Appendice 2
Discussione di problemi di trigonometria

Parte prima
Discussione di problemi relativi al capitolo 1 del testo

Parte seconda
Discussione di problemi relativi ai capitoli 1 e 2 del testo

Parte terza
Discussione di problemi relativi ai capitoli 4 e 5 del testo

Quest'Appendice è dedicata ai Licei scientifici, dove i programmi ministeriali vigenti invitano l'insegnante a trattare nelle ultime quattro classi l'argomento «applicazioni dell'algebra alla geometria di 1° e 2° grado con relativa discussione».

L'argomento, che ha interessato qualche matematico di secondo piano alla fine del secolo scorso e agli inizi di questo, non ha una particolare importanza né dal punto di vista applicativo né da quello teorico.

Inoltre, già da parecchie decine di anni viene messa in discussione l'efficacia didattica di tale argomento, specialmente se basato su procedimenti puramente algebrici.

Queste considerazioni spiegano le due scelte operate nel testo:

a) presentare la "discussione dei problemi" in un'Appendice;

b) trattare l'argomento valendosi soprattutto di procedimenti grafici. In tal modo la discussione dei problemi viene inserita nel corso come una delle tante applicazioni degli argomenti studiati, ma certamente non la più importante.

Quest'Appendice si compone di tre Parti:

nella *prima*: si richiede la sola conoscenza delle nozioni esposte nel cap. 1 del testo, e di alcune nozioni di geometria analitica, che vengono richiamate;

nella *seconda*: si richiede la conoscenza delle nozioni esposte nei capitoli 1 e 2 del testo, e di nozioni di geometria analitica;

nella *terza*: si richiede la conoscenza di tutti gli argomenti esposti nel testo; viene fatto riferimento in particolare ai capitoli 4 e 5.

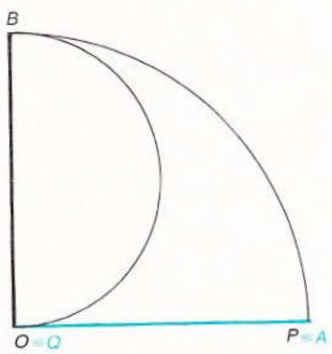

Fig. 1

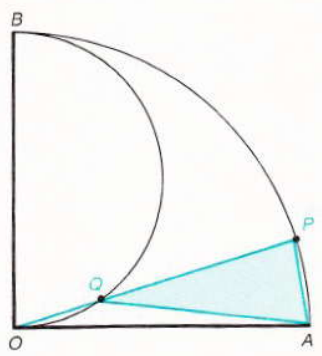

Fig. 2

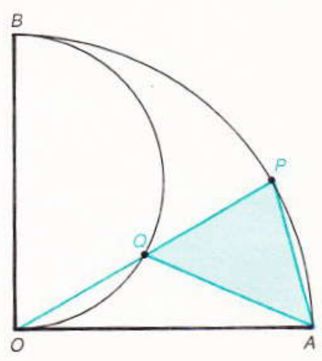

Fig. 3

Parte prima
Discussione di problemi relativi al capitolo 1 del testo

Esaminiamo insieme il problema seguente.

All'interno di un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r, si costruisce una semicirconferenza di diametro OB. Si traccia una semiretta di origine O; questa incontra l'arco AB in P e la semicirconferenza in Q. Si costruisce il triangolo APQ, e si considera la sua area S al variare dell'angolo $A\hat{O}P=x$. Si chiede:

1) per quale valore di x l'area del triangolo risulta massima?
2) quale deve essere l'ampiezza di x se si vuole che risulti

$$S=\frac{1}{4}r^2?$$

3) quale deve essere l'ampiezza di x se si vuole che risulti

$$S=\frac{1}{9}r^2?$$

1) Cominciamo col tracciare qualche disegno che visualizzi il problema (Figg. 1, 2, 3, 4, 5): la semiretta OP assume varie posizioni e, in corrispondenza, il triangolo APQ assume varie forme.

L'area del triangolo vale, ovviamente, zero nel caso limite in cui $OP \equiv OA$ (Fig. 1), poi cresce (Figg. 2 e 3) e, ad un certo punto, comincia a diminuire (Fig. 4), per arrivare di nuovo a zero nell'altro caso limite, quando $OP \equiv OB$ (Fig. 5). Tuttavia le figure non conducono ad individuare in modo immediato la situazione in cui il triangolo raggiunge l'area massima. Perciò affrontiamo il problema con metodi algebrici. L'area S del triangolo è data da

$$S=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{AH},$$

dove AH è l'altezza relativa al lato PQ (Fig. 6), ed è semplice esprimere PQ ed AH in funzione del raggio r e dell'angolo x. Si ha:

$$\overline{AH}=r\,\mathrm{sen}\,x$$

(esaminando il triangolo rettangolo OAH, che ha l'ipotenusa lunga r e il cateto AH, opposto all'angolo x). Risulta poi:

$$\overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ},$$

con

$$\overline{OP}=r$$
$$\overline{OQ}=r\,\mathrm{sen}\,x$$

(esaminando il triangolo OQB, rettangolo in Q, che ha l'ipotenusa lunga r e presenta l'angolo $O\hat{B}Q$, opposto al cateto OQ, ampio x).

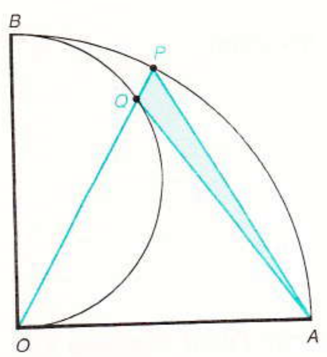

Fig. 4

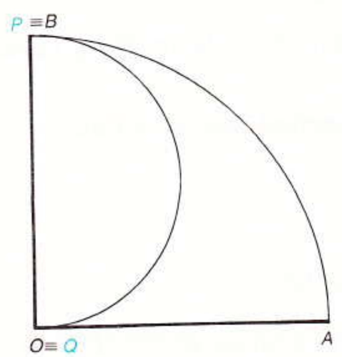

Fig. 5

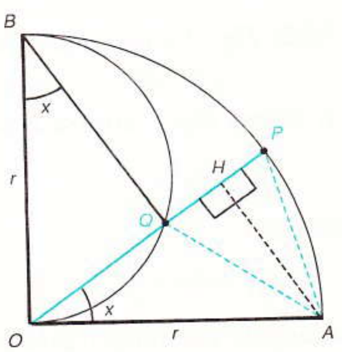

Fig. 6

Così si nota una proprietà che non è evidente:

$$\overline{OQ}=\overline{AH}.$$

Si trova, in conclusione, che risulta:

$$\overline{PQ}=r-r\,\mathrm{sen}\,x;$$

perciò l'area S del triangolo è data da:

$$S=\frac{1}{2}r\,\mathrm{sen}\,x\,(r-r\,\mathrm{sen}\,x)=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}\,x\,(1-\mathrm{sen}\,x).$$

Ora, siccome r^2 è una costante positiva, per rispondere alla prima domanda basta studiare la variazione della funzione

$$y=\frac{S}{r^2}$$

cioè:

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x\,(1-\mathrm{sen}\,x),$$

ossia:

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x-\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x. \qquad (1)$$

Si osserva che possiamo ricondurre questa funzione ad un'espressione nota se consideriamo come variabile non l'angolo x ma il seno dell'angolo; si introduce cioè una nuova variabile, z, legata alla x dalla relazione

$$z=\mathrm{sen}\,x.$$

La funzione (1) viene così scritta nella forma:

$$y=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2.$$

Ora, questa è l'equazione di una **parabola**, *di cui è immediato tracciare il grafico: determiniamo prima di tutto la posizione del vertice V, ricordando che l'ascissa z del vertice di una parabola d'equazione*

$$y=az^2+bz+c$$

è data da:

$$z_v=-\frac{b}{2a}.$$

Nel nostro caso si ha dunque:

$$z_v=\frac{1}{2}.$$

L'ordinata del vertice si ottiene sostituendo l'ascissa $z=\frac{1}{2}$ nell'equazione; si ha:

$$y_v=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

Nella Fig. 7 è disegnato l'arco di parabola che interseca l'asse delle z nei punti

$$O(0,0) \quad e \quad L(1,0).$$

È chiaro che y assume il valore massimo quando risulta:

$$z=\frac{1}{2},$$

cioè per

$$\mathrm{sen}\,x=\frac{1}{2}, \qquad da\ cui \qquad x=30°.$$

L'angolo che rende l'area S massima è allora di 30° (Fig. 8). È chiaro che l'area massima è:

