2
La trigonometria sul piano cartesiano

1. Problemi che conducono ad estendere le funzioni trigonometriche

I problemi proposti nel capitolo precedente portano a chiedersi: che cosa accade se ci si trova a dover risolvere un triangolo ottusangolo?

Si rimane perplessi: le funzioni trigonometriche sono state infatti introdotte solo per gli angoli acuti; d'altra parte, sembra assurdo che un problema di astronomia o di fisica non sia più risolubile quando vi compaiono dei triangoli ottusangoli.

A suggerirci come ampliare le nostre conoscenze è uno strumento fondamentale nella navigazione marittima e aerea: il radar.

In Fig. 1 è riportata la fotografia di uno schermo radar, che fa parte degli strumenti di bordo di una nave o di un aereo. Se osserviamo lo schermo quando il radar è in funzione, vediamo una semiretta che spazza lo schermo girando in senso antiorario; la presenza di un ostacolo che si trova nella direzione in cui punta la semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

Fig. 1

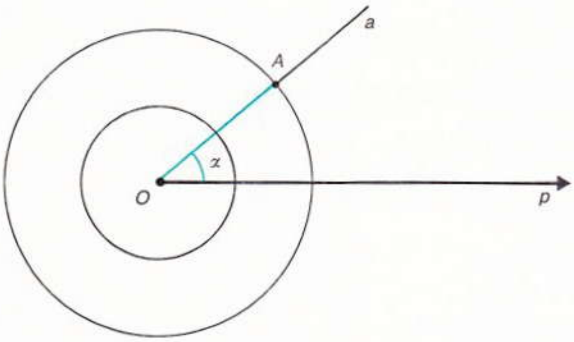


Fig. 2

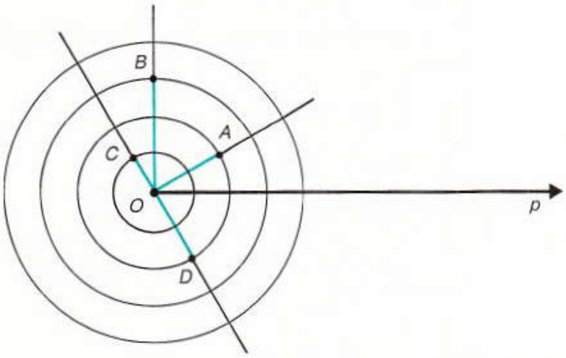
Si può così conoscere facilmente la posizione di un ostacolo A rispetto all'osservatore O mediante due numeri che si leggono direttamente sullo schermo (Fig. 2):

— la distanza $OA = r$
— l'angolo α che ha descritto la semiretta Oa, a partire dalla posizione Op.

Dunque, la posizione di un punto A dello schermo viene individuata da due numeri, r ed α, chiamati *raggio* e *anomalia*; scriveremo $A(r,\alpha)$.

Il punto O prende comunemente il nome di *polo*, la semiretta Op il nome di *asse polare*; si dice allora che sullo schermo radar si è stabilito un *riferimento polare*.

In Fig. 3 abbiamo indicato qualche punto con le sue coordinate polari.



$A(2,30°)$
$B(3,90°)$
$C(1,120°)$
$D(2,300°)$

Fig. 3

Spesso, usando il radar, s'incontra il problema seguente: riportare sulla carta geografica la posizione di un ostacolo A rilevato sullo schermo. Bisogna allora individuare il punto A rispetto alle direzioni Nord-Sud ed Est-Ovest, bisogna cioè darne longitudine e latitudine, indicando le distanze OA' ed AA' (Fig. 4). Siamo così condotti a tradurre le coordinate polari di un punto A in coordinate cartesiane.

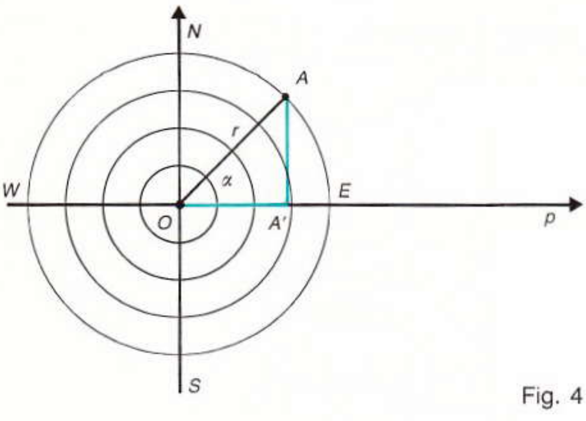


Fig. 4

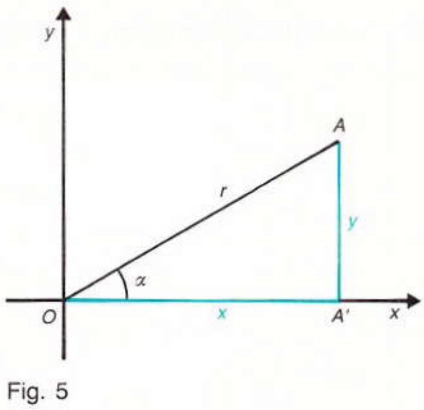


Fig. 5

In Fig. 5 abbiamo schematizzato la situazione ora descritta, fissando un riferimento cartesiano con l'asse delle x coincidente con Op. Osservando il triangolo OAA', è immediato scrivere:

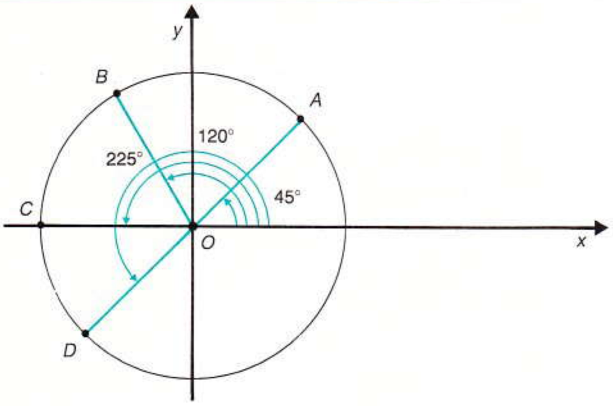
$$\frac{x}{r}=\cos\alpha \rightarrow x=r\cos\alpha$$

$$\frac{y}{r}=\operatorname{sen}\alpha \rightarrow y=r\operatorname{sen}\alpha.$$

Scegliendo in particolare il segmento OA lungo 1, avremo:

$$\begin{aligned} x&=\cos\alpha \\ y&=\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned} \qquad (1)$$

Riflettiamo ora sulle relazioni (1) osservando la Fig. 6, dove abbiamo indicato alcuni punti, determinandone sia le coordinate polari che quelle cartesiane. Troviamo una situazione inconsueta: conosciamo sia le coordinate cartesiane che le coordinate polari di vari punti, ma possiamo scrivere le relazioni (1) solo per i punti che hanno la coordinata polare $\alpha<90°$.



coordinate polari	coordinate cartesiane
$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$A(1,45°)$
$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$B(1,120°)$
$C(-1, 0)$	$C(1,180°)$
$D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$D(1,225°)$

Fig. 6

Come superare questa limitazione?

Cominciamo con l'esaminare le coordinate polari e cartesiane dei punti B, C, D, insieme alle relazioni (1) e riassumiamo le nostre osservazioni in una tabella come quella seguente:

punti	*coordinate cartesiane*	*coordinate polari*	*relazioni* $x=\cos\alpha$, $y=\operatorname{sen}\alpha$
B	$x=-\frac{1}{2}$	$r=1$	$-\frac{1}{2}=\cos 120°$
	$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\alpha=120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{sen} 120°$
C	$x=-1$	$r=1$	$-1=\cos 180°$
	$y=0$	$\alpha=180°$	$0=\operatorname{sen} 180°$
D	$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$r=1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 225°$
	$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\alpha=225°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{sen} 225°$

È l'ultima colonna della tabella che suggerisce un nuovo modo di definire seno e coseno di un dato angolo α. Ecco come si procede (Fig. 7): si fissa il punto P di coordinate polari $(1,\alpha)$, se ne calcolano le coordinate cartesiane (x,y) e si stabilisce che risulta sempre:

$$\cos\alpha=x$$
$$\operatorname{sen}\alpha=y.$$

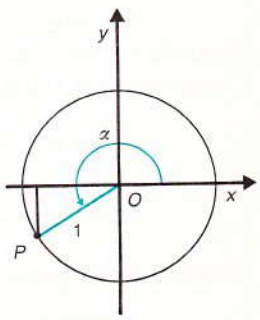


Fig. 7

In questo modo, il seno e il coseno di un angolo sono definiti per tutti i valori dell'angolo compresi fra 0° e 360°.

2. La circonferenza goniometrica

Uno strumento attuale — il radar — ci ha condotti ad estendere le funzioni trigonometriche ad angoli ampi fino a 360°. Il cammino che abbiamo percorso è molto vicino a quanto è avvenuto nella storia, ma — è chiaro — indipendentemente dal radar!

A partire dal XII secolo, le funzioni trigonometriche di angoli acuti si presentavano spesso nelle ricerche scientifiche più varie ma, fino al XVII secolo, erano legate esclusivamente ai triangoli. Perché seno e coseno vengano ad avere un significato sul piano cartesiano, bisogna arrivare al XVII secolo, quando furono introdotte sia le coordinate cartesiane che le coordinate polari.

Un secolo dopo, lo studio di alcune curve[1] *motiva la ricerca di formule per passare da coordinate polari a coordinate cartesiane: coseno e seno di un angolo vengono considerati come ascissa e ordinata di un punto che si trova sulla circonferenza di raggio unitario.*

È proprio seguendo questa linea di pensiero che introdurremo ora seno, coseno e tangente di angoli ampi fino a 360°.

In un sistema di coordinate cartesiane si disegna il cerchio che ha centro nell'origine e raggio unitario. Relativamente a questa circonferenza, si stabilisce un modo convenzionale di rappresentare gli angoli (Fig. 8): si legge l'ampiezza α di un angolo AOP in verso antiorario, scegliendo sempre come primo lato OA e come secondo lato OP.

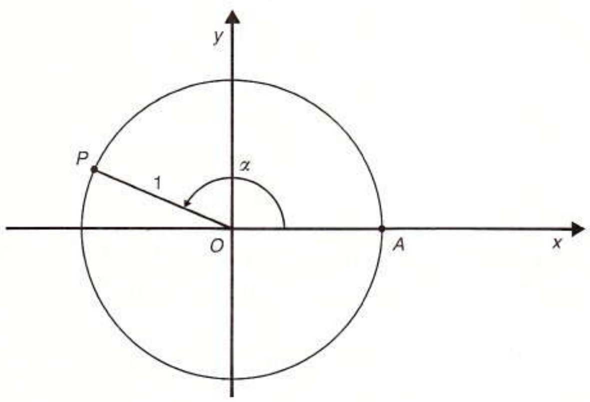


Fig. 8

In questo modo, ogni angolo è individuato da un solo raggio OP e, viceversa, ogni raggio OP può essere considerato come secondo lato di un angolo α, ampio fino a 360°.

La circonferenza così caratterizzata prende il nome di *circonferenza goniometrica* (dal greco *gonion*, angolo e *metron*, misura), per ricordare che è stabilito un modo di misurare gli angoli.

Disegnato un angolo α sulla circonferenza goniometrica, si considera il punto P ad esso corrispondente e si definisce:

$\cos\alpha$=ascissa del punto P
$\text{sen}\,\alpha$=ordinata del punto P

Per esprimere anche $\text{tg}\,\alpha$ mediante le coordinate di un punto, ci si basa sulla costruzione della retta tangente al cerchio, seguendo il procedimento noto agli Arabi (p. 19): si traccia la retta t tangente alla circonferenza goniometrica in A e si considera il punto T, dove la retta

[1] Cfr.Esercizi e complementi, pp. 241-245.

