B. Funzioni di due variabili

1. Estensione del concetto di funzione

Nel cap. 1 abbiamo a lungo parlato delle funzioni che si esprimono nella forma

$$y=f(x). \qquad (1)$$

Abbiamo anche dato vari esempi di leggi del tipo (1) presi dal mondo reale, trovando varie situazioni in cui una variabile y è funzione di una sola variabile x. Ma basta pensare ai più comuni fenomeni della realtà per rendersi conto che molto spesso una grandezza variabile dipende da più variabili. Ecco qualche esempio:

- il peso di un ragazzo dipende dalla sua età e dalla sua altezza; generalmente i medici nelle visite di controllo fanno riferimento a tabelle come quella di fig. 11;
- il volume V occupato da un gas dipende dalla pressione P e dalla temperatura T; nel caso dei gas perfetti vale la formula
$$V=k\cdot\frac{T}{P}$$
- la lunghezza d della diagonale di un rettangolo (fig. 12) dipende dalle sue dimensioni x ed y e vale la formula
$$d=\sqrt{x^2+y^2};$$
- il volume V di un parallelepipedo rettangolo (fig. 13) dipende dalle sue tre dimensioni x, y e z e vale formula
$$V=x\cdot y\cdot z.$$

età	altezza	peso
16	163,5 cm	62,10 kg
17	176,2 cm	66,3 kg
18	176,8 cm	68,8 kg

Fig. 11

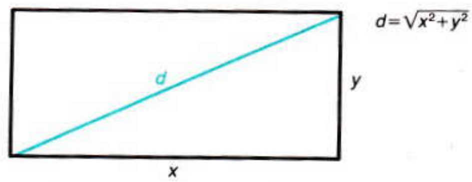

Fig. 12

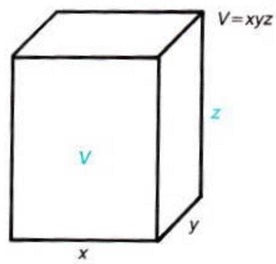

Fig. 13

Nell'ultimo esempio il volume V è funzione delle 3 variabili x, y e z, mentre negli altri esempi si ha una grandezza funzione di 2 variabili.

Ci occuperemo qui in particolare delle funzioni di due variabili, estendendo molte delle definizioni e proprietà trovate per le funzioni di una variabile.

Nel testo abbiamo detto che è data una funzione reale ad una variabile reale, quando sono dati:

- il dominio, e cioè l'insieme in cui intendiamo scegliere i valori della variabile indipendente x;
- una legge che fa corrispondere ad ogni valore di x un solo valore della variabile dipendente y, valore che si troverà in un certo insieme, detto codominio; la legge di corrispondenza si esprime, in generale, nella forma
$$y=f(x).$$

Una funzione di questo tipo viene molto spesso rappresentata graficamente: si indicano su un piano cartesiano Oxy tutti i punti P che hanno le coordinate (x, y) tali da soddisfare l'equazione

$$y=f(x).$$

Ora quando si passa da una a due variabili, per assegnare una funzione bisogna dare le seguenti informazioni:

- il dominio, e cioè l'insieme di coppie di numeri, in cui intendiamo scegliere i valori delle due variabili indipendenti x ed y;
- la legge che fa corrispondere ad ogni coppia (x, y) un solo valore della variabile dipendente z, valore che si troverà in un insieme, detto codominio. La legge di corrispondenza si esprime in generale nella forma

$$z=f(x, y). \tag{2}$$

È chiaro che, per rappresentare graficamente una funzione di due variabili, occorre rappresentare i valori delle tre variabili x, y e z e quindi non basta più il piano cartesiano.

I due metodi più diffusi per rappresentare le funzioni di due variabili sono i seguenti:

- stabilire un riferimento tridimensionale $Oxyz$ e dare come diagramma della funzione una superficie dello spazio;
- valersi solo di un riferimento piano, tracciando le curve d'equazione

  $$f(x, y)=k,$$

  che si ottengono dalla (2), assegnando a z vari valori numerici.

