2
Complementi

Trasformazione delle coordinate: rotazione di assi cartesiani

L'ellisse disegnata nelle Figg. 4 e 5 è sempre la stessa, ma cambia la sua posizione rispetto agli assi cartesiani; questa diversa posizione ha, come conseguenza, che nei due casi l'equazione della stessa ellisse è diversa.

È chiaro che è possibile passare dall'ellisse della Fig. 5 a quella della Fig. 4, cioè a un'ellisse che ha per assi di simmetria gli assi cartesiani, basta operare un cambiamento di assi. La trigonometria è essenziale allo scopo di trovare delle formule che descrivono una rotazione di assi coordinati.

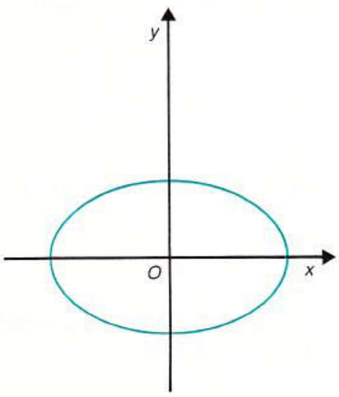

Fig. 4

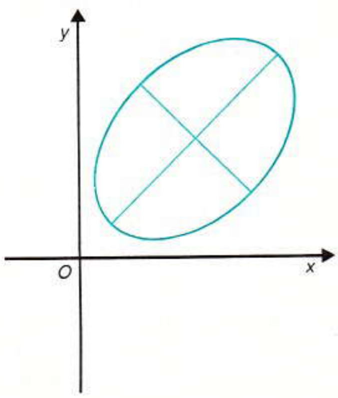

Fig. 5

Cominciamo col riferirci ad un caso numerico. In Fig. 6 è indicato il punto $P(3,4)$. Ruotiamo ora il riferimento xOy di un angolo α, come è indicato in Fig. 6; si otterranno gli assi X,Y. Determiniamo le coordinate X,Y del punto P nel nuovo sistema. Vogliamo dunque esprimere, in funzione di α e delle antiche coordinate

$$x=\overline{BP}=3, \quad y=\overline{AP}=4,$$

le nuove coordinate

$$X=\overline{OC}=\overline{DP} \quad \text{e} \quad Y=\overline{OD}=\overline{CP}.$$

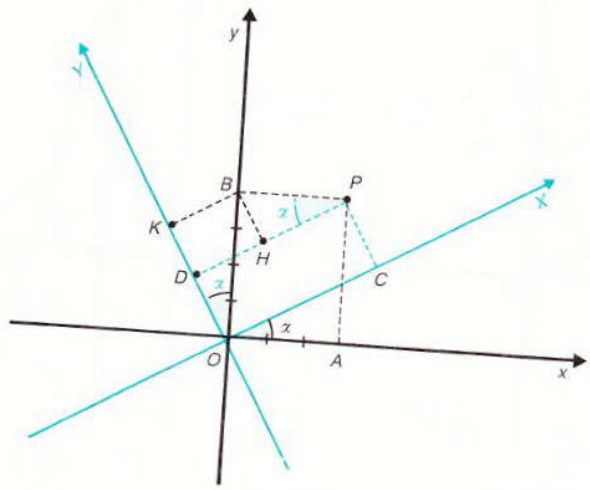

Fig. 6

Si ha, per l'**ascissa**:

$$\overline{DP}=\overline{DH}+\overline{HP}$$

dove

$$\overline{DH}=\overline{KB}=\overline{OB}\,\text{sen}\,\alpha=4\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad \overline{HP}=\overline{BP}\cos\alpha=3\cos\alpha;$$

quindi:

$$X=3\cos\alpha+4\,\text{sen}\,\alpha.$$

E per l'**ordinata**:

$$\overline{OD}=\overline{OK}-\overline{KD}$$

dove

$$\overline{OK}=\overline{OB}\cos\alpha=4\cos\alpha \quad \text{e} \quad \overline{KD}=\overline{BH}=\overline{BP}\,\text{sen}\,\alpha=3\,\text{sen}\,\alpha;$$

quindi:

$$Y=4\cos\alpha-3\,\text{sen}\,\alpha.$$

Concludiamo che, ruotando il riferimento xOy di un angolo α, le coordinate del punto P che erano

$$x=3, \quad y=4,$$

diventano

$$X=3\cos\alpha+4\,\text{sen}\,\alpha$$
$$Y=4\cos\alpha-3\,\text{sen}\,\alpha.$$

In generale, se indichiamo con (x,y) le coordinate di un punto P riferito al sistema xOy, le coordinate di P rispetto al sistema XOY, saranno:

$$\begin{cases} X=x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha \\ Y=y\cos\alpha-x\,\text{sen}\,\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Le formule per il passaggio inverso si ricavano risolvendo le (1) rispetto a x, y. Più semplicemente, si ruota XOY fino a sovrapporlo a xOy; così nella (1) si scambia X con x, Y con y, e α con $-\alpha$ (perché la rotazione avviene in senso inverso). Si ha:

$$\begin{cases} x=X\cos\alpha-Y\,\text{sen}\,\alpha \\ y=Y\cos\alpha+X\,\text{sen}\,\alpha. \end{cases} \tag{1'}$$