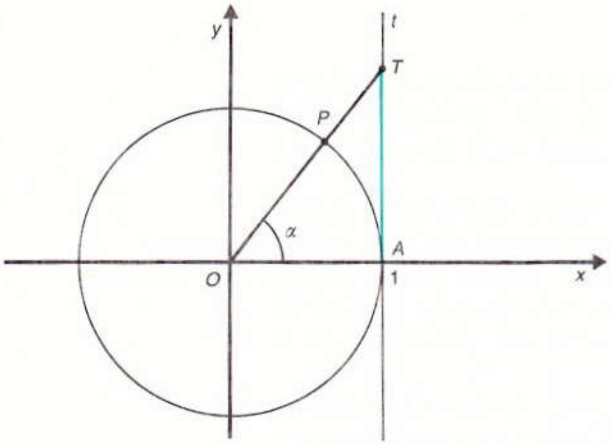


Fig. 9

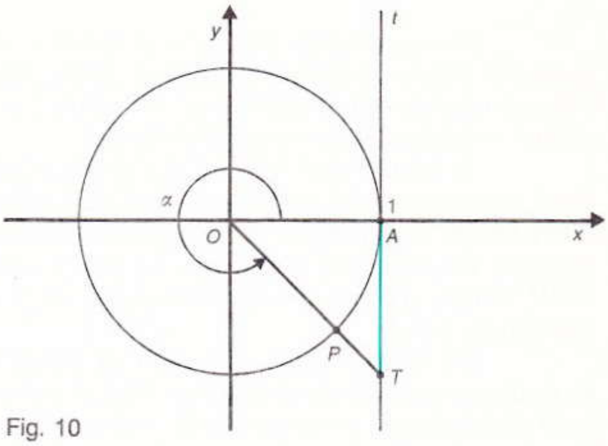


Fig. 10

OP incontra la retta t (Fig. 9). Dal triangolo rettangolo OTA risulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{TA}{OA}$$

e, quindi,

$$\operatorname{tg} \alpha = \text{ordinata di } T.$$

Si capisce ora come estendere questa nozione anche ad angoli maggiori di un angolo retto (Fig. 10); si definisce, per qualunque angolo di ampiezza α, compresa fra 0° e 360°,

$$\operatorname{tg} \alpha = \text{ordinata di } T.$$

3. Le funzioni goniometriche

Impadroniamoci subito delle nuove definizioni, iniziando dal seno e dal coseno di qualche angolo particolare, che non richieda l'uso del calcolatore. Si ha (Fig. 11):

$\cos 0° =$ ascissa di $A=1$	e	$\operatorname{sen} 0° =$ ordinata di $A=0$	
$\cos 90° =$ » » $B=0$		$\operatorname{sen} 90° =$ » » $B=1$	
$\cos 180° =$ » » $C=-1$		$\operatorname{sen} 180° =$ » » $C=0$	
$\cos 270° =$ » » $D=0$		$\operatorname{sen} 270° =$ » » $D=-1$	
$\cos 360° =$ » » $A=1$		$\operatorname{sen} 360° =$ » » $A=0$	

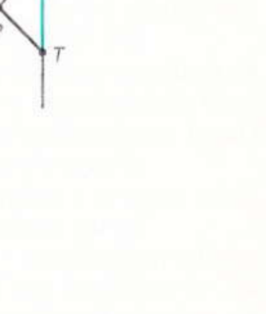


Fig. 11

Con il calcolatore, poi, possiamo trovare seno e coseno di vari angoli, estendendo il procedimento esposto nel Cap. 1, n. 4, al caso di angoli ampi fino a 360°. Ad esempio, per la funzione seno abbiamo:

$$150° \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} 0{,}5$$

$$190° \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} -0{,}174$$

$$355° \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} -0{,}087.$$

Analogamente, per il coseno si ha:

$$120° \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} -0{,}5$$

$$185° \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} -0{,}996$$

$$350° \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} 0{,}985.$$

Si nota che, comunque sia ampio l'angolo α, risulta sempre:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Queste limitazioni sono evidenti, dato che $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sono ascissa e ordinata di un punto P che "gira" sulla circonferenza di centro O e raggio 1 (Fig. 12).

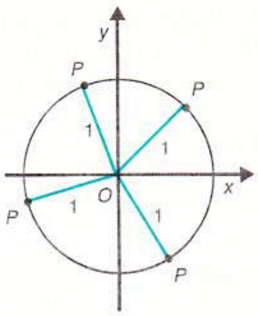


Fig. 12

Occupiamoci ora della tangente. Usiamo subito il calcolatore e cerchiamo la tangente di 90°. Premendo i tasti

$\boxed{9}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{TAN}}$

si ottiene, come risposta, un segnale d'errore. Perché?

Riprendiamo la definizione della tangente di un angolo con la circonferenza goniometrica e osserviamo la Fig. 13: come sappiamo, $\operatorname{tg}\alpha$ è l'ordinata del punto T, e quando l'angolo α aumenta da 0° a 90°, il punto T "sale" sempre più, quindi, la sua ordinata diventa sempre più grande. Ma quando α vale 90°, P coincide con B e la retta OP coincide con l'asse delle y, che è parallelo alla retta t. Le due rette non s'incontrano e, quindi, non esiste il punto T: perciò, *la tangente di 90° non esiste.*

È per questo che il calcolatore ci segnala un errore, quando gli chiediamo di mostrarci il valore di tg 90°.

Possiamo, tuttavia, ottenere dalla macchina i valori della tangente di angoli molto prossimi a 90°; per esempio, possiamo trovare:

$\operatorname{tg} 89° \cong 57{,}29$
$\operatorname{tg} 89{,}9 \cong 572{,}96$
$\operatorname{tg} 89{,}99 \cong 5729{,}58$
$\operatorname{tg} 89{,}999999 \cong 57295780.$

Con il pensiero, possiamo immaginare angoli ancora più vicini a 90° e, in corrispondenza, valori della tangente ancora più grandi..., ma 90° è un angolo proibito!

Osservando poi la Fig. 14, vediamo che, quando l'angolo supera di poco 90°, si ottiene un punto T "molto in basso", cioè con ordinata grande in valore assoluto, ma negativa. Anche ora, possiamo determinare la tangente di angoli ottusi vicinissimi a 90° ma leggermente maggiori; per esempio, si ha:

$\operatorname{tg} 91° \cong -57{,}29$
$\operatorname{tg} 90{,}1 \cong -572{,}96$
$\operatorname{tg} 90{,}01 \cong -5729{,}58$
$\operatorname{tg} 90{,}000001 \cong -57295780.$

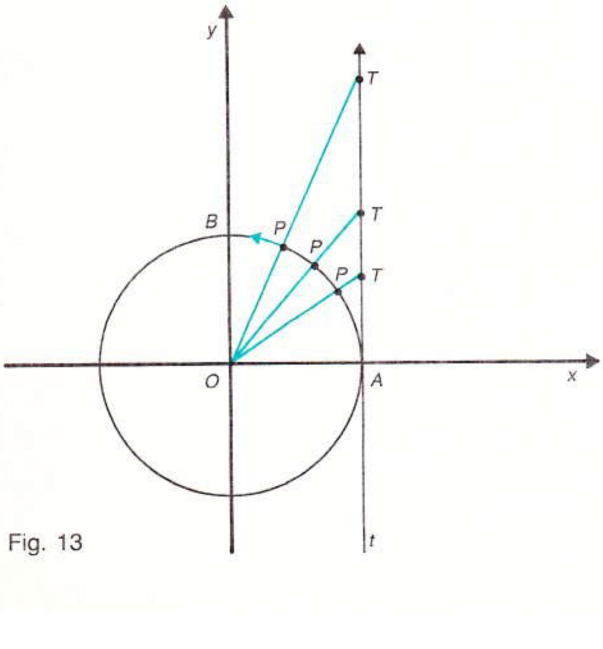


Fig. 13

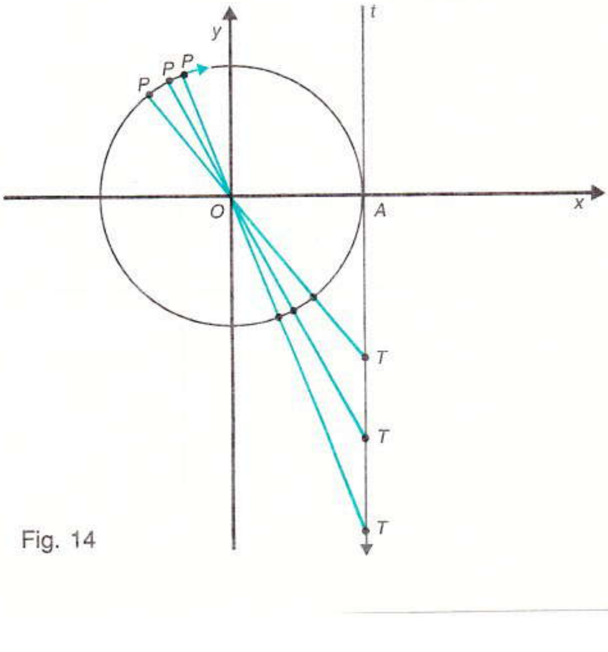


Fig. 14

E anche ora, col pensiero, possiamo immaginare angoli ottusi vicinissimi a 90° e, in corrispondenza, valori della tangente ancora più grandi in valore assoluto e negativi; ma 90° resta un angolo proibito.

Via via che l'angolo aumenta da 90° a 180°, il punto T "sale" lungo la retta t e, dunque, ha ordinata negativa ma crescente verso il valore zero.

Considerazioni analoghe si possono ripetere a partire dall'angolo di 270°, che, come quello di 90°, non ha il valore corrispondente della tangente.

Si scopre così che l'estensione della funzione tangente ad angoli fino a 360° comporta qualche difficoltà imprevista; per evitare errori, occorre specificare che la funzione:

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{TAN}}} \operatorname{tg}\alpha$$

fa corrispondenre ad ogni angolo α il relativo valore di $\operatorname{tg}\alpha$, purché si scelga

$$\alpha \neq 90° \quad \text{e} \quad \alpha \neq 270°.$$

Le tre funzioni

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} \operatorname{sen}\alpha \qquad \alpha \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} \cos\alpha \qquad \alpha \xrightarrow{\boxed{\text{TAN}}} \operatorname{tg}\alpha$$

che abbiamo definito mediante la circonferenza goniometrica prendono anche il nome di *funzioni goniometriche*.

4. Due relazioni fondamentali che legano seno, coseno e tangente di uno stesso angolo

Dalla definizione di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ derivano due importanti proprietà.

I) Consideriamo un punto P che si muove sulla circonferenza di centro O e raggio 1 (Fig. 15); P ha sempre le coordinate x ed y legate dall'equazione

$$x^2+y^2=1. \tag{1}$$

Ora, sulla circonferenza goniometrica, ogni raggio OP è lato di un angolo $A\hat{O}P$ e si ha:

$$\cos\alpha = x \qquad \operatorname{sen}\alpha = y.$$

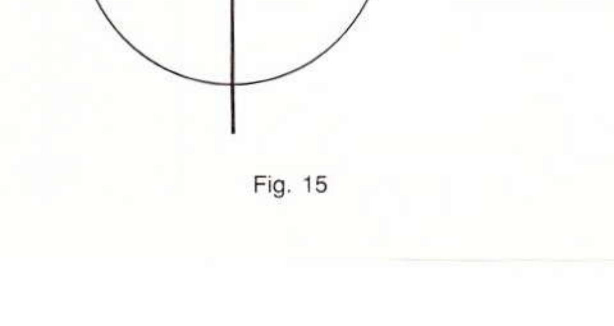


Fig. 15

La relazione (1) si può quindi scrivere così:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2+(\cos \alpha)^2=1.$$

Abitualmente, si usa scrivere $\operatorname{sen}^2 \alpha$ al posto di $(\operatorname{sen} \alpha)^2$ e $\cos^2 \alpha$ al posto di $(\cos \alpha)^2$. Si ha dunque, per qualunque angolo α:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1.$$

Abbiamo così trovato una prima relazione che lega seno e coseno di uno stesso angolo.

II) Troveremo ora una relazione che coinvolge anche la tangente di un angolo.

Nella Fig. 16 abbiamo indicato l'angolo α (acuto o ottuso) e il punto T che permette di individuarne la tangente. Risulta, nei due casi:

coordinate di T: $(1, \operatorname{tg} \alpha)$
coordinate di P: $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$.

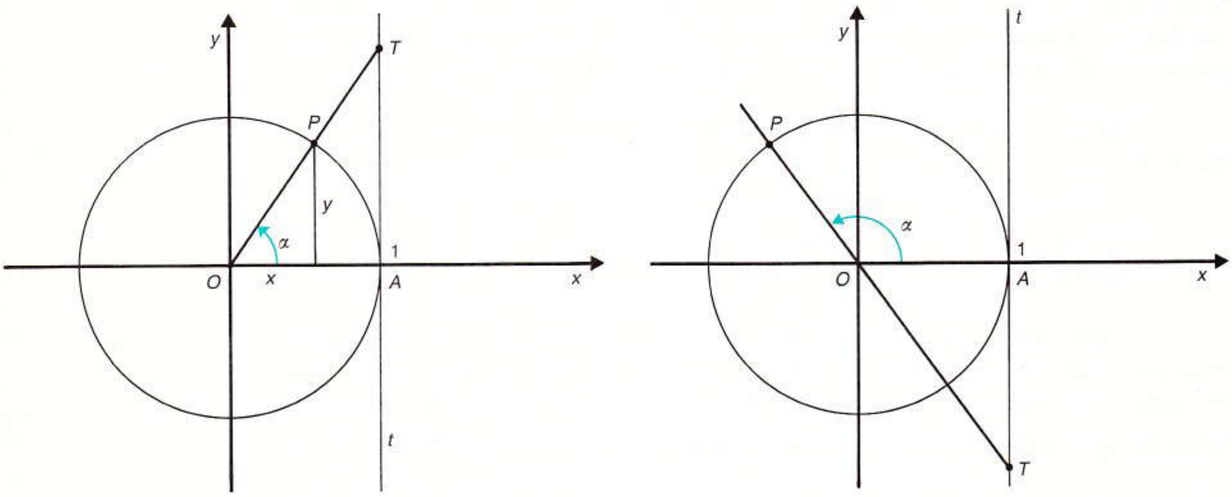


Fig. 16

Ora P e T si trovano sulla stessa retta per l'origine, cioè su una retta d'equazione

$$\frac{y}{x}=m;$$

perciò si avrà, relativamente al punto $T(1, \operatorname{tg} \alpha)$,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1}=m$$

e, relativamente al punto $P(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}=m.$$

Si ottiene quindi:

$$\operatorname{tg} \alpha=\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Questa relazione porta a chiarire il significato di m, cioè del coefficiente angolare d'una retta d'equazione $y=mx$; si ha:

$$m=\operatorname{tg} \alpha.$$

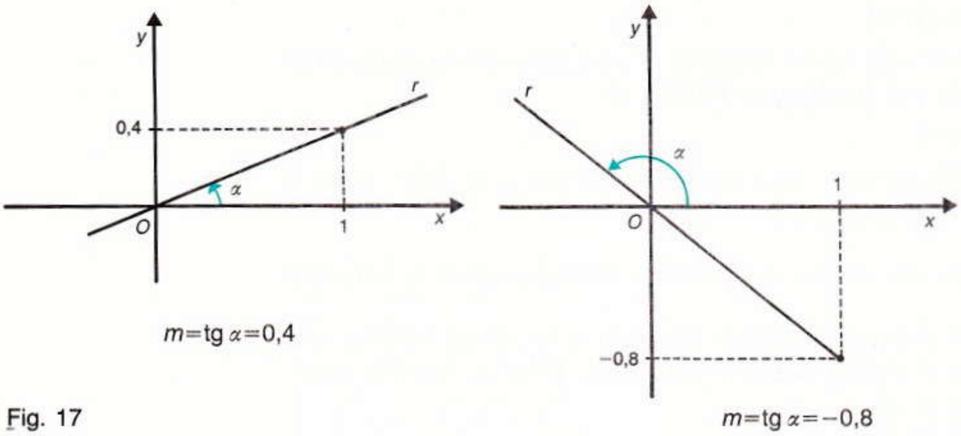


Fig. 17

Risulta così che il coefficiente angolare (o pendenza) della retta è dato dalla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x; è chiaro che l'angolo deve essere misurato scegliendo come primo lato la direzione positiva dell'asse delle x e come verso quello antiorario (Fig. 17).