Vediamo ora qualche esempio di questi due metodi.

2. Riferimento cartesiano a tre dimensioni

Il modo più semplice di visualizzare un riferimento cartesiano tridimensionale è il seguente: si pensa ad una stanza, disponendo gli assi cartesiani x, y, z e l'origine O come in fig. 14; il pavimento indica allora il piano xy e le due pareti i piani xz e yz.

Per indicare, per esempio, il punto $P(3, 2, 5)$ si procede così (fig. 15):

- si parte da O e ci si muove di 3 unità lungo l'asse delle x (nel verso positivo), arrivando in P';
- da P' si muove parallelamente all'asse delle y (ancora nel verso positivo), arrivando in P'';
- da P'' si sale di 5 unità parallelamente all'asse delle z, fino ad arrivare, appunto, in P.

In modo analogo abbiamo rappresentato in fig. 16 il punto $Q(3, -1, -2)$.

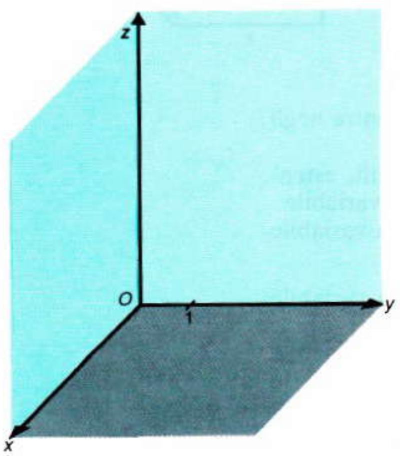

Fig. 14

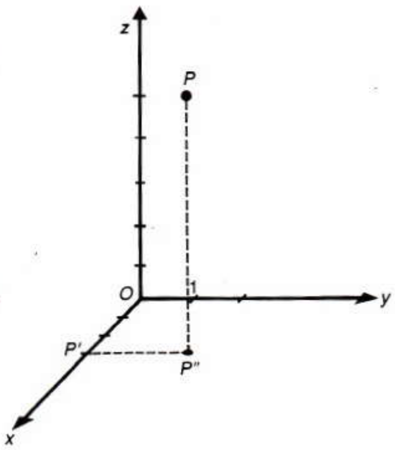

Fig. 15

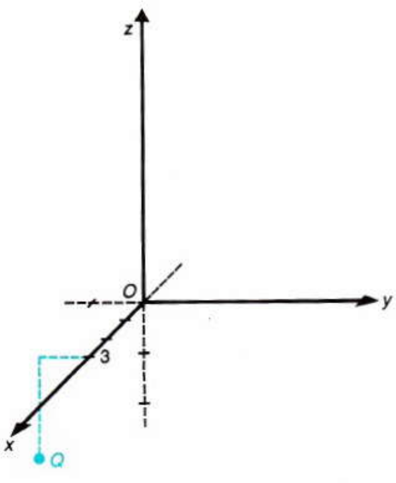

Fig. 16

Nella fig. 17 sono indicati dei punti che hanno due coordinate uguali a zero: essi appartengono ad uno degli assi coordinati.

Se, invece, una sola delle coordinate vale zero, il punto appartiene ad uno dei piani coordinati; ecco qualche esempio (fig. 18):

- il punto $P(2, 3, 0)$ si trova sul piano xy;
- il punto $Q(0, 3, 4)$ si trova sul piano yz;
- il punto $R(2, 0, 4)$ si trova sul piano xz.

Le equazioni dei piani coordinati sono quindi le seguenti:

- equazione del piano yz: $x=0$;
- equazione del piano xz: $y=0$;
- equazione del piano xy: $z=0$.

Si capisce che, se un punto si muove su un piano, le sue coordinate non potranno variare a piacere, ma saranno sempre soggette a certe condizioni che dipendono dalla posizione del piano nel riferimento. Ecco qualche caso particolarmente espressivo.

Se il punto si muove su un piano parallelo al piano xy, avrà sempre la stessa quota z: per esempio, se la quota è uguale a 3, si avrà sempre

$$z=3;$$

questa è **l'equazione del piano** indicato in fig. 19.

