Curve in coordinate polari. La spirale uniforme e la spirale logaritmica

1. Riferimento polare

Abbiamo visto nel testo (Cap. 2, n. 1) che nel sistema di riferimento polare un punto A è individuato da due coordinate (Fig. 10): la sua distanza r da un punto fisso O, detto **polo**, e l'angolo α, descritto in senso antiorario, che la semiretta OA forma con una semiretta fissa Op, detta **asse polare**.

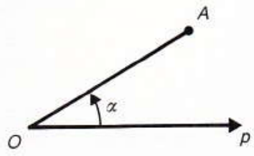

Fig. 10

La posizione del punto A è dunque data da:

$$A(r, \alpha).$$

L'uso delle coordinate polari è utile ed espressivo per la rappresentazione di curve in cui un punto ha un ruolo particolare; in queste pagine parleremo di due tipi di **spirali**.

La Fig. 11 mostra la fotografia della traiettoria di un elettrone in *una camera a bolle*, immersa in un intenso campo magnetico: la traiettoria è una spirale. È interessante osservare che se l'elettrone, immerso nel campo magnetico, si muovesse nel vuoto, percorrerebbe un'orbita circolare; nella camera a bolle, invece, l'elettrone perde energia a causa degli urti contro gli atomi di idrogeno, ed è questa perdita d'energia che produce una diminuzione del raggio dell'orbita, mutando così la traiettoria circolare in una traiettoria a spirale "con raggio decrescente".

Nella Fig. 12 è riprodotta in disegno la traiettoria descritta da particelle cariche (protoni, particelle α, ...) sottoposte ad accelerazioni sempre crescenti per mezzo di campi elettrici e magnetici, come avviene nel ciclotrone: la traiettoria descritta dalle particelle è una spirale "con raggio crescente".

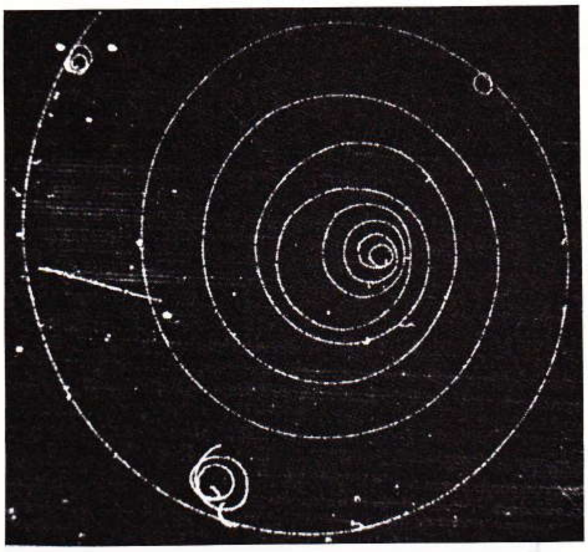

Fig. 11. La camera a bolle è un recipiente pieno di liquido; la traiettoria di un elettrone visualizzata da bollicine.

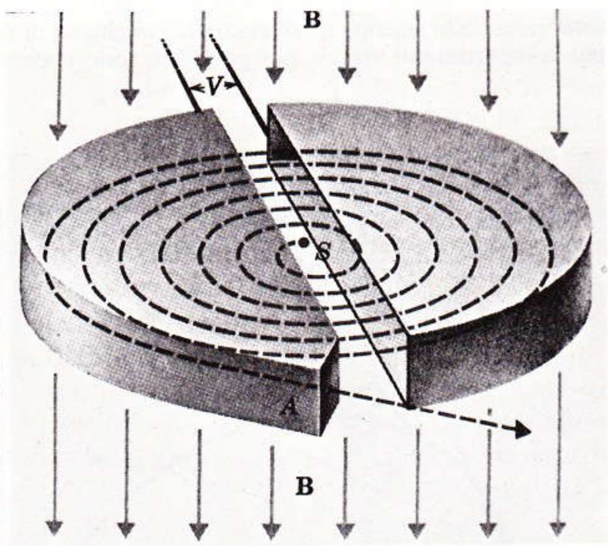

Fig. 12

Fig. 13

E ora, dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande: attraverso un telescopio si scopre che la forma delle galassie è a spirale (Fig. 13).

