

Appendice 1

La trigonometria nella tecnica

1. Strumenti di misura per distanze e angoli
2. Equazioni parametriche e curve di Lissajous

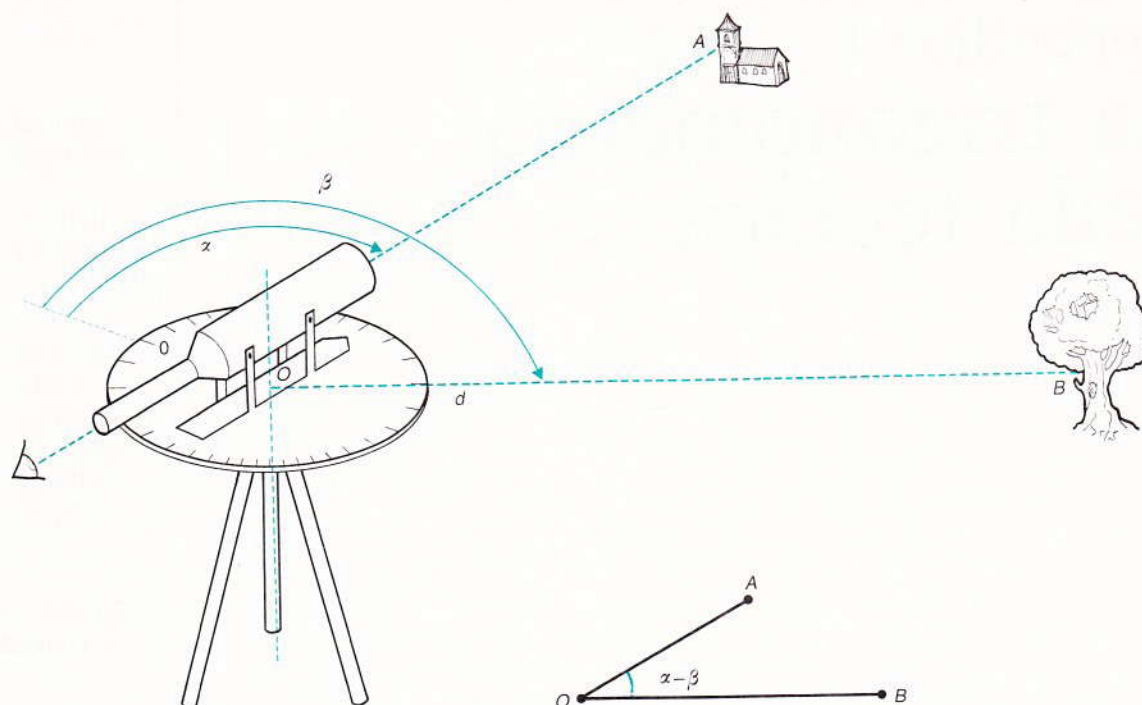


Fig. 1

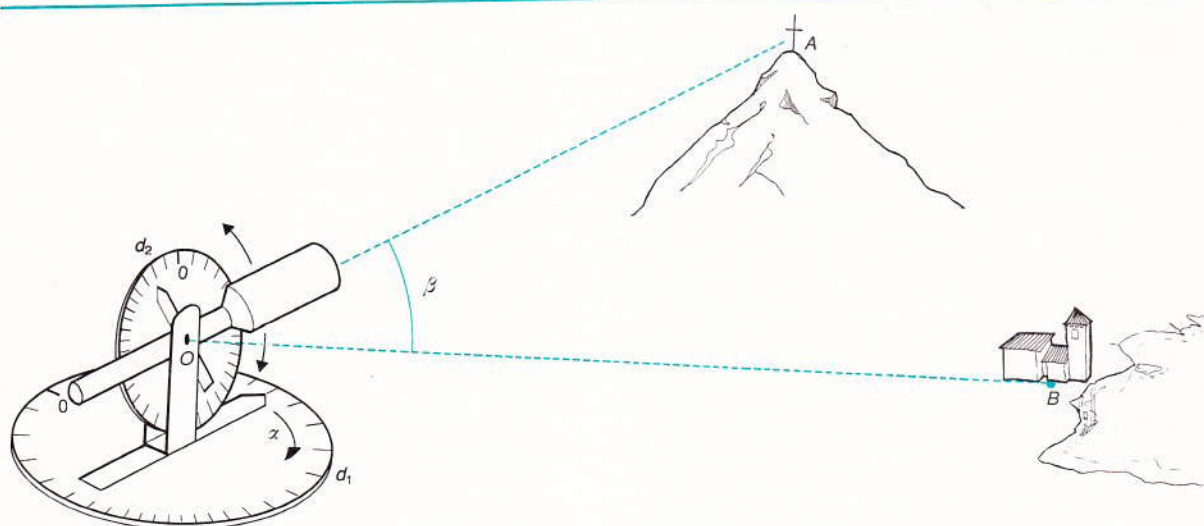


Fig. 2

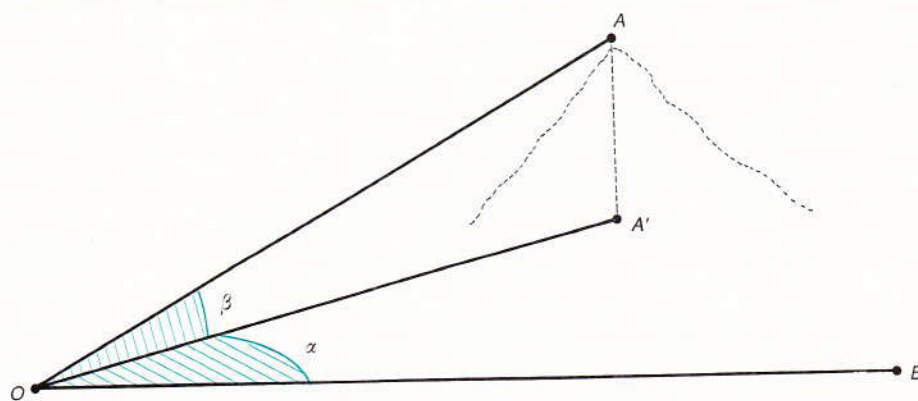


Fig. 3. A' è la proiezione di A alla quota di O e di B . L'angolo AOA' è la differenza fra i due angoli d'elevazione, mentre l'angolo $A'OB$ è la differenza fra i due azimut misurati.

1. Strumenti di misura per distanze e angoli

Per tracciare una strada o una linea ferroviaria, per disegnare una carta geografica, per progettare un ponte o una diga, per recintare un podere, è indispensabile misurare in modo preciso distanze e angoli sul terreno.

Nella Fig. 1 è mostrato un semplice strumento per misurare l'angolo formato dalle visuali di due punti di riferimento, A e B . Si punta il cannocchiale su A e si legge l'angolo α sul disco graduato d ; poi, si punta su B e si legge l'angolo β sul disco graduato: l'angolo $A\hat{O}B$ vale $\alpha - \beta$.

Questo semplice strumento non può essere usato se i punti A , O , B si trovano a quote diverse, perché il cannocchiale non può ruotare verso l'alto o verso il basso. Si usano in tal caso degli strumenti in cui cannocchiale può ruotare attorno a due assi dotati di dischi graduati (Fig. 2).

Lo strumento viene sistemato su un treppiede in modo che il disco d_1 sia perfettamente orizzontale; puntando allora il cannocchiale su A si leggono l'*azimut*, cioè l'angolo α nel disco orizzontale d_1 , e l'*angolo di elevazione* β sul disco verticale d_2 . Si punta poi su B e si ripetono le misure. Infine, si determinano angoli $A\hat{O}A'$ e $A'\hat{O}B$ (Fig. 3).

Lo strumento della Fig. 2 è un *goniometro topografico*. Ne esistono molti tipi, che variano per i particolari costruttivi e per la precisione. Il tipo più preciso, detto **teodolite**, permette di misurare angoli con precisioni del decimo di secondo (Fig. 4).



