2
Esercizi

Sulla nozione di seno, coseno e tangente di un angolo mediante la circonferenza goniometrica

1. Indicare i seguenti punti di cui sono assegnate le coordinate polari:

$P(1,60°)$,
$Q(1,135°)$,
$R(1,210°)$,
$S(1,300°)$.

Determinare seno e coseno degli angoli di 60°, 135°, 210°, 300°.
È possibile determinare seno e coseno degli angoli precedenti senza usare il calcolatore tascabile?

2. Ripetere l'esercizio n. 1 a partire dai punti seguenti:

$P(1,45°)$,
$Q(1,150°)$,
$R(1,240°)$,
$S(1,315°)$.

3. Ripetere l'esercizio n. 1 a partire dai punti seguenti:

$P(1,18°)$,
$Q(1,108°)$,
$R(1,198°)$,
$S(1,342°)$.

4. Determinare, con il calcolatore tascabile, seno e coseno dei seguenti angoli; disegnare quindi gli angoli sulla circonferenza goniometrica:

20°, 95°, 170°, 185°, 260°, 290°, 350°.

5. Ripetere l'esercizio precedente a partire dai seguenti angoli:

80°20′45″, 123°33′43″, 231°10′51″, 349°12′38″.

6. Determinare, con l'aiuto del calcolatore, la tangente dei seguenti angoli e disegnare gli angoli sulla circonferenza goniometrica:

5°, 85°, 95°, 175°, 185°, 265°, 275°, 355°.

7. Ripetere l'esercizio n. 6 a partire dai seguenti angoli:

10°10′10″, 79°49′50″, 100°10′10″, 169°49′50″, 190°10′10″, 349°49′50″.

Oltre alle funzioni goniometriche già studiate si introducono altre funzioni, che ora esaminiamo. Disegnato l'angolo $A\hat{O}P=\alpha$ sulla circonferenza goniometrica (Fig. 1), si traccia la tangente s alla circonferenza nel punto B e si considera il punto S, in cui la retta OP incontra la retta s.
Si definisce ***cotangente dell'angolo*** α *l'ascissa del punto S, cioè:*

$$\text{ctg}\,\alpha=\text{ascissa di } S.$$

8. Per quali valori dell'angolo α non esiste ctg α?
Determinare la cotangente dei seguenti angoli:

30°, 45°, 90°, 135°, 225°, 270°, 315°.

Come varia il segno di ctg α all'aumentare dell'angolo da 0° a 360°?

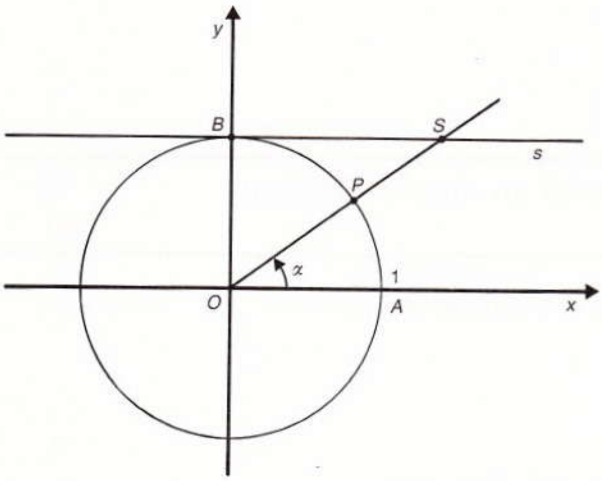

Fig. 1

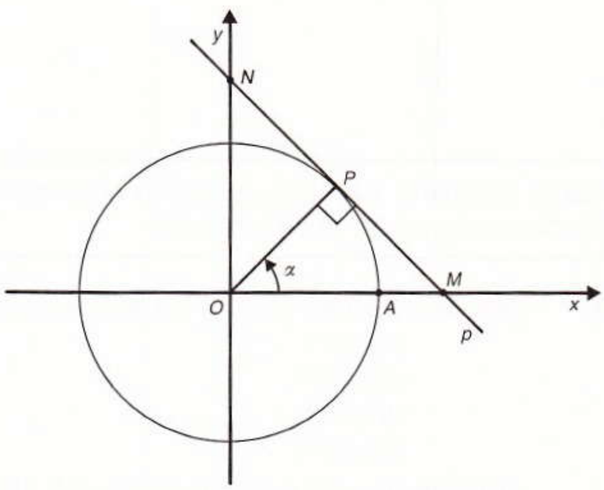

Fig. 2

Disegnato sulla circonferenza goniometrica l'angolo $A\hat{O}P=\alpha$ (Fig. 2), si traccia la tangente p alla circonferenza in P e si determina il punto M in cui la retta p incontra l'asse delle x.
Si definisce ***secante dell'angolo*** α *l'ascissa del punto M, cioè:*

$$\sec\alpha=\text{ascissa del punto } M.$$

9. Per quali valori dell'angolo non esiste la sec α?
Determinare la secante dei seguenti angoli:

0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

Come varia il segno di sec α al variare dell'angolo da 0° a 360°?

Disegnato sulla circonferenza goniometrica l'angolo $A\hat{O}P=\alpha$ (Fig. 2) e tracciata la tangente p alla circonferenza nel punto P, si individua il punto N in cui la retta p incontra l'asse delle y.
Si definisce ***cosecante dell'angolo*** α *l'ordinata del punto N, cioè:*

$$\text{cosec}\,\alpha=\text{ordinata di } N.$$

10. Per quali valori dell'angolo α non esiste cosec α?
Determinare la cosecante dei seguenti angoli:

30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°.

Come varia il segno di cosec α al variare dell'angolo da 0° a 360°?

11. Sappiamo che risulta

$$-1\leq \text{sen}\,\alpha\leq 1 \quad \text{e} \quad -1\leq\cos\alpha\leq 1;$$

le stesse limitazioni valgono anche per sec α e cosec α?

Sulle due relazioni fondamentali

Tenendo presenti le due relazioni fondamentali

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

scrivere nella forma più breve le seguenti espressioni.

12. $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+\text{sen}^2\beta+\cos^2\beta$ [2]

13. $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-1$ [$\text{tg}\,\alpha$]

14. $\frac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ $\left[\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}\right]$

15. $\frac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}+\text{tg}\,\alpha$ $\left[\frac{1}{\cos\alpha}\right]$

16. $\frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ $\left[\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\right]$

17. $\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}+\text{sen}\,\alpha-\cos^2\alpha$ [$\text{sen}\,\alpha$]

18. $\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha(\text{sen}\,\alpha-1)-\frac{\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}+\cos\alpha$ [$\text{sen}\,\alpha$]

19. $\frac{1}{\cos\alpha(1+\text{tg}^2\alpha)}+\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha$ [$\cos\alpha$]

20. $\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}-\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$ $\left[\frac{1}{\cos\alpha}\right]$

21. $\frac{\text{sen}^3\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\text{tg}\,\alpha+\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}^2\alpha+1}$ [$\text{tg}\,\alpha$]

Nel testo (cap. 2, paragrafo 4) abbiamo osservato che le relazioni

$$\begin{aligned}&\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\&\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha\end{aligned}\qquad(1)$$

permettono di ricavare il valore di due delle funzioni goniometriche, conoscendo una sola di esse, mediante la risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite. Ecco tre esempi.

I) È dato $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Le relazioni (1) diventano:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha.$$

Abbiamo così un sistema di 2° grado nelle due incognite $\cos\alpha$ *e* $\text{tg}\,\alpha$. *Risolviamo il sistema; si ha:*

$$\begin{cases}\frac{1}{5}+\cos^2\alpha=1\\ \frac{1}{\sqrt{5}\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha\end{cases}\qquad \textit{ossia}\qquad \begin{cases}\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{\sqrt{5}\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}\cos\alpha} = tg\,\alpha \end{cases} \quad e\ quindi \quad \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)} = tg\,\alpha \end{cases}$$

Si ottiene infine:

$$\cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad e \quad tg\,\alpha = \pm\frac{1}{2}.$$

Per rendersi conto del doppio segno (±) nelle espressioni ora ottenute, osserviamo la Fig. 3: quando si fissa

$$sen\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

non si indica un solo angolo, ma due:

$$\alpha = A\hat{O}P \quad e \quad \alpha' = A\hat{O}P'.$$

Risulta così:

$$sen\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad sen\,\alpha' = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha' = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{2} \qquad tg\,\alpha' = -\frac{1}{2}.$$

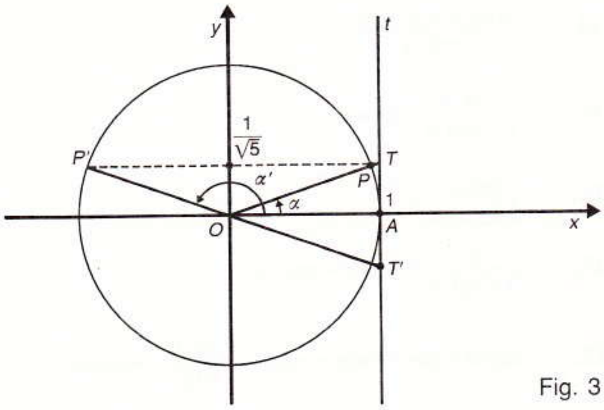

Fig. 3

Si capisce così che $\cos\alpha$ *e* $tg\,\alpha$ *si possono esprimere per mezzo di* $sen\,\alpha$*; in generale,*

$$da \begin{cases} sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha \end{cases} \quad si\ ottiene \quad \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} \\ tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}}. \end{cases}$$

II) In modo analogo si procede se è assegnato il valore di $\cos\alpha$*;*

$$da \begin{cases} sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha \end{cases} \quad si\ ottiene \quad \begin{cases} sen\,\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ tg\,\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}. \end{cases}$$

III) Vediamo infine come si procede quando è assegnato il valore di $tg\,\alpha$*; se per esempio si ha:*

$$tg\,\alpha = \sqrt{8},$$

le due relazioni fondamentali diventano:

$$\begin{cases} sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{8} \end{cases} \quad da\ cui \quad \begin{cases} sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ sen\,\alpha = \sqrt{8}\cos\alpha \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} (\sqrt{8}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \\ sen\,\alpha = \sqrt{8}\cos\alpha \end{cases} \quad e\ ancora \quad \begin{cases} 8\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ sen\,\alpha = \sqrt{8}\cos\alpha. \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$\begin{cases} 9\cos^2\alpha = 1 \\ sen\,\alpha = \sqrt{8}\cos\alpha \end{cases} \quad ossia \quad \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \\ sen\,\alpha = \sqrt{8}\cos\alpha \end{cases}$$

e infine:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{3} \qquad sen\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

La Fig. 4 permette di interpretare l'ambiguità di segno; fissato

$$tg\,\alpha=\sqrt{8},$$

si individuano due angoli:

$$\alpha=A\hat{O}P \quad e \quad \alpha'=A\hat{O}P'.$$

Risulta:

$$sen\,\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3} \qquad sen\,\alpha'=-\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$cos\,\alpha=\frac{1}{3} \qquad cos\,\alpha'=-\frac{1}{3}$$

$$tg\,\alpha=\sqrt{8} \qquad tg\,\alpha'=\sqrt{8}.$$

Concludendo, si possono esprimere sen α e cos α basandosi solo su tg α nel modo seguente:

$$da \quad \begin{cases} sen^2\,\alpha+cos^2\,\alpha=1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=tg\,\alpha \end{cases}$$

$$si\ ottiene \quad \begin{cases} cos\,\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\,\alpha}} \\ sen\,\alpha=\dfrac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\,\alpha}} \end{cases}$$

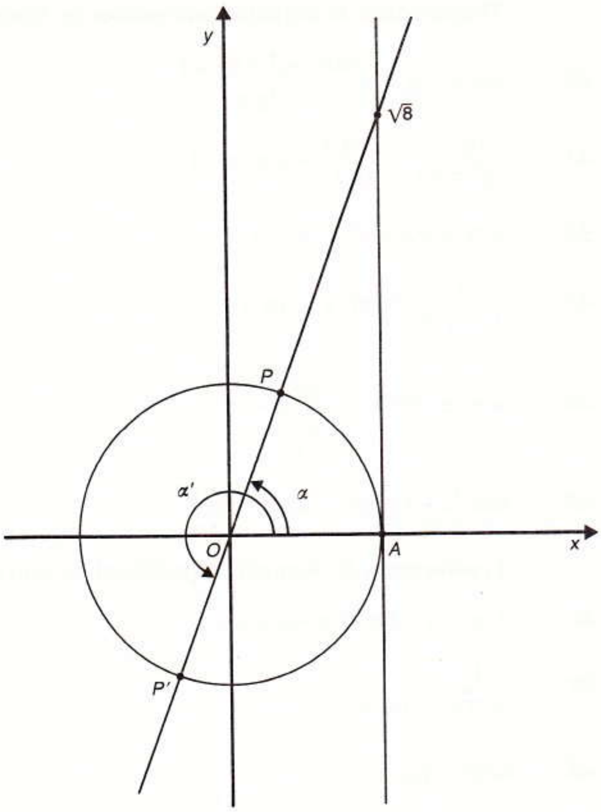

Fig. 4

Costruire gli angoli α e α' di cui è indicato il seno e calcolare poi il coseno e la tangente.

22. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$

23. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{3}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{2}{3}$

24. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{4}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{4}$

25. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

26. $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{5}{6}}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

27. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$

Costruire gli angoli α e α' di cui è indicato il coseno e calcolare poi il seno e la tangente.

28. $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

29. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

30. $\cos\alpha=\frac{3}{4}$; $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$

31. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

32. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

33. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{11}{15}}$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{11}{15}}$

Costruire gli angoli α e α' di cui è indicata la tangente e calcolarne seno e coseno.

34. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$

35. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{2}$

36. $\operatorname{tg}\alpha=4$; $\operatorname{tg}\alpha=-4$

37. $\operatorname{tg}\alpha=6$; $\operatorname{tg}\alpha=-6$

38. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{8}}$

39. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{19}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{19}$

Trasformare le seguenti espressioni in espressioni equivalenti in cui compaia solo $\cos\alpha$.

40. $\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}$ $[\cos\alpha]$

41. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{sen}^2\alpha-1$ $[\cos\alpha]$

42. $\operatorname{sen}^2\alpha+2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1$ $[\cos^2\alpha-\cos\alpha]$

43. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha$ $[\cos\alpha+1]$

44. $\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha-\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}$ $[-\cos^4\alpha]$

45. $\operatorname{sen}^4\alpha+3\cos^3\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha+1$ $[\cos^4\alpha+3\cos^3\alpha]$

Trasformare le seguenti espressioni in espressioni equivalenti in cui compaia solo $\operatorname{sen}\alpha$.

46. $3\operatorname{sen}^2\alpha+2\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha-2$ $[\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha]$

47. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\left[\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha-1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

48. $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$ $\left[\dfrac{-\operatorname{sen}^3\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

49. $2\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha-4\cos^2\alpha+2$ $[\operatorname{sen}^4\alpha]$

50. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$ $[0]$

51. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha-1}$ $[-\operatorname{sen}\alpha]$

Trasformare le seguenti espressioni in espressioni equivalenti in cui compaia solo $\operatorname{tg}\alpha$.

52. $4\operatorname{sen}^2\alpha-2\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha-1$ $\left[\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha-2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

53. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\left[\operatorname{tg}^2\alpha-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

54. $\operatorname{sen}^4\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$ $\left[\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

55. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\left[\left(\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2\right]$

56. $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha(\cos\alpha-1)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha$ $\left[\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

57. $\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}$ $\left[\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$

Riprendendo le nozioni esposte negli esercizi 8, 9, 10, svolgere gli esercizi seguenti.

58. Dimostrare che risulta $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

59. Dimostrare che risulta $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

60. Dimostrare che risulta $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Sugli angoli associati

61. Esprimere, per mezzo di radicali, seno, coseno, tangente e cotangente dei seguenti angoli:
$30°, \quad 150°, \quad 210°, \quad 330°, \quad 60°.$

62. Esprimere, per mezzo di radicali, seno, coseno, tangente e cotangente dei seguenti angoli:
$45°, \quad 135°, \quad 225°, \quad 315°.$

63. Esprimere, per mezzo di radicali, seno, coseno, tangente e cotangente dei seguenti angoli:
$60°, \quad 120°, \quad 240°, \quad 300°, \quad 30°.$

64. Esprimere, per mezzo di radicali, seno, coseno, tangente e cotangente dei seguenti angoli:
$18°, \quad 162°, \quad 192°, \quad 342°, \quad 72°.$

65. Ricordando che risulta

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha},$$

determinare secante e cosecante degli angoli indicati negli esercizi dal n. 61 al n. 64.

Calcolare il valore delle seguenti espressioni.

66. $\sqrt{3}\cos 30°+\operatorname{sen} 30°$ [2]

67. $\operatorname{sen} 60°+\cos 30°$ [$\sqrt{3}$]

68. $\sqrt{2}\cos 45°+2\sqrt{3}\operatorname{sen} 60°$ [4]

69. $2\operatorname{sen} 30°+4\operatorname{sen} 18°$ [$\sqrt{5}$]

70. $\operatorname{sen} 30°\cos 60°-\operatorname{tg} 45°+\cos 30°\operatorname{sen} 60°$ [0]

71. $\cos 300°+\operatorname{sen} 150°-\operatorname{tg} 225°+\operatorname{ctg} 135°-\sqrt{3}\cos 150°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

72. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} 120°+\sqrt{3}\cos 210°+2\sqrt{3}\operatorname{tg} 240°-\operatorname{ctg} 45°$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

73. $\dfrac{3\operatorname{tg} 210°-\operatorname{tg} 120°}{\operatorname{tg} 45°}$ [$2\sqrt{3}$]

Determinare l'ampiezza degli angoli di cui è assegnato il valore di una funzione goniometrica negli esercizi dal n. 74 al n. 120.

74. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

Ricordiamo che il coseno di un angolo α è l'ascissa del punto P relativo all'angolo $A\hat{O}P=\alpha$, "letto" sulla circonferenza goniometrica (Fig. 5). Tracciamo allora sul piano della circonferenza la retta d'equazione

$$x=\frac{1}{2}.$$

Questa retta incontra la circonferenza in due punti P, P', tali che:

$$\alpha=A\hat{O}P \quad e \quad \alpha'=A\hat{O}P';$$

sappiamo che il coseno di questi angoli vale $\frac{1}{2}$.

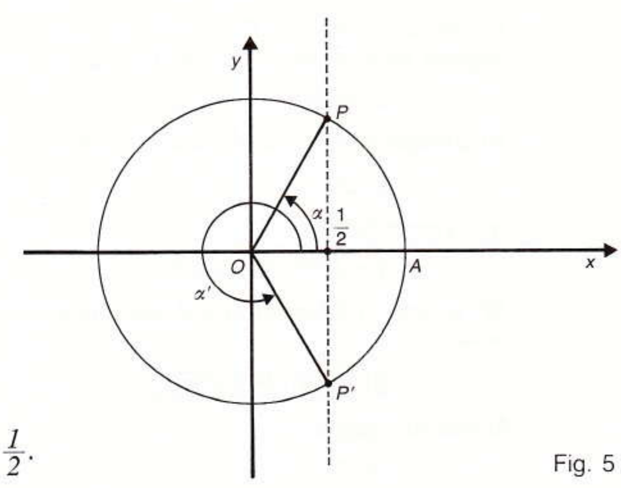

Fig. 5

Osserviamo che P e P' sono simmetrici rispetto all'asse delle x; risulta quindi:

$\alpha'=360°-\alpha.$

Sapendo poi che l'angolo acuto il cui coseno vale $\frac{1}{2}$ *è*

$\alpha=60°,$

si avrà:

$\alpha'=360°-60°=300°.$

Si può, anche, usare il calcolatore per determinare l'angolo α*; si premerà la sequenza di tasti:*

$\boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}$

Si ottiene 60°.

75. $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

76. $\cos\alpha=0$

77. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

78. $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

79. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

80. $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

81. $\cos\alpha=0{,}001$

82. $\cos\alpha=-0{,}001$

83. $\cos\alpha=0{,}98$

84. $\cos\alpha=-0{,}98$

85. $\cos\alpha=0{,}25$

86. $\cos\alpha=-0{,}25$

87. $\cos\alpha=0{,}76$

88. $\cos\alpha=-0{,}76$

89. $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{2}$

90. $\text{sen}\,\alpha=-\frac{1}{2}$

Per risolvere gli esercizi 89 e 90 ricordiamo che il seno di un angolo α *è l'ordinata del punto P relativo all'angolo* $A\hat{O}P=\alpha$*, "letto" sulla circonferenza goniometrica.*
Perciò, per l'esercizio 89, tracciamo sul piano della circonferenza goniometrica (Fig. 6) la retta d'equazione

$y=\frac{1}{2}.$

Questa retta incontra la circonferenza in due punti P e P', tali che

$\alpha=A\hat{O}P \quad e \quad \alpha'=A\hat{O}P'$

e il seno di questi angoli vale $\frac{1}{2}$.

Osserviamo che P e P' sono simmetrici rispetto all'asse delle y; perciò risulta:

$\alpha'=180°-\alpha.$

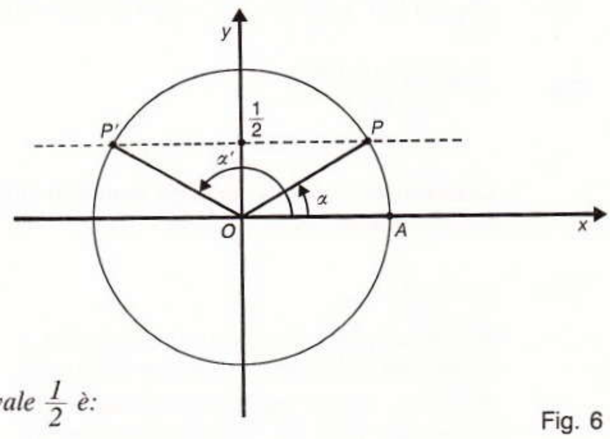

Fig. 6

Ricordando che l'angolo acuto il cui coseno vale $\frac{1}{2}$ *è:*

$\alpha=30°,$

scriveremo infine:

$\alpha'=180°-30°=150°.$

Se, invece, vogliamo usare il calcolatore per determinare l'angolo α*, ci baseremo sulla sequenza già nota:*

$\boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{SIN}}$

Si ottiene l'angolo

$\alpha=30°.$

Ripetiamo il procedimento per risolvere l'esercizio 90 e troviamo gli angoli α per cui

$$sen\,\alpha=-\frac{1}{2}.$$

La Fig. 7 mostra due angoli

$$\alpha=A\hat{O}P \quad e \quad \alpha'=A\hat{O}P',$$

che risolvono il problema.
Per determinare le ampiezze α e α' abbiamo due alternative:

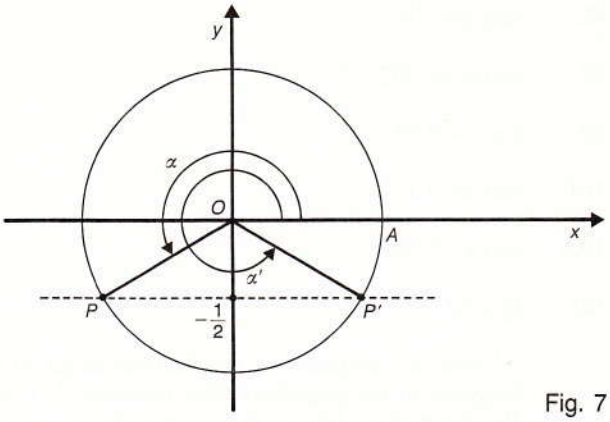

Fig. 7

A) basarsi sulla geometria

Determiniamo il punto Q, simmetrico di P rispetto ad O (Fig. 8); otteniamo un angolo

$$A\hat{O}Q=\beta,$$

tale che

$$sen\,\beta=\frac{1}{2}.$$

È allora

$$\beta=30°,$$

e risulta quindi:

$$\alpha=180°+\beta=180°+30°=210°$$
$$\alpha'=360°-\beta=360°-30°=330°;$$

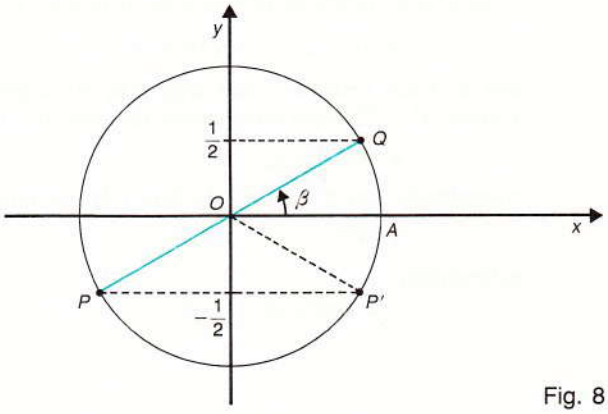

Fig. 8

B) basarsi solo sul calcolatore

Per determinare l'angolo α tale che

$$sen\,\alpha=-\frac{1}{2}=-0{,}5,$$

si preme la sequenza di tasti

$\boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{SIN}}$;

si ottiene sul visualizzatore

$$-30°.$$

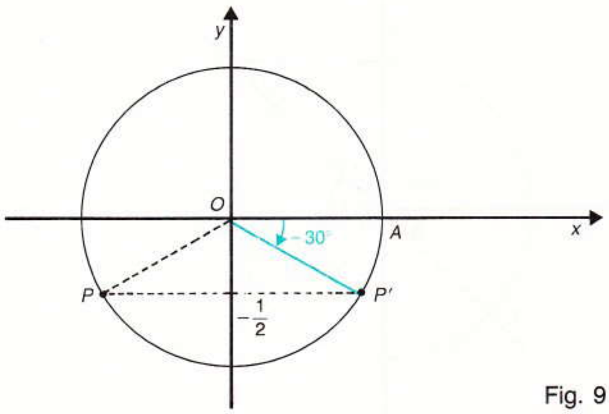

Fig. 9

Quale angolo ha quest'ampiezza? Il segno negativo premesso all'ampiezza dell'angolo indica il fatto che l'angolo si legge in senso opposto a quello antiorario, che avevamo stabilito; l'angolo avrà allora come primo lato la semiretta OA e un'ampiezza di 30° letta in senso orario. In Fig. 9 è rappresentato quest'angolo: si tratta dell'angolo $A\hat{O}P'$, che ha un'ampiezza, letta in senso antiorario, data da:

$$360°-30°=330°.$$

Il motivo per cui il calcolatore usa questa notazione è chiarito nel cap. 5, p. 135.
Troveremo poi l'ampiezza α calcolando:

$$180°-(-30°)=180°+30°=210°.$$

91. sen $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

92. sen $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

93. sen $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

94. sen $\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

95. $\operatorname{sen}\alpha=-1$

96. $\operatorname{sen}\alpha=0$

97. $\operatorname{sen}\alpha=0{,}002$

98. $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}002$

99. $\operatorname{sen}\alpha=0{,}95$

100. $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}95$

101. $\operatorname{sen}\alpha=0{,}114$

102. $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}114$

103. $\operatorname{sen}\alpha=0{,}987$

104. $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}987$

105. $\operatorname{tg}\alpha=1$

106. $\operatorname{tg}\alpha=-1$

Al fine di facilitare la risoluzione degli esercizi 105 e 106, ricordiamo che per determinare la tangente di un angolo si deve tracciare la retta t tangente alla circonferenza nel punto A (Fig. 10). Per l'esercizio 105, indichiamo sulla retta t il punto T di ordinata 1 e congiungiamo O con T. La retta OT incontra la circonferenza in due punti P e P' che individuano due angoli:

$$A\hat{O}P=\alpha \quad e \quad A\hat{O}P'=\alpha'.$$

α e α' sono proprio i due angoli la cui tangente vale 1.
Poiché P e P' sono simmetrici rispetto all'origine, risulterà:

$$\alpha'=180°+\alpha;$$

ricordando poi che l'angolo acuto la cui tangente vale 1 è

$$\alpha=45°,$$

scriveremo:

$$\alpha'=180°+45°=225°.$$

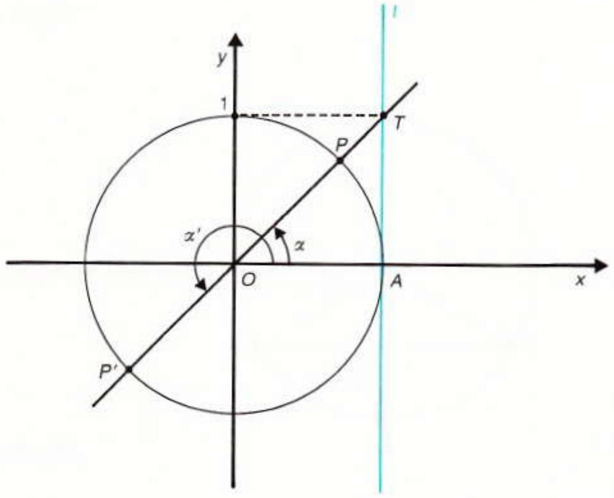

Fig. 10

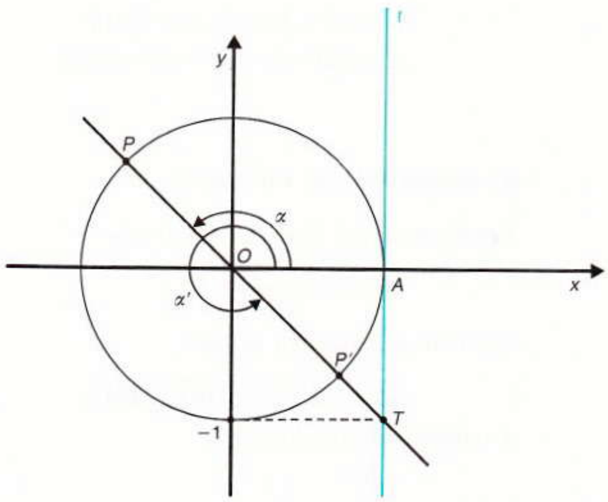

Fig. 11

In modo del tutto analogo si imposta la risoluzione dell'esercizio 106 (Fig. 11).
Si individuano due angoli

$$\alpha=A\hat{O}P \quad e \quad \alpha=A\hat{O}P',$$

e per determinare le ampiezze di questi angoli si può procedere in due modi:

A) procedimento geometrico

Si traccia il simmetrico di P rispetto all'asse delle y (Fig. 12), e si trova così l'angolo

$$A\hat{O}Q=\beta,$$

tale che

$$tg\,\beta=1.$$

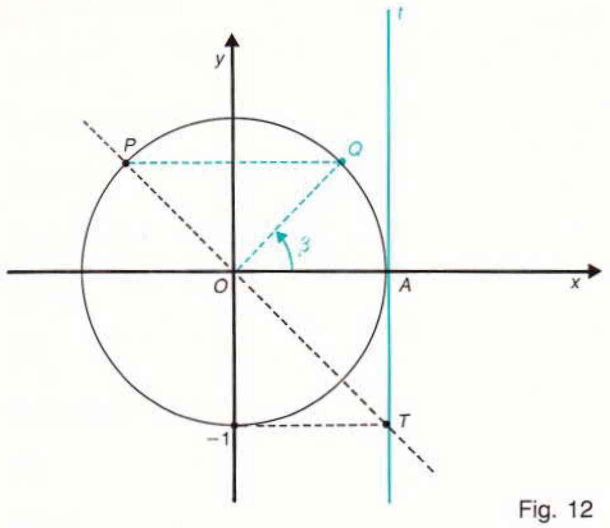

Fig. 12

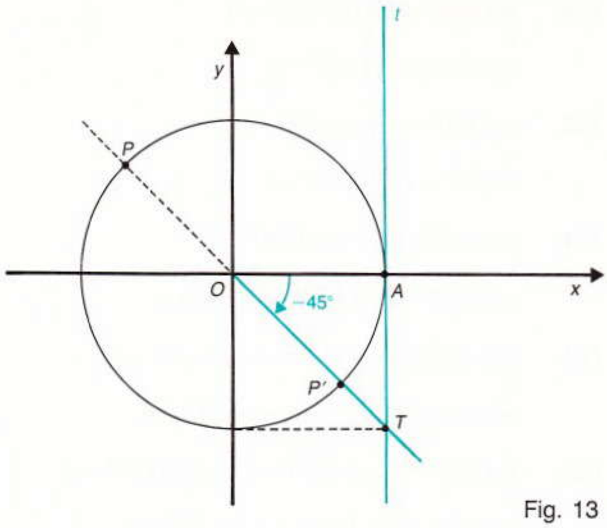

Fig. 13

Risulta:

$$\beta=45°$$

e quindi:

$$\alpha=180°-45°=135°$$
$$\alpha'=360°-45°=315°.$$

B) procedimento che usa solo il calcolatore

La sequenza di tasti

$\boxed{1}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{TAN}}$

fornisce (Fig. 13) l'ampiezza dell'angolo

$$-45°,$$

come verrà spiegato nel cap. 5, p. 137.
Leggendo l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}P'$ in senso antiorario, si ottiene:

$$\alpha'=360°-45°;$$

infine, tenendo presente che P e P' sono simmetrici rispetto ad O, si può calcolare

$$\alpha=180°+(-45°)=180°-45°=135°.$$

107. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$

108. $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$

109. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

110. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

111. $\operatorname{tg}\alpha=5$

112. $\operatorname{tg}\alpha=-5$

113. $\operatorname{tg}\alpha=0{,}003$

114. $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}003$

115. $\operatorname{tg}\alpha=10{,}516$

116. $\operatorname{tg}\alpha=-10{,}516$

117. $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$

118. $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$

119. $\operatorname{tg}\alpha=0{,}718$

120. $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}718$

Confrontare le espressioni proposte negli esercizi dal n. 121 al n. 128, dopo averle scritte nella forma più semplice.