$$S_M=\frac{1}{8}r^2.$$

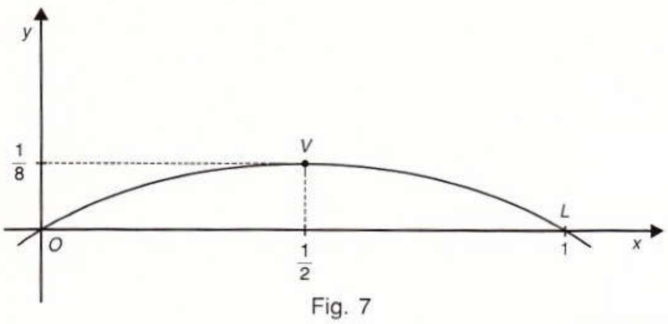

Fig. 7

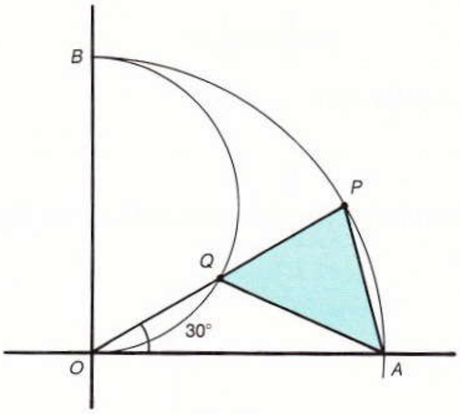

Fig. 8

2) Il risultato ora ottenuto fa comprendere che la domanda 2) è assurda: non può, l'area S, risultare uguale $\frac{1}{4}r^2$.

3) Passiamo ora all'ultimo quesito: determinare per quale valore di x risulta

$$S=\frac{1}{9}r^2.$$

Dobbiamo trovare i valori di z per cui risulta

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2,$$

ossia

$$z^2-z+\frac{2}{9}=0$$

Le soluzioni di quest'equazione di 2° grado sono date da:

$$z=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{8}{9}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{9}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{3}}{2}= \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Di conseguenza, essendo

$$z=\operatorname{sen} x,$$

si ha:

$$\operatorname{sen} x=\frac{2}{3} \rightarrow x\cong 41°$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{1}{3} \rightarrow x\cong 19°.$$

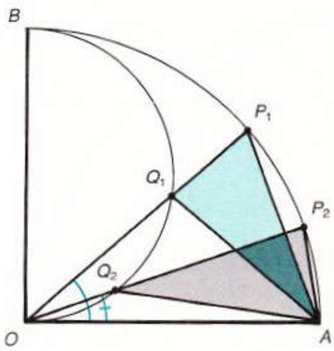

Fig. 9

Dunque il problema, quando è risolubile, può ammettere due soluzioni (Fig. 9).

A questa conclusione si può arrivare anche da uno studio del grafico della parabola (Fig. 10): le ascisse dei punti d'intersezione della parabola

$$y=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2$$

e della retta

$$y=\frac{1}{9}$$

sono due; le abbiamo indicate in figura.

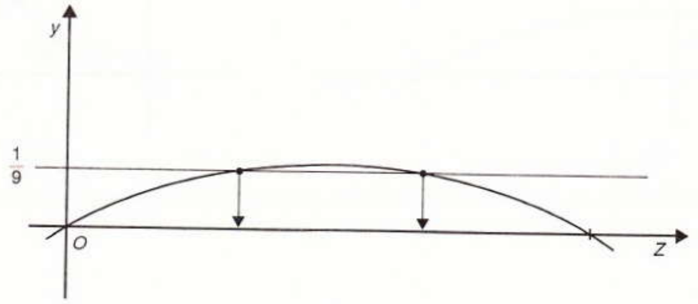

Fig. 10

L'aver esaminato attentamente questo problema, valendosi di vari "strumenti matematici" (la geometria elementare, l'algebra, la trigonometria e la geometria analitica) permette di ricordare meglio che cosa significa **discutere un problema** *come quello seguente:*

All'interno di un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r, si costruisce una semicirconferenza di diametro OB. Si traccia una semiretta d'origine O; questa incontra l'arco AB in P e la semicirconferenza in Q, formando con OA l'angolo $A\hat{O}P$ variabile. Si costruisce poi il triangolo APQ, unendo P e Q con A e si considera l'area S *di* questo triangolo. Determinare l'angolo $A\hat{O}P$, in modo che risulti:

$$S=kr^2.$$

Discutere questo problema significa determinare per quali valori del parametro k il problema è risolubile, indicando in questo caso quante sono le soluzioni.
Si potrà allora procedere nel modo seguente.
I) Si traccia qualche figura significativa, esaminando attentamente i casi limite. Nel nostro caso si ottengono le Figg. 11, 12, 13, che permettono di capire che, nei due casi limite, si ha:

$$k=0.$$

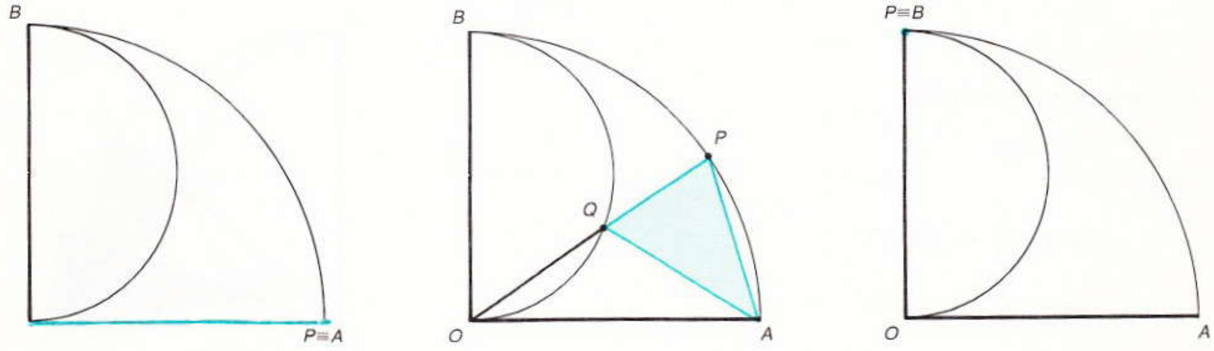

Fig. 11 Fig. 12 Fig. 13

II) Si sceglie l'incognita, precisando le limitazioni cui deve soddisfare. Nel nostro caso l'incognita è indicata nel testo del problema, e le figure mostrano che l'angolo $A\hat{O}P=x$ è tale che deve risultare

$$0 \leq x \leq 90°.$$

III) Si traduce il problema in un'equazione parametrica che lega l'incognita ai dati del problema. Nel nostro caso si ha:

$$S=\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x),$$

e perciò l'equazione parametrica è:

$$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)=kr^2,$$

ossia:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)=k,$$

con

$$0 \leq x \leq 90°.$$

IV) Si determinano i valori del parametro k per cui l'equazione ammette delle soluzioni che soddisfano alle limitazioni assegnate, cioè ***si discute l'equazione****.*
Per questo è opportuno introdurre una nuova incognita z, legata alla x dalla relazione

$$z=\operatorname{sen} x;$$

l'equazione diventa:

$$\frac{1}{2} z\,(1-z)=k$$

cioè:

$$\frac{1}{2} z-\frac{1}{2} z^2=k,$$

con

$$0 \leq z \leq 1.$$

Si considera l'equazione ottenuta come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2} z-\frac{1}{2} z^2. \\ y=k \end{cases}$$

con la condizione

$$0 \leq z \leq 1.$$

Questo sistema ha un'immediata visualizzazione grafica sul piano cartesiano:

$y=\frac{1}{2} z-\frac{1}{2} z^2$	*rappresenta una parabola;*
$0 \leq z \leq 1$	*fissa un particolare arco di parabola, quello formato dai punti che hanno l'ascissa z compresa fra 0 e 1;*
$y=k$	*è l'equazione del fascio di rette parallele all'asse delle z.*

Ricordiamo poi che il sistema conduce a trovare i punti di intersezione fra la parabola e le rette del fascio. Così siamo condotti a trovare i valori di k richiesti, determinando le rette del fascio *che incontrano la parabola nell'arco scelto. Nella Fig. 14 è disegnata di nuovo la parabola ed è tracciato in colore l'arco OL, che ha per estremi i punti $O(0,0)$ e $L(0,1)$.*