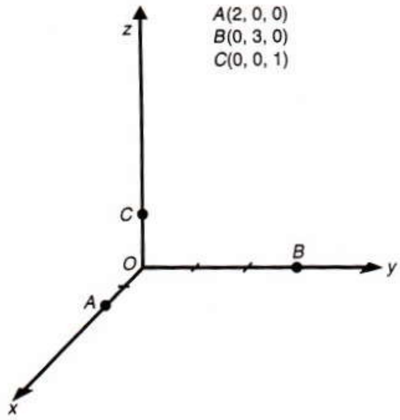

Fig. 17

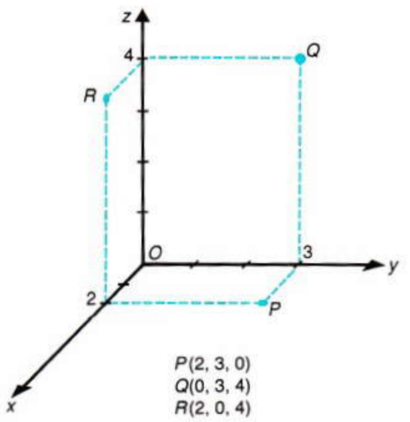

Fig. 18

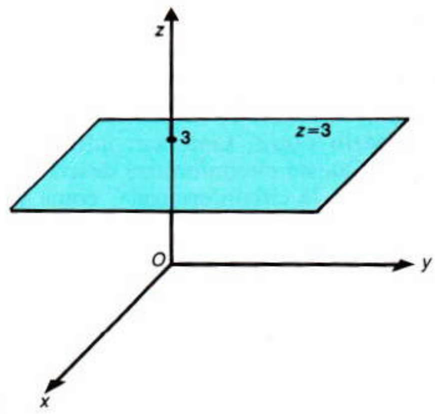

Fig. 19

E così è facile scrivere le equazioni di piani paralleli ai piani coordinati (fig. 20):

- equazione di un piano parallelo al piano yz: $x=a$;
- equazione di un piano parallelo al piano xz: $y=b$;
- equazione di un piano parallelo al piano xy: $z=c$.