121. $\operatorname{sen}(180°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)$ [$\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha$]
e
$\operatorname{sen}180°-\alpha+\cos 180°+\alpha$ [-1]

122. $\operatorname{tg}(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(360°-\alpha)$ $[-2\operatorname{tg}\alpha]$
e
$\operatorname{tg} 180°-\alpha+\operatorname{tg} 360°-\alpha$ $[-2\alpha]$

123. $\operatorname{sen}(90°-\alpha)+\cos(90°-\alpha)$ $[\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha]$
e
$\operatorname{sen} 90°-\alpha+\cos 90°-\alpha$ $[1-2\alpha]$

124. $\cos(180°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)$ $[-2\cos\alpha]$
e
$\cos 180°-\cos\alpha+\cos 180°+\cos\alpha$ $[-2]$

125. $\operatorname{sen}\alpha\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha\operatorname{sen}(90°-\alpha)$ $[1]$
e
$\operatorname{sen}\alpha\cos 90°-\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen} 90°-\alpha$ $[-2\alpha+\cos\alpha]$

126. $\operatorname{tg}(180°+\alpha)\cos(180°-\alpha)+\operatorname{sen}(180°-\alpha)$ $[0]$
e
$\operatorname{tg} 180°+\alpha\cos 180°-\alpha+\operatorname{sen} 180°-\alpha$ $[-3\alpha]$

127. $2\operatorname{sen}(180°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{sen}(180°+\alpha)$ $[\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha]$
e
$2\operatorname{sen} 180°-\alpha-\cos 180°-\alpha+\operatorname{sen} 180°+\alpha$ $[1-\alpha]$

128. $\operatorname{sen}(360°-\alpha)\operatorname{sen}(180°+\alpha)-\cos(180°+\alpha)\cos(360°-\alpha)$ $[1]$
e
$\operatorname{sen} 360°-\alpha\operatorname{sen} 180°+\alpha-\cos 180°+\alpha\cos 360-\alpha$ $[1+\alpha]$

Scrivere nella forma più semplice le espressioni proposte negli esercizi dal n. 129 al n. 133.

129. $\cos\alpha[\operatorname{sen}(360°-\alpha)\operatorname{tg}(360°-\alpha)+\cos(360°-\alpha)]$ $[1]$

130. $\operatorname{sen}(90°-\alpha)+\cos(90°-\alpha)+\operatorname{tg}(90°-\alpha)\operatorname{sen}(180°+\alpha)$ $[\operatorname{sen}\alpha]$

131. $\dfrac{\operatorname{sen}(360°-\alpha)}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}-\cos(360°-\alpha)\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\cos(180°+\alpha)$ $[\operatorname{sen}\alpha]$

132. $\dfrac{\operatorname{sen}(90°-\alpha)}{\operatorname{tg}(90°-\alpha)}+\dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}+\operatorname{sen}(360°-\alpha)$ $[\cos\alpha]$

133. $\dfrac{\operatorname{sen}(180°+\alpha)}{\operatorname{tg}(180°+\alpha)}+\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(360°-\alpha)+\operatorname{sen}(180°-\alpha)$ $[-\cos\alpha]$

In Fig. 14 abbiamo indicato, sulla circonferenza goniometrica, gli angoli

$$A\hat{O}M=\alpha \quad \text{e} \quad A\hat{O}P=90°-\alpha;$$

abbiamo poi indicato i seguenti punti:

Q: simmetrico di P rispetto all'asse delle y

R: simmetrico di P rispetto ad O

S: simmetrico di P rispetto all'asse delle x.

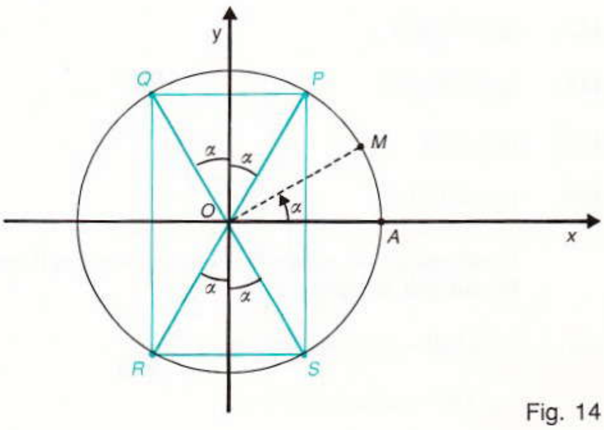

Fig. 14

Basandosi sulla costruzione esposta in Fig. 14, dimostrare che risultano vere, per qualunque α, le uguaglianze proposte negli esercizi dal n. 134 al n. 136.

134. $\operatorname{sen}(90°+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(90°+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(90°+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad\operatorname{ctg}(90°+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

135. $\operatorname{sen}(270°-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(270°-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(270°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad\operatorname{ctg}(270°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

136. $\operatorname{sen}(270°+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(270°+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(270°+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad\operatorname{ctg}(270°+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

Sul riferimento cartesiano e polare

Segnare i punti di cui sono indicate le coordinate polari e determinarne le coordinate cartesiane.

137. $A(1,45°)$, $B(2,45°)$, $C(5,45°)$
I tre punti si trovano su una retta?

138. $A\left(\frac{1}{2},180°\right)$, $B(3,180°)$, $C(6,180°)$
I tre punti sono allineati?

139. $A(4,120°)$, $B(5,120°)$, $C(8,120°)$
I tre punti sono allineati?

140. $A\left(\frac{3}{2},330°\right)$, $B\left(\frac{5}{2},330°\right)$, $C(7,330°)$
I tre punti sono allineati?

Scrivere in coordinate cartesiane e polari le equazioni delle seguenti rette passanti per *O*.

141. Retta a: passa per $A(1,45°)$

142. Retta b: passa per $B(3,180°)$

143. Retta c: passa per $C(8,120°)$

144. Retta d: passa per $D(r,\beta)$

Segnare i punti di cui sono indicate le coordinate polari negli esercizi dal n. 145 al n. 148 e determinarne le coordinate cartesiane; in ogni esercizio verificare se i punti si trovano su una circonferenza.

145. $P(3,0°)$, $Q(3,150°)$, $R(3,270°)$

146. $P\left(\frac{1}{2},90°\right)$, $Q\left(\frac{1}{2},210°\right)$, $R\left(\frac{1}{2},315°\right)$

147. $P(\sqrt{5},45°)$, $Q(\sqrt{5},180°)$, $R(\sqrt{5},300°)$

148. $P(8,30°)$, $Q(8,135°)$, $R(8,270°)$

Scrivere in coordinate cartesiane e in coordinate polari le equazioni delle circonferenze indicate negli esercizi dal n. 149 al n. 152.

149. Centro $O(0,0)$ e raggio $r=3$

150. Centro $O(0,0)$ e raggio $r=\frac{1}{2}$

151. Centro $O(0,0)$ e raggio $r=\sqrt{5}$

152. Centro $O(0,0)$ e raggio $r=k$

Nel testo (p. 131) abbiamo visto come si passa dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane. Risolviamo ora il problema inverso*: sono date le coordinate cartesiane di un punto e si vogliono trovare le coordinate polari. Cominciamo a lavorare su un esempio numerico: è dato il punto*

$$(2,\ 2\sqrt{3})$$

e se ne vogliono determinare le coordinate polari (Fig. 15). Le relazioni

$$x=r\cos\alpha$$
$$y=r\operatorname{sen}\alpha,$$

che avevamo trovato a p. 131, diventano, nel nostro caso:

$$(1)\qquad\begin{cases}2=r\cos\alpha\\ 2\sqrt{3}=r\operatorname{sen}\alpha.\end{cases}$$

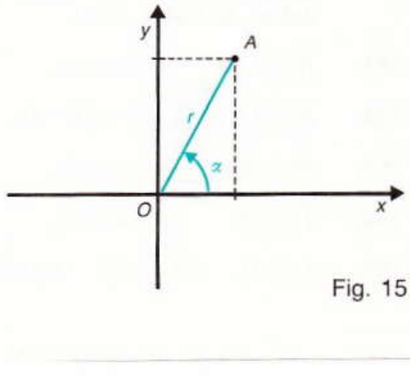

Fig. 15

Come ricavare r ed α? Se ricordiamo le due relazioni fondamentali

$$sen^2\,\alpha+cos^2\,\alpha=1$$

e

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=tg\,\alpha,$$

ci rendiamo conto che possiamo trasformare il sistema (1) in un sistema più semplice procedendo nel modo seguente.

I) Eleviamo al quadrato e addizioniamo membro a membro le relazioni (1); si ottiene:

$$2^2+(2\sqrt{3})^2=(r\,cos\,\alpha)^2+(r\,sen\,\alpha)^2,$$

cioè

$$4+12=r^2\,cos^2\,\alpha+r^2\,sen^2\,\alpha,$$

ossia

$$16=r^2(cos^2\,\alpha+sen^2\,\alpha),$$

e, infine,

$$r^2=16.$$

II) Dividiamo membro a membro le due relazioni (1); si ottiene:

$$\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{r\,sen\,\alpha}{r\,cos\,\alpha},$$

ossia

$$\sqrt{3}=tg\,\alpha.$$

Abbiamo così ottenuto, invece delle

$$\begin{cases} 2=r\,cos\,\alpha \\ 2\sqrt{3}=r\,sen\,\alpha, \end{cases}$$

le due relazioni

$$\begin{cases} r^2=16 \\ tg\,\alpha=\sqrt{3} \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

$$r=4$$
$$\alpha=60°.$$

Escludiamo la soluzione $r=-4$ perché la coordinata polare r è sempre positiva; inoltre, scegliamo $\alpha=60°$ basandoci sulla Fig. 15.
Il procedimento ora esposto può essere sempre ripetuto quando si cercano le coordinate polari $(r,\ \alpha)$ di un punto P, di cui si conoscono le coordinate cartesiane (x,y). In generale, dalle relazioni

$$x=r\,cos\,\alpha$$
$$y=r\,sen\,\alpha$$

si ottengono le due relazioni

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\frac{y}{x}=tg\,\alpha$$

che permettono di determinare r e α.

Determinare le coordinate polari dei punti, di cui sono date le coordinate cartesiane negli esercizi dal n. 153 al n. 157.

153. $A(2,2)$, $B(-2,-2)$, $C(-2,2)$, $D(2,-2)$

154. $E(\sqrt{3},1)$, $F(-\sqrt{3},-1)$, $G(\sqrt{3},-1)$, $H(-\sqrt{3},1)$

155. $P(1,2)$, $Q(-1,-2)$, $R(-1,2)$, $S(1,-2)$

156. $T(4,3)$, $U(-4,-3)$, $V(4,-3)$, $Z(-4,3)$

157. $L(2,0)$, $M(-2,0)$, $N(0,2)$, $O(0,0)$. Come si ottengono le coordinate polari del punto N?

Sul coefficiente angolare di una retta

Determinare l'angolo che formano, con la direzione positiva dell'asse delle x, le rette proposte negli esercizi dal n. 158 al n. 160.

158. *a*) $y=x$, *b*) $y=-x$

159. *c*) $y=\sqrt{3}x$, *d*) $y=-\sqrt{3}x$

160. *e*) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, *f*) $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$,

161. Determinare l'angolo che formano con la direzione positiva dell'asse delle x le seguenti rette:

r) $y=2x$ *s*) $y=2x-1$ *t*) $y=2x+3$.

Come si può determinare l'angolo α che una retta s d'equazione

$y=mx+n$

forma con la direzione positiva dell'asse delle x?
(Tenere presente la Fig. 16, in cui la retta r ha l'equazione $y=mx$).

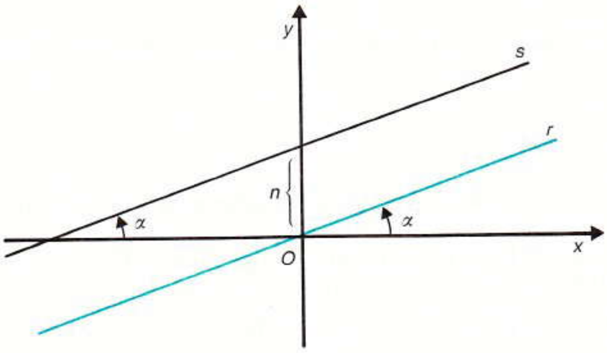

Fig. 16

162. Determinare l'angolo che formano con la direzione positiva dell'asse delle x le rette seguenti:

a) per O e $A(2,2)$ *b*) per O e $B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

c) per O e $C(3,4)$ *d*) per O e $D(-3,-4)$

e) per O e $E(-4,3)$ *f*) per O e $F(4,-3)$

163. In generale, come si trova l'angolo α che forma, con la direzione positiva dell'asse delle x, la retta r passante per $O(0,0)$ e $P(a,b)$?

164. Come si trova l'angolo che forma, con la direzione positiva dell'asse delle x, la retta r passante per $P(a,b)$ e $Q(c,d)$? *(Tenere presente la Fig. 17).*

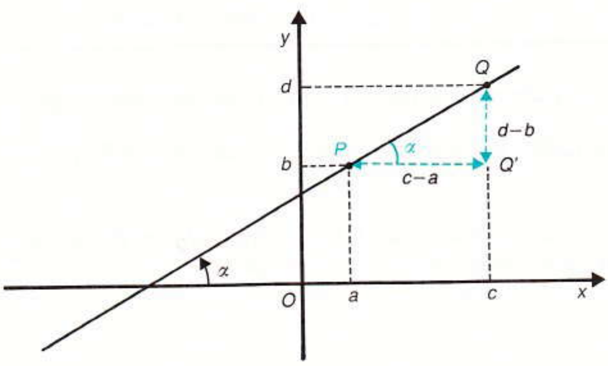

Fig. 17

Consideriamo il fascio di rette passanti per il punto $P(a,b)$; queste rette hanno l'equazione

$$\frac{y-b}{x-a}=m.$$

Il parametro m, che compare nell'equazione, indica la pendenza di ogni retta del fascio, ed è legato all'angolo α che ogni retta forma con la direzione positiva dell'asse delle x (Fig. 18) dalla relazione:

$$m=tg\,\alpha.$$

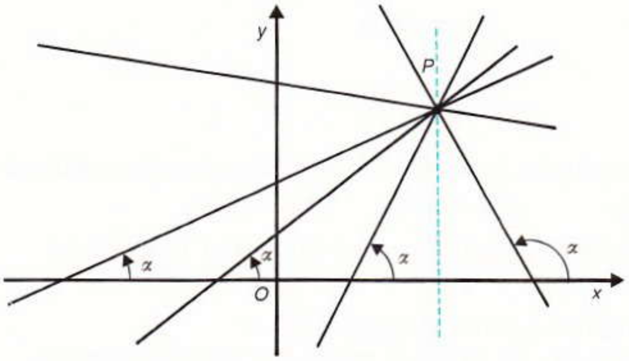

Fig. 18

Al variare di α, varia anche m; nel fascio non si trova però la retta d'equazione

$$x=a,$$

che corrisponde ad

$$\alpha=90°.$$

Tenere presenti queste osservazioni prima di risolvere gli esercizi che seguono.

165. Nel fascio di rette per $P(1,2)$, determinare l'equazione delle rette che formano con la direzione positiva dell'asse delle x gli angoli seguenti:

a) $\alpha=30°$; *b*) $\beta=45°$; *c*) $\gamma=120°$.

166. Ripetere l'esercizio precedente a partire dal fascio di rette passanti per $Q(0,-1)$, determinando l'equazione delle rette che formano i seguenti angoli:

a) $\alpha=60°$; *b*) $\beta=135°$; *c*) $\gamma=150°$.

167. Nel fascio di rette per $O(0,0)$, disegnare almeno quattro rette con coefficiente angolare m soggetto alle seguenti limitazioni:

I) $0\leq m\leq 1$; II) $m>1$.

168. Ripetere l'esercizio precedente per il fascio di rette che passano per $A(0,1)$, disegnando almeno quattro rette con coefficiente angolare m soggetto alle seguenti limitazioni:

I) $m<-1$; II) $-1\leq m\leq 0$.

Sul teorema dei seni e sul teorema del coseno

169. Dimostrare il teorema dei seni a partire dalle considerazioni suggerite dalle Figg. 19 e 20.

Il cerchio disegnato nelle figure è circoscritto al triangolo ABC, ha centro O e raggio

$$\overline{OA}=R.$$

Nei due casi si è costruito il triangolo ABD, rettangolo in B, perché...
Se il triangolo ABC è acutangolo (Fig. 19) risulta

$$A\hat{D}B=\gamma$$

perché...

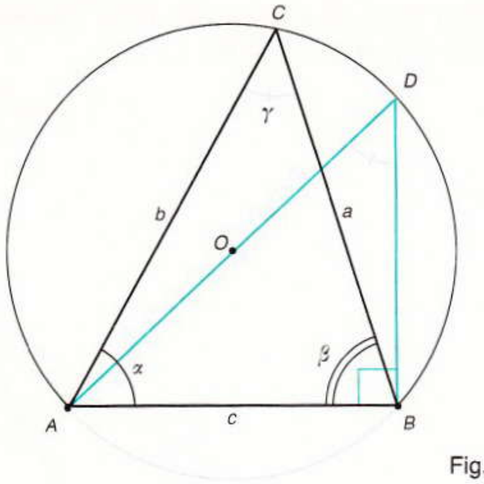

Fig. 19

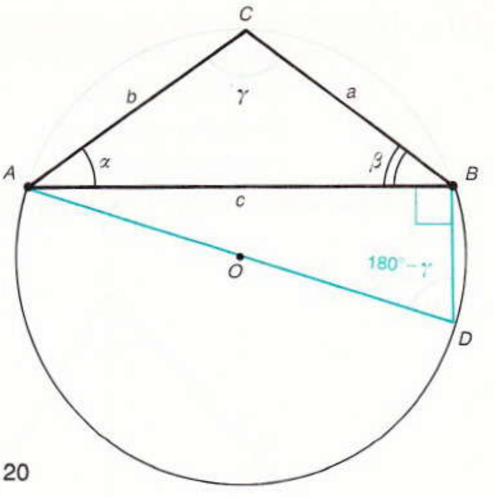

Fig. 20

Se il triangolo ABC è ottusangolo (Fig. 20) risulta

$$A\hat{D}B=180°-\gamma$$

perché...
Risulta, in entrambi i casi,

$$c=2R\,\text{sen}\,\gamma,$$

ossia:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma}=2R.$$

Si arriva così a dimostrare che

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{b}{\text{sen}\,\beta}=\frac{c}{\text{sen}\,\gamma}=2R.$$

Quindi, il rapporto costante fra un lato di un triangolo e il seno dell'angolo opposto è dato dal diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

170. Sulla base delle considerazioni dell'esercizio precedente dimostrare il teorema della corda (Fig. 21): la lunghezza l di una corda AB di un cerchio è sempre data da

$$l=2r\,\text{sen}\,\alpha,$$

dove R è il raggio della circonferenza e α è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno dei due archi $\widehat{AB}$ sottesi dalla corda (Fig. 22).