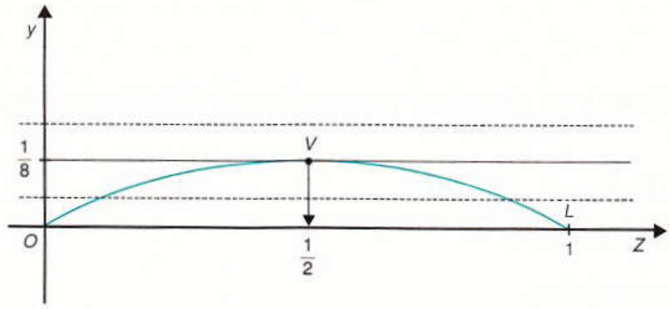

Fig. 14

È ora immediato rendersi conto che per le rette del fascio

$$y=k$$

possono verificarsi le seguenti situazioni:

a) le rette sono esterne alla parabola, *e ciò avviene per tutti i valori*

$$k>\frac{1}{8};$$

in tal caso il sistema non ha soluzioni reali e quindi neanche l'equazione assegnata ha soluzioni reali;

b) la retta è tangente in un punto dell'arco scelto, *e questo avviene per*

$$k=\frac{1}{8};$$

in tal caso il sistema ha le due soluzioni coincidenti nel punto $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, e perciò l'equazione assegnata ha le soluzioni:

$$z_1=z_2=\frac{1}{2},$$

che soddisfano le limitazioni richieste; si dice anche che l'equazione ha due soluzioni coincidenti;

c) le rette incontrano l'arco scelto in due punti, *e questo avviene per*

$$0<k<\frac{1}{8};$$

in tal caso l'equazione ha due soluzioni distinte;

d) la retta passa per i due punti limite, *e questo avviene per*

$$k=0;$$

in tal caso l'equazione ha due soluzioni limite;

e) la retta incontra la parabola fuori dell'arco scelto, *e questo avviene per*

$$k<0;$$

ma i valori negativi di k sono esclusi dalla natura stessa del problema.

Concludiamo che il problema ha sempre due soluzioni quando si sceglie

$$0\leq k\leq\frac{1}{8}.$$

L'esame del problema può essere efficacemente completato dall'analisi di qualche caso particolare.

Con un procedimento analogo a quello ora seguito discutere i problemi proposti negli esercizi 1-12.

1. In una semicirconferenza che ha il diametro AB lungo $2r$, si è tracciata la corda AM, che forma con il diametro AB un angolo di 60°. Per A si conduce una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra l'arco BM in un punto N. Si proietta ortogonalmente N su AB, ottenendo il punto Q e si indica con P il punto di intersezione di NQ con la semiretta AM.

Determinare l'angolo $B\hat{A}N$ in modo che il segmento MP sia lungo kr.
In quale caso MP ha lunghezza massima?
In quale caso MP è lungo quanto il diametro della semicirconferenza?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$4\cos^2 x - 1 = k \qquad con \quad 0° \leq x \leq 60°).$$

2. In una semicirconferenza con il diametro AB lungo $2r$, si è tracciata la corda AM, che forma con il diametro AB un angolo di 30°. Si conduce per A una semiretta che forma con il diametro AB un angolo variabile ed incontra l'arco AM in un punto N. Si proietta ortogonalmente N su AB, ottenendo il punto Q e si indica con P il punto di intersezione di NQ con la corda AM.

Determinare l'angolo $B\hat{A}N$ in modo che il segmento MP sia lungo kr.
In quale caso MP ha lunghezza massima?
In quale caso MP è lungo quanto il raggio della semicirconferenza?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cos^2 x = k \qquad con \quad 30° \leq x < 90°).$$

3. È dato un segmento AC lungo $4r$; B ne è il punto medio. Si tracciano due semicirconferenze che hanno diametri AB e BC e che si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta AC. Si conduce per A una semiretta, che forma con AC un angolo variabile ed incontra in D la semicirconferenza di diametro AB. Da D si traccia la retta r parallela ad AC e si indica con E il punto più vicino a C in cui r incontra la semicirconferenza di diametro BC.

Determinare l'angolo $C\hat{A}D$ in modo che il perimetro del trapezio $ADEC$ valga $4kr$.

In quale caso il trapezio $ADEC$ ha perimetro massimo? Risolvere il problema per $k = \frac{17}{8}$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k = -\cos^2 x + \cos x + 2 \qquad con \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

4. È dato un segmento AC lungo $4r$; B ne è il punto medio. Si tracciano due semicirconferenze, che hanno diametri AB e BC e che si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta AC. Si conduce per B una semiretta che forma con BC un angolo variabile ed incontra in E la semicirconferenza di diametro BC. Da E si traccia la retta r parallela a AC e si indica con D il punto più vicino ad A, in cui r incontra la semicirconferenza di diametro AB.

Determinare l'angolo $C\hat{B}E$ in modo che il perimetro del triangolo BDE sia lungo $4kr$.
In quale caso il triangolo BDE ha perimetro massimo?
In quale caso il perimetro del triangolo BDE è lungo quanto il segmento AC?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k = \cos^2 x + \cos x \qquad con \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

5. Data una semicirconferenza che ha il diametro AB lungo $2r$, si traccia la retta t tangente alla semicirconferenza in A. Si conduce per A una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la semicirconferenza in un punto P.

Determinare l'angolo $P\hat{A}B$ in modo che la somma delle distanze di P da B e dalla retta t valga $2kr$. In quale caso la somma delle distanze di P da B e da t è massima?

Risolvere il problema per $k = \frac{7}{6}$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k = -\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x + 1 \qquad con \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

6. Data la semicirconferenza che ha il diametro AB lungo $2r$, si traccia la retta t tangente alla semicirconferenza in B. Si conduce per A una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la semicirconferenza in un punto P; si indica con H la proiezione ortogonale di P su t.

Determinare l'angolo $P\hat{A}B$ in modo che risulti

$$\overline{AP}+2\overline{PH}=2kr.$$

In quale caso risulta massima la somma

$$\overline{AP}+2\overline{PH}?$$

E in quale caso la stessa somma è uguale al doppio del diametro della semicirconferenza?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k=-2\cos^2 x+\cos x+2 \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

7. Calcolare uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, che ha l'ipotenusa lunga a, sapendo che la somma di un cateto e della proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa vale ka.
In quale caso la somma di un cateto e della sua proiezione sull'ipotenusa vale proprio a?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k=sen^2 x+sen\, x \qquad con \quad 0°\leq x<90°).$$

8. Un triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa BC lunga $2a$; si indica con P il punto medio del cateto AC e con Q la proiezione ortogonale di P su BC.
Determinare l'angolo $A\hat{C}B$ in modo che risulti

$$\overline{QC}+2\overline{PC}=ka.$$

In quale caso vale $2a$ la somma

$$\overline{QC}+2\overline{PC}?$$

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$sen^2 x+2sen\, x=k \qquad con \quad 0°\leq x<90°).$$

9. È dato un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Si considera una semiretta di origine A; questa forma con OA un angolo variabile ed incontra il lato OB in un punto C.
Determinare l'angolo $O\hat{A}C$ in modo che l'area del quadrato di lato AC, diminuita dell'area del triangolo AOC valga kr.
In quale caso questa differenza di aree risulta minima? In quali casi questa differenza vale r?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,tg^2 x-tg\, x+2=2k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 45°).$$

10. È data una semicirconferenza che ha il diametro AB lungo $2r$. Per A si conduce una semiretta, che forma con AB un angolo variabile ed incontra la semicirconferenza in C. Sia D la proiezione ortogonale di C sul diametro.
Determinare l'angolo $B\hat{A}C$, in modo che risulti

$$\overline{AD}+2\overline{AC}=2kr.$$

In quale caso vale $2r$ la somma

$$\overline{AD}+2\overline{AC}?$$

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x+2\cos x=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

11. Determinare l'angolo di semiapertura di un cono, che ha l'apotema lungo a, sapendo che la sua superficie totale vale $k\pi a^2$.
In quale caso la superficie totale è uguale a quella del cerchio di raggio a?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k=sen^2 x+sen\, x \qquad con \quad 0°\leq x<90°).$$

12. Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo h e l'altro cateto che ha lunghezza non superiore ad h. Il triangolo viene fatto ruotare prima intorno a un cateto, poi intorno all'altro cateto. Sommando i volumi dei due solidi ottenuti si ha $k\pi h^3$.
Determinare l'angolo acuto adiacente al cateto lungo h.
In quale caso la somma dei volumi è uguale al volume della semisfera di raggio h?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$tg^2 x+tg\, x=3k \qquad con \quad 0\leq x\leq 45°).$$

Parte seconda

Discussione di problemi relativi ai capitoli 1 e 2 del testo

I problemi proposti nella Parte prima presentano due caratteristiche particolari:

a) richiedono solo la conoscenza delle nozioni relative alla risoluzione di triangoli rettangoli;

b) conducono a discutere equazioni che si possono scrivere nella forma:

$$az^2+bz+c=k,$$

dove:
— *a, b, c sono coefficienti numerici in cui non compare il parametro k;*
— *z è un'incognita opportunamente scelta.*

In questa Parte seconda vengono, invece, proposti problemi che hanno le caratteristiche seguenti:

a) richiedono anche la conoscenza delle nozioni relative alla risoluzione dei triangoli qualunque;

b) conducono a discutere anche delle equazioni che si possono scrivere nella forma:

$$az^2+bz+c=0,$$

dove:

— *solo "a" è un coefficiente numerico, in cui non compare il parametro k;*
— *z è sempre un'incognita opportunamente scelta.*

Sono infatti le nozioni sul coefficiente angolare di una retta, richiamate nel cap. 2 del testo, che consentono di discutere graficamente anche le equazioni che presentano il parametro sia nel coefficiente b che nel coefficiente c.