Due osservazioni sulle relazioni che abbiamo trovato e che ora riscriviamo:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

A) Queste due relazioni, lette da destra verso sinistra, esprimono qualcosa davvero non banale: il numero 1 si può sempre esprimere mediante la somma $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$, dove α è un angolo qualunque e la funzione $\operatorname{tg}\alpha$ può essere sempre sostituita dal rapporto $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

B) Se è fissato il valore di una delle tre funzioni, per esempio di $\operatorname{tg}\alpha$, le due relazioni danno luogo ad un sistema di secondo grado nelle due incognite $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. La risoluzione del sistema conduce a determinare i valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

Negli esercizi (pp. 197-199) si trovano svolti e commentati alcuni di questi sistemi.

5. Angoli associati

Nel paragrafo 3 del Cap. 1 abbiamo osservato che seno, coseno e tangente di un angolo sono generalmente numeri irrazionali, di cui il calcolatore ci fornisce solo i valori approssimati. Inoltre, nel paragrafo 2 dello stesso capitolo siamo riusciti a determinare seno, coseno e tangente di particolari angoli acuti, espressi per mezzo di radicali. In particolare, abbiamo trovato:

$$\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}30° =\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vediamo ora come valersi di questi risultati per esprimere, per mezzo di radicali, seno, coseno e tangente di altri angoli.

Cominciamo col disegnare l'angolo $A\hat{O}P=30°$ (Fig. 18). Dato che risulta

$$\text{ordinata di } P=\text{sen}\,30° \quad \text{e} \quad \text{ascissa di } P=\cos 30°,$$

si ha:

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

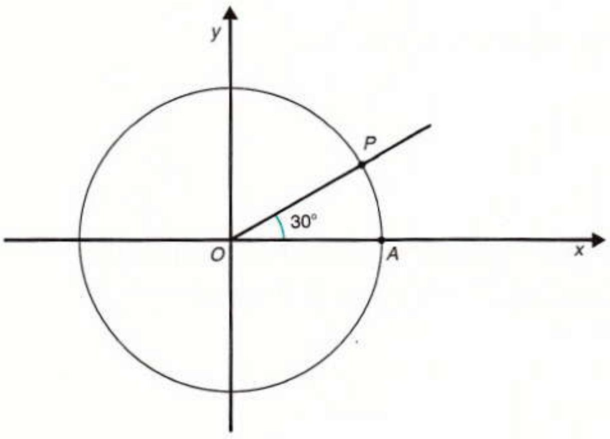


Fig. 18

Consideriamo ora il punto simmetrico di P rispetto all'asse delle y: è il punto Q, che ha la stessa ordinata ma ascissa opposta (Fig. 19). Risulta dunque

$$Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Abbiamo così costruito un nuovo angolo, $A\hat{O}Q$, di cui conosciamo seno e coseno. Quanto è ampio $A\hat{O}Q$?

Dalla Fig. 20 si nota che i due triangoli rettangoli OPP' e OQQ' sono uguali, per cui risulta:

$$Q'\hat{O}Q=30°$$

e, quindi:

$$A\hat{O}Q=180°-30°=150°.$$

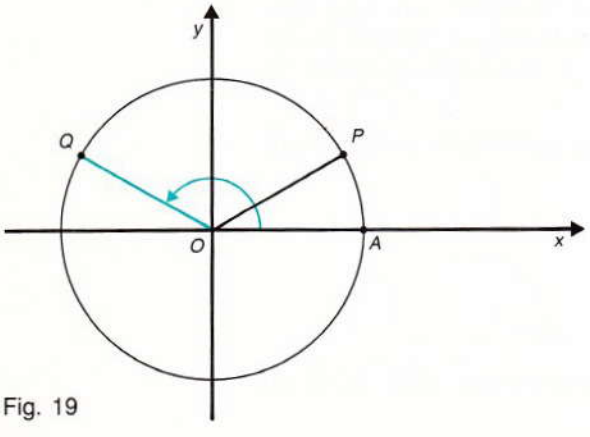


Fig. 19

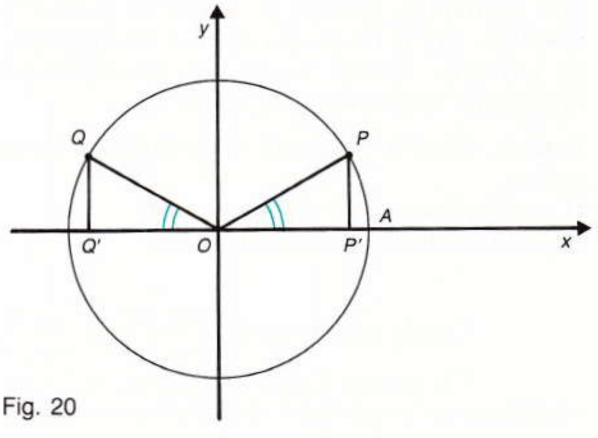


Fig. 20

Possiamo dunque scrivere:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{ascissa di } Q=\cos 150^\circ$$

$$\frac{1}{2}=\text{ordinata di } Q=\operatorname{sen} 150^\circ.$$

In questo modo, abbiamo espresso, per mezzo di radicali, seno e coseno di un nuovo angolo. Si osserva inoltre che risulta:

$$\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ$$
$$\operatorname{sen} 150^\circ=\operatorname{sen} 30^\circ.$$

Ricordando poi che, per qualunque angolo α, si ha

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

possiamo aggiungere che risulta[1]:

$$\operatorname{tg} 150^\circ=-\operatorname{tg} 30^\circ.$$

Questo procedimento si può ripetere a partire da qualunque angolo $A\hat{O}P=\alpha$ (Fig. 21). Considerando infatti il punto Q simmetrico di P rispetto all'asse delle y, si ottiene:

$$A\hat{O}Q=180^\circ-\alpha$$

e risulta:

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)&=\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)&=-\operatorname{tg}\alpha.\end{aligned} \tag{1}$$

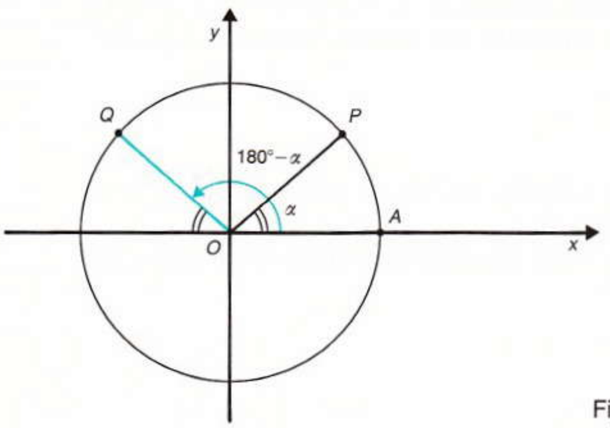


Fig. 21

Il modo in cui abbiamo scritto queste formule può far nascere una domanda: perché si usano le parentesi per indicare, ad esempio, $\cos(180-\alpha)$? È il sistema operativo algebrico[2] che ci impone questo modo di scrivere. Infatti, svolgendo un'espressione, si debbono eseguire le operazioni nell'ordine seguente:

I) seno, coseno, tangente di un angolo, elevazioni a potenza, estrazioni di radice;
II) moltiplicazioni e divisioni;
III) addizioni e sottrazioni.

[1] Basta scrivere $\operatorname{tg} 150^\circ=\frac{\operatorname{sen} 150^\circ}{\cos 150^\circ}=\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{-\cos 30^\circ}=-\operatorname{tg} 30^\circ$.

[2] Il sistema operativo algebrico è l'ordine convenzionale, usato anche dal calcolatore, per eseguire più operazioni in un'espressione.

Quando vogliamo alterare quest'ordine prestabilito, dobbiamo usare le parentesi. Perciò, scrivendo, per esempio

$$\text{sen}\,180°-30°$$

senza le parentesi, intendiamo eseguire le operazioni secondo l'ordine stabilito dal sistema operativo algebrico, cioè:

I) calcolare sen 180°;
II) al risultato ottenuto sottrarre 30°.

Otteniamo dunque:

$$\text{sen}\,180°-30°=0-30°=-30°.$$

Invece, scrivendo:

$$\text{sen}(180°-30°),$$

intendiamo svolgere le operazioni in un ordine diverso da quello stabilito, e cioè:

I) eseguire la sottrazione 180°−30°;
II) calcolare il seno dell'angolo ottenuto.

Perciò risulta:

$$\text{sen}(180°-30°)=\text{sen}\,150°=\frac{1}{2}.$$

È dunque indispensabile usare le parentesi per scrivere le relazioni (1).

Continuiamo ora a valerci di altre simmetrie, sempre a partire da un punto P, che ha le coordinate $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$.

Ciascuna delle figure seguenti mette in evidenza come, a partire dalle funzioni goniometriche dell'angolo α, si possono determinare seno, coseno e tangente di altri angoli.

Simmetria rispetto all'origine O(0,0) (Fig. 22)

Cambia segno sia l'ascissa che l'ordinata; si ottiene il punto R.

P ha le coordinate $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$
R ha le coordinate $(-\cos\alpha, -\text{sen}\,\alpha)$.

Risulta (Fig. 23):

$$A\hat{O}R=180°+\alpha$$

e quindi:

$$\text{sen}(180°+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\text{tg}(180°+\alpha)=\text{tg}\,\alpha.$$

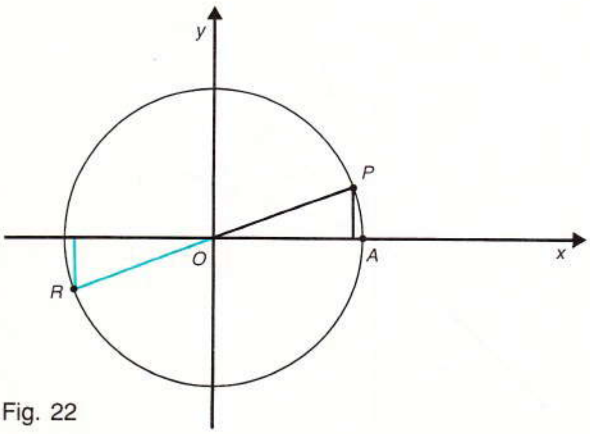


Fig. 22

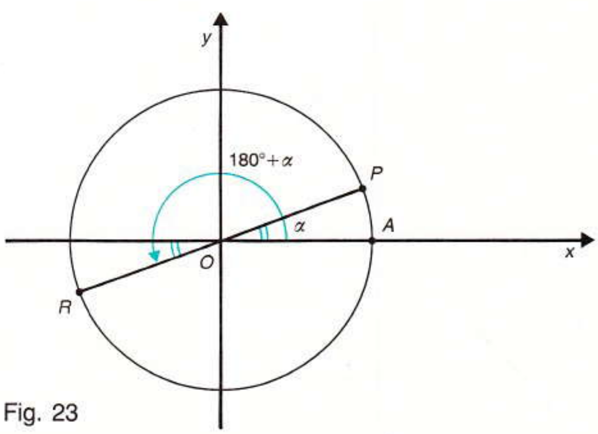


Fig. 23

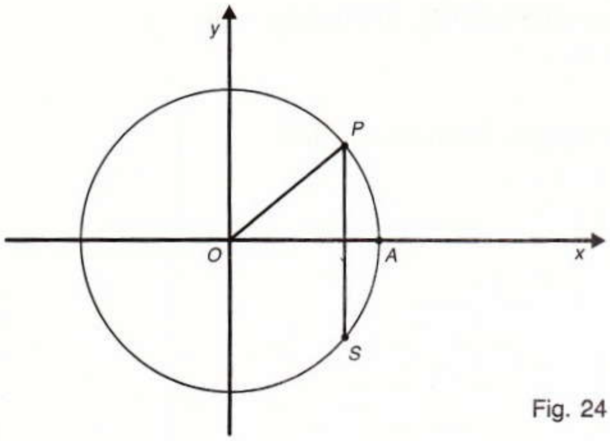


Fig. 24

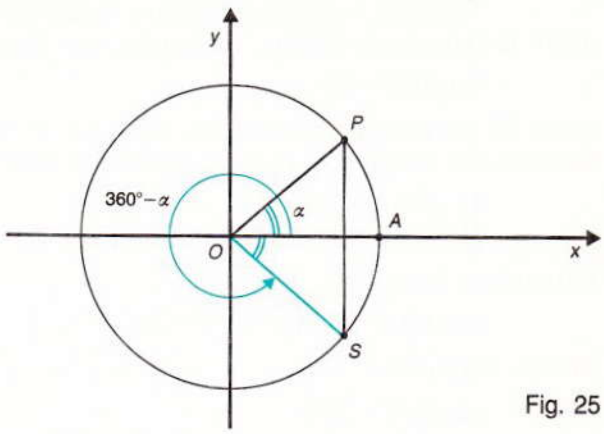


Fig. 25

Simmetria rispetto all'asse delle x (Fig. 24)

Cambia segno l'ordinata e resta inalterata l'ascissa; si ottiene il punto S.

P ha le coordinate $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$
S ha le coordinate $(\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$.