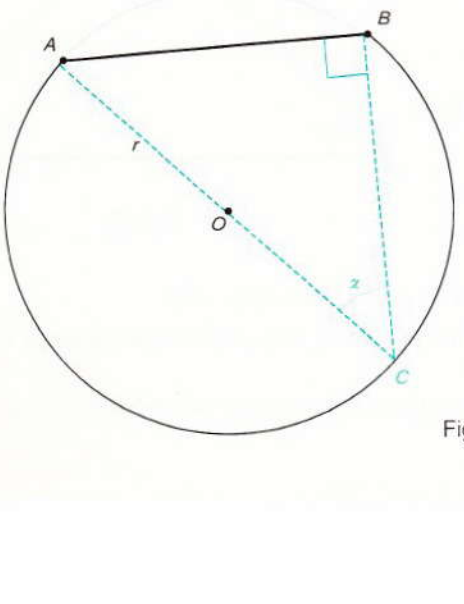

Fig. 21

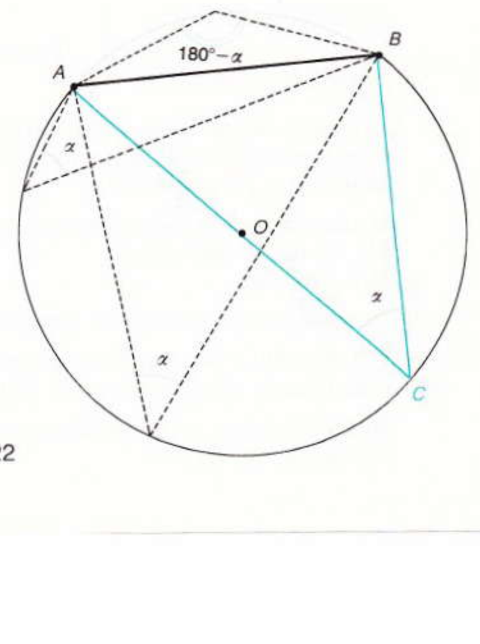

Fig. 22

171. Dimostrare che per un qualunque triangolo è valida la seguente proprietà, detta *Teorema delle proiezioni*: se i lati sono lunghi a, b, c, e gli angoli ampi α, β, γ, si ha:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + \alpha\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Per la dimostrazone tenere presenti le Figg. 23 e 24.

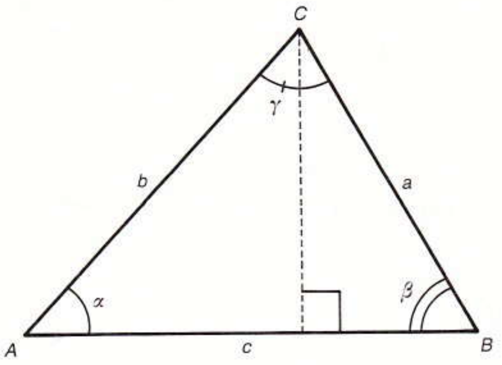

Fig. 23

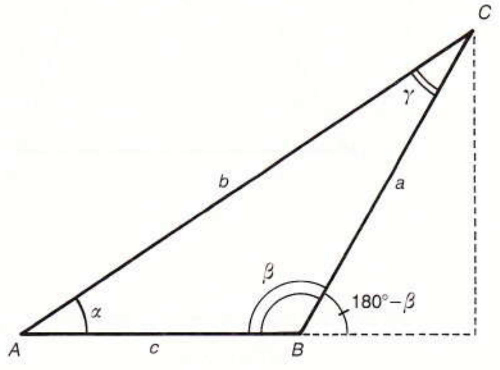

Fig. 24

172. Dimostrare il teorema del coseno a partire dal teorema delle proiezioni.
(Per ottenere $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, moltiplicare la 1ª relazione del teorema delle proiezioni per (a), la 2ª per ($-b$), la 3ª per..., e addizionare membro a membro...)

173. Dimostrare che per un qualsiasi triangolo ABC, che ha i lati lunghi a, b, c, e gli angoli ampi α, β, γ, vale la relazione

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Sulla risoluzione dei triangoli

Nel testo (n. 9) abbiamo visto che, per risolvere un triangolo qualunque, ci si può valere delle seguenti relazioni (Fig. 25):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} \qquad \textit{(teorema dei seni)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad \textit{(teorema del coseno)}$$

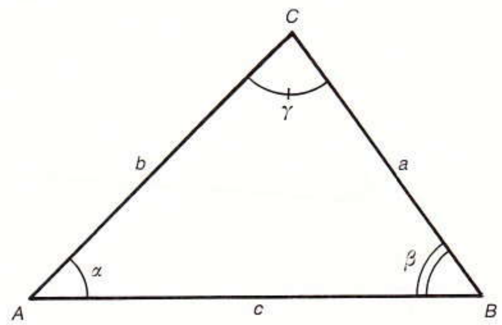

Fig. 25

Abbiamo anche detto che un triangolo è individuato in modo univoco se si conoscono tre dei suoi elementi, e precisamente:

I) due lati e l'angolo compreso,
II) un lato e due angoli,
III) i tre lati.

Bisogna invece esaminare con particolare attenzione il caso in cui sono dati:

IV) due lati e un angolo non compreso fra i lati noti. In questo caso, infatti, gli elementi noti non individuano sempre un unico triangolo (pp. 54-60).

Rivediamo ora, a partire da esempi numerici, i procedimenti da seguire per risolvere un triangolo nei casi I, II, III, IV.

I) Sono dati:

$$\alpha=130°,\quad b=10,\quad c=8.$$

Determiniamo prima di tutto la lunghezza a, basandoci sul teorema del coseno espresso nella forma:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$$

nel nostro caso si ha:

$$a^2=10^2+8^2-2\cdot 10\cdot 8\cos 130°.$$

Si ottiene:

$$a\cong 16.$$[1]

Per determinare un altro angolo, per esempio γ, basiamoci sul teorema dei seni; scriviamo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\frac{16}{\operatorname{sen}130°}=\frac{8}{\operatorname{sen}\gamma}$$

cioè

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{8\cdot\operatorname{sen}130°}{16}\cong 0{,}375$$

e

$$\gamma\cong 22°.$$

Si ottiene infine il terzo angolo, β, a partire dalla relazione

$$\alpha+\beta+\gamma=180°;$$

si ha:

$$130°+\beta+22°\cong 180°$$

da cui:

$$\beta\cong 180°-(130°+22°)=28°.$$

Abbiamo così tutti gli elementi del triangolo:

lati	$a\cong 16$,	$b=10$,	$c=8$;
angoli	$\alpha=130°$,	$\beta\cong 28°$,	$\gamma\cong 22°$.

Risolvere i triangoli di cui sono dati due lati e l'angolo compreso:

174. $a=10,\ b=15,\ \gamma=28°$

175. $a=11,\ b=21,\ \gamma=38°$

176. $a=6,\ c=9,\ \beta=65°27'8''$

177. $a=50,\ c=13,\ \beta=108°15'48''$

178. $c=241{,}392,\ b=197{,}31,\ \alpha=54'36''$

179. $b=8945{,}47,\ c=5921{,}49,\ \alpha=84°57'18''$

180. $a=327{,}914,\ b=1381{,}92,\ \gamma=140°2'35''$

181. $b=7{,}842\cdot 10^{-3},\ c=3{,}482\cdot 10^{-3},\ \alpha=102°30'48''$

182. $a=1{,}78\cdot 10^{10},\ c=4{,}21\cdot 10^{10},\ \beta=124°31'18''$

II) Sono dati:

$$c=40,\quad \alpha=70°,\quad \beta=30°.$$

Si ricava subito il terzo angolo γ dalla relazione

$$\alpha+\beta+\gamma=180°;$$

[1] *È opportuno memorizzare il valore di **a** (con 6 o più cifre decimali) fornito dal calcolatore; se ne farà uso successivamente per calcolare γ.*

si ha:

$$70° + 30° + \gamma = 180°,$$

da cui:

$$\gamma = 180° - (70° + 30°) = 80°.$$

Per determinare i lati a e b ci basiamo sul teorema dei seni. Si ha:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma},$$

e quindi:

$$\frac{a}{sen\,70°} = \frac{40}{sen\,80°} \quad \rightarrow \quad a = \frac{40}{sen\,80°} sen\,70° \cong 38°;$$

si ha anche:

$$\frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma},$$

e quindi:

$$\frac{b}{sen\,30°} = \frac{40}{sen\,80°} \quad \rightarrow \quad b = \frac{40}{sen\,80°} sen\,30° \cong 20.$$

Conosciamo ora tutti gli elementi del triangolo:

lati	$a \cong 38,$	$b \cong 20,$	$c = 40;$
angoli	$\alpha = 70°,$	$\beta = 30°,$	$\gamma = 80°.$

Un'osservazione importante

Assegnando gli elementi di questo triangolo abbiamo, anche, fissato la posizione degli angoli rispetto al lato noto: «dare il nome» a lati ed angoli significa infatti fissarne la reciproca posizione. Se invece si dice: «un triangolo ha un lato lungo 40 e due angoli ampi 30° e 70°», si possono disegnare tre triangoli e non uno solo, come mostra la Fig. 26.

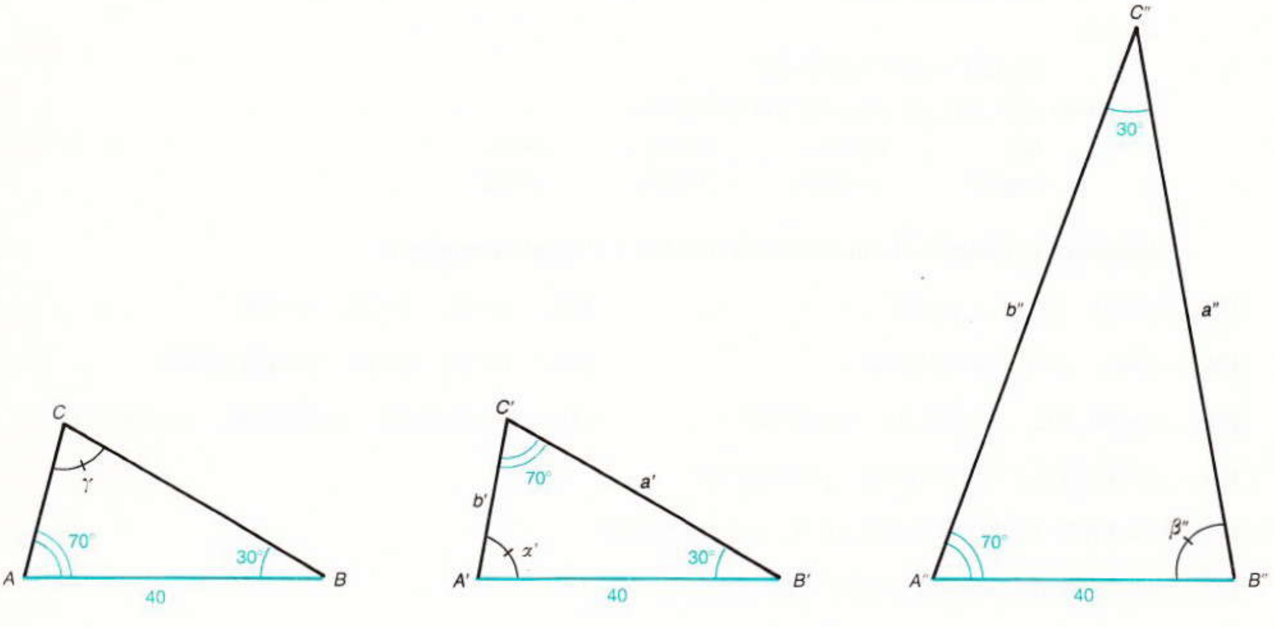

Fig. 26

Risolvere i triangoli di cui sono dati due angoli e un lato negli esercizi dal n. 183 al n. 192.

183. $a=3, \quad \beta=25°, \quad \gamma=87°$

184. $b=10, \quad \beta=60°, \quad \gamma=72°$

185. $c=95, \quad \beta=85°18'13'', \quad \gamma=86°17'2''$

186. $a=65, \quad \beta=31°18'30'', \quad \alpha=112°19'32''$

187. $b=1367, \quad \beta=70°20', \quad \gamma=25°30'$

188. $c=14.516, \quad \alpha=15°18'20'', \quad \gamma=102°8'25''$

189. $a=416{,}315$, $\alpha=3'2''$, $\beta=116°8'25''$

190. $c=7{,}16\cdot10^{-5}$ $\alpha=15°8'3''$, $\gamma=7'12''$

191. $b=5{,}172\cdot10^{4}$, $\beta=90°1'1''$, $\alpha=89°1'1''$

192. $c=\sqrt{2}$, $\beta=60°$, $\gamma=45°$

193. Risolvere i triangoli $A'B'C'$ e $A''B''C''$ disegnati nella Fig. 26 e confrontare i risultati ottenuti. Si osservi che i tre triangoli ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sono simili; calcolare il rapporto fra i lati corrispondenti.

194. Risolvere i triangoli che hanno un lato lungo 50 e due angoli ampi 10° e 110°, e confrontare i risultati ottenuti, calcolando il rapporto fra i lati corrispondenti dei triangoli.

195. Due triangoli simili ABC e $A'B'C'$ hanno $c=c'=80$, $\alpha=\alpha'=120°$, $\gamma=\beta'=18°$. Calcolare il rapporto fra i lati corrispondenti.

196. Due triangoli simili ABC e $A'B'C'$ hanno $c=c'$, $\alpha=\alpha'$, $\gamma=\beta'$, $\beta=\gamma'$; calcolare il rapporto fra i lati corrispondenti.

***III)** Esaminiamo due casi numerici.*

1) Sono dati i tre lati:

$$a=60,\quad b=45,\quad c=10.$$

Proviamo a determinare gli angoli di questo triangolo basandoci sul teorema del coseno; cominciamo col determinare l'angolo α: partire dalla relazione

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$$

si ha:

$$60^2=45^2+10^2-2\cdot45\cdot10\cos\alpha,$$

da cui:

$$\cos\alpha=\frac{45^2+10^2-60^2}{2\cdot45\cdot10}\cong-1{,}6389.$$

È un risultato assurdo! Non può esistere un angolo il cui coseno vale $-1{,}6389$, dato che risulta sempre

$$-1\leq\cos\alpha\leq1.$$

È facile verificare che i calcoli sono stati eseguiti correttamente; e, allora, dov'è l'errore? Esaminando i dati $a=60$, $b=45$, $c=10$, si nota che risulta

$$b+c=55$$

mentre è dato

$$a=60.$$

In queste condizioni, il triangolo "non si chiude" (Fig. 27)!