Ecco un esempio. Si deve discutere l'equazione

$$z^2+(m-2)z+m=0 \qquad \text{con} \qquad 0\leq z\leq \frac{3}{2},$$

cioè si vogliono trovare i valori di m, per cui l'equazione ammette soluzioni reali comprese fra 0 e $\frac{3}{2}$.

Prima di tutto si riscrive l'equazione in modo che tutti i termini in cui compare il parametro m si trovino, per esempio, al 2° membro, mentre al primo membro rimangono gli altri termini. Si scrive dunque:

$$2z-z^2=mz+m, \qquad \text{cioè} \qquad 2z-z^2=m(z+1).$$

Ora si considera l'equazione come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=m(z+1) \\ y=2z-z^2 \qquad \text{con} \qquad 0\leq z\leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Questo sistema ha infatti un'immediata visualizzazione grafica:

— *$y=m(z+1)$ è l'equazione del fascio di rette passanti per il punto $P(-1,0)$; il parametro m indica il coefficiente angolare variabile delle rette del fascio. Per determinare una retta del fascio, bisogna fissare un valore di m;*

— *$y=2z-z^2$ è l'equazione di una parabola;*

— *$0\leq z\leq \frac{3}{2}$ fissa l'arco di parabola formato dai punti che hanno l'ascissa z compresa fra 0 e $\frac{3}{2}$.*

Ricordiamo anche ora che il sistema conduce a trovare i punti di intersezione fra la parabola e le rette del fascio. Siamo così condotti a trovare i valori di m richiesti, determinando le rette del fascio che incontrano la parabola nell'arco scelto.

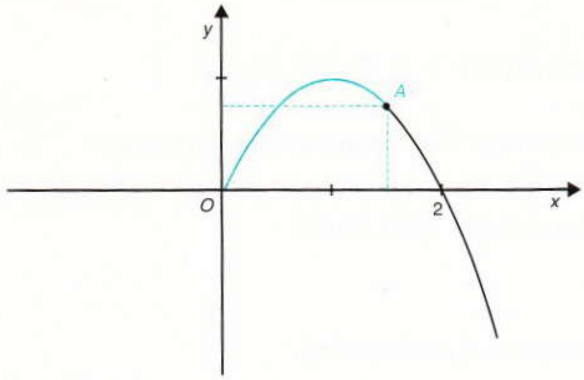

Fig. 15

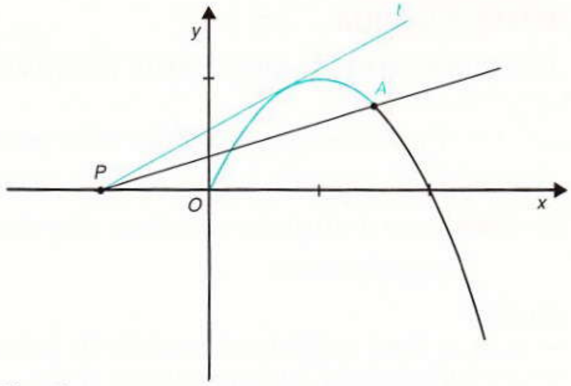

Fig. 16

Cominciamo col disegnare la parabola, che ha il vertice V individuato dalle coordinate seguenti:

$$z_v=\frac{-2}{-2}=1 \qquad e \qquad y_v=2-1=1.$$

Si ottiene $V(1,1)$.

È poi immediato verificare che la parabola passa per l'origine $O(0,0)$; *si ottiene così il grafico riportato in Fig. 15.*

Ora è immediato individuare l'arco che interessa: è l'arco OA indicato in colore in Fig. 15: A è il punto della parabola che ha le coordinate seguenti

$$z=\frac{3}{2} \quad e \quad y=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}, \qquad cioé \quad A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$$

e O è l'origine.

Osservando poi la Fig. 16, si capisce che, per le rette del fascio che ha centro in $P(-1,0)$, *possono presentarsi le seguenti situazioni particolari.*

a) La retta è tangente alla parabola nell'arco OA

Questo avviene quando il sistema assegnato ha le due soluzioni coincidenti, cioè l'equazione

$$z^2+(m-2)z+m=0$$

ha le due soluzioni coincidenti. In tal caso deve essere

$$\Delta=(2-m)^2-4m=0,$$

ossia

$$m^2-8m+4=0.$$

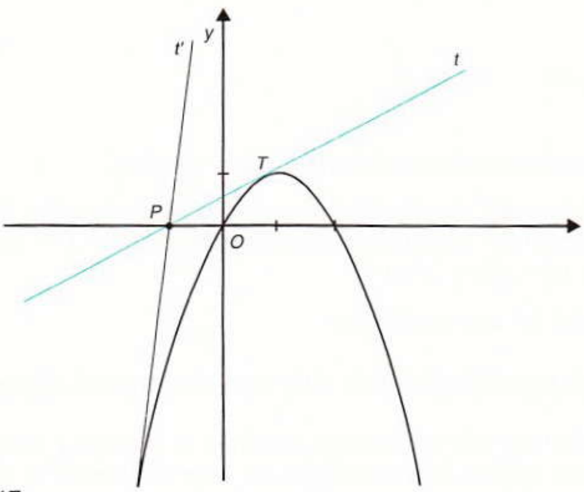

Fig. 17

Risolvendo l'equazione, si ottengono due valori di m:

$$m_1=4+2\sqrt{3}\cong 7{,}5 \qquad e \qquad m_2=4-2\sqrt{3}\cong 0{,}5;$$

dal punto P si possono infatti condurre due tangenti alla parabola (Fig. 17), ma di queste due rette ci interessa quella con pendenza minore; questa tocca la parabola nel punto T d'ascissa

$$z=\sqrt{3}-1\cong 0{,}7.$$

Concludiamo così che una retta del fascio è tangente alla parabola nell'arco OA, se si sceglie

$$m=4-2\sqrt{3}.$$

b) La retta passa per il punto $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$

Questo avviene se le coordinate del punto A soddisfano l'equazione

$$y=m(z+1),$$

se, cioè, risulta

$$\frac{3}{4}=m\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

ossia

$$m=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

c) La retta passa per O(0,0)

In questo caso la retta coincide con l'asse delle y, che ha equazione

$$y=0;$$

perciò deve essere

$$m=0.$$

La Fig. 18 permette ora di concludere rapidamente la discussione dell'equazione:

— *per* $m=0$

si ha la retta che interseca la parabola in O e in un altro punto che non si trova sull'arco OA, perciò l'equazione ha soltanto la soluzione limite $z=0$;

— *per* $0<m<0{,}3$

le rette intersecano l'arco OA solo in un punto, perciò l'equazione ha una sola soluzione valida;

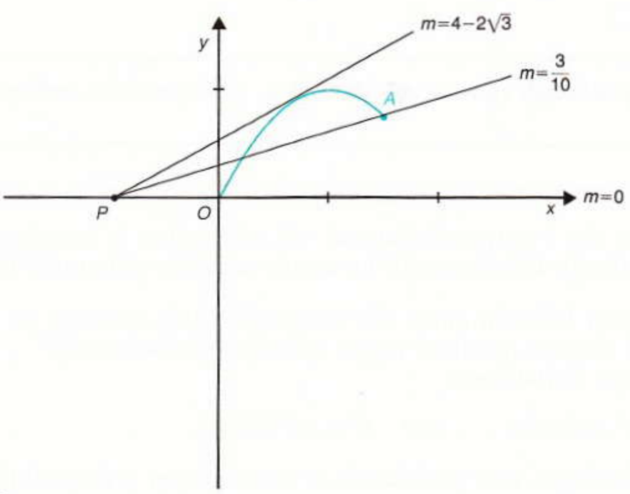

Fig. 18

— *per* $m=0,3$

la retta incontra la parabola in un punto dell'arco OA e in A, perciò l'equazione ha una soluzione valida ed una limite $\left(z=\frac{3}{2}\right)$;

— *per* $0,3<m<4-2\sqrt{3}$

la retta incontra la parabola in due punti dell'arco OA, perciò l'equazione ha due soluzioni valide;

— *per* $m=4-2\sqrt{3}$

la retta è tangente alla parabola in T; si hanno due soluzioni coincidenti valide;

— *per* $m>4-\sqrt{3}$

le rette risultano esterne alla parabola, dunque l'equazione non ha soluzioni reali;

— *per* $m<0$

le rette incontrano la parabola in punti che non si trovano sull'arco OA, perciò l'equazione non ha soluzioni valide.