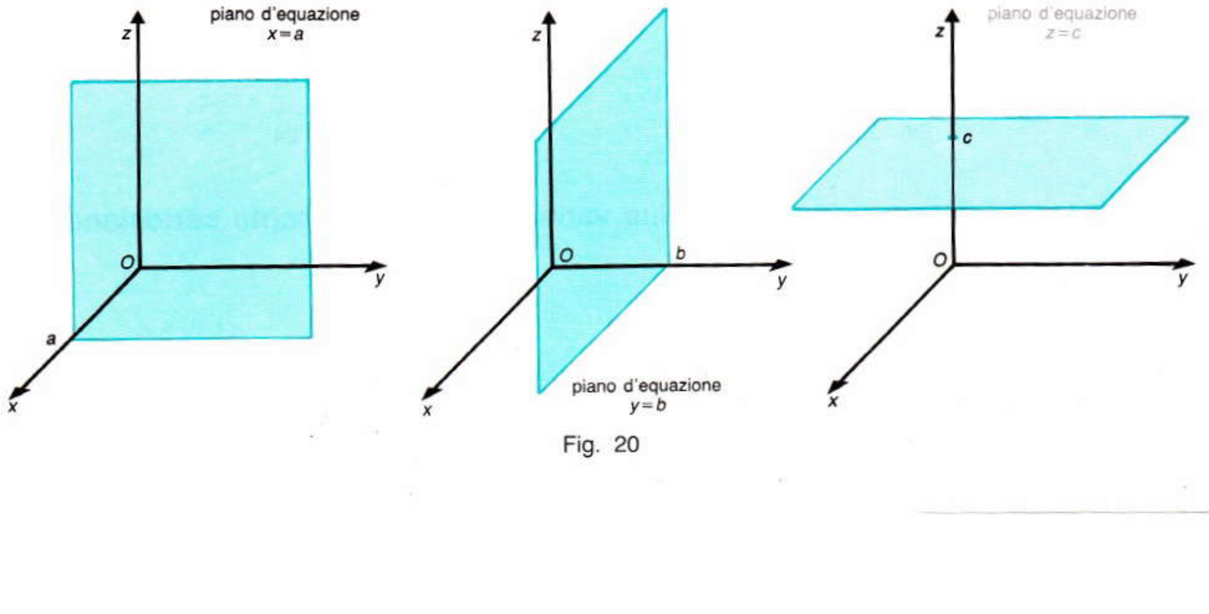

Fig. 20

È importante osservare come un'equazione abbia un significato diverso a seconda che venga "letta" in un riferimento a due o a tre dimensioni. Ecco due esempi:

a) l'equazione $y=mx$ descrive

- sul piano Oxy, una retta r passante per O (fig. 21);
- nello spazio $Oxyz$, tante rette parallele ad r, disegnate a diverse quote z. Queste rette descrivono un piano π che contiene l'asse delle z e lascia sul piano xy la retta r come *traccia* (fig. 22).

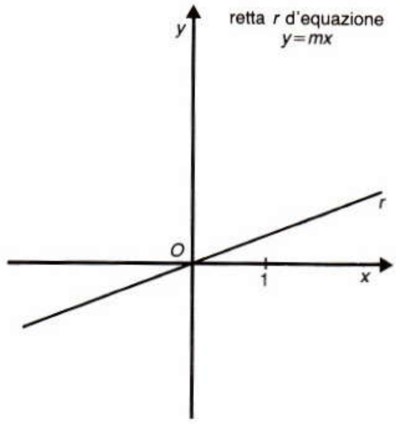

Fig. 21

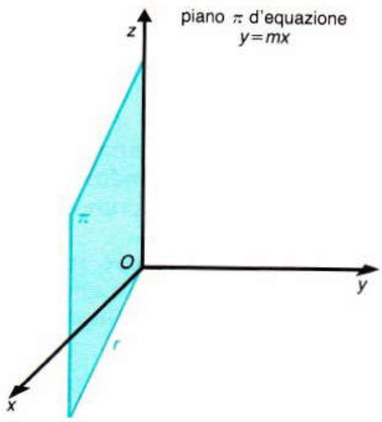

Fig. 22

b) l'equazione $x^2+y^2=1$ descrive

- sul piano Oxy, una circonferenza C (fig. 23);
- nello spazio $Oxyz$, tante circonferenze "parallele" a C, disegnate a diverse quote z. Queste circonferenze descrivono la superficie di un cilindro che lascia sul piano xy la circonferenza C come traccia (fig. 24).

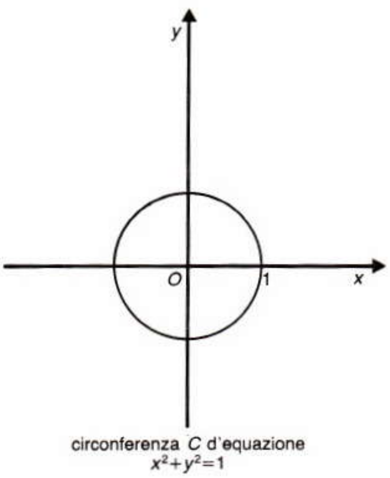

Fig. 23

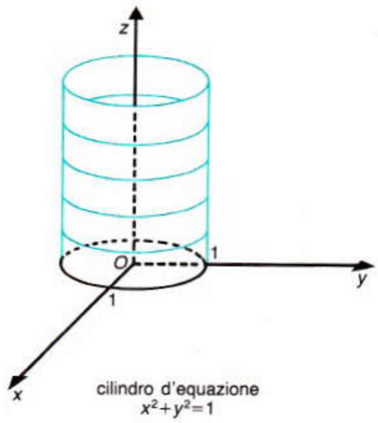

Fig. 24

3. Rappresentazione di funzioni a due variabili in un riferimento cartesiano tridimensionale

Per tracciare il grafico di una funzione

$$z=f(x, y),$$

si può estendere il procedimento più semplice che si segue nel caso di funzioni ad una variabile: si compila una tabella della funzione, assegnando dei valori ad x ed y e ricavando z, quindi si rappresentano i punti $P(x, y, z)$ così ottenuti.