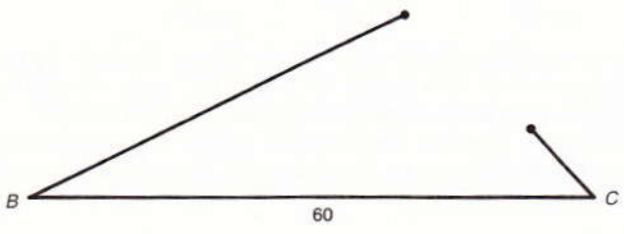

Fig. 27

Nell'assegnare delle lunghezze ai lati di un triangolo, bisogna sempre tener presente che le tre lunghezze non possono essere scelte a caso!
Ogni lato deve essere minore della somma degli altri due; e cioè deve essere:

$$a+b>c$$
$$a+c>b$$
$$b+c>a.$$

Osserviamo inoltre che se si fissa l'attenzione su un solo lato, per esempio sul lato ***a***, *possiamo scrivere la prima disuguaglianza nella forma*

$$a>c-b,$$

e questo se $c>b$. *Altrimenti, se* $c<b$, *scriveremo la seconda disuguaglianza nella forma*

$$a>b-c.$$

Si deve dunque tener presente che: ***in un triangolo un lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza****; deve, per esempio, risultare:*

$$b-c<a<b+c.$$

2) Sono dati i tre lati:

$$a=60, \quad b=45, \quad c=20.$$

Per determinare gli angoli del triangolo basiamoci sul teorema del coseno; cominciamo, per esempio, col determinare l'angolo γ *a partire dalla relazione:*

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;$$

si ha:

$$20^2=60^2+45^2-2\cdot 60\cdot 45\cos\gamma,$$

da cui:

$$\cos\gamma=\frac{60^2+45^2-20^2}{2\cdot 60\cdot 45}\cong 0{,}96759,$$

e quindi:

$$\gamma\cong 15°.$$

Proviamo ora a determinare l'angolo α *a partire dal teorema dei seni. Da*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

si ha:

$$\frac{60}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{20}{\operatorname{sen}15°},$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{60\cdot\operatorname{sen}15°}{20}\cong 0{,}75755,$$

da cui:

$$\alpha\cong 49°.$$

Determiniamo, infine, l'angolo β; *si ha:*

$$\beta\cong 180°-(15°+49°)=116°.$$

Gli elementi del triangolo sono dunque:

lati	$a=60,$	$b=45,$	$c=20;$
angoli	$\alpha\cong 49°,$	$\beta\cong 116°,$	$\gamma\cong 15°.$

Ci si rende conto che i risultati ottenuti sono errati: infatti, l'angolo opposto al lato lungo 60 è di 49°, mentre l'angolo opposto al lato lungo 45 è di 116°; ora, ciò non è possibile perché ***in un triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore****. Dov'è l'errore?*
Esaminiamo il procedimento seguito: verifichiamo subito se l'ampiezza dell'angolo α *è corretta. Proviamo a determinare quest'ampiezza basandosi sul teorema del coseno invece che sul teorema dei seni. Dalla relazione*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

si ha:

$$\cos\alpha=\frac{45^2+20^2-60^2}{2\cdot 45\cdot 20}\cong -0{,}65278.$$

Si capisce subito che l'angolo α *è ottuso, dato che si è ottenuto (Fig. 28)*

$$\cos\alpha<0.$$

Il calcolatore conferma questo fatto; risulta:

$$\alpha\cong 131°.$$

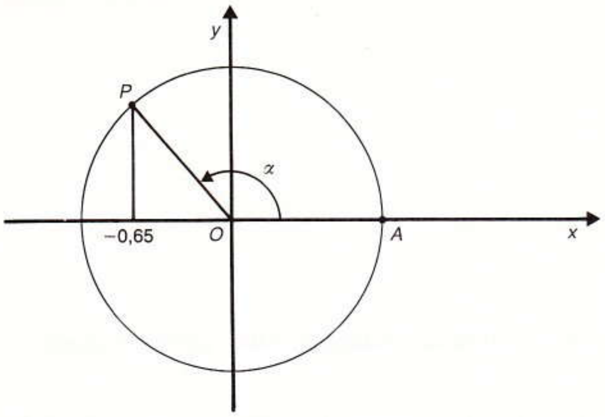

Fig. 28

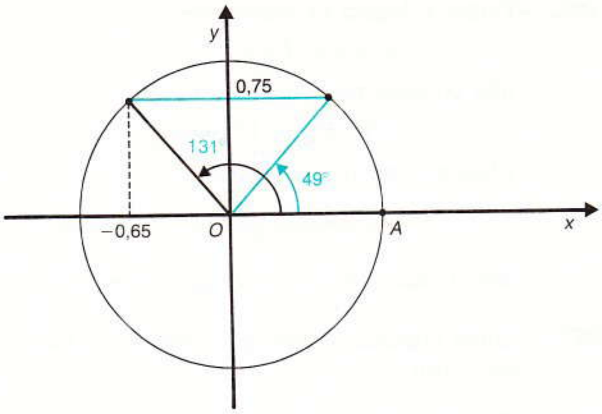

Fig. 29

Applicando invece il teorema dei seni, avevamo ottenuto:

$$\alpha=49°.$$

Osserviamo che risulta:

$$49°=180°-131°,$$

e (Fig. 29):

$$\text{sen}\,131°=\text{sen}\,49°\cong 0{,}75.$$

Abbiamo già fatto quest'osservazione a proposito degli angoli associati (esercizi 89-104): la sola conoscenza di $\text{sen}\,\alpha$ *porta a determinare non un angolo, ma due angoli, che sono supplementari. Dobbiamo ora aggiungere che, nella risoluzione dei triangoli, in cui si ha sempre*

$$0°<\alpha<180°,$$

se si conosce $\cos\alpha$, *l'angolo* α *viene individuato in modo univoco. L'argomento è trattato in modo più approfondito nel testo, cap. 5, pp. 134-135.*

Possiamo ora terminare la risoluzione del triangolo assegnato calcolando β; *si ha:*

$$\beta\cong 180°-(131°+15°)=34°.$$

Si ottengono così tutti gli elementi del triangolo; si ha:

lati	$a=60,$	$b=45,$	$c=20;$
angoli	$\alpha\cong 131°,$	$\beta\cong 34°,$	$\gamma\cong 15°.$

Lo svolgimento di questo esercizio porta a concludere che, quando si risolve un triangolo di cui sono dati i tre lati, si possono seguire due procedimenti:

A) valersi due volte del teorema del coseno per determinare due angoli del triangolo;

B) valersi del teorema del coseno per determinare l'angolo opposto al lato maggiore, tenendo presente che questo è il solo angolo che può essere ottuso; ci si può poi valere del teorema dei seni per determinare il secondo angolo del triangolo.

Risolvere i triangoli di cui sono dati i tre lati.

197. $a=58,\quad b=28,\quad c=64$

198. $a=40,\quad b=30,\quad c=20$

199. $a=120,\quad b=30,\quad c=10$

200. $a=50,\quad b=50,\quad c=40$

201. $a=54{,}25,\quad b=89{,}84,\quad c=107{,}82$

202. $a=1{,}95\cdot 10^2,\quad b=2{,}97\cdot 10^2,\quad c=2{,}79\cdot 10^2$

203. $a=2{,}50\cdot 10^{-3},\quad b=3{,}75\cdot 10^{-3},\quad c=1{,}94\cdot 10^{-3}$

204. $a=4,\quad b=2+2\sqrt{3},\quad c=2\sqrt{6}$

205. $a=\sqrt{6}-\sqrt{2},\quad b=\sqrt{6}+\sqrt{2},\quad c=2\sqrt{3}$

206. Come è legata la condizione

$$b-c<a<b+c$$

alla condizione

$$-1<\cos\alpha<1?$$

(Tenere presente la relazione

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

che si ricava dal teorema del coseno).

207. Quali condizioni devono soddisfare i numeri a, b, c, lati di un triangolo ABC, perché l'angolo α sia acuto?

208. Quali condizioni devono soddisfare i numeri a, b, c, lati di un triangolo ABC, perché il triangolo sia acutangolo?

IV) *Esaminiamo alcuni casi numerici.*

1) Sono dati:

$$\beta=110°,\quad a=30,\quad b=20.$$

Il triangolo non si può costruire (Fig. 30).

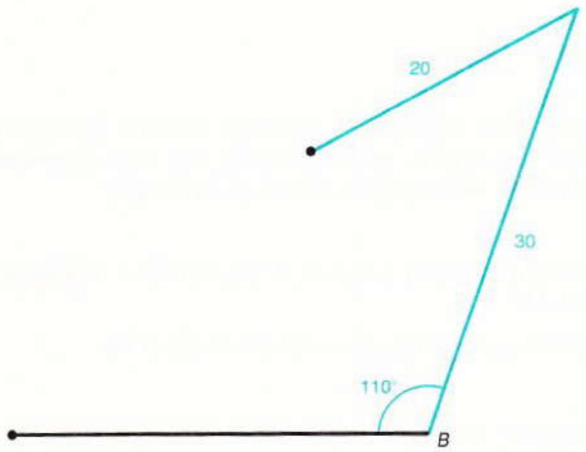

Fig. 30

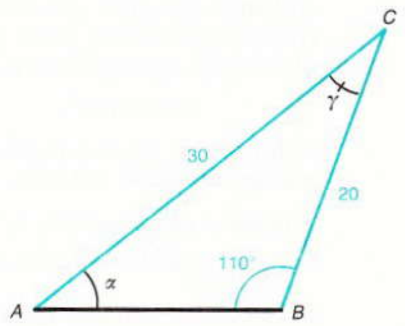

Fig. 31

2) Sono dati:

$$\beta=110°,\quad a=20,\quad b=30.$$

Si ha un solo triangolo (Fig. 31).
Si osserva come sia importante conoscere la posizione dei lati rispetto all'angolo noto. Questa informazione viene generalmente data scegliendo i "nomi" degli elementi assegnati: per convenzione si indica con b la lunghezza del lato opposto all'angolo che ha vertice B e ampiezza β, e così per gli altri lati.
Risolviamo ora il triangolo; si possono determinare gli elementi incogniti basandosi sul teorema dei seni. Si procede così: dalla relazione

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

che, nel nostro caso, diventa

$$\frac{20}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{30}{\operatorname{sen}110°}$$

si ottiene:

$$\operatorname{sen}\alpha=20\cdot\frac{\operatorname{sen}110°}{30}\cong 0{,}6265;$$

da cui:

$$\alpha \cong 39°.$$

Si determina poi l'angolo γ; si ha:

$$\gamma \cong 180° - (110° + 39°) = 31°.$$

Infine, si calcola il lato c, basandosi ancora sul teorema dei seni; si ha:

$$\frac{c}{\text{sen}\,31°} = \frac{30}{\text{sen}\,110°},$$

da cui:

$$c = \frac{30}{\text{sen}\,110°}\,\text{sen}\,31° \cong 16.$$

Gli elementi del triangolo sono dunque:

lati	$a=20,$	$b=30,$	$c \cong 16;$
angoli	$\alpha \cong 39°,$	$\beta = 110°,$	$\gamma \cong 31°.$

3) Sono dati:

$$\beta = 90°, \quad a=40, \quad b=20.$$

Non è possibile costruire il triangolo (Fig. 32).

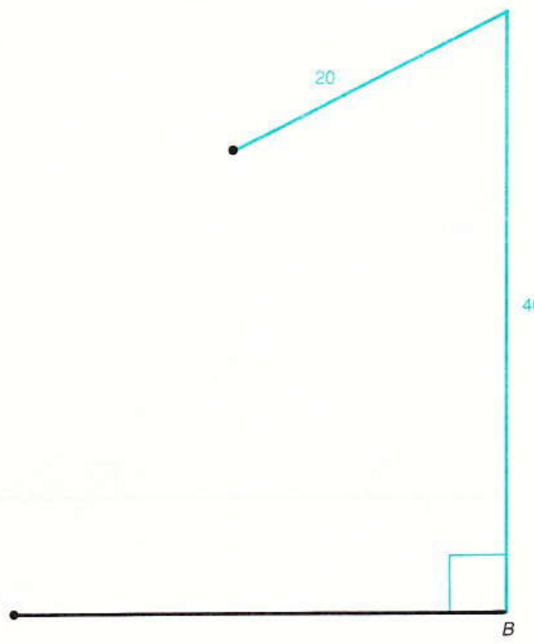

Fig. 32

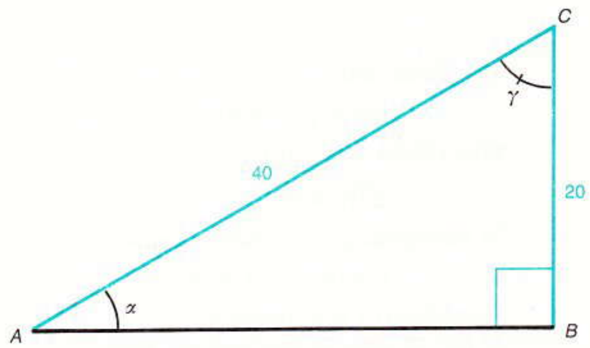

Fig. 33

4) Sono dati:

$$\beta = 90°, \quad a=20, \quad b=40.$$

Si ha un solo triangolo (Fig. 33); risulta:

$$c = \sqrt{40^2 - 20^2} \cong 35 \qquad \text{(per il teorema di Pitagora)}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{20}{40} = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 30°,$$

e infine:

$$\gamma = 90° - 30° = 60°.$$

Abbiamo così tutti gli elementi del triangolo; risulta:

lati	$a=20,$	$b=40,$	$c \cong 35;$
angoli	$\alpha = 30°,$	$\beta = 90°,$	$\gamma = 60°.$

5) *Sono dati:*

$$\beta=30°, \quad a=20, \quad b=8.$$

Costruiamo l'angolo di vertice B (Fig. 34) e su uno dei lati fissiamo la lunghezza

$$\overline{BC}=20.$$

Calcoliamo la distanza $\overline{CH}$ *del vertice C dal lato opposto; si ha:*

$$\overline{CH}=20\,\mathrm{sen}\,30°=20\cdot 0{,}5=10.$$

Ci si rende conto che con i dati assegnati non è possibile costruire il triangolo, dato che risulta $b<\overline{CH}$.

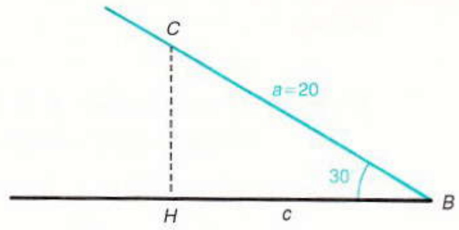

Fig. 34

6) *Sono dati:*

$$\beta=30, \quad a=20, \quad b=10.$$

Risulta (Fig. 35):

$$b=\overline{CH}=20\,\mathrm{sen}\,30°.$$

Si ottiene così un triangolo rettangolo; e dunque:

$$\alpha=90° \quad \text{e, di conseguenza,} \quad \gamma=60°.$$

Si ha poi:

$$c=\sqrt{20^2-10^2}\cong 17.$$

Il triangolo assegnato ha dunque:

lati	$a=20,$	$b=10,$	$c\cong 17;$
angoli	$\alpha=90°,$	$\beta=30°,$	$\gamma=60°.$

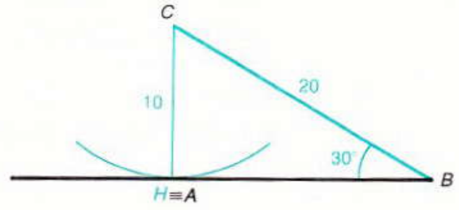

Fig. 35

7) *Sono dati:*

$$\beta=30°, \quad a=20, \quad b=15.$$

Ora risulta (Fig. 36):

$$\overline{CH}<b<a.$$

Si ottengono perciò due triangoli:

$$CA_1B \quad e \quad CA_2B.$$

Risolviamo i due triangoli.
Si ha, in base al teorema dei seni:

$$\frac{20}{\mathrm{sen}\,\alpha}=\frac{15}{\mathrm{sen}\,30°},$$

da cui:

$$\mathrm{sen}\,\alpha=20\frac{\mathrm{sen}\,30°}{15}=0{,}\overline{6}.$$

Questo valore di $\mathrm{sen}\,\alpha$ *individua i due angoli supplementari*

$$\alpha_1\cong 42° \quad e \quad \alpha_2\cong 180°-42°=138°.$$

Consideriamo il valore

$$\alpha_1=42°,$$

si ha il triangolo CA_1B. *Risulta, per questo triangolo:*

$$\gamma_1\cong 180°-(30°+42°)=108°$$

il lato c_1 *si determina con il teorema dei seni:*

$$\frac{c_1}{\mathrm{sen}\,108°}=\frac{15}{\mathrm{sen}\,30°}\longrightarrow c_1=\frac{15}{\mathrm{sen}\,30°}\mathrm{sen}\,108°\cong 28.$$

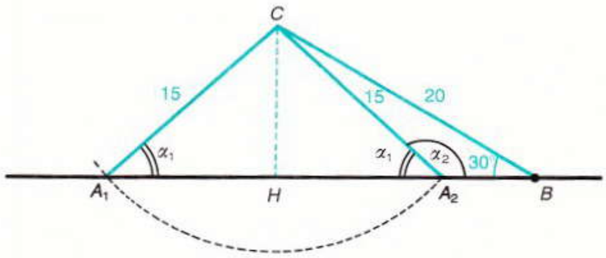

Fig. 36

Il triangolo A_1CB (Fig. 37) ha dunque gli elementi:

lati	$a=20,$	$b=15,$	$c_1\cong 28;$
angoli	$\alpha_1\cong 42°,$	$\beta=30°,$	$\gamma_1\cong 108°.$

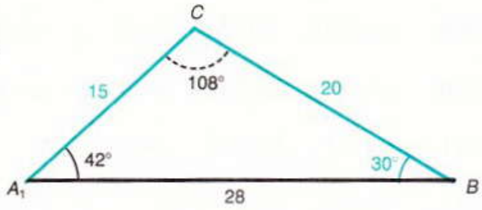

Fig. 37

Considerando il valore

$$\alpha_2\cong 138°,$$

si ha il triangolo CA_2B, per cui:

$$\gamma_2\cong 180°-(138°+30°)=12°$$

$$c_2=\frac{15}{\text{sen}\,30°}\,\text{sen}\,12°\cong 6.$$

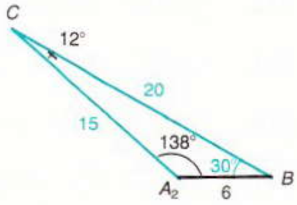

Fig. 38

Gli elementi del triangolo CA_2B (Fig. 38) sono dunque:

lati	$a=20,$	$b=15,$	$c\cong 6;$
angoli	$\alpha_2\cong 138°,$	$\beta=30°,$	$\gamma_2\cong 12°.$

8) Sono dati:

$$\beta=30°,\quad a=20,\quad b=20.$$

In questo caso si ha un solo triangolo isoscele (Fig. 39).
È facile determinare gli elementi incogniti; si ha:

$$\alpha=30°$$
$$\gamma=180°-2\cdot 30°=120°$$
$$c=\frac{20}{\text{sen}\,30°}\,\text{sen}\,120°\cong 35.$$

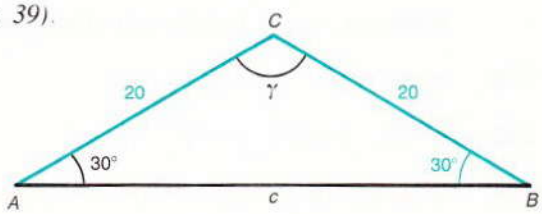

Fig. 39

Il triangolo ha dunque:

lati	$a=20,$	$b=20,$	$c\cong 35;$
angoli	$\alpha=30°,$	$\beta=30°,$	$\gamma=120°.$

9) Sono dati:

$$\beta=30°,\quad a=20,\quad b=25.$$

Anche in questo caso si ha un solo triangolo (Fig. 40), di cui possiamo determinare gli elementi basandosi sul teorema dei seni; si ha:

$$\frac{20}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{25}{\text{sen}\,30°},$$

da cui:

$$\text{sen}\,\alpha=20\,\frac{\text{sen}\,30°}{25}=0{,}4$$

e

$$\alpha\cong 24°.$$

Troviamo poi:

$$\gamma\cong 180°-(30°+24°)=126°,$$

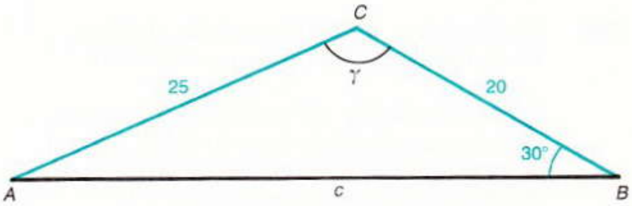

Fig. 40

e infine:

$$c\cong\frac{25}{\text{sen}\,30°}\,\text{sen}\,126°\cong 40.$$

Il triangolo ha dunque:

lati	$a=20,$	$b=25,$	$c=40;$
angoli	$\alpha\cong 24°,$	$\beta=30°,$	$\gamma\cong 126°.$

Risolvere i triangoli di cui sono dati due lati e un angolo non compreso negli esercizi 209-219.