Le conclusioni ottenute si possono anche sintetizzare in uno schema come quello seguente.

Valori di m	*Soluzioni dell'equazione comprese fra 0 e* $\frac{3}{2}$
$m=0$	*1 soluzione limite* $z=0$
$0<m<\frac{3}{10}$	*1 soluzione valida*
$m=\frac{3}{10}$	*1 soluzione valida e 1 limite* $\left(z=\frac{3}{2}\right)$
$\frac{3}{10}<m<4-2\sqrt{3}$	*2 soluzioni valide*
$m=4-2\sqrt{3}$	*2 soluzioni coincidenti valide* $z_1=z_2=\sqrt{3}-1$
$m>4-2\sqrt{3}$	*nessuna soluzione*
$m<0$	*nessuna soluzione valida*

Discutere i problemi proposti negli esercizi dal n. 13 al n. 24 seguendo le indicazioni presentate all'inizio della Parte prima.

13. Sul diametro AB lungo $2r$ di una semicirconferenza si è fissato il segmento AH lungo $\frac{3}{2}r$; da H si conduce la retta a, che è perpendicolare ad AB ed incontra la semicirconferenza in P. Da A si traccia una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la retta a in N e l'arco AP in M.
Determinare l'angolo $B\hat{A}M$ in modo che il segmento MN sia lungo kr.
In quale caso MN è lungo quanto il raggio della semicirconferenza?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\frac{3}{2}-2\cos^2 x=k\cos x \qquad \text{con } 30°\leq x\leq 90°).$$

Come cambia il problema, se si richiede che la semiretta per A incontri l'arco PB di semicirconferenza?

14. Sul diametro AB lungo $2r$ di una semicirconferenza si è fissato il segmento AH lungo $\frac{1}{2}r$; da H si conduce la retta a, che è perpendicolare ad AB ed incontra la semicirconferenza in P. Da A si traccia una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la retta a in N e l'arco BP in M.
Determinare l'angolo $B\hat{A}M$ in modo che il segmento MN sia lungo kr.
In quale caso MN è lungo quanto il raggio della semicirconferenza?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\cos^2 x-\frac{1}{2}=k\cos x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 60°).$$

Come cambia il problema, se si richiede che la semiretta per A incontri l'arco AP di semicirconferenza?

15. Data una semicirconferenza con il diametro AB lungo $2r$, si prolunga il diametro dalla parte di A di un segmento AH lungo r e da H si conduce la retta a perpendicolare ad HB. Da A si traccia una retta che forma con AB un angolo variabile, incontrando la semicirconferenza in D e la retta a in C.
Determinare l'angolo $B\hat{A}D$, in modo che il segmento DC sia lungo kr.
In quale caso CD è lungo il doppio del diametro?
Quale particolarità presenta il problema, se si sceglie $k=\sqrt{8}$?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\cos^2 x+1=k\cos x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

16. In un triangolo rettangolo ABC il cateto AC non supera il cateto AB e l'ipotenusa è lunga $2a$. Dal punto medio M di BC si conduce la perpendicolare a BC, che incontra il cateto AB nel punto P.
Determinare l'angolo $C\hat{B}A$ in modo che risulti:

$$\overline{AC}\cdot\overline{PM}=2ka^2.$$

Risolvere il problema per $k=\frac{1}{2}$.
(Si è condotti a discutere l'equazione:

$$1-\cos^2 x=k\cos x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 45°).$$

17. Nel trapezio $ABCD$ sono retti gli angoli di vertice A e B e la diagonale AC, lunga d, è perpendicolare al lato obliquo DC.
Determinare l'angolo $C\hat{A}D$ in modo che risulti:

$$\overline{AD}+\overline{BC}=k\overline{CD}.$$

Risolvere il problema per $k=2$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2-\operatorname{sen}^2 x=k\operatorname{sen} x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x<90°).$$

18. Data una semicirconferenza che ha centro O e diametro AB lungo $2r$, si considera una semiretta uscente da O, che forma con OA un angolo acuto variabile ed incontra la semicirconferenza in C. Da C si traccia la retta a, che è parallela al diametro AB ed incontra la semicirconferenza in D. Si conducono infine le rette t e t' tangenti alla semicirconferenza in C e D e si indicano con T e T' i punti in cui le rette t e t' incontrano la retta AB.
Determinare l'angolo $A\hat{O}C$ in modo che il perimetro del trapezio $TT'DC$ valga $k\overline{TT'}$.
In quale caso il perimetro risulta massimo?
Risolvere il problema per $k=\frac{17}{8}$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$k=-\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x+2 \qquad \text{con} \quad 0°\leq x<90°).$$

19. È dato un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Da O si conduce una semiretta che forma con OA un angolo variabile ed incontra l'arco AB in P. Si indica infine con H la proiezione ortogonale di P sul raggio OA.
Determinare l'angolo $A\hat{O}P$, in modo che risulti:

$$\overline{OH}^2+\overline{AP}^2=kr^2.$$

Risolvere il problema per $k=\frac{3}{2}$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x-2\cos x+2=k \qquad \text{con} \quad 0\leq x\leq 90°).$$

20. È dato un settore circolare AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Da O si conduce una semiretta che forma con OA un angolo variabile ed incontra l'arco AB in un punto P. Si congiunge il punto P con il punto medio M del raggio OA e si considera la proiezione ortogonale H di P sul raggio OB.

Determinare l'angolo $A\hat{O}P$, in modo che risulti:

$$\overline{PM}^2+\overline{PH}^2=kr^2.$$

In quale caso la somma

$$\overline{PM}^2+\overline{PH}^2$$

assume valore minimo?

Risolvere il problema per $k=\frac{9}{8}$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x-\cos x+\frac{5}{4}=k \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

21. È dato un settore circolare che ha l'angolo al centro $A\hat{O}B$ ampio 120° e il raggio lungo r. Si conduce per O una semiretta che forma con OA un angolo variabile ed incontra l'arco AB in P; si considera la proiezione ortogonale H di P su OA.

Determinare l'angolo $A\hat{O}P$ in modo che risulti:

$$\overline{BH}^2=kr^2.$$

Risolvere il problema per $k=\frac{7}{8}$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x \cos x+1=k \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 120°).$$

22. Un triangolo isoscele ABC ha i lati uguali AB e AC lunghi l. Determinare l'angolo $A\hat{B}C$, in modo che la somma dell'altezza relativa alla base e del raggio della circonferenza circoscritta valga kl. Quale particolarità presenta il problema per $k=\sqrt{2}$?

(Valendosi anche delle nozioni sul raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo esposte alle pp. 211, 233, 234, si arriva a discutere l'equazione:

$$\frac{1}{2}+\operatorname{sen}^2 x=k \operatorname{sen} x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

23. È data una semicirconferenza che ha centro O e diametro AB lungo $2r$. Da O si conduce una semiretta che forma con OB un angolo acuto variabile ed incontra la semicirconferenza in C; si conduce la retta t tangente alla semicirconferenza in C e si indica con D il punto in cui t incontra la semiretta OB. Ruotando la figura intorno alla retta AB, il segmento CD e l'arco AC descrivono due superfici che hanno area S e S'.

Determinare l'angolo $B\hat{O}C$, in modo che valga k il rapporto fra $S+S'$ e l'area del cerchio di raggio r.

Quale particolarità presenta il problema per $k=4$?

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x+(2-k)\cos x+1=0 \qquad \text{con} \quad 0°\leq x<90°).$$

24. Un triangolo rettangolo ha il cateto AB lungo h e il cateto AC che ha lunghezza non superiore ad h. Il triangolo viene fatto ruotare intorno ad AB, ottenendo un solido che ha volume V; successivamente il triangolo viene fatto ruotare intorno ad AC, ottenendo un solido che ha volume V'.