Rimaniamo sempre nello spazio: nel 1951 si è scoperto il fenomeno del *vento solare*; si tratta di questo: il Sole evapora lentamente producendo un flusso di particelle cariche — appunto, il vento solare — che esercitano la loro influenza su tutto il sistema solare e, in particolare, sulla coda delle comete. È proprio il comportamento delle comete che ha portato a scoprire l'emissione di particelle da parte del Sole: queste particelle non seguono delle traiettorie rettilinee, ma, a causa della rotazione del Sole su se stesso, percorrono traiettorie a spirale (Fig. 14).

Le spirali si possono vedere in natura, anche senza l'uso di strumenti! In Fig. 15 è riprodotta la fotografia della sezione mediana della conchiglia di un nautilus. L'accrescimento della conchiglia avviene per compartimenti via via più grandi, e sono appunto questi a generare la forma a spirale.

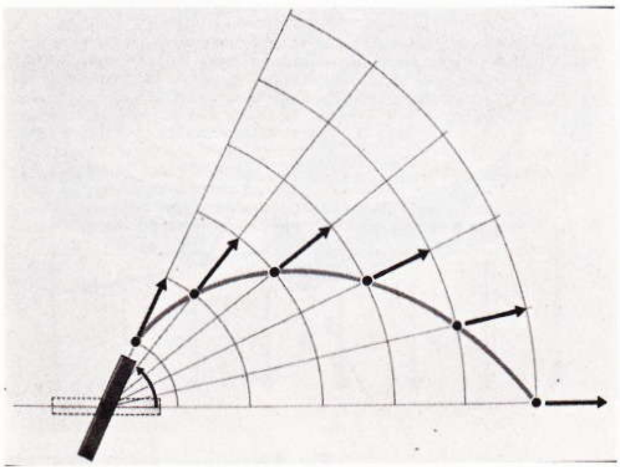

Fig. 14

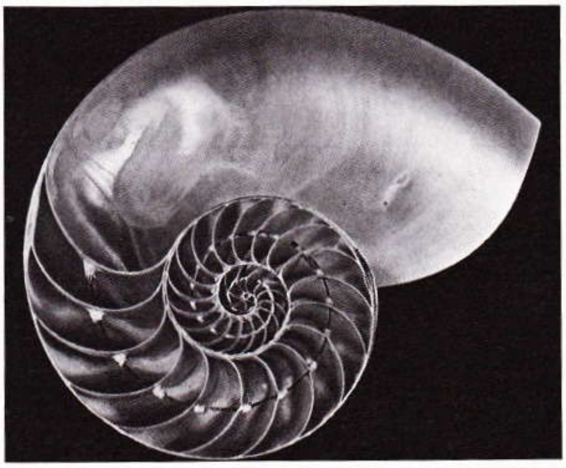

Fig. 15

Fra i vari tipi di spirale che abbiamo incontrato ne studieremo due, particolarmente interessanti dal punto di vista matematico: la spirale uniforme o di Archimede, e la spirale logaritmica o equiangolare. Si tratta di due curve, note da secoli, che si ritrovano oggi studiando le traiettorie di particelle cariche. È proprio a queste traiettorie che ci riferiremo nelle pagine seguenti.

2. La spirale uniforme

Si chiama spirale uniforme una spirale il cui passo è costante (Fig. 16); questa curva è nota anche come "spirale di Archimede", dal nome dello scienziato che, per primo, ne studiò il comportamento matematico.

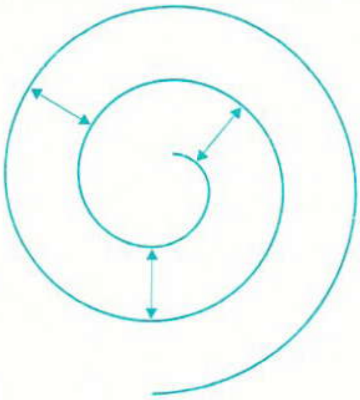

Fig. 16

Vedremo ora che, attraverso l'azione di un ciclotrone, si può fare in modo che gli elettroni descrivano approssimativamente delle spirali uniformi.