209. $\alpha=100°$, $b=40$, $a=35$ e $\alpha=100°$, $b=40$, $a=50$

210. $\alpha=60°$, $b=100$, $a=90$ e $\alpha=60°$, $b=90$, $a=100$

211. $\alpha=60°$, $b=100$, $a=100$

212. $\gamma=91°$, $b=4$, $c=3$ e $\gamma=91°$, $b=4$, $c=10$.

213. $\gamma=25°$, $b=50$, $c=20$, e $\gamma=25°$, $b=50$, $c=21$

214. $\gamma=25°$, $b=50$, $c=30$ e $\gamma=25°$, $b=30$, $c=50$

215. $\gamma=25°$, $b=50$, $c=50$

216. $\beta=101°23'2''$, $a=15{,}35$, $b=15{,}34$ e $\beta=101°23'2''$, $a=15{,}35$, $b=15{,}36$

217. $\beta=51°3'17''$, $a=1572{,}38$, $b=1222{,}90$ e $\beta=51°3'17''$, $a=1572{,}38$, $b=1222{,}95$

218. $\beta=51°3'17''$, $a=1572{,}38$, $b=1315{,}23$ e $\beta=51°3'17''$, $a=1315{,}23$, $b=1572{,}38$

219. $\beta=51°3'17''$, $a=1572{,}38$, $b=1572{,}38$ e $\beta=51°3'17''$, $a=1572{,}38$, $b=1572{,}40$

Risolvere, con il metodo più opportuno, i triangoli di cui sono noti gli elementi seguenti.

220. $a=4$, $c=5$, $\beta=130°$

221. $b=32$, $\alpha=96°$, $\gamma=36°$

222. $c=12$, $\beta=60°$, $\gamma=72°$

223. $a=27{,}3$, $b=28{,}5$, $c=35{,}42$

224. $a=1{,}097\cdot 10^3$, $b=9{,}097\cdot 10^2$, $c=1{,}499\cdot 10^3$

225. $b=3795{,}94$, $c=1812{,}73$, $a=127°31'40''$

226. $a=3{,}59\cdot 10^4$, $b=4{,}58\cdot 10^4$, $\gamma=27'37''$

227. $b=3{,}17\cdot 10^8$, $\beta=0{,}77''$, $\gamma=98°3'15''$

228. $\gamma=122°$, $b=80$, $c=75$ e $\gamma=122°$, $b=80$, $c=100$

229. $b=2\sqrt{10}$, $c=6\sqrt{3}$, $\alpha=135°$

230. $a=\sqrt{3}$, $\beta=18°$, $\gamma=45°$

231. $a=3-\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$

232. $a=3\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3+\sqrt{3}$

233. $\alpha=45°$, $b=4\sqrt{2}$, $c=3\sqrt{2}$

234. $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{5}$, $\gamma=18°$

235. $\beta=90°1'1''$, $a=215{,}701$, $b=215{,}700$ e $\beta=90°1'1''$, $a=215{,}701$, $b=215{,}702$

Altri problemi di geometria

236. Determinare la lunghezza delle mediane di un triangolo di cui si conoscono i lati.

(Osservare la Fig. 41: applicare il teorema del coseno prima al triangolo CAM e poi al triangolo CMB; addizionare membro a membro le due relazioni ottenute...).

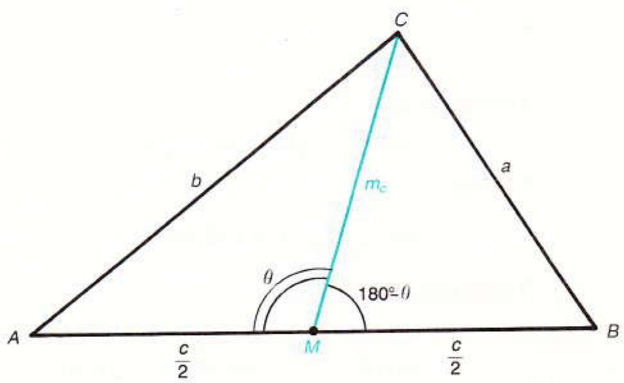

Fig. 41

237. Di un triangolo si conoscono i lati $b=8$ e $c=10$, e la mediana m_c relativa al lato c, che è lunga 6. Risolvere il triangolo e determinare le altre due mediane.

238. In un triangolo ABC il lato BC è lungo a e la mediana AM ad esso relativa è lunga $\frac{a}{2}$. Verificare che il triangolo è rettangolo in A.
Risolvere il triangolo e determinare le altre due mediane, sapendo che AM forma con BC angoli di 60° e 120°.

239. È dato il triangolo ABC che ha i seguenti lati: $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=5$. Determinare le ampiezze degli angoli in cui viene diviso l'angolo α dalla mediana relativa al lato BC.

240. È dato il triangolo ABC che ha i lati $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=5$. Dividere BC in tre parti uguali e determinare l'ampiezza degli angoli in cui viene diviso l'angolo α.

241. Un parallelogramma ha due lati consecutivi lunghi 8 cm e 7 cm, e l'angolo da essi compreso è di 70°. Calcolare la lunghezza delle diagonali.

242. Un parallelogramma ha le diagonali, lunghe 40 cm e 28 cm, che formano un angolo di 100°. Determinare i lati e gli angoli del parallelogramma.

243. In una circonferenza di centro O e raggio r si tracciano due corde AP e PQ in modo che $A\hat{O}P=60°$ e $A\hat{O}Q=90°$.
Calcolare il perimetro del triangolo APQ.
(Il teorema della corda esaminato nell'esercizio 170 rende lo svolgimento più rapido).

244. Due corde di uno stesso cerchio di raggio r hanno un estremo comune sulla circonferenza; esse sono lunghe $r\sqrt{2}$ e $r\sqrt{3}$.
Calcolare l'angolo fra le due corde.
(Il teorema della corda, esaminato nell'esercizio 170, rende rapido lo svolgimento).

245. Due cerchi c e c', di raggi $r=3$ e $r'=5$, hanno una corda MN in comune (Fig. 42). P è un punto dell'arco maggiore MN del cerchio c e Q è un punto dell'arco maggiore MN del cerchio c'.
Sapendo che $M\hat{P}N=50°$, determinare $M\hat{Q}N=\beta$.
(Valersi del teorema della corda esposto nell'esercizio 170).

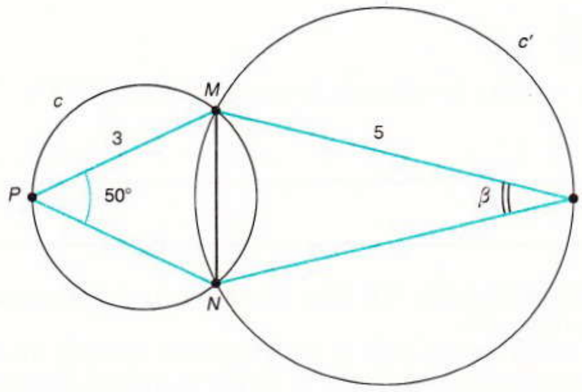

Fig. 42

246. Su un segmento $AB=2r$ si costruisce un semicerchio, e, dalla parte opposta, un quadrato $ABCD$. Nel semicerchio si traccia una corda AM, che forma con AB un angolo α.
Esprimere MD per mezzo di r e di α e calcolarne la lunghezza per:

$$\alpha=30°, \quad \alpha=45°, \quad \alpha=60°.$$

247. Dimostrare che le diagonali d_1 e d_2 di un quadrangolo convesso inscritto in un cerchio (Fig. 43) sono legate fra loro dalle relazioni seguenti:

$$d_1^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

$$d_2^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

(A ciascuna delle coppie di triangoli ABD e BCD, ABC e ACD si può applicare il teorema del coseno...; si tenga anche presente che se un quadrangolo è inscritto in un cerchio, gli angoli opposti sono supplementari).

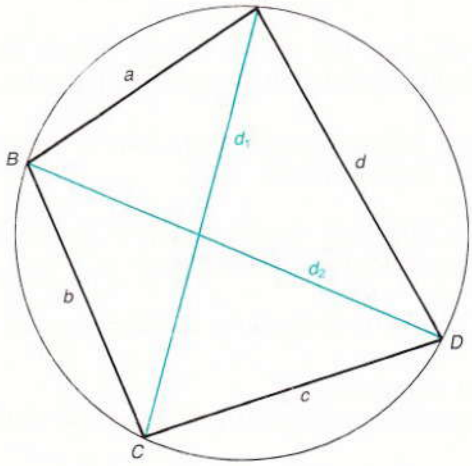

Fig. 43

248. A partire dalle due relazioni stabilite nell'esercizio precedente dimostrare il seguente teorema di Tolomeo (astronomo e matematico greco del II sec. d.C.):

$$d_1 \cdot d_2=ac+bd.$$

(Moltiplicare membro a membro le relazioni trovate nell'esercizio 247).

249. A partire dalle due relazioni stabilite nell'esercizio 247 dimostrare il seguente teorema di Legendre (matematico francese, 1752-1833):

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{bc+ad}{cd+ab}.$$

(Dividere membro a membro le relazioni trovate nell'esercizio 247).

Problemi vari

250. Si è progettato il raccordo stradale AB (Fig. 44) che evita di attraversare la città C. Determinare la lunghezza del raccordo AB.
Se sulla strada che attraversa la città si mantiene una velocità media di 40 km/h, mentre sul raccordo si riesce a mantenere una media di 70 km/h, quanto tempo si risparmia percorrendo il raccordo AB?

251. Si costruisce sulla cima di una collina un ripetitore per trasmissioni televisive AB, alto 20 m (Fig. 45). Da un punto P al livello del suolo vengono osservate la base A e la punta B del ripetitore; gli angoli di elevazione sono di 19° e 24°. Quanto è alta la collina?

252. Il lancio di un veicolo spaziale V viene seguito da terra con un radar posto in A (Fig. 46). L'antenna del radar è inclinata di 40° rispetto all'orizzontale e la distanza AV è di 10.418 km. Quanto è distante V dal centro C della terra?
(Ricordare che il raggio della terra è $AC=6371$ km).

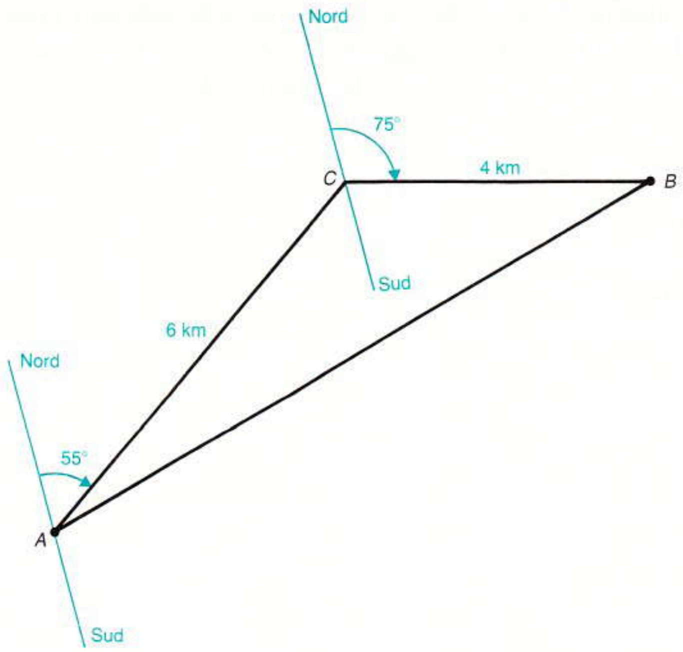

Fig. 44

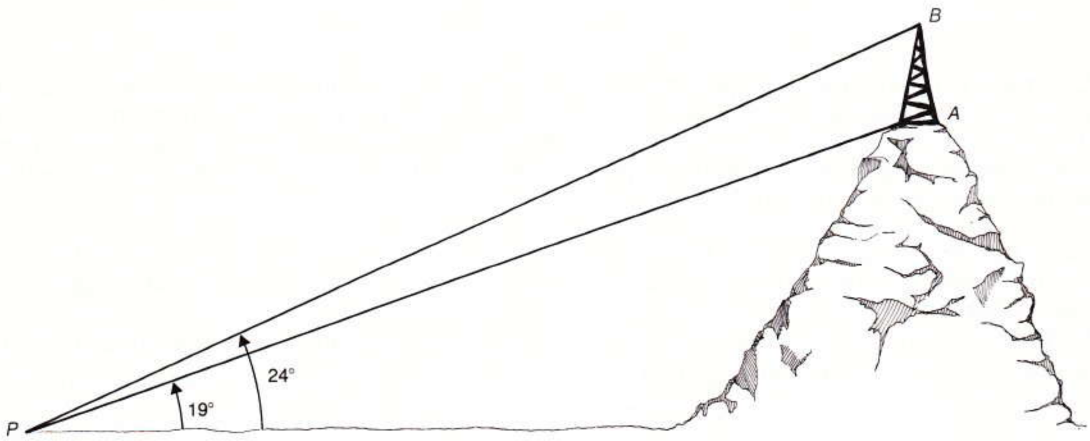

Fig. 45

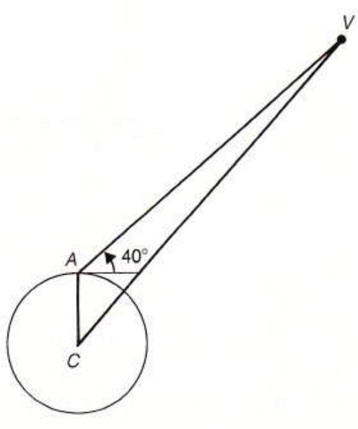

Fig. 46

253. Si sta progettando una galleria rettilinea che deve collegare due paesi A e B situati su due versanti opposti di una montagna. Per prevedere la lunghezza della galleria i progettisti procedono così: misurano da una località C, facile da raggiungere, le distanze $\overline{CA}=1{,}125$ km e $\overline{CB}=2{,}456$ km e l'angolo $A\hat{C}B=50°2'35''$. Quanto sarà lunga la galleria AB?

254. La struttura di una molecola di ammoniaca (NH_3) si può rappresentare con una piramide a facce triangolari (Fig. 47). Si trova che:

$$H\hat{N}H=106°\ 45,$$
$$\overline{HN}=1{,}014 \text{ angstrom}=1{,}014\cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Quanto vale la distanza fra due atomi di idrogeno?

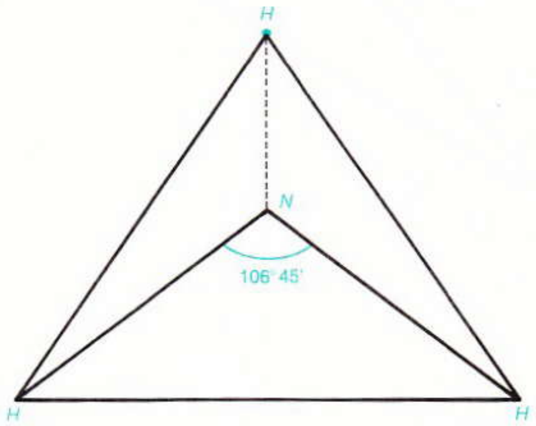

Fig. 47

255. Una nave parte da un'isola A per raggiungere il porto P, procedendo in linea retta; a causa di un errore, la navigazione avviene su una rotta diversa. Dopo 6 ore il comandante si accorge dell'errore e ordina di virare di un angolo di 19°; in tal modo si dirige esattamente verso il porto P che raggiunge dopo 2 ore. Quanto tempo si è perso a causa dell'errore, se la nave ha mantenuto sempre una velocità costante?