Risulta (Fig. 25):

$$A\hat{O}S = 360° - \alpha,$$

perciò si ha:

$$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Simmetria rispetto alla bisettrice r del primo e terzo quadrante (Fig. 26)

Si scambia l'ascissa con l'ordinata; si ha il punto M.

P ha le coordinate $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

M ha le coordinate $(\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$.

Risulta (Fig. 27):

$$A\hat{O}M = 90° - \alpha$$

perciò:

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

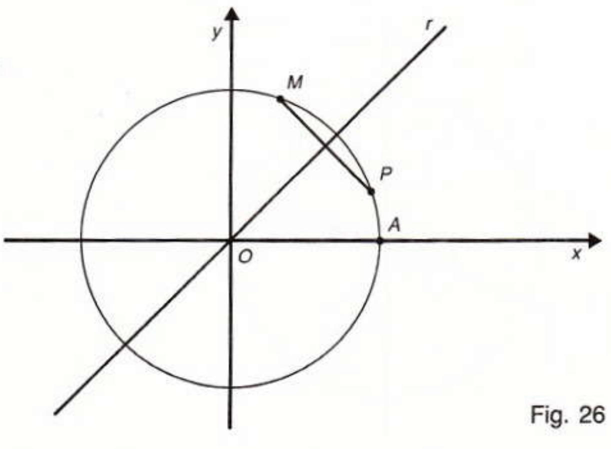


Fig. 26

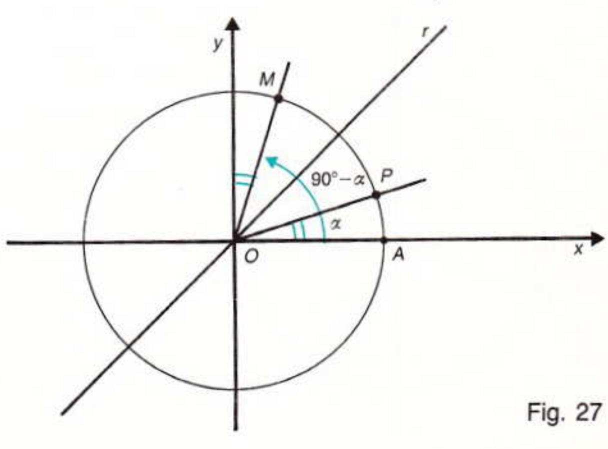


Fig. 27

Abbiamo dunque visto che, noti sen α, $\cos\alpha$ e tg α, i risultati trovati in questo paragrafo permettono di conoscere seno, coseno e tangente di altri quattro angoli, che differiscono da α per multipli di un angolo retto; questi angoli sono spesso detti *angoli associati* di α.

Due osservazioni:

A) gli angoli α e $90°-\alpha$ sono complementari; da ciò deriva il termine "coseno di α", abbreviazione di *seno dell'angolo complementare di* α. Allo stesso modo, l'espressione

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

prende il nome di *cotangente di* α e viene spesso indicata con ctg α; si ha cioè:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

B) fissato il valore di sen α, per esempio sen $\alpha=\frac{1}{2}$, troviamo, in corrispondenza, due angoli (Fig. 28): $\alpha_1=30°$ e $\alpha_2=180°-30°=150°$.

E così, fissato il valore di $\cos\alpha$, per esempio $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, troviamo, in corrispondenza, due angoli (Fig. 29): $\alpha_1=30°$ e $\alpha_2=360°-30°=330°$.

Analogamente, fissato il valore di tg α, per esempio tg $\alpha=1$, troviamo, in corrispondenza, due angoli (Fig. 30): $\alpha_1=45°$ e $\alpha_2=$ $=45°+180°=225°$.

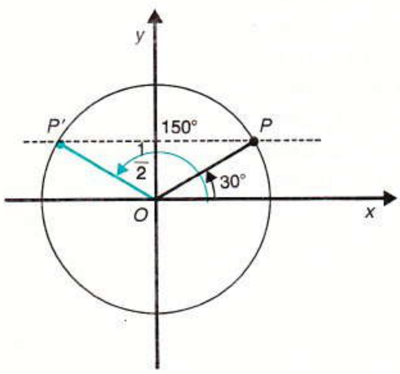


Fig. 28

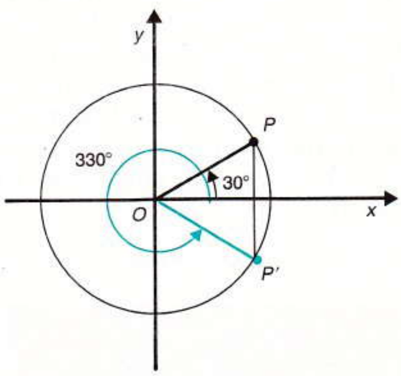


Fig. 29

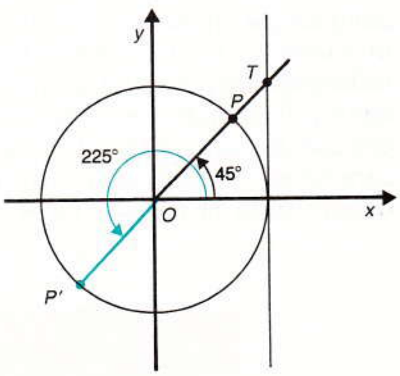


Fig. 30

6. Problemi che motivano la ricerca di relazioni fra lati ed angoli di un qualunque triangolo

Occupiamoci ora dell'argomento che, per primo, ci aveva condotti ad estendere le funzioni goniometriche ad angoli maggiori di 90°: risolvere problemi relativi a triangoli non rettangoli.

Ecco qualche esempio, che risolveremo poi nel paragrafo 9.

I) Per guidare un missile antiaereo, la stazione radar da terra deve valutare in ogni istante la distanza fra l'aereo da colpire e il missile

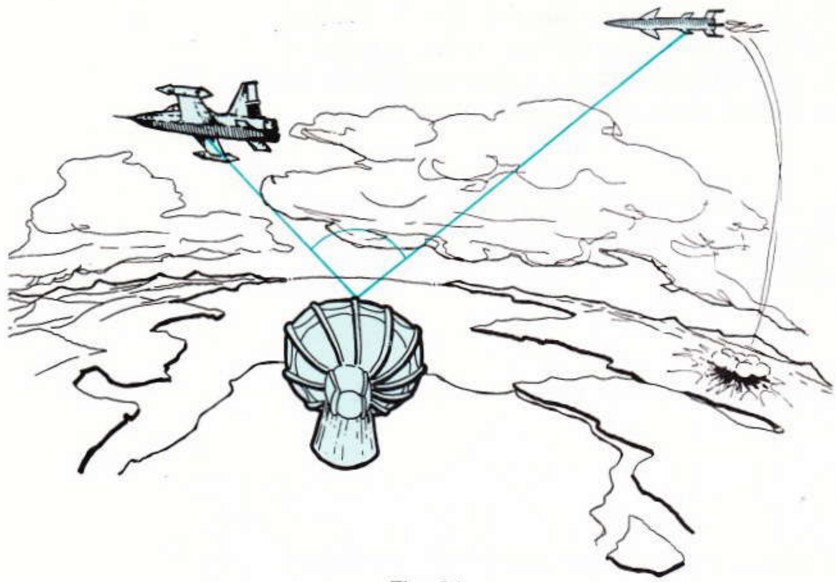


Fig. 31

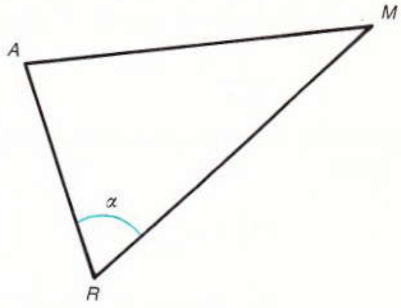


Fig. 32

(Fig. 31). Il radar, disposto in R (Fig. 32), misura la distanza RA dell'aereo A e quella RM del missile M; misura inoltre l'angolo α fra queste due direzioni. Se risulta, per esempio:

$$RA=12 \text{ km}, \quad RM=20 \text{ km}, \quad \alpha=65°,$$

quanto vale la distanza AM?

II) Il radiogoniometro (Fig. 33) è uno strumento assai utile nella navigazione marittima e viene usato per determinare la direzione da cui proviene un segnale radio. In Fig. 34 è illustrata una situazione in cui il radiogoniometro è indispensabile: una nave N avverte di trovarsi i difficoltà e il segnale viene ricevuto da due capitanerie di porto, A e B, che distano fra loro 400 km in linea d'aria. Con il radiogoniometro, le due capitanerie rilevano gli angoli $\alpha=110°$ e $\beta=50°$ (Fig. 35). Ci si chiede: quanto dista la nave N da A e da B?

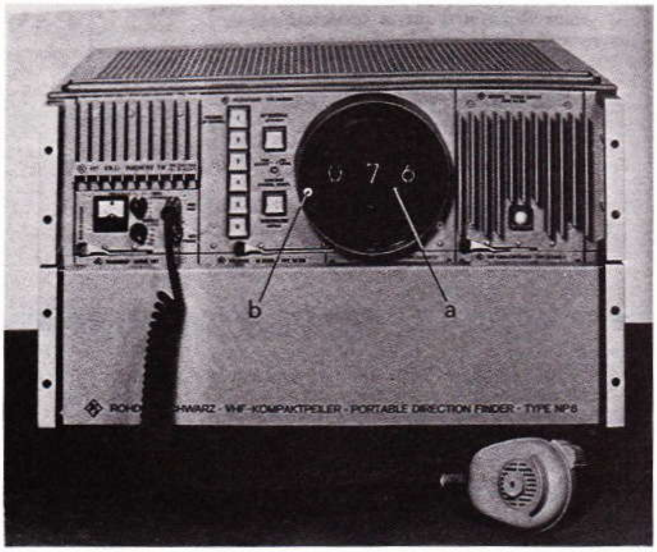


Fig. 33. Radiogoniometro (a: indicatore numerico dell'angolo; b: indicatore della bussola).

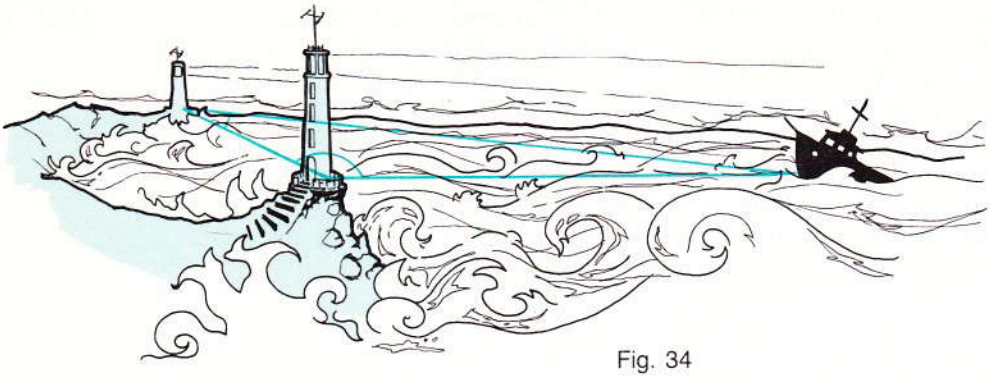


Fig. 34

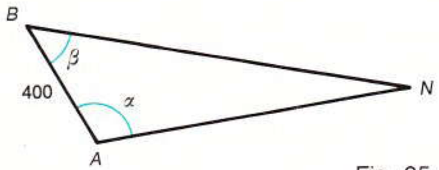


Fig. 35

III) La camera a bolle è un dispositivo usato per rendere visibili le traiettorie delle particelle elementari durante gli esperimenti di fisica. In un punto A di una camera a bolle, vengono prodotte due particelle che decadono dopo aver percorso le distanze

$AB = 7$ cm e $AC = 10$ cm.

Dalla fotografia dell'esperimento (Fig. 36) si riesce anche a determinare la distanza

$BC = 12$ cm.

Quanto vale l'angolo A fra le traiettorie delle due particelle? (Fig. 37).

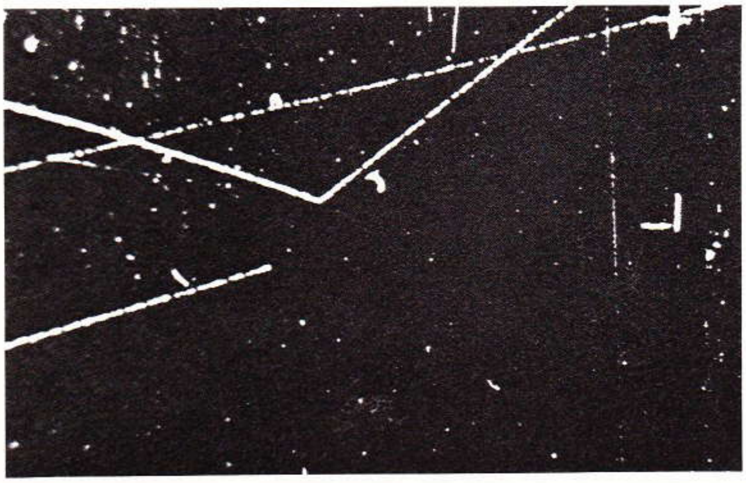


Fig. 36

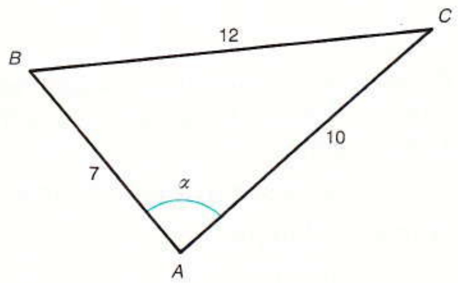


Fig. 37

Analizziamo attentamente i problemi proposti: tutti conducono a disegnare dei triangoli di cui si conoscono alcuni elementi (lati o angoli); poi, a partire dagli elementi noti, si cerca di determinare altri elementi incogniti.