Basiamoci su un semplice caso numerico: l'elettrone E ruota con velocità angolare costante $\omega=1$ grado/secondo; contemporaneamente il raggio r della traiettoria aumenta uniformemente di 2 mm/sec.

Il movimento dell'elettrone al variare del tempo t è descritto, in coordinate polari (Fig. 17), dalla seguente tabella:

t	α	r
1 sec	1°	2 mm
2	2°	4
3	3°	6
⋮	⋮	⋮
10	10°	20
⋮	⋮	⋮
20	20°	40
⋮	⋮	⋮

Risulta

$\alpha=t$

$r=2t$

e quindi:

$\boldsymbol{r=2\alpha}$.

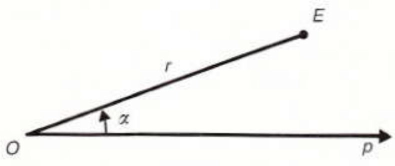

Fig. 17

Si può allora costruire per punti (Fig. 18) la curva che ha l'equazione polare

$r=2\alpha$;

è *una spirale uniforme*. Il passo, e cioè la distanza fra una spirale e la successiva, è costante; è facile verificarlo: basta intersecare la curva con una semiretta per O. Segando ad esempio la nostra spirale con la semiretta (Fig. 19)

$$\alpha=30°,$$

si ottengono, in corrispondenza ai valori di α

$$30°, \quad 360°+30°, \quad 2\cdot 360°+30°, \quad \ldots$$

i seguenti valori di r:

$$60, \quad 2(360+30), \quad 2(2\cdot 360+30), \quad \ldots$$

e la differenza fra un valore di r e il precedente risulta sempre uguale a $2\cdot 360$.

In generale, l'equazione della spirale uniforme è

$$r=m\alpha$$

dove m è un numero; al variare di m si hanno spirali uniformi con passo diverso.

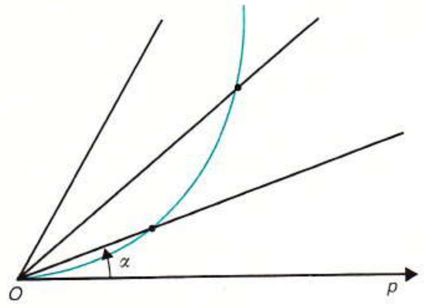

Fig. 18

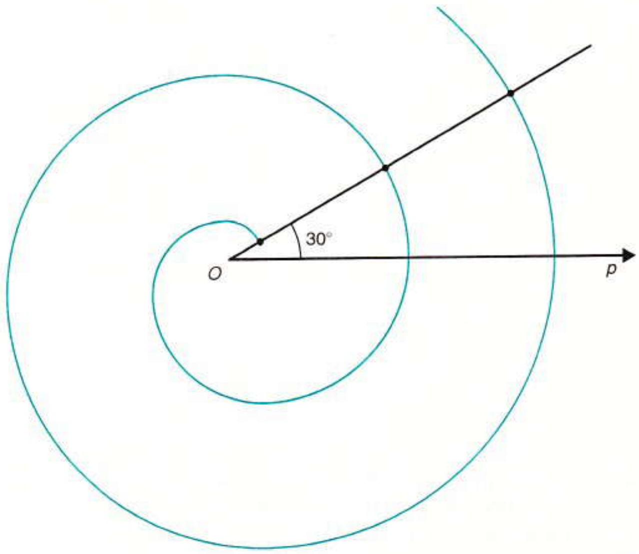

Fig. 19

3. La spirale logaritmica o equiangolare

In questa spirale il passo non è costante ma varia seguendo una ben determinata legge. Lo studio della spirale logaritmica risale al 1600, con Cartesio e Torricelli; fu poi approfondito nel 1700 da Jacques Bernoulli.