256. Nella Fig. 48 è schematizzato il funzionamento di un *manovellismo* che si trova in molte macchine: il corsoio P scorre su una guida metallica, mentre ruota la testa T della biella b, che è imperniata in A.
La biella b è lunga 200 cm e la manovella m è lunga 70 cm; quanto vale la corsa della biella (cioè la distanza $\overline{PA}$), quando l'angolo $T\hat{P}A$ è ampio 20°? Questo problema ha una sola soluzione?

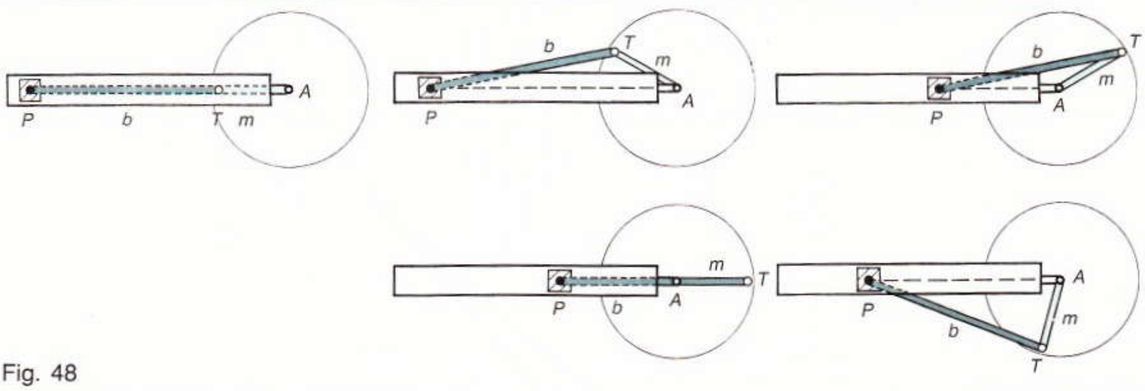

Fig. 48

257. Si accoppiano alla stessa biella, lunga 200 cm, manovelle di lunghezza diversa; si considera sempre il caso in cui $T\hat{P}A=20°$.
Calcolare la corsa della biella quando le manovelle sono lunghe:

$$m=68{,}4 \text{ cm},\quad m=200 \text{ cm},\quad m=210 \text{ cm}.$$

Problemi di topografia

Si deve misurare l'altezza h di una torre AB, nel caso in cui la base A della torre è accessibile, cioè si può, a partire da una posizione C, misurare sul terreno la distanza $\overline{AC}=b$ (Fig. 49). Esaminare le varie situazioni che possono presentarsi, e che sono proposte negli esercizi 258-260.

258. La base A si trova allo stesso livello di C, come in Fig. 49, e risulta $A\hat{C}B=\gamma$. Esprimere h per mezzo di b e di γ; determinare poi h nel caso in cui

$$b=5{,}2 \text{ m}, \quad \gamma=70°20'.$$

259. La base A della torre si trova al di sotto del piano orizzontale passante per C; si misurano gli angoli γ_1 e γ_2 (Fig. 50). Esprimere h per mezzo di b, γ_1 e γ_2; determinare poi h nel caso in cui

$$b=12{,}3 \text{ m}, \quad \gamma_1=20°10', \quad \gamma_2=50°30'.$$

260. La base A della torre si trova al di sopra del piano orizzontale passante per C; si misurano gli angoli γ_1 e γ_2 (Fig. 51). Esprimere h per mezzo di b, γ_1 e γ_2 e determinare h nel caso in cui

$$b=18{,}4 \text{ m}, \quad \gamma_2=78°12', \quad \gamma_1=21°40'.$$

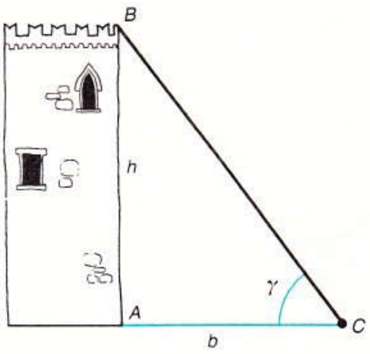

Fig. 49

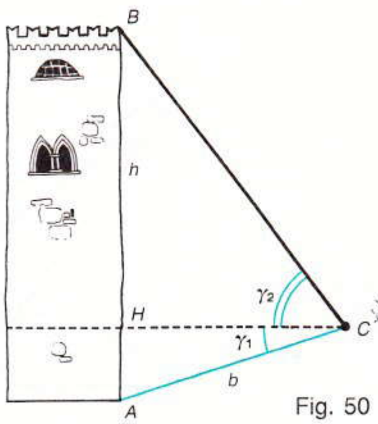

Fig. 50

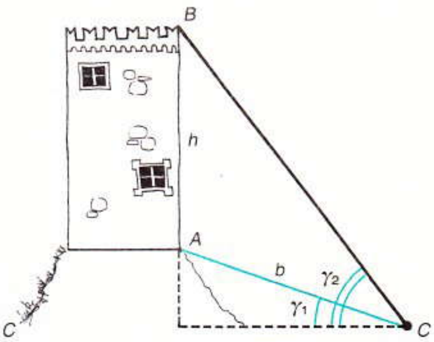

Fig. 51

Esaminiamo ora il caso in cui la base A della torre sia visibile ma inaccessibile, cioè non sia possibile misurare, da una posizione C, la distanza $\overline{CA}$ a causa, per esempio, di un fossato. Occorre fissare, sul terreno circostante la base A della torre, un segmento CD, lungo d. Negli esercizi 261-263 si propone l'esame di tre situazioni che possono presentarsi.

261. I punti C e D si trovano allo stesso livello della base A della torre (Fig. 52); si misurano gli angoli γ e δ. Esprimere l'altezza h in funzione di d, γ, δ; calcolare h nel caso in cui

$$d=5 \text{ m}, \quad \gamma=78°3', \quad \delta=22°57'.$$

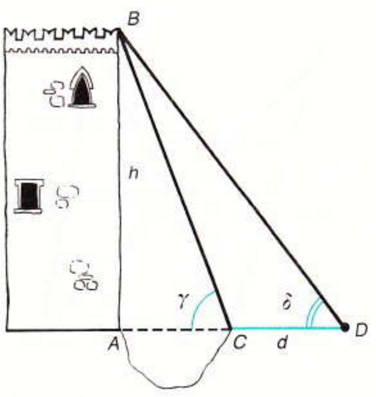

Fig. 52

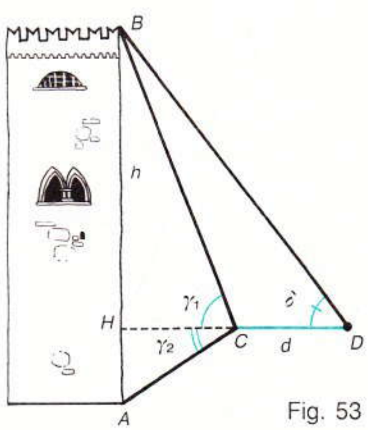

Fig. 53

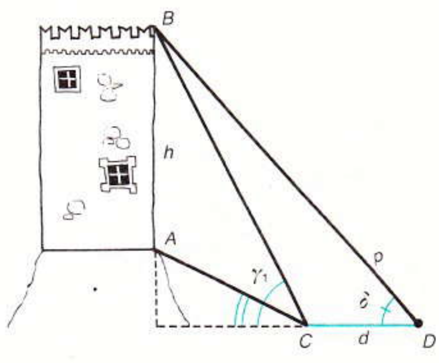

Fig. 54

262. I due punti C e D si trovano al di sopra della base A della torre (Fig. 53); si misurano gli angoli δ, γ_1, γ_2. Esprimere h in funzione di d, δ, γ_1 e γ_2; calcolare h nel caso in cui

$$d=22{,}8 \text{ m}, \quad \gamma_1=65°3', \quad \gamma_2=18°3', \quad \delta=21°47'.$$

263. I due punti C e D si trovano al di sotto della base della torre (Fig. 54); si misurano gli angoli δ, γ_1, γ_2. Esprimere l'altezza h in funzione di d, δ, γ_1, γ_2; calcolare h nel caso in cui

$$d=25{,}8 \text{ m}; \quad \delta=42°4'; \quad \gamma_1=68°23'; \quad \gamma_2=13°52'.$$

264. Per misurare l'altezza h di una montagna rispetto al piano orizzontale passante per un punto P, da cui si può vedere la vetta V della montagna, si procede così (Fig. 55): si sceglie un punto Q, accessibile e visibile da P, e si misurano gli angoli seguenti

$\beta=V\hat{Q}P$

$\alpha=V\hat{P}Q$

$\gamma=V\hat{P}H$ (angolo che la direzione VP forma col piano orizzontale passante per P)

e si misura infine la distanza

$\overline{PQ}=d.$

Esprimere l'altezza h in funzione di d, α, β, γ; calcolare h nel caso in cui

$$d=3 \text{ m}, \quad \alpha=42°3', \quad \beta=38°55', \quad \gamma=50°8'.$$

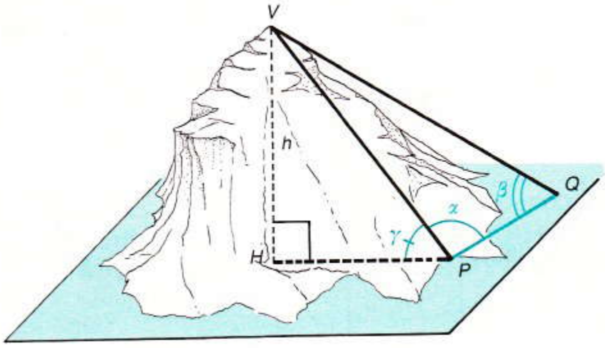

Fig. 55

265. Per misurare la distanza fra due punti A e B, non visibili uno dall'altro (a causa, per esempio, di una collina), si sceglie un terzo punto, C, in modo da poter misurare le distanze $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ e l'angolo $A\hat{C}2B=\gamma$ (Fig. 56). I punti sono allora raggiungibili e visibili dal punto C.
Esprimere la distanza $\overline{AB}$ in funzione di a, b, γ; calcolare $\overline{AB}$ nel caso in cui

$$a=10 \text{ m}, \quad b=15 \text{ m}, \quad \gamma=110°3'.$$

266. Due punti A e B sono separati da un corso d'acqua; i due punti sono allora visibili, ma uno solo, ad esempio A, è accessibile (Fig. 57). Si fissa allora un punto C in modo che sia possibile misurare

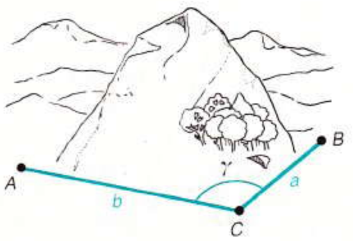

Fig. 56

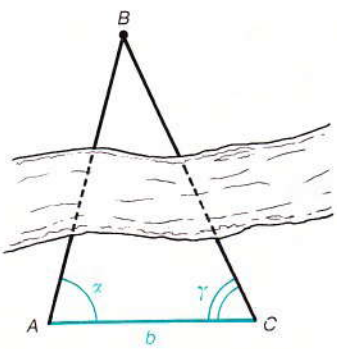

Fig. 57

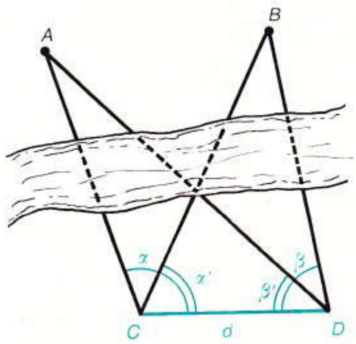

Fig. 58

la distanza $\overline{CA}$ e gli angoli $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$; si ha:

$$B\hat{A}C=\alpha,\quad B\hat{C}A=\gamma,\quad \overline{AC}=b.$$

Esprimere la distanza $\overline{AB}$ per mezzo di b, α, γ; calcolare $\overline{AB}$ nel caso in cui

$$b=18\text{ m},\quad \alpha=48°3',\quad \gamma=56°35'.$$

Consideriamo infine il caso in cui i due punti A, B, sono entrambi inaccessibili (Fig. 58), e si deve misurare la distanza $\overline{AB}$. In questo caso si fissa sul terreno una base CD lunga d, e si misurano i seguenti angoli:

$$\alpha=A\hat{C}D \quad e \quad \alpha'=B\hat{C}D$$
$$\beta=C\hat{D}B \quad e \quad \beta'=A\hat{D}C.$$

In base a questi dati si può calcolare la lunghezza di $\overline{AD}$ e di $\overline{BD}$.
Così si ottiene $\overline{AB}$, risolvendo il triangolo ABD di cui sono noti $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e l'angolo compreso β.

267. Determinare la distanza $\overline{AB}$ fra due punti inaccessibili, avendo i seguenti dati:

$$d=50\text{ m},\quad \alpha=95°2'18'',\quad \alpha'=55°8'21'',\quad \beta=84°8'41'',\quad \beta'=42°5'35''.$$

Problemi di fisica

Un corpo tirato da due forze $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ è soggetto alla forza $\vec{f}$, risultante delle due forze $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$; $\vec{f}$ si ottiene con la regola del parallelogramma, illustrata dalla Fig. 59.

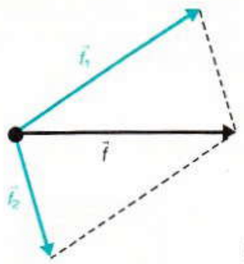

Fig. 59

268. Una nave è trainata da due rimorchiatori, che esercitano una forza $f=10^7$ Newton. Sapendo che i cavi formano angoli di 20° e 35° con l'asse di simmetria della nave, determinare la forza risultante $\vec{f}$ con cui è tirata la nave.

269. Un quadro è appeso ad un gancio per mezzo di un cordoncino, come è illustrato in Fig. 60. Sapendo che il cordone esercita una tensione di 12 N, determinare la forza risultante agente sul gancio.

270. Due uomini e un ragazzo tirano una barca lungo un canale. I due uomini tirano con forze $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ indicate in Fig. 61. Trovare direzione, verso e intensità della forza minima che il ragazzo potrebbe esercitare per mantenere la barca nel centro del canale.

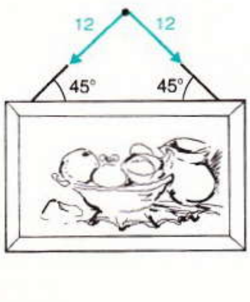

Fig. 60

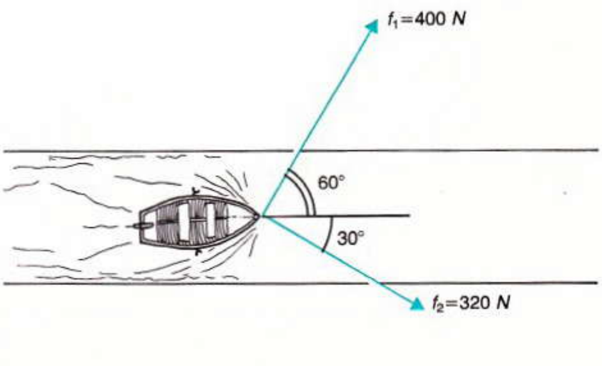

Fig. 61

271. Tre forze uguali sono applicate ad un corpo in uno stesso punto A. Quale deve essere l'angolo fra le forze perché la risultante abbia intensità nulla?

Se si esercita una forza $\vec{f}$ su un oggetto che si sposta di un certo tratto s, si esegue un lavoro L dato da

$$L=f\cdot s \cos \alpha,$$

dove f ed s sono il modulo della forza e dello spostamento, e α è l'angolo fra il vettore forza e il vettore spostamento.

272. Determinare il lavoro di una forza $\vec{f_1}$ d'intensità 15 N, esercitata su un corpo che si sposta di un tratto $s=10$ m, nelle situazioni illustrate in Fig. 62. Quale significato ha un lavoro $L<0$?

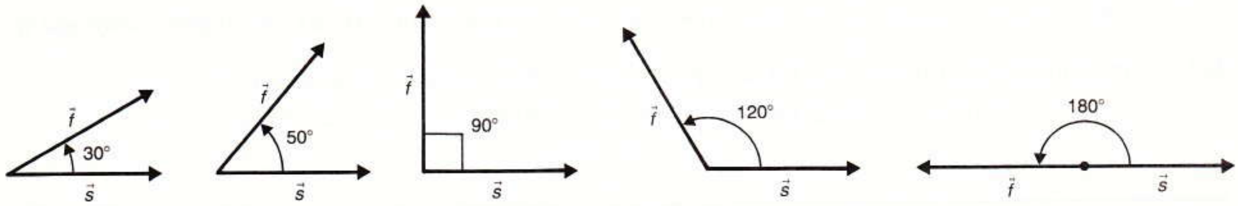

Fig. 62

273. Un corpo di massa $m=20$ kg cade nelle due situazioni illustrate in Fig. 63.
Nella situazione A il corpo viene lasciato cadere, mentre nella situazione B il corpo scivola lungo un piano inclinato senza attrito. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{p}$, tenendo conto che, in entrambi i casi, il dislivello è $h=10$ m.