Ci si chiede: i problemi proposti sono risolubili? Per rispondere a questa domanda dobbiamo verificare se gli elementi noti sono, in ognuno dei tre casi, sufficienti per *individuare un solo triangolo*.

Riflettiamo. Nel primo problema si deve esaminare un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso; nel secondo problema si deve disegnare un triangolo di cui si conosce un lato e due angoli, infine nel terzo problema si è disegnato un triangolo di cui si conoscono tre lati.

I tre criteri di eguaglianza, già ricordati nel paragrafo 6 del Cap. 1, ci assicurano che in tutti e tre i problemi proposti il triangolo è ben determinato; dunque, deve essere possibile calcolare gli elementi incogniti.

Ma, in che modo? Quali relazioni legano lati ed angoli di un triangolo? È di questo che ci occuperemo nel rossimo paragrafo.

7. Il teorema dei seni

Nel paragrafo precedente abbiamo visto una serie di problemi che conducono a cercare relazioni fra lati ed angoli di un triangolo qualunque. Ma noi conosciamo soltanto relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo; possiamo trovare una via per estendere queste relazioni a triangoli acutangoli o ottusangoli?

Una prima idea che viene in mente è di determinare dei triangoli rettangoli in un triangolo qualunque tracciando un'altezza. Sarà così possibile valersi delle relazioni che già conosciamo per trovarne delle altre, più generali.

Ecco come procedere. Relativamente ad un triangolo rettangolo ABC (Fig. 38), sappiamo che risulta:

$$\frac{b}{a}=\operatorname{sen}\beta,$$

cioè

$$b=a\operatorname{sen}\beta.$$

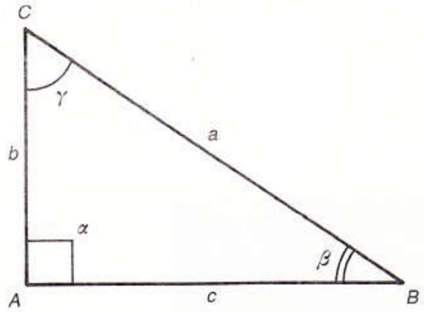


Fig. 38

Consideriamo ora il triangolo acutangolo ABC (Fig. 39). Tracciamo l'altezza CH, di lunghezza h, e consideriamo i triangoli rettangoli ACH e CHB; risulta:

$$h=a\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad h=b\operatorname{sen}\alpha.$$

Abbiamo dunque:

$$a\operatorname{sen}\beta=b\operatorname{sen}\alpha.$$

E ora ci si chiede: questa relazione è valida solo per triangoli acutangoli?

Consideriamo il triangolo ABC della Fig. 40, che ha l'angolo α ottuso. Anche in questo caso, tracciando l'altezza CH otteniamo due triangoli rettangoli, CHB e CHA, per i quali possiamo scrivere:

$$h=a\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad h=b\operatorname{sen}(180°-\alpha).$$

Ma poiché risulta

$$\operatorname{sen}(180°-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$$

otteniamo ancora

$$a\operatorname{sen}\beta=b\operatorname{sen}\alpha,$$

Fig. 39

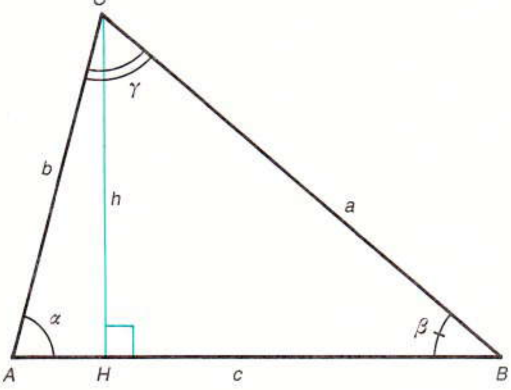


Fig. 40

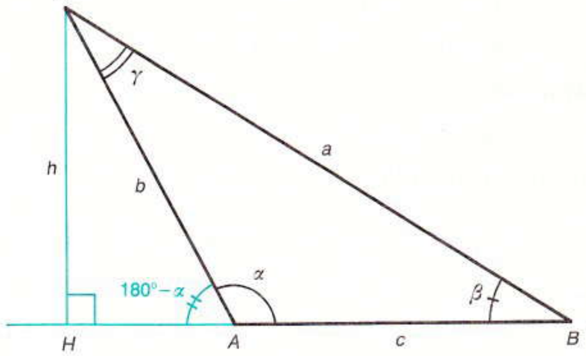
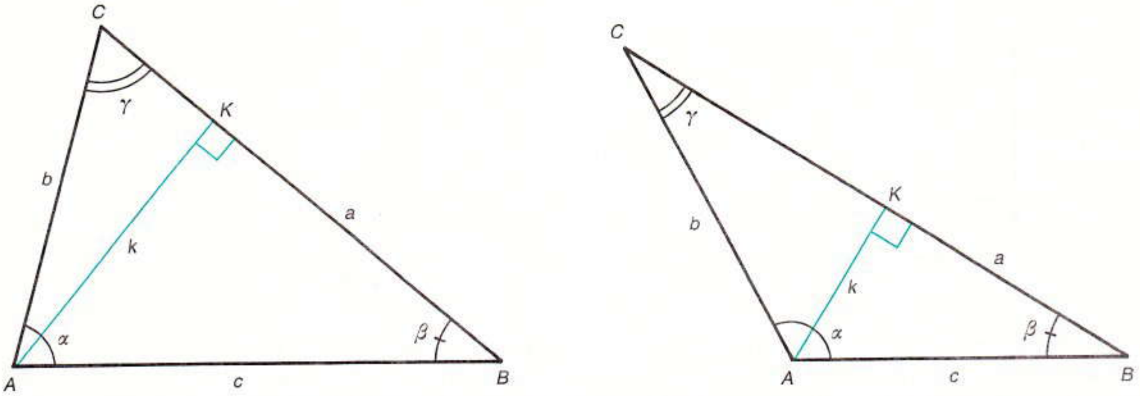


Fig. 41



e cioè la stessa relazione ottenuta prima. Si tratta dunque di una relazione valida per *qualunque* triangolo; riscriviamola nella forma più usata:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}. \tag{1}$$

Questa relazione lega fra loro due lati e due angoli dello stesso triangolo; ma è facile ottenere una formula dove intervengono il terzo lato e il terzo angolo: basta tracciare un'altra altezza. Se, ad esempio, conduciamo l'altezza AK di lunghezza k, si ottiene (Fig. 41):

$k=b \operatorname{sen}\gamma$ (dal triangolo AKC)
$k=c \operatorname{sen}\beta$ (dal triangolo AKB)

da cui:

$$b \operatorname{sen}\gamma=c \operatorname{sen}\beta$$

e dunque:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}. \tag{2}$$

Confrontando le relazioni (1) e (2) vediamo che *per qualunque triangolo* si può scrivere:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Abbiamo così trovato un'importante relazione, detta *teorema dei seni*: per qualunque triangolo, *è costante il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto*.

È bene osservare subito che il teorema è valido per ogni triangolo e, dunque, anche per i triangoli rettangoli. Ad esempio, per il triangolo rettangolo della Fig. 42 si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 90°}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma};$$

essendo però

$$\operatorname{sen} 90°=1,$$

si ottengono le relazioni già note:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=a, \quad \text{ossia} \quad b=a\operatorname{sen}\beta$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=a, \quad \text{ossia} \quad c=a\operatorname{sen}\gamma.$$

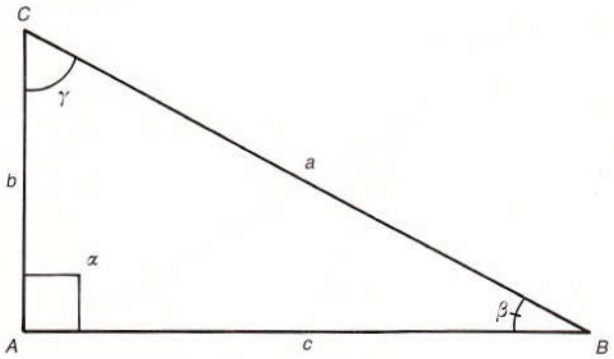


Fig. 42

Il teorema dei seni ha una lunga storia: Tolomeo (circa 150 d.C.) risolveva ancora i triangoli dividendoli in triangoli rettangoli, senza arrivare ad una legge generale. Il teorema fu poi scoperto e dimostrato in modi diversi: dagli Arabi nel X secolo, dai Persiani nell'XI e dagli Europei nel XIV e XV secolo. Nel XV secolo, Regiomontano, uno dei più brillanti matematici europei della sua epoca, si dedicò ad un'esposizione sistematica dei metodi di soluzione dei triangoli e riordinò le nozioni fino allora conosciute in una forma simile a quella odierna.

8. Il teorema del coseno

Cerchiamo ora altre relazioni fra lati ed angoli di un triangolo qualunque; ci baseremo ancora sulle proprietà già note per i triangoli rettangoli.

Riferiamoci al triangolo rettangolo della Fig. 43; possiamo scrivere le relazioni:

$$\begin{aligned} &a^2=b^2+c^2 \\ &c=a\cos\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

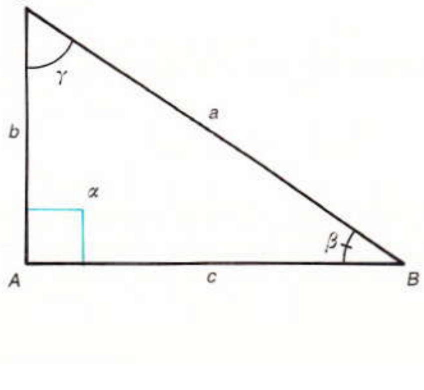


Fig. 43

Passiamo ora dal triangolo rettangolo ad un triangolo acutangolo ABC (Fig. 44). Tracciamo di nuovo l'altezza CH di lunghezza h ed indichiamo con p la lunghezza di AH. Otteniamo ancora due triangoli rettangoli CHB e CHA; scriviamo le due relazioni (1), relativamente al triangolo CHA. Si ha:

$$\begin{aligned} b^2&=h^2+p^2 \\ p&=b\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

D'altra parte, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHB, si ha:

$$a^2=h^2+(c-p)^2$$

ossia

$$a^2=h^2+p^2+c^2-2cp.$$

Sostituendo ora al posto di p e di h^2+p^2 le espressioni (2), si ottiene la relazione seguente:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

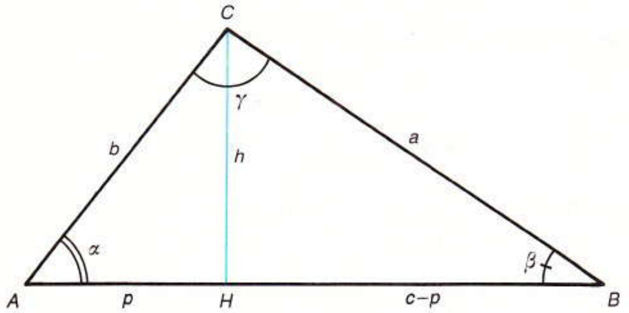


Fig. 44

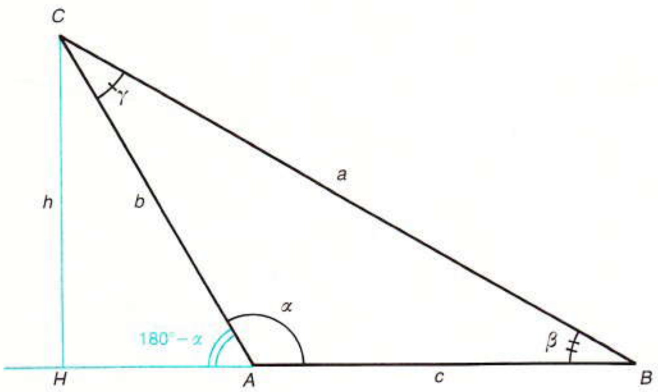


Fig. 45

Alla stessa relazione si arriva esaminando il triangolo di Fig. 45, che è ottusangolo; basta tener presente che risulta

$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha.$$

È inoltre chiaro che, come nel paragrafo precedente, possiamo ripetere il ragionamento a partire da un'altra altezza del triangolo. In definitiva, scopriamo che, *per qualunque triangolo*, valgono le tre relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos\beta \\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Queste relazioni costituiscono il *teorema del coseno*.

È immediato osservare che, se il triangolo è rettangolo, ad esempio è $\alpha=90°$, dalla prima delle relazioni scritte risulta:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 90° \qquad \text{ossia} \qquad a^2=b^2+c^2.$$

Si ottiene dunque di nuovo il teorema di Pitagora; è per questo motivo che il teorema del coseno è anche detto *teorema di Pitagora generalizzato.*

In alcuni testi le stesse relazioni (3) vanno sotto il nome di teorema di Carnot, dal matematico francese Lazare Carnot (1753-1823). Eppure, queste relazioni erano già note ai tempi di Euclide, anche se in forma diversa; Carnot vi dette solo un contributo originale, generalizzandole alla geometria dello spazio.

Lazare Carnot è un notevole personaggio dai vari interessi; era militare, ma era anche poeta e si occupò attivamente di problemi educativi a tutti i livelli. Anche se sembra non abbia mai insegnato, contribuì notevolmente alla formazione dell'Ecole Polytechnique, la prima scuola francese per la formazione degli ingegneri.

Fu anche attivo uomo politico, legato alla rivoluzione prima e, poi, a Napoleone. Lazare Carnot era padre di Sadi (1796-1832), noto per i suoi studi sul ciclo di Carnot, che è alla base della termodinamica.

9. Risoluzione di triangoli. Casi possibili

Il teorema dei seni e il teorema del coseno ci permettono di risolvere agevolmente i problemi proposti nel paragrafo 6.

