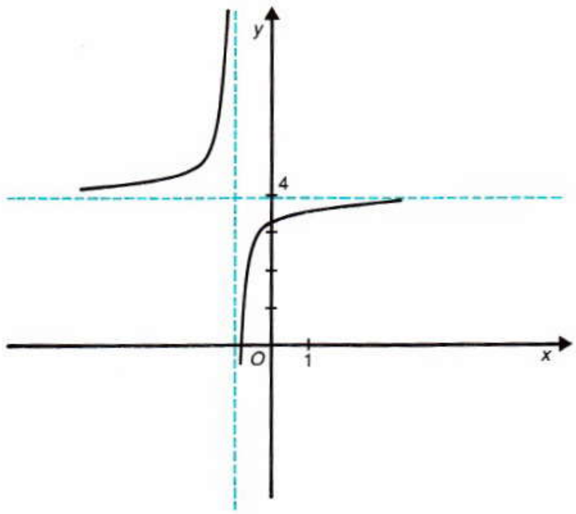


Fig. 74

300. Ripetere l'esercizio 299, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{x}{2x+3}, \qquad y=\frac{1-x}{2x}, \qquad y=\frac{2x+1}{1-x}$$

301. Ripetere l'esercizio 299, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{2x-5}{x-3}, \qquad y=\frac{-2x+7}{2x-6}, \qquad y=\frac{x+2}{2-x}$$

302. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, indicandone il campo di esistenza e gli eventuali asintoti.

$$y=\frac{1}{x^2}, \qquad y=\frac{3}{x^2}, \qquad y=\frac{1}{2x^2}, \qquad y=\frac{-1}{x^2}$$

303. Ripetere l'esercizio 302, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{3}{x^2}, \qquad y=\frac{3}{x^2}-2, \qquad y=\frac{3}{(x-1)^2}$$

304. Ripetere l'esercizio 302, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{-1}{x^2}, \qquad y=\frac{-1}{x^2}+3, \qquad y=\frac{-1}{(x+3)^2}$$

305. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, precisandone il campo di esistenza ed indicandone gli eventuali asintoti.

$$y=x+\frac{1}{x}, \quad y=x^2+\frac{1}{x^2}, \quad y=x-\frac{1}{x^3}, \quad y=\frac{x}{3}-\frac{1}{x^2}$$

(Conviene valersi dell'addizione grafica; nel 1° caso si ottiene la curva in colore di fig. 75).

306. Ripetere l'esercizio 305, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4}{x^2}-x, \quad y=\frac{x}{2}+1+\frac{2}{x}, \quad y=1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3x^2}, \quad y=\frac{1+x^3}{x^2}$$

(Attenzione all'ultima funzione: si riesce a valersi dell'addizione grafica, scrivendo la funzione nella forma seguente:

$$y=\frac{1}{x^2}+\frac{x^3}{x^2}, \quad \textit{ossia} \quad y=\frac{1}{x^2}+x$$

si ottiene la curva in colore di fig. 76).