È chiaro che questo procedimento risulta spesso lungo e faticoso. Per avere un'idea più rapida dell'andamento della superficie ci si basa allora sulle *tracce* della superficie su piani paralleli ai piani coordinati.

Ecco qualche esempio di grafico tracciato seguendo quest'ultimo metodo. Cominciamo col tracciare il grafico della funzione

$$z=x^2+y^2.$$

- I piani paralleli al piano yz hanno equazione $x=a$; perciò, per determinare la traccia della superficie su questi piani, basta considerare il sistema seguente:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x=a. \end{cases}$$

Si ottengono sui vari piani tante curve d'equazione:

$$z=y^2+a^2,$$

cioè tante parabole (fig. 25); in particolare si ha sul piano yz la parabola d'equazione

$$z=y^2.$$

- Analogamente le tracce della superficie su piani paralleli al piano xz sono le parabole d'equazione

  $$z=x^2+b^2.$$

- Infine, le tracce della superficie su piani paralleli al piano xy sono tante circonferenze d'equazione

  $$x^2+y^2=c^2;$$

  in particolare, sul piano xy si trova solo il punto O.

Queste informazioni aiutano a tracciare il grafico della funzione (fig. 26): si ottiene un **paraboloide rotondo**.

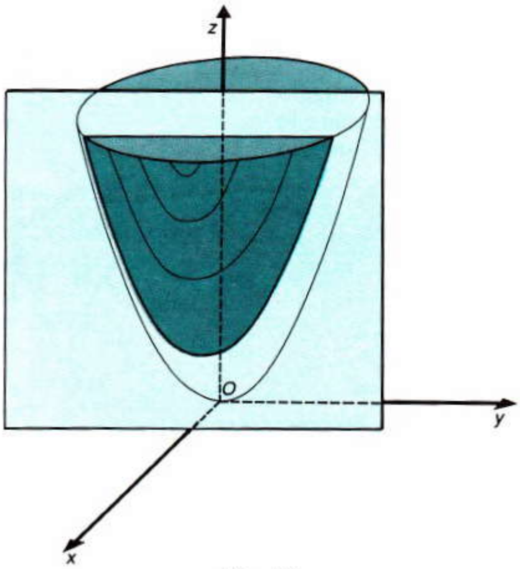

Fig. 25

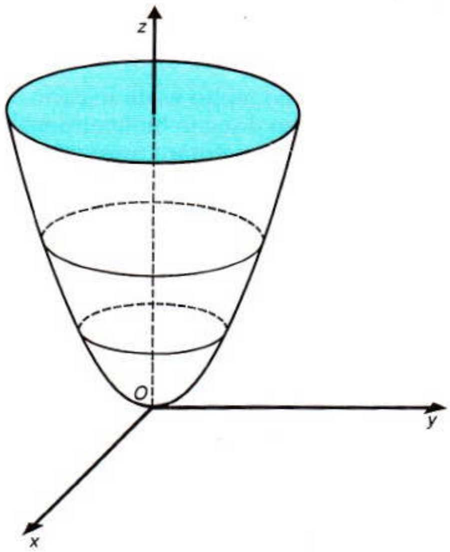

Fig. 26

Con un procedimento analogo è stato tracciato in fig. 27 il grafico della funzione

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2};$$

si tratta di una semisfera con centro nell'origine O e raggio 1.

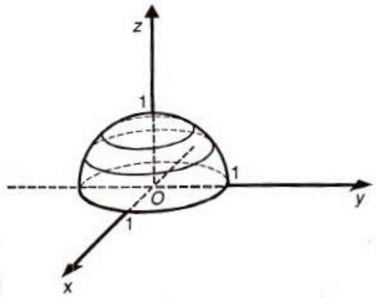

Fig. 27

Infine, in fig. 28 è stato tracciato il grafico della funzione

$$z=xy,$$

ottenendo una superficie chiamata **paraboloide a sella**; il nome viene dal caratteristico aspetto che presenta la superficie nel punto O, che è in questo caso un punto di sella.