Vogliamo far vedere che un elettrone, immerso in una camera a bolle, può venir sollecitato in modo che la sua traiettoria sia una spirale, ma non a passo costante. Consideriamo un caso numerico (Fig. 20): l'elettrone, che si trova inizialmente in E, a distanza $r=1$ dm da un punto O, ruota con una velocità angolare di 1 grado al secondo; durante la rotazione, la distanza r dal punto O dimezza ogni secondo. Si può allora scrivere la seguente tabella:

t	α	r
0 sec.	0°	1 dm
1	1°	$\frac{1}{2}$
2	2°	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
⋮	⋮	⋮
10	10°	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
⋮	⋮	⋮

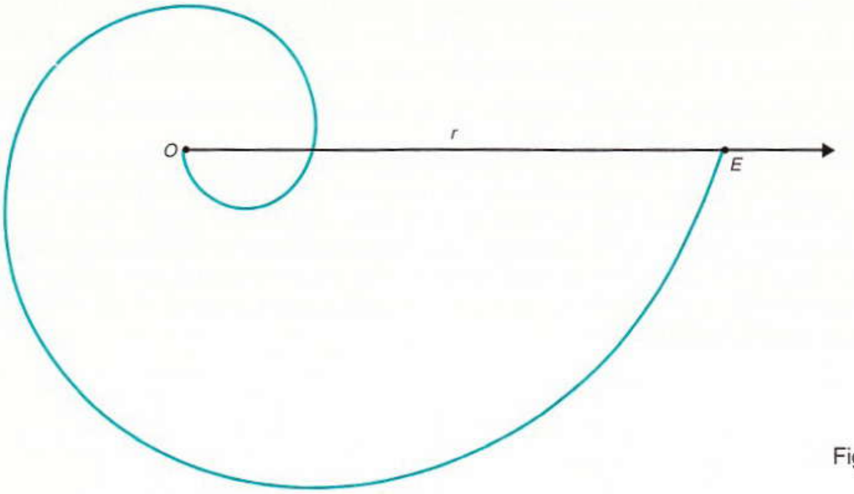

Fig. 20

Risulta:

$$\alpha=t$$
$$r=\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

e quindi

$$r=\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha.$$

La curva che ha l'equazione

$$r=\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$$

o, più in generale,

$$(1) \quad r=m^\alpha$$

dove m è un numero, è *una spirale logaritmica*; il nome corrisponde al fatto che la (1) può anche scriversi:

$$\alpha=\log_m r.$$

Senza togliere nulla alla generalità, fissiamo il valore di m perché sia più facile scoprire delle proprietà, di carattere aritmetico e geometrico, della spirale logaritmica. Riferiamoci, per esempio, alla spirale d'equazione

$$r=2^\alpha$$

in cui, dunque, si è fissato $m=2$.

Diamo all'angolo α dei valori *in progressione aritmetica* come 0, 1, 2, 3, ... gradi; i corrispondenti valori di r sono $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, ..., cioè variano *in progressione geometrica*. Si ottengono i punti A_1, A_2, A_3, ... riportati nella Fig. 21[1].

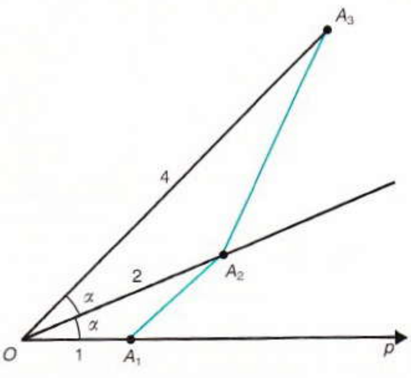

Fig. 21

[1] Nella Fig. 21 abbiamo ingrandito le misure degli angoli per rendere più chiaro il disegno.

È proprio quest'osservazione che conduce ad un'altra costruzione della curva; riferiamoci alla Fig. 21: se A_1, A_2, A_3 sono punti della curva, risulta che i triangoli OA_1A_2, OA_2A_3 sono simili per avere due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale. Ma allora saranno anche uguali gli angoli $O\hat{A}_1A_2$, $O\hat{A}_2A_3$; ciò significa che le corde della spirale, A_1A_2 e A_2A_3, sono ugualmente inclinate rispetto ai raggi che congiungono i punti A_1, A_2 al polo O.