I) Il problema della guida radar del missile è schematizzato in Fig. 46 dal triangolo AMR, di cui si conoscono gli elementi:

$RA=12$ km
$RM=20$ km
$A\hat{R}M=65°$.

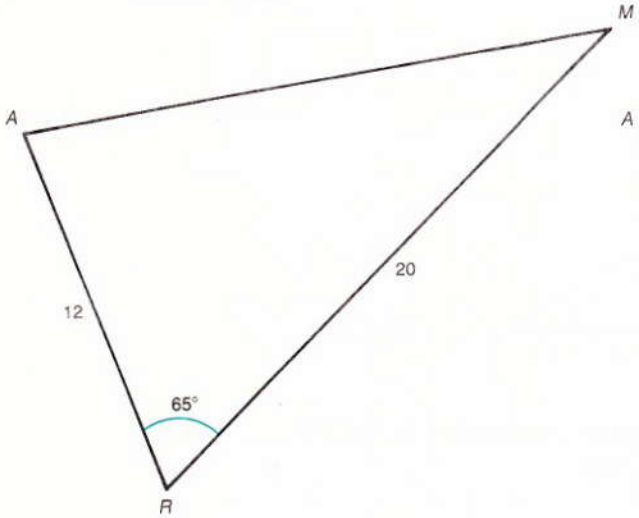


Fig. 46

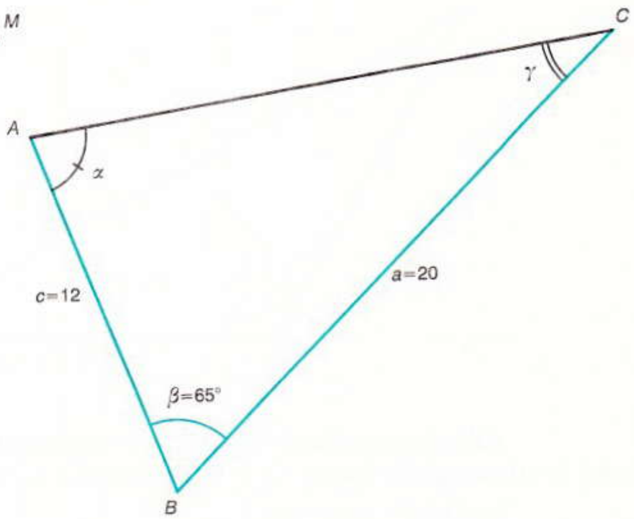


Fig. 47

Riferiamoci ora alla Fig. 47 ed applichiamo il teorema del coseno per determinare la distanza $AC=b$. Si ha:

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$$

che, nel nostro caso, diventa:

$$b^2=12^2+20^2-2\cdot 20\cdot 12\cdot\cos 65°.$$

Risulta dunque[1]:

$$b^2 \cong 341{,}14 \quad \text{e infine} \quad b \cong 18{,}47.$$

Noti tutti i lati del triangolo, possiamo anche determinare l'angolo γ, che individua la rotta da seguire per raggiungere il bersaglio A. Basta applicare il teorema dei seni, scritto nella forma

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Si ha infatti:

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{c\operatorname{sen}\beta}{b},$$

e, sostituendo i valori noti di c, β e b, si ha[2]:

$$\operatorname{sen}\gamma \cong 0{,}589 \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma \cong 36°.$$

Osserviamo che, a questo punto, anche l'angolo α è immediatamente noto, dovendo essere la somma dei tre angoli uguale a 180°. Abbiamo dunque determinato tutti i lati e tutti gli angoli del triangolo dato; lo abbiamo cioè *risolto*.

II) Il problema di determinare la posizione di una nave a partire dai dati di due radiogoniometri è schematizzato in Fig. 48 dal triangolo ABC, di cui si conoscono:

$$AB=c=400 \text{ km}$$
$$\alpha=50°$$
$$\beta=110°.$$

Si vogliono conoscere le lunghezze a e b.

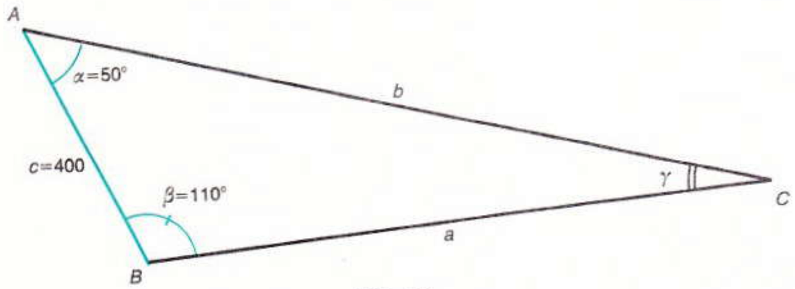


Fig. 48

[1] Per ottenere il valore di b^2 con il calcolatore tascabile, useremo questa sequenza di tasti:

1 2 x^2 + 2 0 x^2 − 2 × 2 0 × 1 2 × 6 5 COS =.

Premendo poi il tasto $\sqrt{\ }$, si ottiene sul visualizzatore il valore di b cercato.

[2] Per calcolare sen α, occorre il valore di b calcolato prima. Perciò, per rendere i calcoli più rapidi e precisi, conviene memorizzare il valore di b, quando è ancora presente sul visualizzatore, premendo il tasto Min (o STO). In questo modo il valore di b è "immagazzinato" nella memoria del calcolatore e possiamo richiamarlo, quando è necessario, premendo il tasto MR (o RCL). Ora si può calcolare sen α, cioè il valore dell'espressione

$$\frac{12\cdot\operatorname{sen}65°}{b},$$

con la sequenza di tasti:

1 2 × 6 5 SIN ÷ MR =.

Si ha così il valore di sen α. Per ottenere α basta premere

INV SIN.

Riflettiamo. È chiaro che, conoscendo un solo lato, non è possibile applicare il teorema del coseno, come abbiamo fatto nel caso precedente. Possiamo invece usare il teorema dei seni, visto che conosciamo due angoli e quindi anche il terzo; si ha infatti:

$$\gamma=180°-110°-50°=20°.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{a}{\text{sen}\,50°}=\frac{400}{\text{sen}\,20°}$$
$$\frac{b}{\text{sen}\,110°}=\frac{400}{\text{sen}\,20°}$$

e quindi

$$a=400\frac{\text{sen}\,50°}{\text{sen}\,20°}\cong 895{,}9 \text{ km}$$
$$b=400\frac{\text{sen}\,110°}{\text{sen}\,20°}\cong 1099 \text{ km.}[1]$$

III) Veniamo infine al problema di determinare l'angolo di collisione di due particelle in una camera a bolle. La situazione è schematizzata nel triangolo della Fig. 49, di cui sono noti i tre lati:

$a=12$ cm
$b=10$ cm
$c=7$ cm.

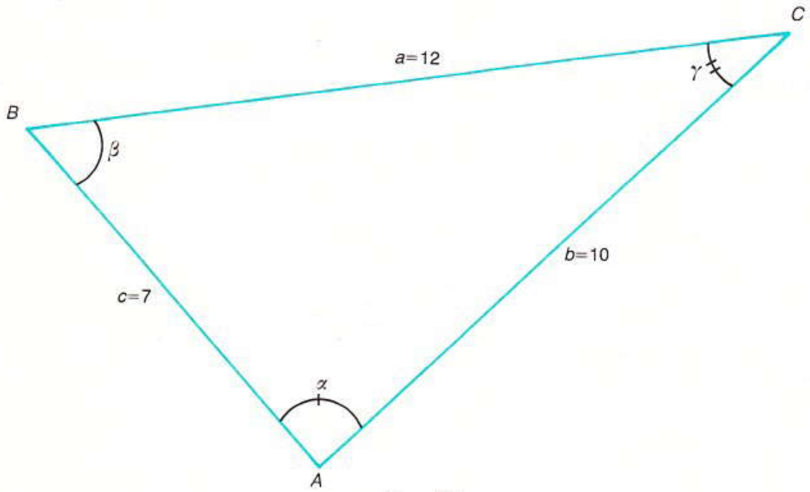


Fig. 49

Prima di tutto, riflettiamo: poiché non conosciamo nessun angolo, è chiaro che non possiamo applicare il teorema dei seni; ci si può invece valere del teorema del coseno. Dalla relazione

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

[1] Per svolgere i calcoli nel modo più rapido e preciso, conviene determinare per primo il valore di $\frac{400}{\text{sen}\,20°}$, che compare in tutte e due le espressioni, usando la sequenza

$\boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{SIN}}\ \boxed{=}$.

Memorizziamo il risultato ottenuto, premendo il tasto $\boxed{\text{Min}}$.
Così potremo calcolare, per esempio, il valore di a, usando la sequenza

$\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{SIN}}\ \boxed{=}$.

si ottiene, sostituendo i valori numerici noti:

$$12^2=10^2+7^2-2\cdot10\cdot7\cdot\cos\alpha.$$

Otteniamo così:

$$\cos\alpha=\frac{10^2+7^2-12^2}{2\cdot10\cdot7}\cong0{,}0357$$

$$\alpha\cong88°.$$[1]

Per determinare l'angolo β, abbiamo a disposizione due alternative:

A) applicare di nuovo il teorema del coseno, cioè la relazione

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$$

che, nel nostro caso, si scrive nella forma

$$10^2=7^2+12^2-2\cdot7\cdot12\cdot\cos\beta,$$

da cui segue

$$\cos\beta\cong0{,}5536 \qquad \beta\cong56°;$$

B) ricorrere al teorema dei seni, scrivendo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

da cui

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

e cioè

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{10\cdot\operatorname{sen}88°}{12}\cong0{,}8328, \qquad \text{da cui} \qquad \beta\cong56°.$$

In entrambi i casi, il terzo angolo è immediatamente determinato dal fatto che la somma dei tre angoli è 180°.

Confrontando i due procedimenti A) e B), appare chiaro che B) è più breve, mentre A) può risultare più preciso perché usa solo i dati iniziali. Questo discorso è sviluppato in modo più approfondito negli esercizi (pp. 215-217).

Abbiamo così risolto tre problemi seguendo dei procedimenti analoghi: si disegna un triangolo di cui sono noti alcuni elementi (lati o angoli) e si determinano gli elementi incogniti a partire da quelli assegnati, applicando il teorema dei seni o il teorema del coseno.

I procedimenti presentati hanno carattere generale e possono essere seguiti per risolvere qualsiasi triangolo, purché esso sia individuato in modo unico dagli elementi assegnati. E questo avviene, come sappiamo dai criteri di uguaglianza, in tre casi:

— si conoscono due lati e l'angolo compreso (come nel problema della guida con il radar);
— si conoscono un lato e due angoli (come nel problema della posizione della nave, individuata mediante radiogoniometri);
— si conoscono tre lati (come nel problema della collisione di particelle).

Nel secondo caso si ricorre al teorema dei seni; nel primo e nel terzo si applica il teorema del coseno.

[1] Si ottiene il valore di $\cos\alpha$ premendo la sequenza di tasti

$\boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$.

Si ottiene poi α, premendo

$\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}$.

10. Un problema di risoluzione di triangoli che ha più soluzioni

Ecco un problema che si presenta nella guida dei missili detti "aria-aria", missili, cioè, lanciati da un aereo e che debbono colpire un altro aereo.

Una volta lanciato, il missile non può emettere dei segnali radar, che ne rivelerebbero la presenza alle sensibili apparecchiature dell'aereo bersaglio; perciò il missile viene guidato dall'aereo che lo ha lanciato.

La situazione è rappresentata nella Fig. 50: l'aereo A, che ha lanciato il missile M, misura con il suo radar le distanze aereo-bersaglio (AB) e aereo-missile (AM), e le trasmette al calcolatore di bordo del missile.

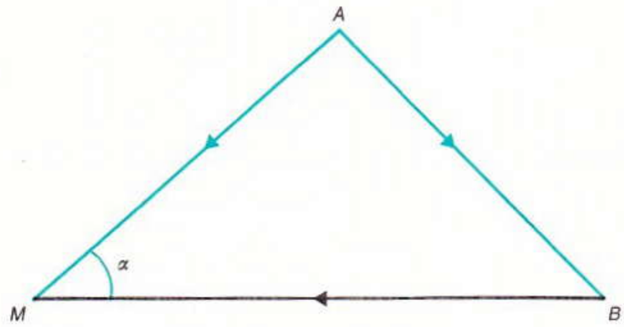


Fig. 50

Inoltre, il missile ha un rivelatore di calore, che gli permette di "sentire" il calore prodotto dai motori del bersaglio; confrontando la direzione da cui proviene il calore con quella da cui proviene il segnale radar dell'aereo, il calcolatore di bordo del missile può conoscere l'angolo $A\widehat{M}B=\alpha$.

Sono dunque noti tre elementi del triangolo AMB: i lati AM, AB e l'angolo α non compreso fra questi lati.

Ecco qual è il problema: il missile deve esplodere a meno di 20 m dal bersaglio per poterlo distruggere, perciò si deve calcolare la distanza MB a partire dagli elementi noti. Come organizzare i calcoli?

Il problema ora visto conduce ad analizzare la seguente situazione: di un triangolo si conosce la lunghezza di due lati, per esempio a e b, e l'ampiezza dell'angolo α, non compreso fra questi lati; si vogliono determinare gli altri elementi.

Basta un disegno per rendersi conto che il problema può avere più di una soluzione: in Fig. 51 sono disegnati, per esempio, due triangoli che hanno l'angolo α ampio 45° e due lati che non lo comprendono lunghi 10 e 8.

Questi due triangoli non sono certamente uguali!