Questa superficie presenta una particolarità davvero sorprendente (fig. 29): lascia delle rette come tracce sui piani d'equazione $x=a$ o $y=b$. Si tratta dunque di una superficie curva "formata da rette", ossia di una **superficie rigata**.

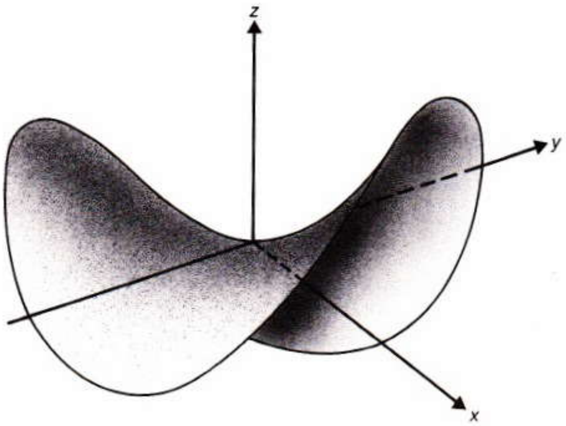

Fig. 28

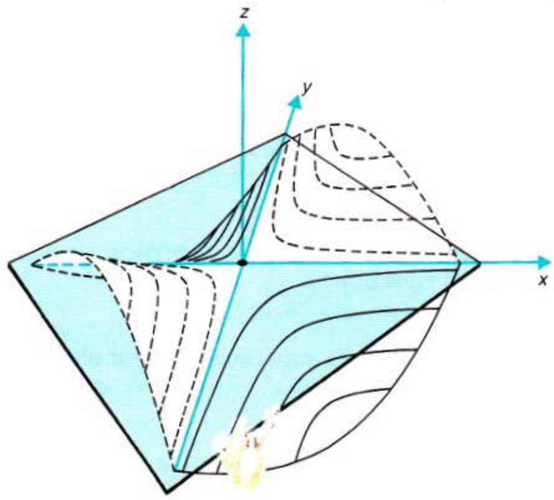

Fig. 29

4. Rappresentazione di funzioni a due variabili con curve di livello

Le curve di livello sono molto usate in cartografia per rappresentare un paesaggio tridimensionale con un disegno bidimensionale (fig. 30). Per capire come usare le curve di livello per rappresentare funzioni a due variabili, riprendiamo le funzioni esaminate nel paragrafo precedente.

Cominciamo col considerare la funzione

$$z=x^2+y^2,$$

che ha come grafico il paraboloide rotondo rappresentato in fig. 25 e procediamo così:

- tagliamo la superficie con piani paralleli al piano xy (fig. 31), ottenendo come sezioni delle circonferenze;
- proiettiamo ogni sezione sul piano xy.

In questo modo si ha sul piano xy (fig. 32) un insieme di circonferenze d'equazione

$$x^2+y^2=c. \tag{1}$$

Ogni circonferenza rappresenta una **curva di livello**; l'insieme di tutte le curve di livello dà appunto una rappresentazione piana del paraboloide.

Un'osservazione importante: il paraboloide si estende all'infinito, perciò la superficie può essere tagliata da piani d'equazione

$$z=c$$

con valori positivi di c più grandi quanto si vuole.