I punti della spirale si possono quindi ottenere con la seguente costruzione grafica (Fig. 22): si conducono per un punto O tanti raggi formanti angoli uguali ad α; fissato un punto P su Op, si costruisce per P una retta che forma con Op un angolo β di data ampiezza, questa retta incontrerà il raggio successivo nel punto Q; ora, per Q si costruisce una retta che forma con OQ un angolo β, e si otterrà sul raggio successivo un punto R, e così via. La spirale viene così ad ottenersi, per mezzo delle sue corde, in base alla costruzione di angoli uguali (di ampiezza β); per questa ragione si dà alla spirale logaritmica anche il nome di **spirale equiangolare**.

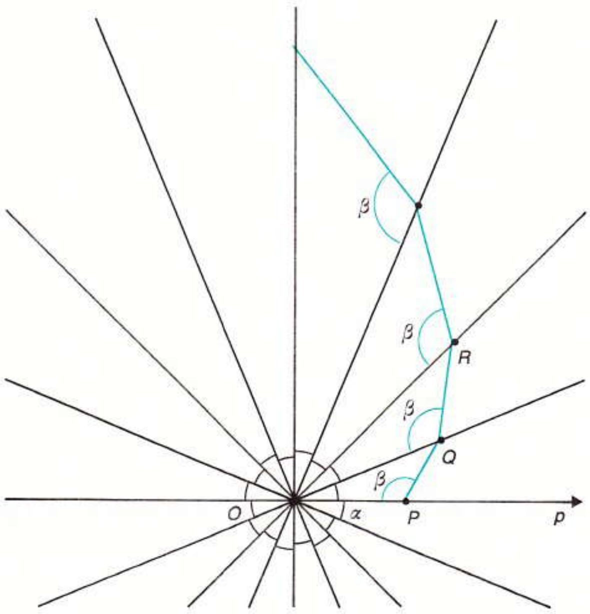

Fig. 22

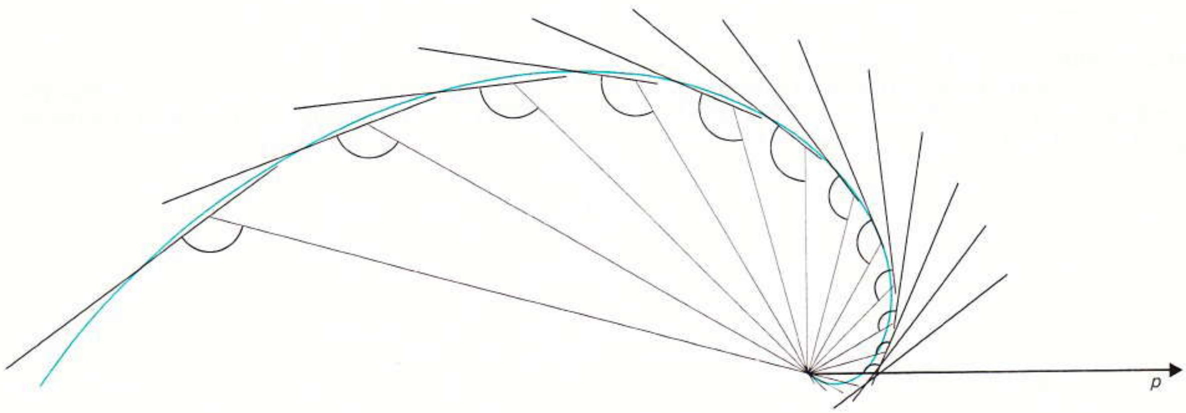

Fig. 23

È chiaro che al diminuire dell'angolo α formato fra un raggio e il successivo, i punti della spirale risulteranno sempre più vicini uno all'altro, e, al limite, le corde assumeranno la posizione delle tangenti alla curva in P, Q, R, ... (Fig. 23).