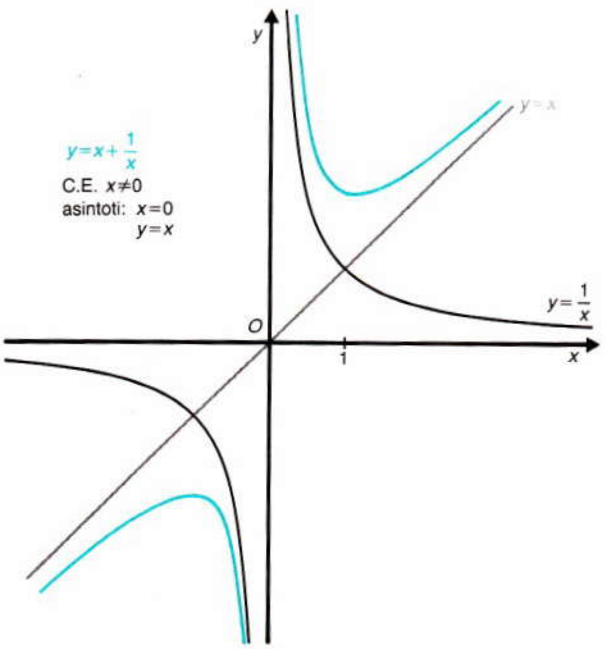


Fig. 75

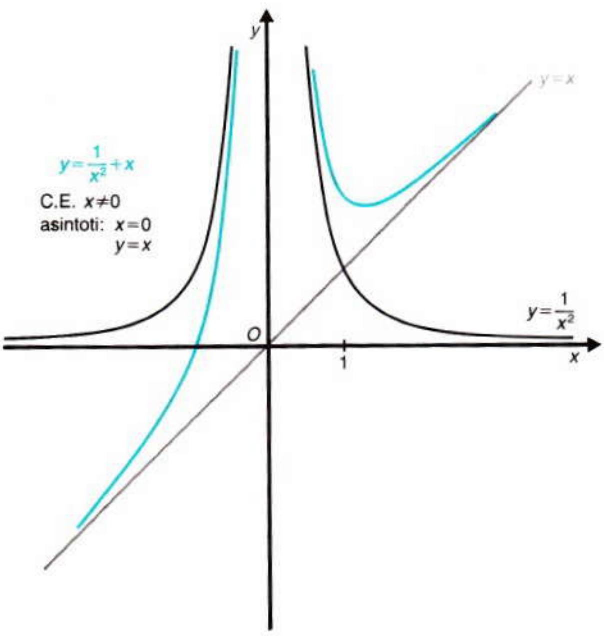


Fig. 76

307. Ripetere l'esercizio 305, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4x^2+1}{3x}, \quad y=\frac{2x-1}{2x^3}, \quad y=\frac{x-1}{x^3}, \quad y=\frac{x^2-3x+4}{x^2}$$

Gli esercizi dal 308 al 313 conducono a tracciare il grafico di funzioni irrazionali, valendosi delle nozioni esposte nel cap. 1 e nei relativi esercizi.

308. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, precisandone il campo di esistenza:

$$y=\sqrt{x}, \quad y=-\sqrt{x}, \quad y=\sqrt{-x}, \quad y=-\sqrt{-x}$$

309. Ripetere l'esercizio 308, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-\sqrt[3]{x}, \quad y=\sqrt[3]{-x}, \quad y=-\sqrt[3]{-x}$$

310. Ripetere l'esercizio 308, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{|x|}, \quad y=\sqrt[3]{|x|}$$

311. Ripetere l'esercizio 308, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x+1}, \qquad y=1+\sqrt{x}, \qquad y=\sqrt{x-1}, \qquad y=1-\sqrt{x}$$

C'è un solo procedimento per tracciare il primo e terzo grafico?
(Per tracciare il grafico della 1ª funzione si possono considerare almeno due dei procedimenti esposti in questo capitolo:
1) valersi di una traslazione lungo l'asse delle x, a partire dalla funzione $y=\sqrt{x}$*;*
2) considerare la funzione assegnata come funzione composta di

$$y=\sqrt{z} \qquad e \qquad z=x+1$$

e valersi del procedimento suggerito nell'esercizio 251, a pag. 292).

312. Ripetere l'esercizio 308, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x+2}, \qquad y=2+\sqrt[3]{x}, \qquad y=\sqrt[3]{x-2}, \qquad y=2-\sqrt[3]{x}$$

313. Ripetere l'esercizio 308, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x}-x, \qquad y=x^2-\sqrt{x}, \qquad y=x-\sqrt{x+2}$$

Gli esercizi dal 314 al 323 conducono a tracciare il grafico di funzioni trascendenti, valendosi delle nozioni esposte nel cap. 1 e nei relativi esercizi.

314. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni trigonometriche, indicandone periodo e immagine:

$$y=2 \text{ sen } \left(x+\frac{\pi}{6}\right), \qquad y=4 \text{ sen } \left(x+\frac{\pi}{4}\right), \qquad y=6 \text{ sen } \left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Valersi delle formule di addizione del seno per scrivere le funzioni in altra forma.
(Le formule di addizione sono le seguenti:

$$sen\ (\alpha+\beta)=sen\ \alpha\cdot cos\ \beta+sen\ \beta\cdot cos\ \alpha$$

Valendosi di queste formule, si può esprimere, per esempio, la 1ª funzione nella seguente forma

$$y=2\left[sen\ x\cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+cos\ x\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