Determinare l'angolo $A\hat{B}C$ in modo che valga k il rapporto fra V e V'.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{tg}^2 x=k \operatorname{tg} x \qquad \text{con} \quad 0°\leq x\leq 45°).$$

Parte terza

Discussione di problemi relativi ai capitoli 4 e 5 del testo

In questa Parte vengono proposti problemi che presentano le caratteristiche seguenti:

a) richiedono anche la conoscenza delle formule presentate nel cap. 4 del testo;
b) conducono a discutere anche equazioni che si scrivono nella forma:

$$a\,sen\,x+b\cos x+c=k$$

oppure:

$$a\,sen^2 x+b\,sen\,x\cos x+c\cos^2 x+d=k,$$

dove a, b, c, d sono coefficienti numerici in cui non compare il parametro e x è l'angolo incognito.

Le nozioni esposte nel cap. 5, e, in particolar modo, le considerazioni esposte nei paragrafi 7 e 10, consentono di discutere graficamente anche queste equazioni. Ecco due esempi.

A) Si deve discutere l'equazione

$$sen\,x+\sqrt{3}\cos x=k \qquad con \quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2},$$

cioè si debbono determinare i valori di k per cui l'equazione ammette soluzioni comprese fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Si interpreta l'equazione come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=sen\,x+\sqrt{3}\cos x \qquad con \quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2} \\ y=k. \end{cases}$$

Si osserva poi che la funzione

$$y=sen\,x+\sqrt{3}\cos x \tag{1}$$

si può scrivere nella forma

$$y=r\,sen\,(x+\varphi),$$

purché si scelga

$$r=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \qquad e \qquad \varphi=arctg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Possiamo dunque scrivere la funzione (1) nella forma:

$$y=2\,sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

È immediato ora passare ad una visualizzazione grafica del sistema

$$\begin{cases} y=2\,sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad con \quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2} \\ y=k. \end{cases}$$

Si ha infatti che:

— $y=2\,sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ *rappresenta una sinusoide, che ha subito delle trasformazioni note;*

— $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ *fissa l'arco di sinusoide "composto" dai punti che hanno ascissa x compresa fra 0 e* $\frac{\pi}{2}$;

— $y=k$ *rappresenta il fascio di rette parallele all'asse delle y.*

Ricordiamo ancora una volta che il sistema conduce a trovare i punti di intersezione fra la sinusoide e le rette del fascio. Siamo così condotti a trovare i valori di k richiesti, determinando le rette del fascio che incontrano la sinusoide nell'arco scelto.

Cominciamo dunque col disegnare la sinusoide, che ha subito, lungo l'asse delle y, uno stiramento che raddoppia le ordinate, mentre ha subito lungo l'asse delle x una traslazione di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra.

L'arco che interessa è indicato in colore nella Fig. 19: A è il punto della sinusoide che ha le coordinate seguenti:

$$x=0 \quad e \quad y=2\,sen\left(0+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3},$$

cioè risulta $A(0,\sqrt{3})$;

B è, invece, il punto che ha le coordinate:

$$x=\frac{\pi}{2} \quad e \quad y=2\,sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\,sen\left(\frac{5}{6}\pi\right)=1,$$

ossia $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Osserviamo, inoltre, che nell'arco scelto cade uno dei punti in cui la funzione assume il valore massimo: è il punto C che ha le coordinate seguenti

$$y=2 \quad e \quad x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6};$$

si individua così il punto

$$C\left(\frac{\pi}{6},2\right).$$

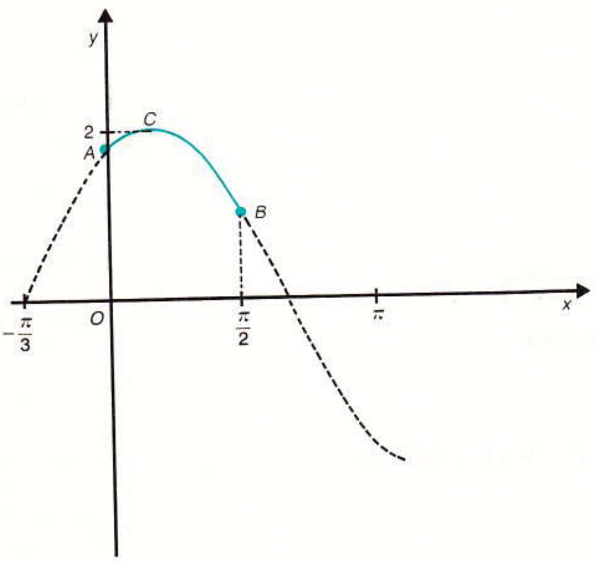

Fig. 19

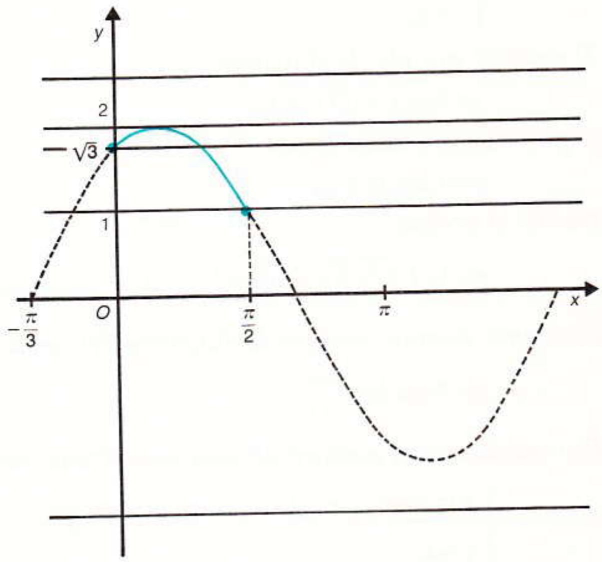

Fig. 20

Ora è immediato rendersi conto, esaminando la Fig. 20, delle situazioni che possono presentarsi per le rette del fascio

$$y=k.$$

Si possono avere le situazioni seguenti.

a) Le rette sono esterne all'arco AB di sinusoide. *Questo accade per*

$$k>2 \quad o \quad k<-2.$$

In tal caso l'equazione data non ha soluzioni.

b) ***La retta è tangente alla curva nell'arco AB.*** *Questo accade per*

$k=2.$

In tal caso l'equazione ha due soluzioni coincidenti:

$x_1=x_2=\frac{\pi}{6}.$

c) ***Le rette incontrano l'arco AB in due punti.*** *Questo accade per*

$\sqrt{3}<k<2.$

In questo caso l'equazione ha due soluzioni valide.

d) ***La retta passa per A e per un altro punto dell'arco AB.*** *Questo avviene per*

$k=\sqrt{3}.$

In tal caso l'equazione ha una soluzione valida ed una limite $(x=0)$.

e) ***Le rette passano per un solo punto dell'arco AB.*** *Questo avviene per*

$1<k<\sqrt{3}.$

In questo caso l'equazione ha una sola soluzione valida.

f) ***La retta passa per B.*** *Questo accade per*

$k=1.$

In tal caso l'equazione ha una sola soluzione limite $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$.

g) ***Le rette non incontrano la curva nell'arco AB.*** *Questo avviene per*

$k<1.$

In tal caso l'equazione non ha soluzioni valide.

I risultati ottenuti possono essere riuniti in uno schema come quello seguente.