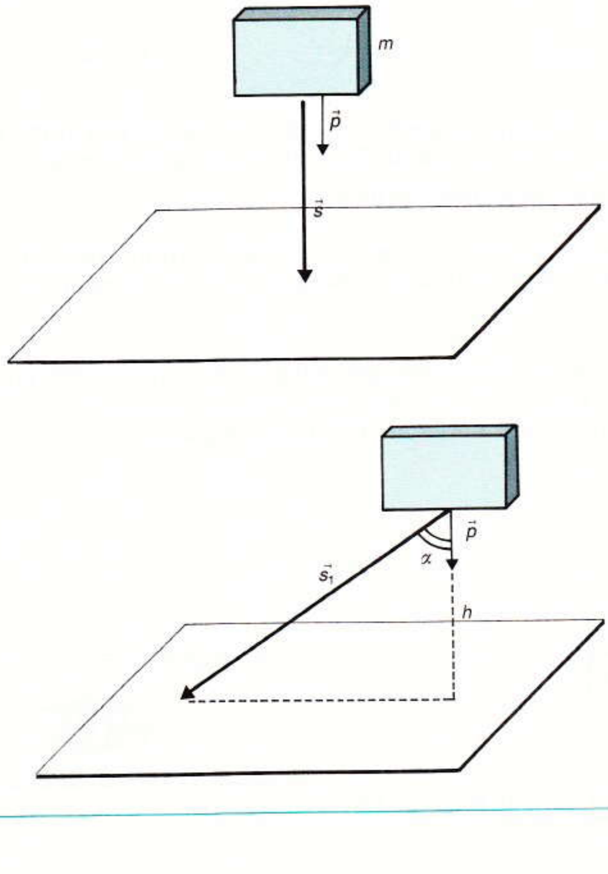

Fig. 63

Nei movimenti rotatori è importante valutare il momento M di una forza $\vec{f}$; tale momento è dato da

$$M = f \cdot r \operatorname{sen} \theta,$$

dove f è il modulo della forza, r è la distanza fra il centro O di rotazione e il punto A in cui è applicata la forza, e θ è l'angolo fra f e la congiungente OA (Fig. 64).

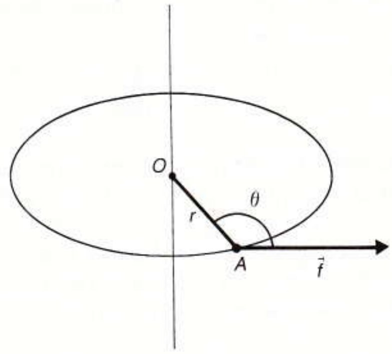

Fig. 64

274. Una porta ha la maniglia a 75 cm dalla cerniera *C*. Per chiudere la porta, premendo sulla maniglia, si esercita una forza *f* di 20 N.
Determinare il momento della forza, e calcolare per quale angolo θ tale momento è massimo.
Quale forza si dovrebbe applicare in un punto distante 25 cm da *C* per avere lo stesso momento massimo?

275. Determinare il momento della forza $\vec{f}$, che ha un'intensità di 10 N, nelle situazioni illustrate in Fig. 65. Tenere presente che l'asse di rotazione del disco passa per *O* ed è perpendicolare al piano del foglio.

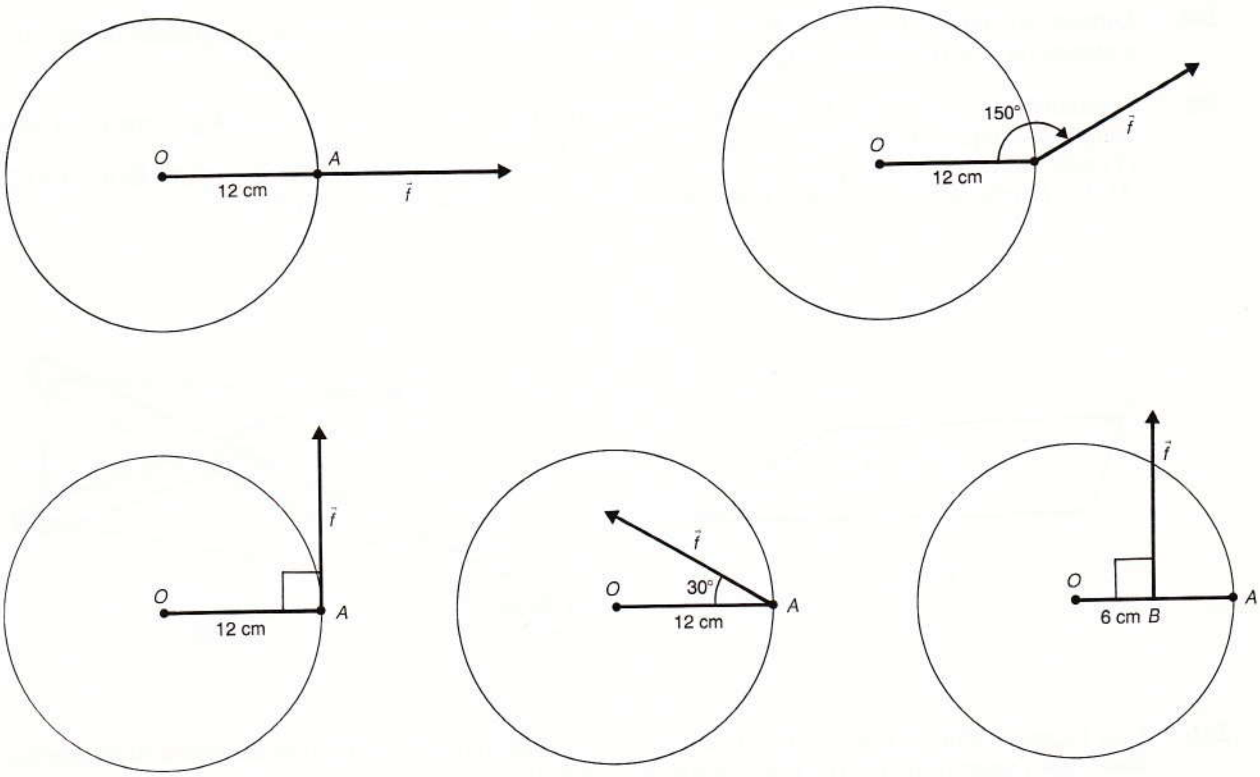

Fig. 65

Sull'area del triangolo

276. Calcolare l'area dei triangoli che hanno due lati lunghi 20 cm e 16 cm, quando l'angolo compreso fra questi lati ha uno dei seguenti valori:

$$\alpha_1=10, \quad \alpha_2=30°, \quad \alpha_3=45°, \quad \alpha_4=60°, \quad \alpha_5=80°,$$
$$\alpha_6=90°, \quad \alpha_7=120°, \quad \alpha_8=135°, \quad \alpha_9=120°, \quad \alpha_{10}=170°.$$

277. Fra tutti i triangoli che hanno i lati lunghi 20 cm e 16 cm e l'angolo compreso α, determinare quello che ha l'area massima. In quali casi si ha l'area minima?

278. Determinare l'area dei parallelogrammi che hanno due lati consecutivi lunghi 50 cm e 40 cm, quando l'angolo compreso da questi lati assume i valori elencati nell'esercizio 276.
(Tenere presente che un parallelogramma è diviso da una diagonale in due triangoli uguali).

279. Il parallelogramma articolato di Fig. 66 ha due lati consecutivi lunghi 15 cm e 30 cm, ed ha l'angolo compreso fra questi lati variabile. In quale caso il parallelogramma ha l'area massima? E in quali casi si ha l'area minima?

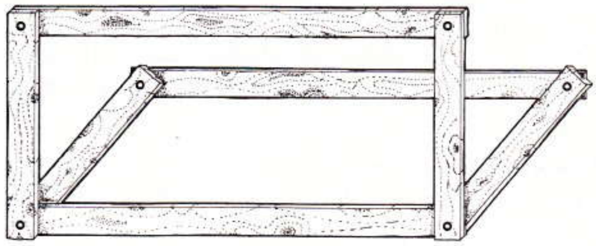

Fig. 66

280. Dimostrare che l'area di un parallelogramma è data dal prodotto delle lunghezze di due lati consecutivi per il seno dell'angolo compreso.

281. Il quadrilatero $ABCD$ di Fig. 67 ha le diagonali lunghe 8 cm e 12 cm e uno degli angoli fra esse compreso ampio 30°. Calcolare l'area del quadrilatero.
(Tenere presente che il quadrilatero si può scomporre in quattro triangoli: AOB, BOC, COD, AOD. L'area del quadrilatero è la somma delle aree dei quattro triangoli...).

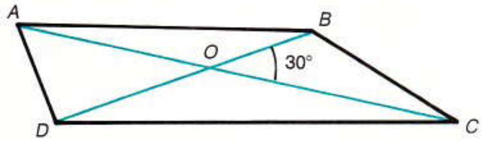

Fig. 67

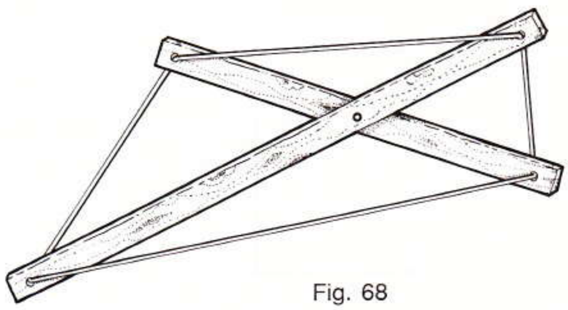

Fig. 68

282. Con l'apparecchio di Fig. 68 si costruiscono tanti quadrilateri che hanno le diagonali di lunghezza fissa, ma l'angolo acuto, fra esse compreso, variabile.
Qual è il quadrilatero di area massima? In quali situazioni si ottiene l'area minima?
Dimostrare che l'area di un quadrilatero è data dal semiprodotto delle due diagonali per il seno di uno degli angoli da esse formato.

283. Un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di raggio r, si può scomporre in n triangoli isosceli uguali unendo i vertici con il centro della circonferenza (Fig. 69).

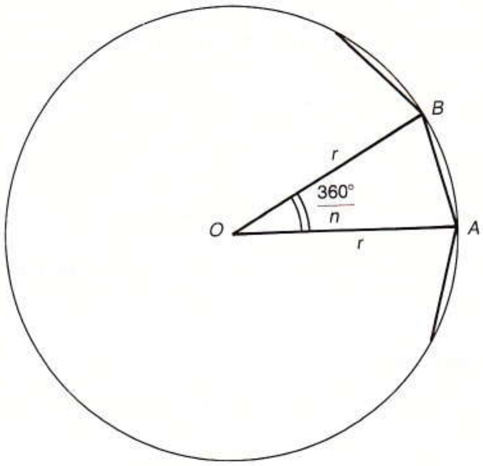

Fig. 69

Esprimere, in funzione del numero n di lati e del raggio r del cerchio, le seguenti grandezze:

— la lunghezza di un lato AB;
— il perimetro del poligono;
— l'area di uno dei triangoli AOB;
— l'area del poligono.

284. Sulla base delle formule trovate nell'esercizio precedente, calcolare, in funzione di r, il lato, il perimetro e l'area dei seguenti poligoni regolari inscritti in un cerchio di raggio r: triangolo, quadrato, pentagono, esagono, ottagono, decagono, dodecagono.
Riunire i risultati ottenuti in una tabella, come è qui indicato:

nome del poligono	*lato*	*perimetro*	*area*

I valori del seno o del coseno degli angoli che intervengono, espressi per mezzo di radicali, si possono trovare nel testo (pp. 18 e 19), o ricavare in base alle relazioni sugli angoli associati (p. 38).

285. Sapendo che l'area S di un triangolo qualunque è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, dimostrare il teorema dei seni.
(Da $S=\frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} \alpha=\frac{1}{2}\, ac \operatorname{sen} \beta=\frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \gamma$, si ottiene...).

286. Riferirsi all'esercizio 169 in cui si dimostra che per un triangolo qualunque risulta

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen} \beta}=\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}=2R,$$

con R raggio del cerchio circoscritto al triangolo, e, valendosi dei risultati ottenuti nell'esercizio 285, dimostrare che si ha:

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

287. Di un triangolo ABC si conosce l'area, $S=12$, e i lati, $b=6$, $c=5$. Risolvere il triangolo. La soluzione è unica?

288. Descrivere quali situazioni si possono presentare quando si deve risolvere un triangolo di cui si conosce l'area S e due lati, per esempio b e c.
(A partire dalla relazione $S=\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha$, se $2S>bc$ ..., se $2S=bc$ ..., se $2S<bc$ ...).

289. Risolvere un triangolo ABC di cui sono dati due angoli ($\alpha=40°32'$ e $\beta=101°3'$) e il raggio R del cerchio circoscritto ($R=20$).

290. Dimostrare che l'area di un triangolo si può esprimere nella forma

$$S=2R^2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta\cdot\text{sen}\,\gamma,$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta.

291. Considerare l'area di un triangolo qualunque espressa nella forma

$$S=\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha,$$

e tenere presenti le seguenti relazioni:

1) $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad\rightarrow \text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, dove $\alpha<180°$

2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Si potrà scrivere:

$$S=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}. \tag{1}$$

Basandosi sul prodotto notevole

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

riscrivere la (1) nella forma:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{dove} \qquad 2p=a+b+c;$$

questa formula, che esprime l'area in funzione del semiperimetro del triangolo e della lunghezza dei tre lati, è dovuta ad Erone, matematico greco vissuto fra il 100 a.C. e il 100 d.C.

292. La piramide di Cheope, in Egitto, ha quattro facce triangolari uguali. Ogni faccia è un triangolo isoscele che ha la base lunga 230 m e i lati lunghi 219 m.
Determinare la superficie laterale della piramide.
(Ci si può basare sulla formula di Erone).

293. A partire dalle considerazioni svolte nell'esercizio 286, dimostrare che il raggio R del cerchio circoscritto ad un triangolo di lati a, b, c è dato da

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

294. Determinare il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo di lati a, b, c (Fig. 70).
(L'area S del triangolo si può ottenere sommando le aree dei tre triangoli COA, COB, AOB, che hanno altezza ... . Basandosi poi sulla formula di Erone, si ottiene:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\Bigg).$$

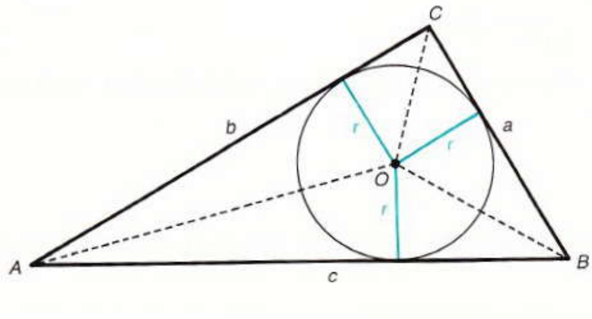

Fig. 70

295. Dimostrare che l'area S di un quadrangolo convesso inscritto in un cerchio (Fig. 71) è data da

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\operatorname{sen}\alpha.$$

(Ricordare che se un quadrangolo è inscritto in un cerchio gli angoli opposti sono supplementari).

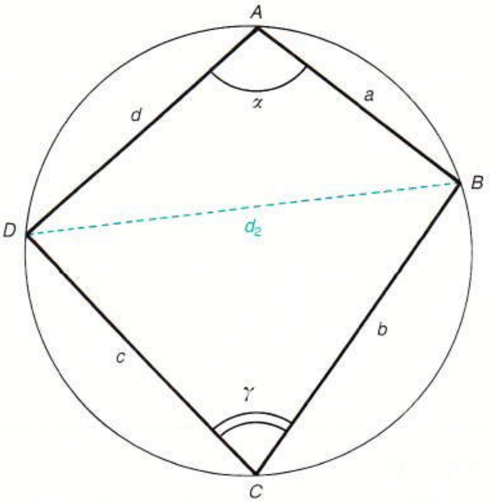

Fig. 71

296. Riferendosi alla Fig. 71, tenere presenti le seguenti relazioni:

(1) $S=\frac{1}{2}(ad+bc)\operatorname{sen}\alpha$ (S è l'area del quadrangolo)

(2) $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \;\rightarrow\; \operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (essendo $0°<\alpha<180°$)

(3) $$\left\{\begin{array}{l} d_2^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha \\ \quad\text{(teorema del coseno per } ADB) \\ d_2^2=b^2+c^2+2bc\cos\alpha \\ \quad\text{(teorema del coseno per } CBD \\ \quad\text{con } \gamma=180°-\alpha) \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

Da queste relazioni si ottiene:

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{1-\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)}{4(ad+bc)^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}.$$

Basandosi sul prodotto notevole

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

dimostrare la formula di Brahamagupta (matematico indiano del VII secolo):

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

dove

$$2p=a+b+c+d.$$

Confrontare la formula di Brahamagupta con la formula di Erone esposta nell'esercizio 291.

297. Dimostrare che l'area di un quadrangolo di lati a, b, c, d, inscrittibile *e* circoscrittibile in un cerchio, è data da:

$$S=\sqrt{abcd}.$$

(Ricordare che un quadrangolo è circoscrittibile ad un cerchio se risulta

$$a+c=b+d,$$

e considerare la formula di Brahamagupta, che abbiamo dimostrato valida per un quadrangolo inscrittibile in un cerchio).