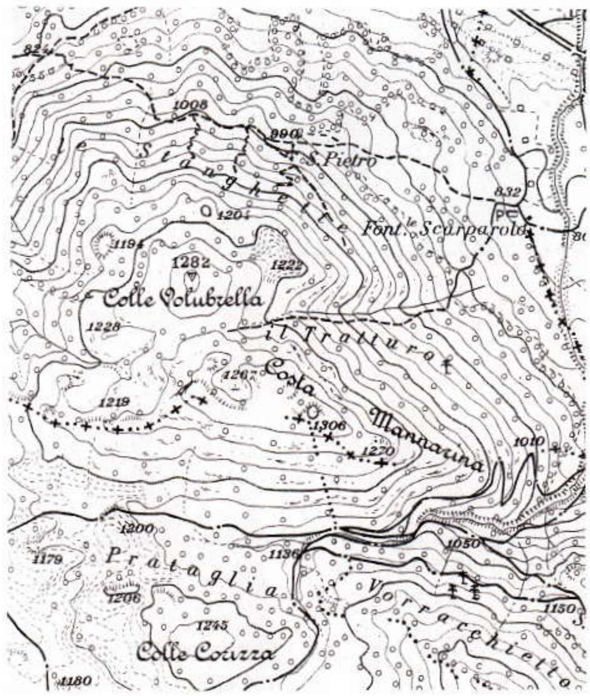

Fig. 30. Curve di livello in cartografia.

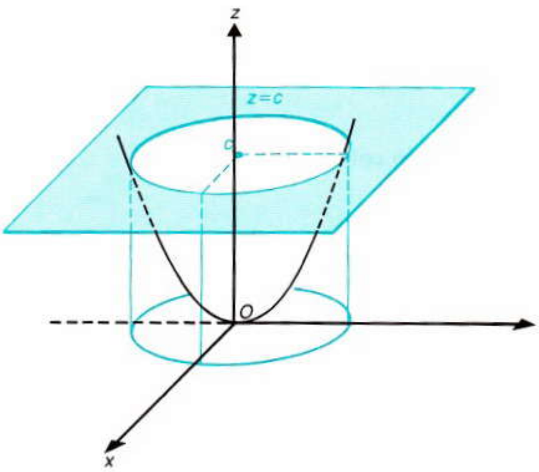

Fig. 31

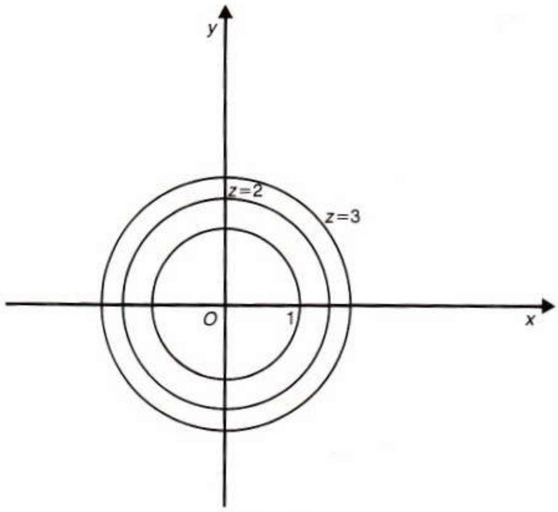

Fig. 32

Accade allora che anche l'insieme delle curve di livello si estende all'infinito, dato che la costante c nella (1) determina il raggio delle circonferenze.

Per avere le curve di livello relative alla funzione

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

si procede in modo analogo (fig. 33). Si taglia la semisfera con piani paralleli al piano xy e si proietta ogni curva sezione sul piano xy. In questo modo si ha l'insieme di circonferenze d'equazione

$$c=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \text{ossia} \qquad x^2+y^2=1-c^2. \tag{2}$$

Queste circonferenze costituiscono le curve di livello della semisfera.
Ora è chiaro che la semisfera esaminata, che ha centro O e raggio 1, non si estende all'infinito, perciò la superficie può essere tagliata dai piani d'equazione

$$z=c,$$

solo se risulta

$$-1\leq c\leq 1.$$

E così l'insieme delle curve di livello (2) non si estende all'infinito, dato che nelle circonferenze il raggio

$$r=\sqrt{1-c^2}$$

assume al massimo il valore 1 (fig. 34).