Applichiamo le considerazioni ora svolte al caso dell'ellisse disegnata in Fig. 7. I semiassi dell'ellisse sono lunghi 3 e 1; se quindi si scelgono gli assi cartesiani X, Y coincidenti con gli assi dell'ellisse, l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{1^2}=1$$

cioè

$$\frac{X^2}{9}+Y^2=1$$

o anche

$$X^2+9Y^2-9=0. \tag{2}$$

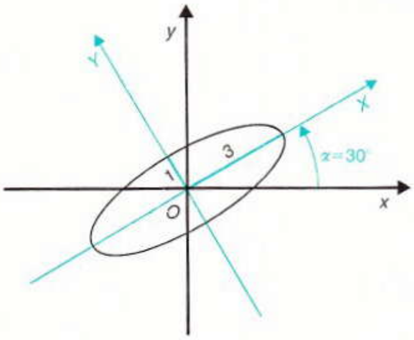

Fig. 7

Vogliamo ora riferire l'ellisse al sistema xOy di Fig. 7. Perciò ruotiamo xOy fino a farlo coincidere con XOY e scriviamo le formule di trasformazione (1) ponendo $\alpha=30°$; si ha:

$$\begin{cases} X=x\cos 30°+y\,\mathrm{sen}\,30° \\ Y=y\cos 30°-x\,\mathrm{sen}\,30°. \end{cases}$$

Essendo

$$\mathrm{sen}\,30°=\frac{1}{2}, \quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

si ha:

$$\begin{cases} X=x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+y\cdot\dfrac{1}{2} \\ Y=y\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nella

$$X^2+9Y^2-9=0, \tag{2}$$

si ha l'equazione dell'ellisse riferita al sistema xOy:

$$\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}\right)^2+9\left(y\frac{\sqrt{3}}{2}-x\frac{1}{2}\right)^2-9=0$$

ossia:

$$\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}xy+9\left(\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{4}x^2-2\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)-9=0,$$

da cui:

$$3x^2+7y^2-4\sqrt{3}xy-9=0. \tag{3}$$

L'equazione (3) è ben diversa dalla (2) ma rappresenta la stessa ellisse, riferita ora ad assi coordinati che non coincidono con gli assi di simmetria dell'ellisse.

È chiaro che lo scopo di cambiare il sistema di riferimento non è certo quello di scrivere l'equazione di una curva in forma più complessa, ma è proprio il contrario: riferire cioè la curva a un sistema di assi in modo che la sua equazione risulti più semplice o più espressiva.

Ecco un esempio: si ha l'iperbole equilatera d'equazione

$$x^2-y^2=1. \tag{4}$$

I suoi asintoti, indicati in colore nella Fig. 8, sono le bisettrici dei quadranti. Vogliamo ora fare in modo che gli assi cartesiani coincidano con gli asintoti, cioè vogliamo riferire l'iperbole al sistema XOY di Fig. 8. Pensiamo perciò di ruotare XOY fino a sovrapporlo a xOy e applichiamo le (1′), sostituendo $-45°$ ad α. Si ha:

$$\begin{cases} x=X\cos(-45°)-Y\,\mathrm{sen}(-45°) \\ y=Y\cos(-45°)+X\,\mathrm{sen}(-45°) \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x=\dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{Y}{\sqrt{2}}-\dfrac{X}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

L'equazione (4) diventa allora:

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}-\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

ossia:

$$\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2+XY-\frac{1}{2}Y^2-\frac{1}{2}X^2+XY=1$$

da cui:

$$XY=1.$$

Otteniamo così la forma ben nota dell'iperbole che ha per asintoti gli assi cartesiani (Fig. 9).

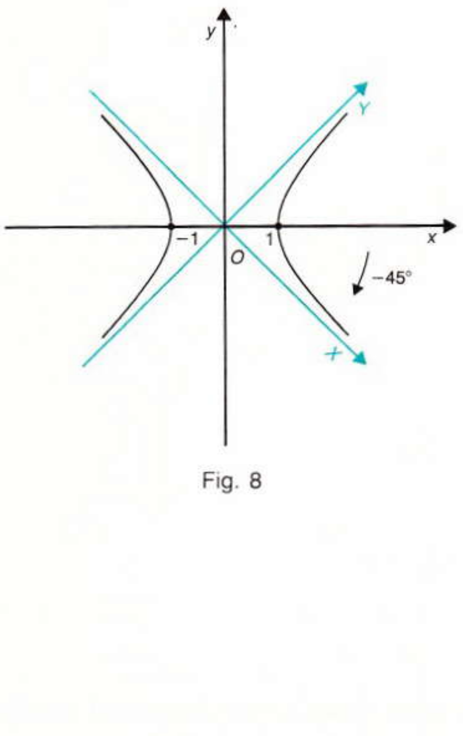

Fig. 8

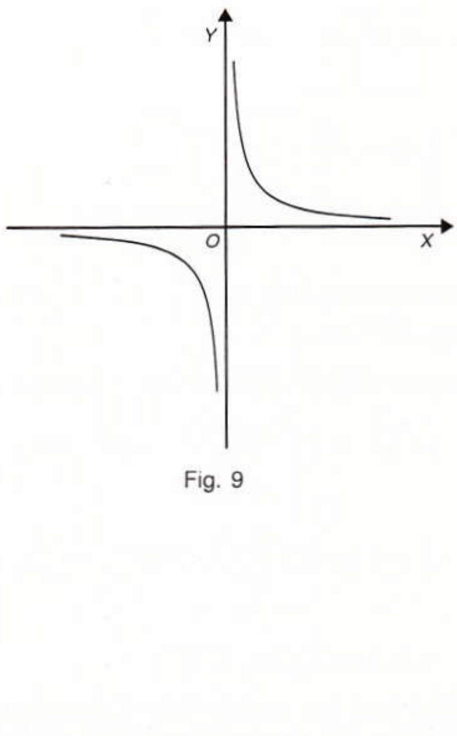

Fig. 9