Valori di k	*Soluzioni dell'equazione comprese fra 0 e* $\frac{\pi}{2}$
$k>2$	*nessuna soluzione*
$k=2$	*2 soluzioni coincidenti* $x_1=x_2=\frac{\pi}{6}$
$\sqrt{3}<k<2$	*2 soluzioni valide*
$k=\sqrt{3}$	*1 soluzione valida e una limite* $(x=0)$
$1<k<\sqrt{3}$	*1 soluzione valida*
$k=1$	*1 soluzione limite* $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$
$k<1$	*nessuna soluzione*

B) Si deve discutere l'equazione

$$\sqrt{3}\,sen^2 x+2\,sen\,x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=k \qquad con \quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{3}.$$

Si considera l'equazione come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=k \\ y=\sqrt{3}\,sen^2 x+2\,sen\,x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x \end{cases} \qquad (2)$$

con $0\leq x\leq\frac{\pi}{3}.$

Per tracciare il grafico della funzione (2), la si riscrive prima nella forma

$y=\sqrt{3}\cos 2x+sen\,2x$

(valendosi delle formule di duplicazione) e poi nella forma

$$y=2\,sen\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad ossia \qquad y=2\,sen\,2\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Il grafico della funzione è ancora una sinusoide, che ha subito le seguenti trasformazioni:

— *lungo l'asse delle y, uno stiramento che raddoppia le ordinate;*

— *lungo l'asse delle x, una contrazione che dimezza le ascisse, ed una traslazione verso sinistra di $\frac{\pi}{6}$.*

In Fig. 21 è riportato il grafico di questa sinusoide: è disegnato in colore l'arco AB che interessa ed è indicato con C il punto di massimo, che cade nell'arco AB.
I punti A, B, C hanno le coordinate seguenti:

$$A:\ x=0 \quad e \quad y=2\,sen\,2\frac{\pi}{6}=2\,sen\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \quad \rightarrow A(0,\sqrt{3})$$

$$B:\ x=\frac{\pi}{3} \quad e \quad y=2\,sen\,2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\,sen\,\pi=0 \rightarrow B\left(\frac{\pi}{3},0\right)$$

$$C:\ y=2 \quad e \quad x=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12} \quad \rightarrow C\left(\frac{\pi}{12},2\right).$$

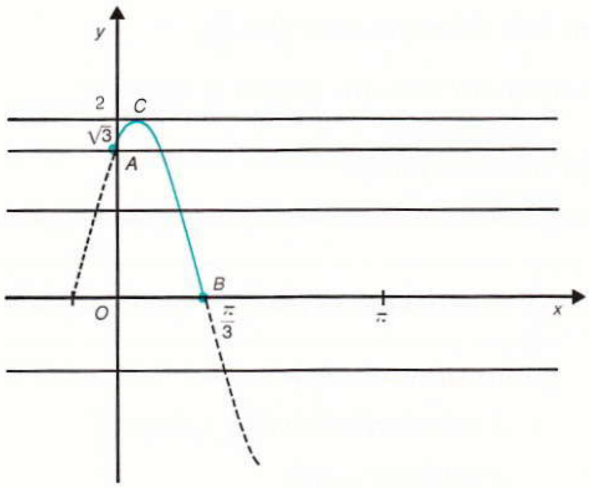

Fig. 21

Basandosi sulla Fig. 21, si può ora procedere alla discussione per via grafica, ottenendo i risultati riportati nello schema seguente.

Valori di k	*Soluzioni dell'equazione comprese fra 0 e $\frac{\pi}{3}$*
$k>2$	*nessuna soluzione*
$k=2$	*2 soluzioni coincidenti* $x_1=x_2=\frac{\pi}{12}$
$\sqrt{3}<k<2$	*2 soluzioni valide*
$k=\sqrt{3}$	*1 soluzione valida ed una limite* $(x=0)$
$0<k<\sqrt{3}$	*1 soluzione valida*
$k=0$	*1 soluzione limite* $\left(x=\frac{\pi}{3}\right)$
$k<0$	*nessuna soluzione*

È opportuno osservare che la discussione delle equazioni parametriche del tipo

$$a\,sen\,x+b\cos x+c=0 \tag{3}$$

può essere condotta anche con altri metodi, che risultano particolarmente efficienti quando il parametro k non compare solo nel termine noto.

Segnaliamo in particolare due metodi che si basano sulle considerazioni esposte nel complemento al cap. 5 (pp. 324-329).

1. Metodo basato sulle formule parametriche

Le formule parametriche, esposte nel complemento al cap. 4 «Altre formule», trasformano le equazioni del tipo (3) in equazioni di 2° grado nell'incognita

$$t=tg\frac{x}{2}.$$

Così si svolge la discussione coi procedimenti esposti nelle Parti prima e seconda di quest'Appendice.

2. Metodo basato sulla geometria analitica

Questo metodo è basato sulla definizione di seno e coseno dell'arco x incognito: x è la lunghezza dell'arco AP di circonferenza goniometrica e risulta che:

cos x è l'ascissa X di P, *sen x è l'ordinata Y di P.*

Così, invece di cercare l'arco x, si cercano le coordinate X e Y di P.
Al posto dell'equazione (3) si scrive allora il sistema seguente:

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ aY+bX+c=0. \end{cases}$$

Ora la prima equazione rappresenta sempre la circonferenza goniometrica, mentre la seconda equazione rappresenta un fascio di rette. Così si svolge una discussione grafica, valutando le intersezioni delle rette del fascio con la circonferenza.

Vediamo rapidamente un esempio di applicazione di quest'ultimo metodo. Si deve discutere l'equazione

$$sen\,x-m\cos x=m \qquad \text{con} \quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}.$$

Invece dell'equazione data si considera il sistema

$$\begin{cases} Y-mX=m \\ X^2+Y^2=1 \qquad \text{con} \quad 0\leq X\leq 1 \quad e \quad 0\leq Y\leq 1. \end{cases}$$

Riscrivendo la prima equazione nella forma

$$Y=m(X+1),$$

si riconosce facilmente che essa rappresenta un fascio di rette per P(−1,0); invece la seconda equazione con le relative disuguaglianze individua l'arco AB di circonferenza goniometrica, indicato in colore nella Fig. 22.

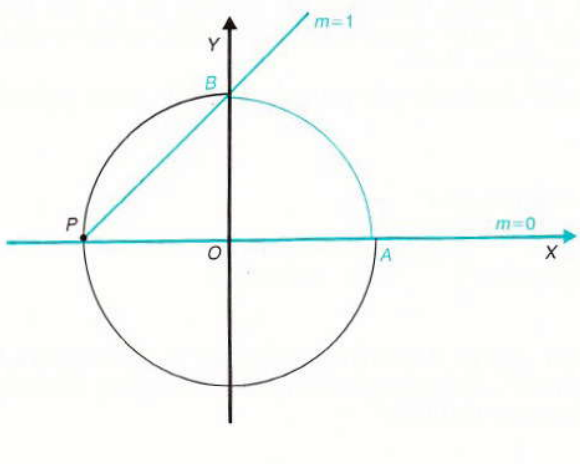

Fig. 22

Si trova subito che la retta del fascio passante per A ha il coefficiente angolare

$$m=0;$$

mentre la retta del fascio che passa per B ha il coefficiente angolare

$$m=1.$$

Basandosi sul grafico di Fig. 22, è immediato concludere che l'equazione ha una sola soluzione, se scegliamo

$$0 \leq m \leq 1.$$

Discutere i problemi proposti negli esercizi dal n. 25 al n. 45. È opportuno analizzare attentamente l'equazione parametrica ottenuta per decidere il metodo di discussione più opportuno.

25. Dal punto medio O di un segmento AB lungo $2l$ si traccia una semiretta, che forma con OB un angolo acuto variabile. Si proietta ortogonalmente il punto B sulla semiretta, ottenendo il punto B'.

Determinare l'angolo $B\hat{O}B'$, in modo che risulti

$$\overline{OB}'+\overline{BB}'=kl.$$

In quale caso la somma

$$\overline{OB}'+\overline{BB}'$$

diventa massima?

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x+\cos x=k \qquad con \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

26. Dato un triangolo equilatero ABC di lato l, si conduce, internamente all'angolo $B\hat{A}C$, una semiretta uscente da A e si proiettano ortogonalmente su di essa i punti B e C, ottenendo i punti M ed N.

Determinare l'angolo $B\hat{A}M$ in modo che valga la relazione

$$\overline{BM}+\overline{CN}=kl.$$

In quale caso la somma $\overline{BN}+\overline{CM}$ risulta massima?

(Valendosi anche delle formule di prostaferesi, si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos(x-30°)=k \qquad con \quad 0° \leq x \leq 60°).$$

27. Sui due lati OX e OY di un angolo retto di considerano, rispettivamente, due punti M ed N, tali che $OM=1$ e $ON=\sqrt{3}$. Si traccia una semiretta uscente da O, che forma con OX un angolo variabile e si indicano con M' ed N' le proiezioni di M ed N su tale semiretta; si considera, infine, il punto medio P del segmento $M'N'$.

Determinare l'angolo $N\hat{O}P$, in modo che il triangolo NOP abbia area che vale

$$k\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

In quale caso l'area risulta massima?

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x=\frac{k}{2} \qquad con \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

28. In una data circonferenza, che ha il diametro AB lungo $2r$, si considera la corda BC, che forma con AB un angolo ampio 60°. Nel semicerchio che non contiene C, si considera una corda BD, che forma con AB, un angolo variabile.