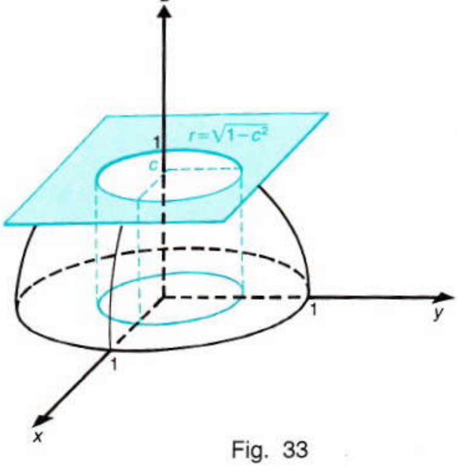

Fig. 33

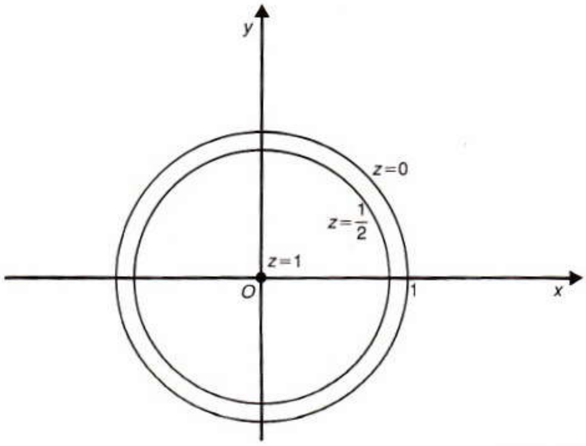

Fig. 34

Riprendiamo infine (fig. 35) la superficie d'equazione

$$z=xy;$$

le curve di livello saranno le iperboli equilatere d'equazione

$$xy=c.$$

Si avranno dunque le curve in nero di fig. 36, se risulta $c>0$ e le curve in colore se risulta $c<0$.

In generale, quando è data la funzione

$$z=f(x, y)$$

si ottiene la rappresentazione mediante curve di livello, disegnando su un piano cartesiano l'insieme di curve d'equazione

$$k=f(x, y)$$

dove k è un parametro che assume opportuni valori.

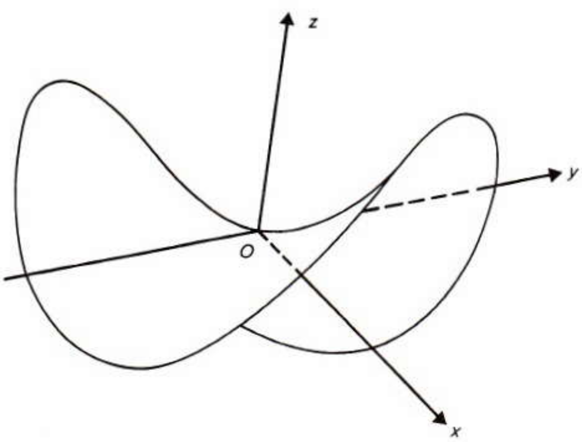

Fig. 35

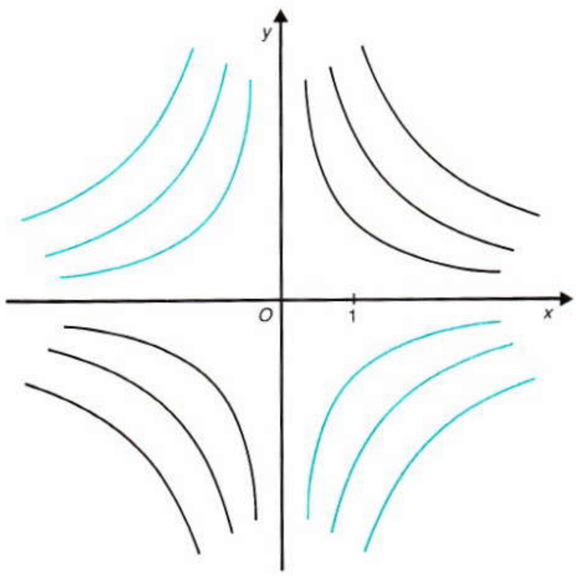

Fig. 36