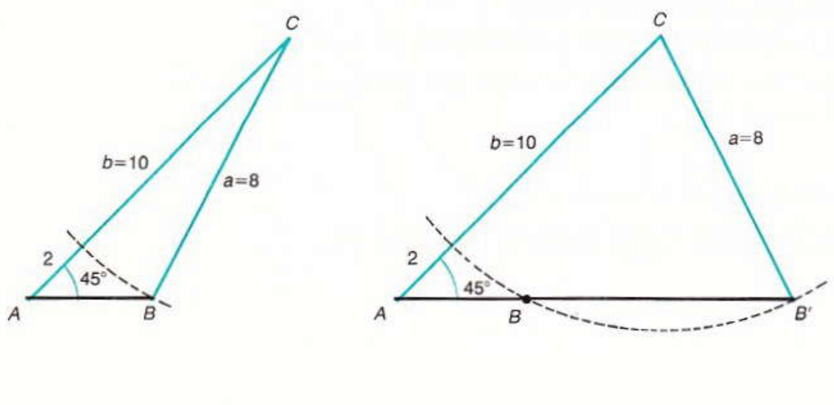


Fig. 51

Accade sempre così? Ci sono sempre due soluzioni? Analizziamo il problema distinguendo tre casi:

1) angolo α retto;
2) angolo α ottuso;
3) angolo α acuto.

1) Angolo α retto. Rferiamoci alla Fig. 52. È chiaro che in questo caso c'è un solo triangolo che risponde al problema perché, come sappiamo dal Cap. 1, un lato e un angolo sono sufficienti per determinare un solo triangolo rettangolo. Applicando il teorema di Pitagora troviamo subito anche il terzo lato.

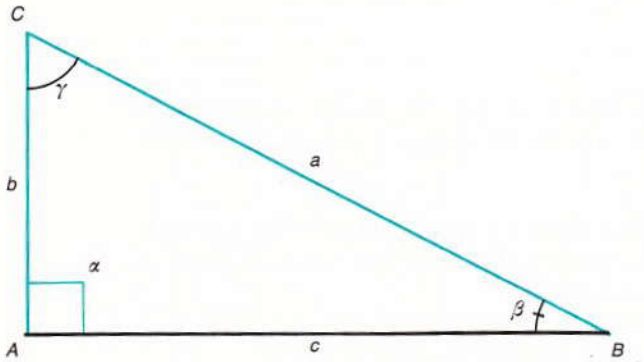


Fig. 52

2) Angolo α ottuso. Consideriamo un caso numerico; sia

$\alpha=110°\quad a=16\quad b=6.$

La Fig. 53 è stata disegnata, sulla base delle misure assegnate, in questo modo: è stato disegnato l'angolo $\alpha=110°$ e su un lato dell'angolo abbiamo riportato il segmento AC lungo 6; abbiamo poi puntato il compasso in C con apertura uguale a 16. La circonferenza ottenuta incontra in B l'altro lato dell'angolo, determinando così un unico triangolo ABC.

Vediamo ora come, basandosi sui dati, si possono determinare gli elementi incogniti del triangolo ABC.

Applichiamo il teorema dei seni sia per determinare l'ampiezza dell'angolo β, sia per determinare la lunghezza del lato c. Si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

cioè, nel nostro caso,

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6}=\frac{\operatorname{sen}110°}{16},$$

da cui

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{6\operatorname{sen}110°}{16}\cong 0{,}3524 \qquad \text{e quindi} \qquad \beta\cong 21°.$$

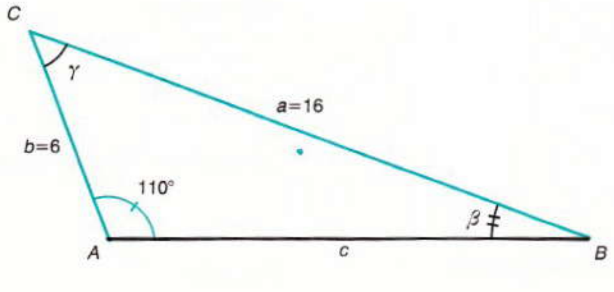


Fig. 53

Conoscendo α e β si determina subito il valore di γ; si ha:

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=49°.$$

Applichiamo ora il teorema dei seni per determinare la lunghezza del lato c; si ha:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

cioè, nel nostro caso,

$$\frac{c}{\operatorname{sen}49°}=\frac{16}{\operatorname{sen}110°}$$

da cui

$$c=\frac{16\operatorname{sen}49°}{\operatorname{sen}110°}\cong 13.$$

Osserviamo che la lunghezza del lato c si poteva anche determinare valendosi del teorema del coseno, ma in tal modo i calcoli sarebbero risultati più laboriosi.

3) Angolo α acuto. È questo il caso più complesso. Per rendersi conto delle varie eventualità che possono presentarsi, cominciamo a studiare il problema dal punto di vista grafico.

Disegnamo l'angolo α; esso è compreso fra il lato c, di cui non conosciamo la lunghezza, e il lato b di lunghezza nota (Fig. 54).

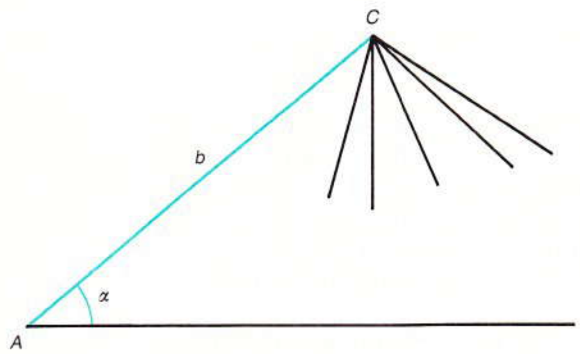
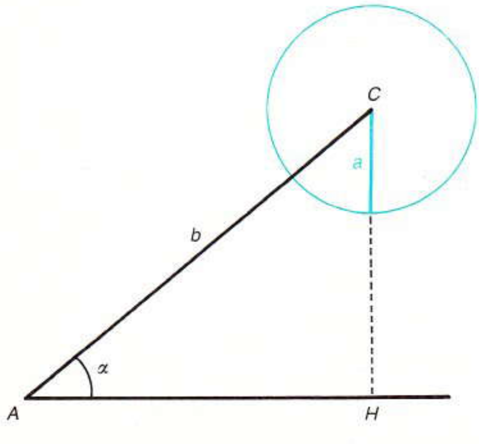


Fig. 54

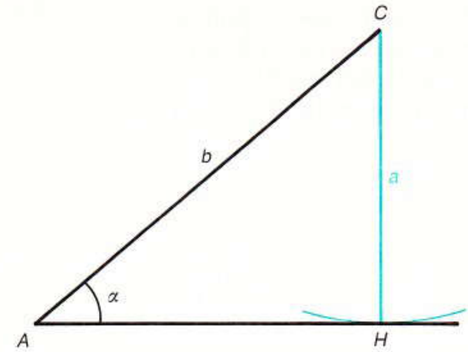
Sappiamo dunque la posizione del punto C. Del terzo lato a, che ha un estremo in C, conosciamo la lunghezza, ma non la direzione, e quindi non siamo in grado di completare il disegno del triangolo, come risulta dalla Fig. 54. Ma è proprio la stessa figura a suggerire come procedere graficamente; si punta il compasso in C con apertura a; la Fig. 55 mette in evidenza i casi che si possono presentare.



$\overline{CH}=b\operatorname{sen}\alpha$

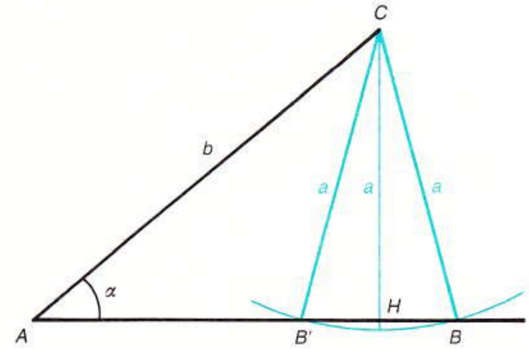
$a<b\operatorname{sen}\alpha$ nessun triangolo

Fig. 55a



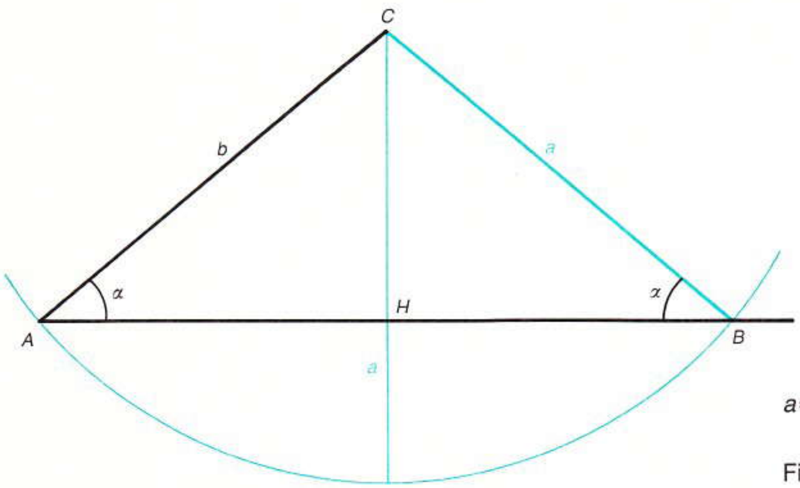
$a = b\,\text{sen}\,\alpha$ 1 triangolo

Fig. 55b



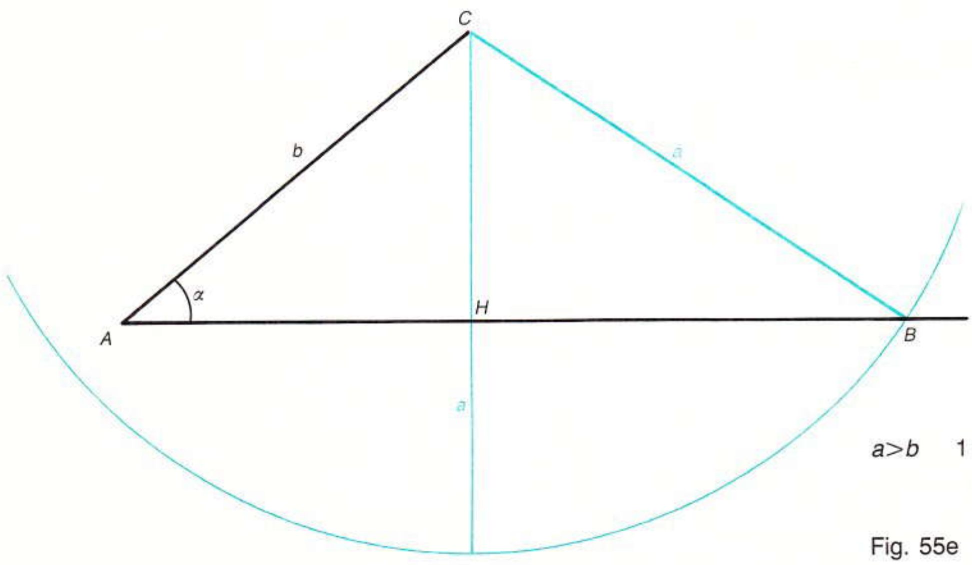
$b\,\text{sen}\,\alpha < a < b$ 2 triangoli

Fig. 55c



$a = b$ 1 solo triangolo isoscele

Fig. 55d



$a > b$ 1 solo triangolo

Fig. 55e

Sulla figura stessa abbiamo indicato, per ogni caso, quante eventualità si possono presentare. Svilupperemo qui il caso in cui si hanno due soluzioni, cioè due triangoli che rispondono ai dati del problema; i due triangoli ACB e ACB' sono disegnati separatamente nelle Figg. 56 e 57.

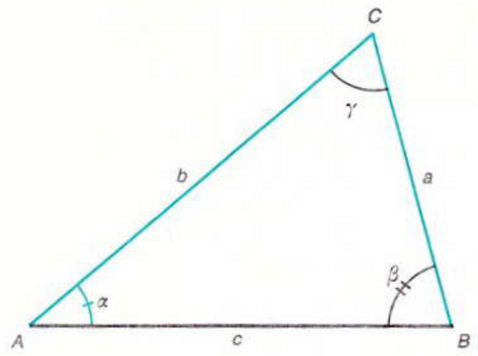


Fig. 56

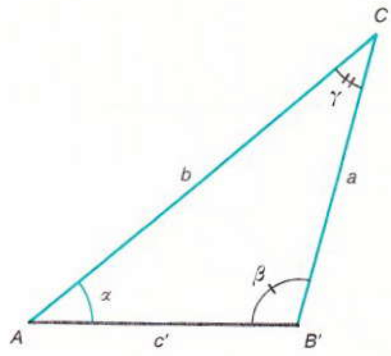


Fig. 57

Risolviamo entrambi i triangoli basandosi su dati numerici. Sono dati:

$$\alpha=40° \quad a=8 \quad b=12.$$

Per il triangolo ABC di Fig. 58, cominciamo a determinare β con il teorema dei seni; si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a},$$

e, nel nostro caso,

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{12}=\frac{\operatorname{sen}40°}{8}$$

da cui:

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{12\operatorname{sen}40°}{8}\cong 0{,}9642$$

e quindi

$$\beta\cong 75°.$$

Risulta poi

$$\gamma\cong 180°-(40°+75°)=65°.$$

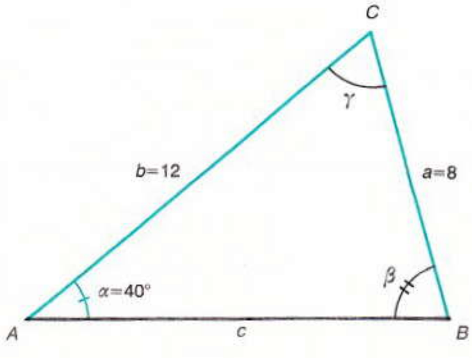


Fig. 58

Applichiamo ancora il teorema dei seni per avere la lunghezza del lato c; si ha:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 65°}=\frac{8}{\operatorname{sen} 40°}$$

da cui

$$c=\frac{8 \operatorname{sen} 65°}{\operatorname{sen} 40°}\cong 11.$$

Consideriamo ora il triangolo $AB'C$ di Fig. 57, riprodotto nella Fig. 59. Si ha subito, osservando il triangolo isoscele BCB':

$$\beta'=180°-\beta=180°-75°=105°.$$

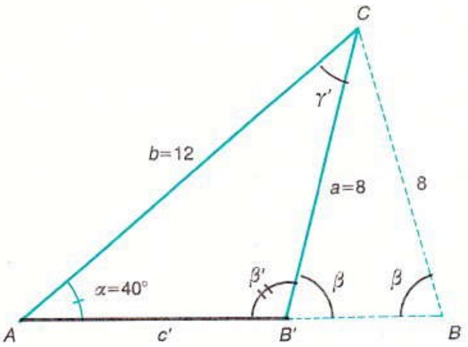


Fig. 59

E quindi, dato che risulta

$$\beta=40°+\gamma',$$

si ha:

$$\gamma'=\beta-40°=35°.$$

Con il teorema de seni si può infine calcolare c'; si ha:

$$\frac{c'}{\operatorname{sen} 35°}=\frac{8}{\operatorname{sen} 40°}$$

$$c'=\frac{8 \operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 40°}\cong 7.$$

Dopo aver esaminato le varie situazioni, siamo in grado di arrivare a delle conclusioni generali.