ossia

$$y=\sqrt{3}\cdot \mathbf{sen}\ x+\mathbf{cos}\ x).$$

315. Dopo aver svolto l'esercizio 314, dimostrare che qualunque funzione del tipo

$$y=r\cdot \text{sen } (x+\varphi)$$

può essere scritta nella forma

$$y=a \text{ sen } x+b \text{ cos } x$$

valendosi delle formule di addizione del seno.
(Se φ *indica un angolo noto, si ottiene*

$$a=r\ cos\ \varphi \qquad e \qquad b=r\ sen\ \varphi).$$

316. Dopo aver svolto gli esercizi 314 e 315, dimostrare che qualunque funzione del tipo

$$y=a \text{ sen } x+b \text{ cos } x$$

può essere scritta nella forma

$$y=r \text{ sen } (x+\varphi)$$

con $r=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\varphi=\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$.

(Basandosi sull'esercizio precedente, si trovano i valori di r e φ*, risolvendo il sistema seguente*

$$r\ cos\ \varphi=a$$
$$r\ sen\ \varphi=b.$$

Per risolvere rapidamente il sistema, si sostituisce alla 1ª equazione la somma dei quadrati delle singole equazioni, mentre al posto della 2ª equazione si considera il quoziente della 2ª equazione diviso la 1ª...
Per maggiori notizie sull'argomento, vedi il testo di E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, Trigonometria, *pagg. 148-150).*

317. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x+\cos x, \quad y=\text{sen } x+\sqrt{3}\cos x, \quad y=\sqrt{3}\text{ sen } x+\cos x$$

descrivendone periodo e immagine.
In quanti modi si può svolgere l'esercizio?
(Ogni grafico si può tracciare seguendo almeno due dei procedimenti esposti nel testo:
I) addizione grafica; nel 1° caso, per esempio, si debbono addizionare le funzioni $y_1=\text{sen } x$ e $y_2=\cos x$;
II) il procedimento descritto nell'esercizio 316; nel 1° caso, per esempio, si arriva a scrivere la funzione nella forma

$$y=\sqrt{2}\text{ sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

e, quindi a tracciare il grafico di fig. 77. Il 2° procedimento permette dunque di ottenere un grafico più preciso).

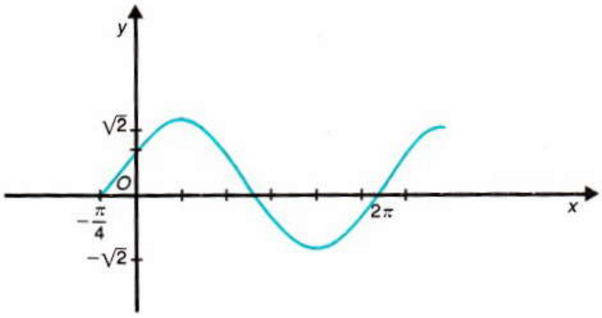


Fig. 77

318. Ripetere l'esercizio 317, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x-\cos x, \quad y=\text{sen } x-\sqrt{3}\cos x, \quad y=\text{sen } x-\sqrt{3}\cos x+1.$$

Qual è il modo più rapido per tracciare il terzo grafico, dopo aver disegnato il secondo?
(Si passa dal secondo al terzo grafico con una traslazione nella direzione dell'asse delle y ...).

319. Ripetere l'esercizio 317, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\text{sen } x-\cos x-2, \quad y=\text{sen } x+\sqrt{3}\cos x-1, \quad y=\sqrt{3}\text{ sen } x-\cos x+2$$

320. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, precisandone il campo di esistenza:

$$y=\ln x, \quad y=-\ln x, \quad y=\ln(-x), \quad y=-\ln(-x)$$

321. Ripetere l'esercizio 320, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=|\ln x|, \quad y=\ln|x|$$

322. Ripetere l'esercizio 320, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x+1, \quad y=\ln(x+1), \quad y=1-\ln x, \quad y=\ln(x-1)$$

C'è un solo procedimento per tracciare il primo e terzo grafico?
(Vedere le osservazioni proposte nell'esercizio 311).