Determinare l'angolo $D\hat{B}A$ in modo che il triangolo ACD abbia il perimetro lungo $k\sqrt{3}r$.
In quale caso il perimetro del triangolo ACD è massimo?
(Tenendo anche presente il teorema della corda, esposto a p. 211, e le formule di prostaferesi, si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,sen\,(x+30°)+1=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

29. Un triangolo ABC ha l'angolo A ampio 60°; determinare l'ampiezza dell'angolo B, in modo che risulti:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{BC}}=k.$$

In quale caso il rapporto

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

risulta massimo?
(Valendosi del teorema dei seni e delle formule di prostaferesi si arriva a discutere l'equazione:

$$2\cos(x-60°)=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 120°).$$

30. In una semicirconferenza con il diametro AB lungo $2r$ si conduce una corda AC, che forma con AB un angolo variabile ed una corda CD lunga quanto il raggio.
Determinare l'angolo $B\hat{A}C$ in modo che il perimetro del quadrilatero $ABDC$ valga kr.
In quale caso il perimetro del quadrilatero risulta massimo?
(È opportuno ricordare la relazione fra angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e il teorema della corda, esposto a p. 211; valendosi delle formule di prostaferesi, si arriva a discutere l'equazione:

$$4\cos 15°\,sen\,(x-15°)+3=k \qquad con \quad 30°\leq x\leq 60°).$$

31. È dato un triangolo equilatero ABC con il lato lungo l. Si conduce, internamente all'angolo $B\hat{A}C$, una semiretta di origine A e si indicano con M ed N le proiezioni ortogonali di B e di C su tale semiretta.
Determinare l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}M$ in modo che risulti:

$$\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=kl^2.$$

In quale caso la somma $\overline{BM}^2+\overline{CN}^2$ risulta minima?
Risolvere il problema per $k=\frac{1}{2}$.
(Valendosi delle formule di sottrazione, si arriva a discutere l'equazione:

$$\frac{3}{4}\cos^2 x+\frac{5}{4}sen^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,x\cos x=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 60°).$$

32. È dato un triangolo equilatero ABC con il lato lungo l. Si conduce per il vertice A una retta r che non interseca il triangolo e forma con il lato AC un angolo variabile. Si indicano con M ed N le proiezioni ortogonali di B e di C su tale retta.
Determinare lampiezza dell'angolo $C\hat{A}N$ in modo che l'area del trapezio $BMNC$ valga kl^2.
In quale situazione il trapezio ha l'area massima?
Risolvere il problema per $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(Valendosi anche delle formule di prostaferesi, si arriva a discutere l'equazione:

$$\sqrt{3}\cos^2(x-60°)=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 120°).$$

33. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AC lungo l ed il cateto AB lungo $2l$. Si conduce per il vertice A una retta r che non interseca il triangolo e forma con il lato AC un angolo variabile. Si indicano con M ed N le proiezioni ortogonali di B e di C su tale retta.
Determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{A}N$ in modo che l'area del trapezio $BMNC$ valga kl^2.
In quale situazione l'area del trapezio è massima?
Risolvere il problema per $k=\frac{9}{2}$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,sen^2 x+5\,sen\,x\cos x+2\cos^2 x=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

34. È dato un triangolo rettangolo ABC con l'ipotenusa BC lunga $2l$ di cui O è il punto medio. Si costruisce sul cateto minore AB il triangolo equilatero ABP.

Determinare l'angolo $A\widehat{B}C$ in modo che risulti:

$$\overline{PO}=kl.$$

In quale situazione la lunghezza di PO risulta massima?

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

35. È data una semicirconferenza che ha centro O e diametro AB lungo $2r$. Per A si traccia una semiretta che forma con AB un angolo variabile ed incontra la semicirconferenza in C. Si conduce per O un raggio OD parallelo ad AC e si considera il trapezio $OACD$.

Determinare l'angolo $B\widehat{A}C$, in modo che il perimetro del trapezio valga $4kr$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2k=-2\,sen^2 x+sen\,x+2 \qquad con \quad 0\leq x\leq 90°).$$

36. In una data circonferenza di centro O e raggio r si è tracciata una corda PQ lunga quanto il raggio. Si traccia la retta t, tangente alla circonferenza in P. Da O si traccia una semiretta che forma con PO un angolo acuto variabile ed incontra la retta t in M.

Determinare l'angolo $P\widehat{O}M$ in modo che nel triangolo PQM si abbia:

$$\overline{PM}^2+\overline{QM}^2=k\overline{PQ}^2.$$

Determinare i valori di k per cui il triangolo risulta.

a) rettangolo in Q,
b) rettangolo in M,
c) isoscele sulla base PQ,
d) isoscele sulla base PM.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,tg^2 x-\sqrt{3}\,tg\,x+1+k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 60°).$$

37. Data una circonferenza di centro O e raggio r, si conducono per un suo punto A la tangente t e la corda AB, che forma con t un angolo di 60°. Si traccia per B una semiretta, che forma con la corda AB un angolo variabile ed incontra l'arco AB in un punto M e la retta t in un punto N.

Determinare l'angolo $A\widehat{B}N$ in modo che risulti:

$$\overline{BM}=k\overline{AN}.$$

(È opportuno ricordare le seguenti nozioni: la proprietà relativa agli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, il teorema della corda, il teorema dei seni, le formule di sottrazione. Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,sen^2 x+k\,sen\,x-\frac{3}{2}=k.$$

Si può scegliere come arco AB il maggiore o il minore dei due archi sottesi dalla corda AB; confrontare lo svolgimento del problema nei due casi).

38. Un triangolo ABC ha l'angolo $\widehat{B}$ doppio dell'angolo $\widehat{C}$ e il lato AC lungo b.

Determinare l'angolo $\widehat{C}$ in modo che il lato BC sia lungo $2kb$.

(Valendosi del teorema dei seni e delle formule di triplicazione, esposte nei Complementi del cap. 4 (p. 293), si arriva a discutere l'equazione:

$$4\cos^2 x-1=4k\cos x \qquad con \quad 0°\leq x\leq 60°).$$

39. Un rettangolo ha la diagonale lunga d, che forma un angolo x variabile con un lato. Il rettangolo ruota intorno a questo lato, generando un cilindro.

Determinare l'angolo x in modo che valga k il rapporto fra la superficie del cilindro e la superficie del cerchio di raggio d.

Risolvere il problema per $k=2$.

(Si arriva a discutere l'equazione:

$$2\,sen^2 x+2\,sen\,x\cos x=k \qquad con \quad 0°\leq x\leq 90°).$$

40. Un triangolo rettangolo ABC ruota intorno all'ipotenusa BC lunga l.
Determinare gli angoli acuti del triangolo in modo che la superficie di rotazione ottenuta abbia l'area che vale $k\pi$ volte l'area del triangolo.
In quale situazione la superficie di rotazione ha l'area massima?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x+\cos x=k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

41. Un triangolo rettangolo ABC, che ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga h, ruota intorno all'ipotenusa BC.
Determinare gli angoli acuti del triangolo in modo che la superficie di rotazione ottenuta abbia l'area che vale $2k\pi$ volte l'area del triangolo.
In quale situazione la superficie di rotazione ha l'area massima?
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x+\cos x=k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

42. In una semicirconferenza, che ha centro O e diametro AB lungo $2r$, si sceglie una corda MN in modo che l'angolo $M\hat{O}N$ sia retto. Si fa ruotare la corda MN intorno ad AB.
Determinare l'angolo $B\hat{O}N$, in modo che la superficie così generata abbia area $k\pi r^2$.
In quale situazione si ottiene la superficie d'area massima?
Risolvere il problema per $k=\sqrt{3}$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\sqrt{2}\,(\operatorname{sen} x+\cos x)=k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

43. Un cilindro ed un cono di uguale altezza h, hanno lo stesso volume.
Determinare l'angolo di apertura del cono in modo che valga k il rapporto fra la superficie totale del cilindro e la superficie laterale del cono.
Risolvere il problema per $k=2$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x=k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

44. Si taglia una semisfera, che ha centro O e raggio r, con un piano parallelo alla base, ottenendo come sezione un cerchio. Si costruisce un cono che ha come base la sezione prima ottenuta e come vertice O. Si indica con S la superficie laterale di questo cono; si indica, invece, con S' la superficie della zona sferica compresa fra il piano secante e la base della semisfera.
Determinare l'apertura del cono in modo che valga k il rapporto fra $S+S'$ e la superficie della semisfera.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x-2\cos x=2k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$

45. Un settore circolare AOB è parte di un cerchio di centro O e raggio $OA=OB=r$.
Il settore ruota intorno al raggio OA, generando un solido che ha la superficie totale di area S.
Determinare l'angolo al centro acuto $A\hat{O}B$, in modo che S valga $k\pi r^2$.
(Si arriva a discutere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x-2\cos x+2=k \qquad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 90°).$$