Se un problema conduce ad un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo non compreso, possono presentarsi i seguenti casi:

— l'angolo noto è retto o ottuso. Si è certi di individuare un solo triangolo, purché, naturalmente, i lati siano assegnati in modo che ad angolo maggiore si opponga lato maggiore;

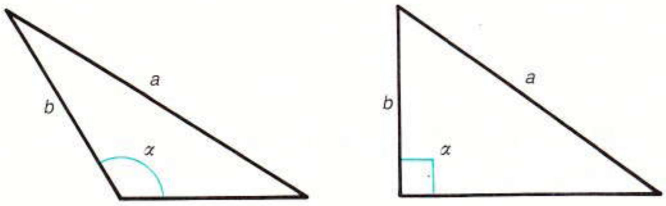
— l'angolo dato è acuto. Il triangolo è unico solo se il lato opposto all'angolo noto è maggiore o uguale dell'altro lato assegnato; altrimenti bisogna prestare particolare attenzione perché i dati possno indicare un triangolo impossibile o due triangoli.

In tutti i casi la soluzione del problema, se esiste, si ottiene basandosi sul teorema dei seni.

Queste conclusioni sono sintetizzate nello schema di pagina seguente.

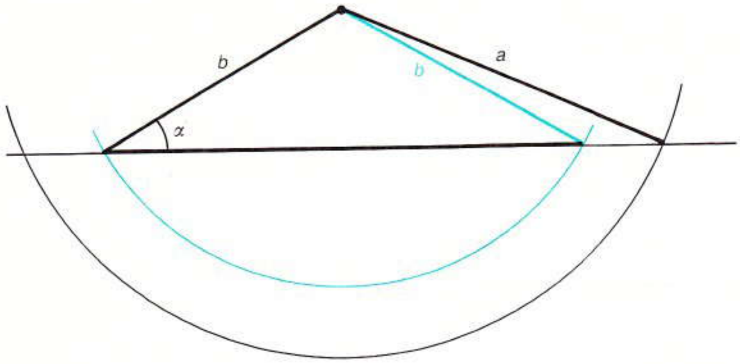
Dati a, b, α

1)



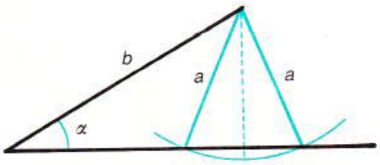
$\alpha \geq 90°$
1 triangolo purché $a > b$

2)



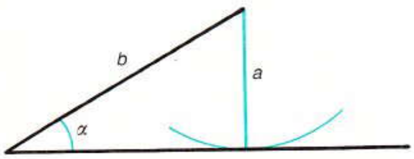
$\alpha < 90°$
1 solo triangolo se $a \geq b$

3)



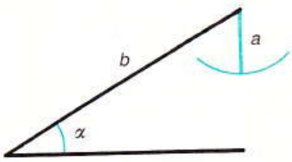
$\alpha < 90°$
2 triangoli se $b \operatorname{sen} \alpha < a < b$

4)



$\alpha < 90°$
1 triangolo se $a = b \operatorname{sen} \alpha$

5)



$\alpha < 90°$
nessun triangolo se $a < b \operatorname{sen} \alpha$

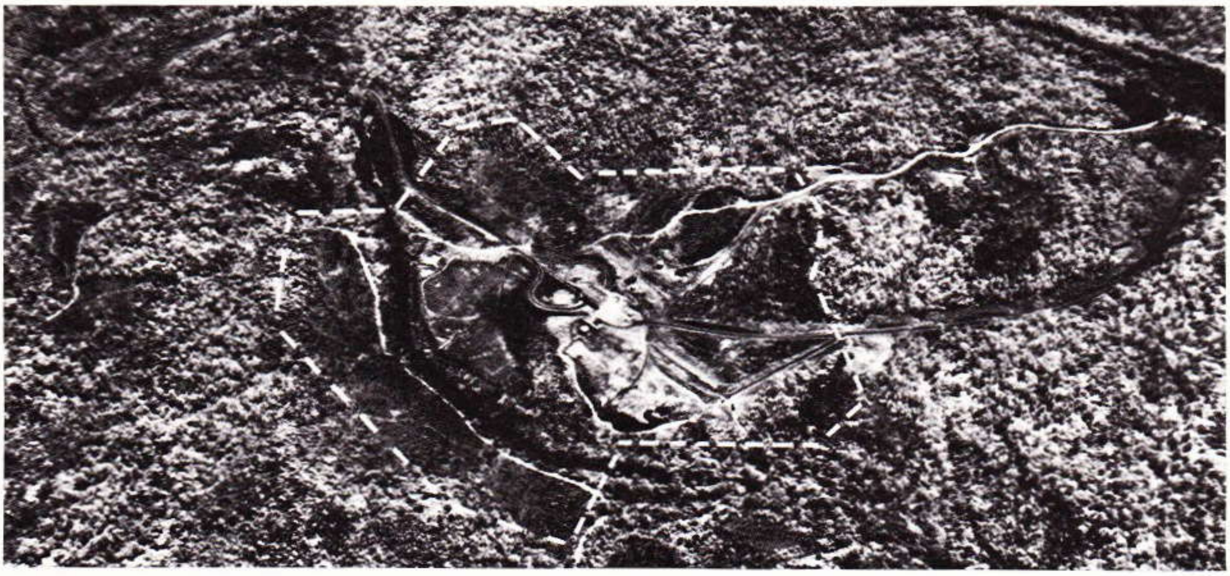


Fig. 60

11. Area di un triangolo. Triangolazione

La Fig. 60 mostra la veduta aerea della zona contaminata dalla fuga di materiale radioattivo emesso da un reattore nucleare ad Atlanta, negli USA.

Si vede nella foto un zona che ha la forma di un poligono irregolare, di cui si vuole determinare l'area, misurando i lati e gli angoli.

È chiaro che un problema analogo può presentarsi anche in circostanze molto meno drammatiche, ad esempio, quando si vuole valutare con precisione l'estensione di un terreno in vendita, o di un parco pubblico, ecc.

In questi casi, l'area richiesta si ottiene ricoprendo la zona con una rete ideale di triangoli (Fig. 61), i cui vertici siano punti ben determinati: un albero, una pietra, un cartello o altro. Ci si riduce così a calcolare l'area di tanti triangoli, di cui bisogna misurare lati ed angoli direttamente sul terreno. Queste misure, dette "rilevamenti topografici", sono in genere più precise per gli angoli che non per le lunghezze a causa degli ostacoli e delle irregolarità del terreno (vedi anche l'Appendice "La trigonometria nella tecnica"). Si è perciò condotti ad affrontare il seguente problema: determinare l'area di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi, in genere due angoli e un lato o due lati e l'angolo compreso.

Vediamo come si procede in questi casi.

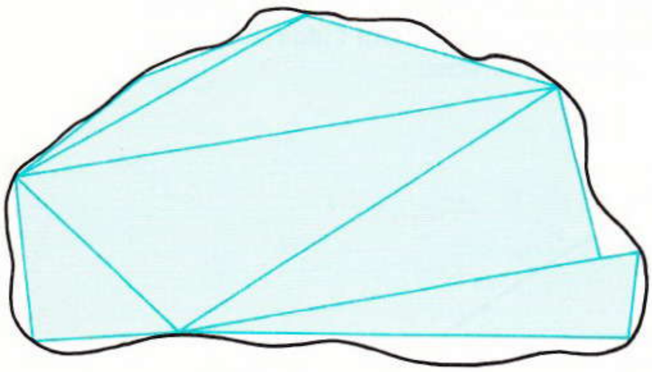


Fig. 61

A) *Area di un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso*

Osservando la Fig. 62, è immediato ricordare che l'area S del triangolo ABC è data da:

$$S=\frac{1}{2}\,ch.$$

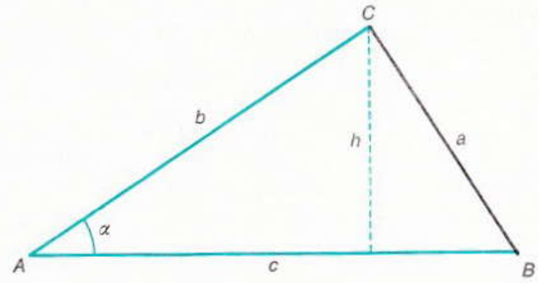


Fig. 62

Se del triangolo conosciamo solo i lati b, c e l'angolo α, possiamo scrivere:

$$h=b\operatorname{sen}\alpha$$

e quindi

$$S=\frac{1}{2}\,bc\operatorname{sen}\alpha.$$

Ecco dunque un primo risultato, valido anche quando l'angolo è ottuso (Fig. 63), dato che risulta:

$$h=b\operatorname{sen}(180°-\alpha)=b\operatorname{sen}\alpha.$$

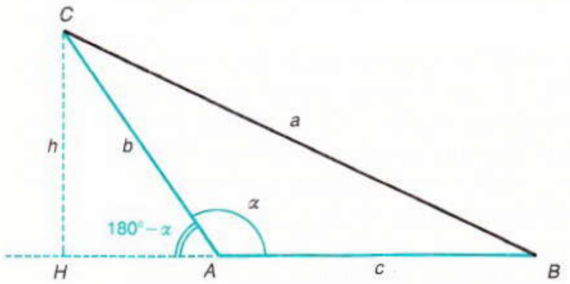


Fig. 63

B) *Area di un triangolo di cui si conoscono due angoli e un lato*

Consideriamo ora il triangolo di Fig. 64, di cui conosciamo il lato c e gli angoli α e β. È chiaro che non possiamo usare la formula appena scoperta, perché non conosciamo che un lato; viene allora l'idea di trovare il valore di b o di a ricorrendo al teorema dei seni.

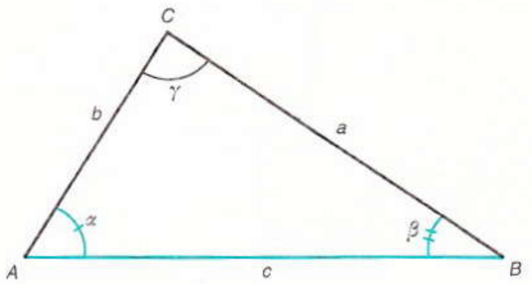


Fig. 64

Si ha:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

da cui

$$b=\frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Sostituendo questa espressione nella formula trovata prima, otteniamo:

$$S=\frac{\frac{1}{2}\,c^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Possiamo ancora eliminare γ, osservando che risulta:

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta) \qquad \text{e dunque} \qquad \operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

Otteniamo così la relazione:

$$S=\frac{\frac{1}{2}\,c^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

che permette di calcolare l'area di un triangolo di cui siano noti il lato c e gli angoli α e β.

Si capisce ora come procede la *triangolazione*, una delle tecniche topografiche più diffuse: nella zona da rilevare si misura con estrema precisione un solo segmento, detto *base della triangolazione*; si procede poi misurando solo angoli.

Se la zona ha la forma di un quadrilatero (Fig. 65), si arriva immediatamente all'area richiesta scegliendo, per esempio, AB come base: si calcola AC con il teorema dei seni e si sommano le aree dei triangoli ABC e ACD.

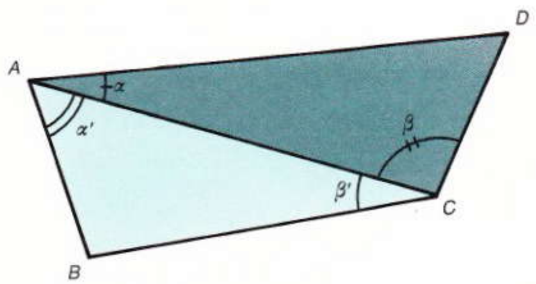


Fig. 65

Se poi la forma è più complessa, come in Fig. 66, dopo aver misurato AB si calcola BD con il teorema dei seni e si continua, prendendo BD come nuova base della triangolazione.

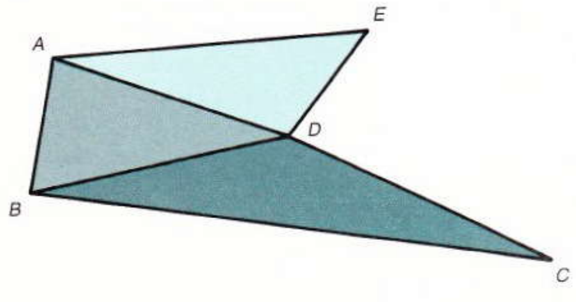


Fig. 66