323. Ripetere l'esercizio 320, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x+\ln x, \quad y=x^2-\ln x.$$

(Tracciando il grafico della 2ª funzione con l'addizione grafica, si ottiene la curva in colore di fig. 78, che prende anche il nome di ***curva di caccia*** *o* ***di inseguimento****. Il nome è legato ad un problema di inseguimento schematizzato nel modo seguente: un cacciatore C insegue a velocità costante una preda P che percorre con velocità costante l'asse delle y; in queste condizioni, il cacciatore si muove lungo una curva del tipo di quella rappresentata in fig. 78).*

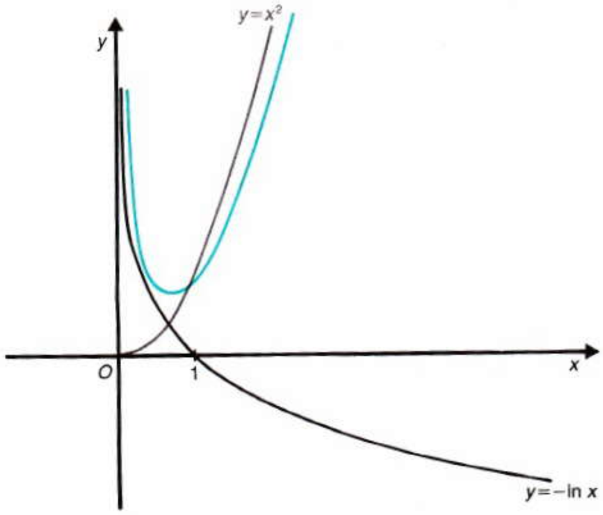


Fig. 78

Gli esercizi dal 324 al 330 conducono a fissare l'attenzione su alcune proprietà delle funzioni introdotte nel cap. 1.

324. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=x^3$$

ed esaminare le seguenti espressioni:

$$f(x-2)=(x-2)^3, \qquad f(x)-f(2)=x^3-2^3.$$

Spiegare perché non è vera per qualunque x l'uguaglianza seguente:

$$f(x-2)=f(x)-f(2).$$

325. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=\text{sen } x$$

e confrontare le seguenti espressioni:

$$f(3x)=\text{sen }(3x), \qquad 3f(x)=3 \text{ sen } x, \qquad f(3)f(x)=\text{sen } 3 \text{ sen } x.$$

Spiegare perché nessuna delle uguaglianze seguenti è vera per qualunque x:

$$f(3x)=f(3)f(x), \qquad f(3x)=3f(x), \qquad f(3)f(x)=3f(x).$$

326. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=\text{sen } x$$

e spiegare perché nessuna delle uguaglianze seguenti è vera per qualunque x e k:

$$f(kx)=f(k)f(x), \qquad f(kx)=kf(x), \qquad f(k)f(x)=kf(x).$$

327. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=\text{sen } x$$

e confrontare le seguenti espressioni:

$$f(x+\pi)=\text{sen }(x+\pi), \qquad f(x)+f(\pi)=\text{sen } x+\text{sen } \pi$$

Spiegare perché non è vera per qualunque x l'uguaglianza seguente:

$$f(x+\pi)=f(x)+f(\pi),$$

mentre è vera l'uguaglianza:

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

328. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=e^x$$

e confrontare le seguenti espressioni:

$$f(2x)=e^{2x}, \qquad f(2)f(x)=e^2\cdot e^x, \qquad 2f(x)=2e^x$$

Spiegare perché nessuna delle uguaglianze seguenti è vera per qualunque x.

$$f(2x)=f(2)f(x), \qquad f(2x)=2f(x), \qquad f(2)f(x)=2f(x).$$

329. Fissare ancora l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=e^x$$

e spiegare perché nessuna delle uguaglianze seguenti è vera per qualunque x e k:

$$f(kx)=f(k)f(x), \qquad f(kx)=kf(x), \qquad f(k)f(x)=kf(x).$$

330. Fissare l'attenzione sulla funzione

$$f(x)=e^x$$

ed esaminare le seguenti espressioni:

$$f(x+2)=e^{x+2}, \qquad f(x)+f(2)=e^x+e^2;$$

spiegare perché non è vera per qualunque x l'uguaglianza seguente:

$$f(x+2)=f(x)+f(2),$$

mentre è vera per qualunque x l'uguaglianza seguente:

$$f(x+2)=f(x)f(2).$$