Fig. 4



Fig. 5

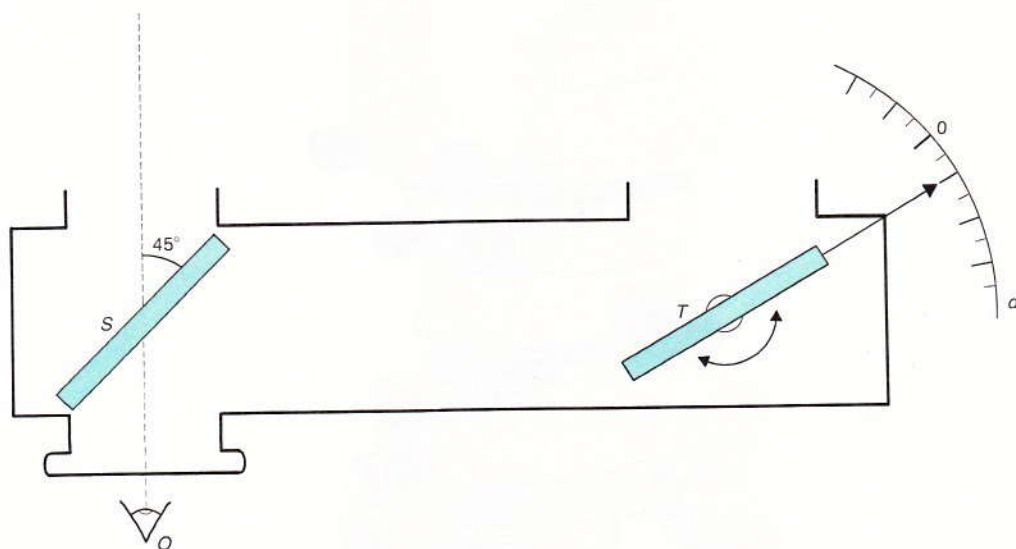


Fig. 6

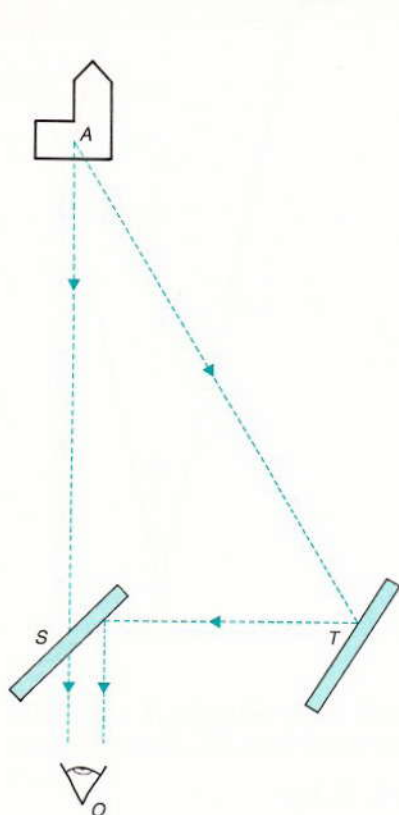


Fig. 7a

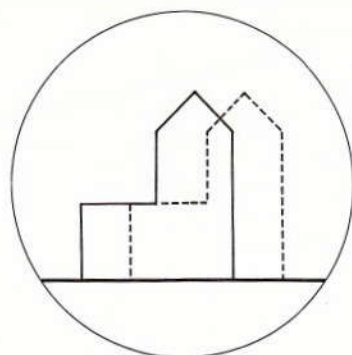


Fig. 7b

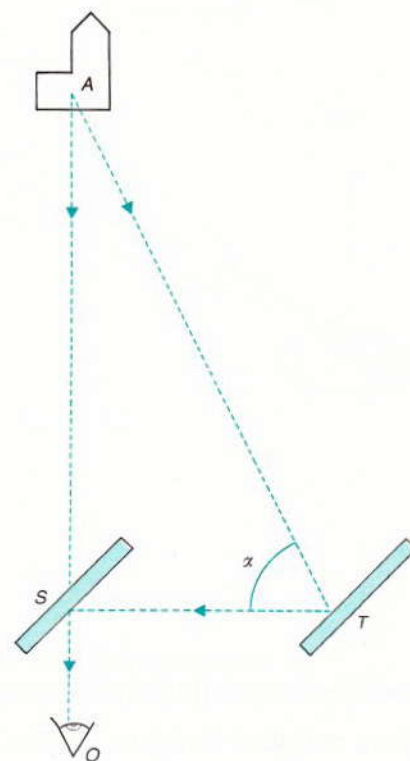


Fig. 7c

Con la sola misura degli angoli non si individua un triangolo; è necessario misurare almeno un lato.

Ora, la misura delle distanze non è semplice come si potrebbe credere. Infatti, il terreno può essere accidentato, il metro a nastro può non essere ben teso, la distanza da misurare può essere troppo grande. Si costruiscono perciò degli strumenti che permettono di misurare le distanze con metodi ottici, sfruttando cioè la luce, che va sicuramente in linea retta. Bisogna distinguere due casi: il punto A di cui si vuole misurare la distanza è inaccessibile (per esempio una nave in mare, un bersaglio in campo nemico) o, invece, è possibile portarsi in A .

Nel primo caso si usano degli strumenti detti **telemetri** (Fig. 5). Un telemetro semplice è mostrato nella Fig. 6: lo specchio S è semitrasparente ed è fissato a 45° rispetto alla visuale, mentre lo specchio T può ruotare su se stesso.

L'osservatore in O vede due immagini dello stesso oggetto (Fig. 7a): una per trasparenza, attraverso lo specchio S , l'altra, riflessa dallo specchio T e poi dallo specchio S .

Se le due immagini sono spostate una rispetto all'altra (Fig. 7b), come avviene generalmente, si ruota lo specchio T fino a che le immagini coincidono. In tale condizione, i raggi di luce che giungono in O formano un triangolo AST rettangolo in S (Fig. 7c). Di questo triangolo si conosce l'angolo $\alpha = \widehat{ATS}$, misurato sul disco graduato d di Fig. 6, e il lato ST ; perciò risulta:

$$\overline{AS} = \overline{ST} \operatorname{tg} \alpha.$$

In genere, il disco d è graduato in metri e permette di leggere subito la distanza AS .

Questo tipo di telemetro è usato nelle macchine fotografiche non reflex e, a volte, per scopi militari.

Se il punto A , di cui si vuole misurare la distanza, è accessibile, si procede in modo diverso. Si pone in A un'asta di lunghezza nota — detta **stadia orizzontale** —, sistemata in modo che sia perpendicolare alla congiungente OA (Fig. 8).

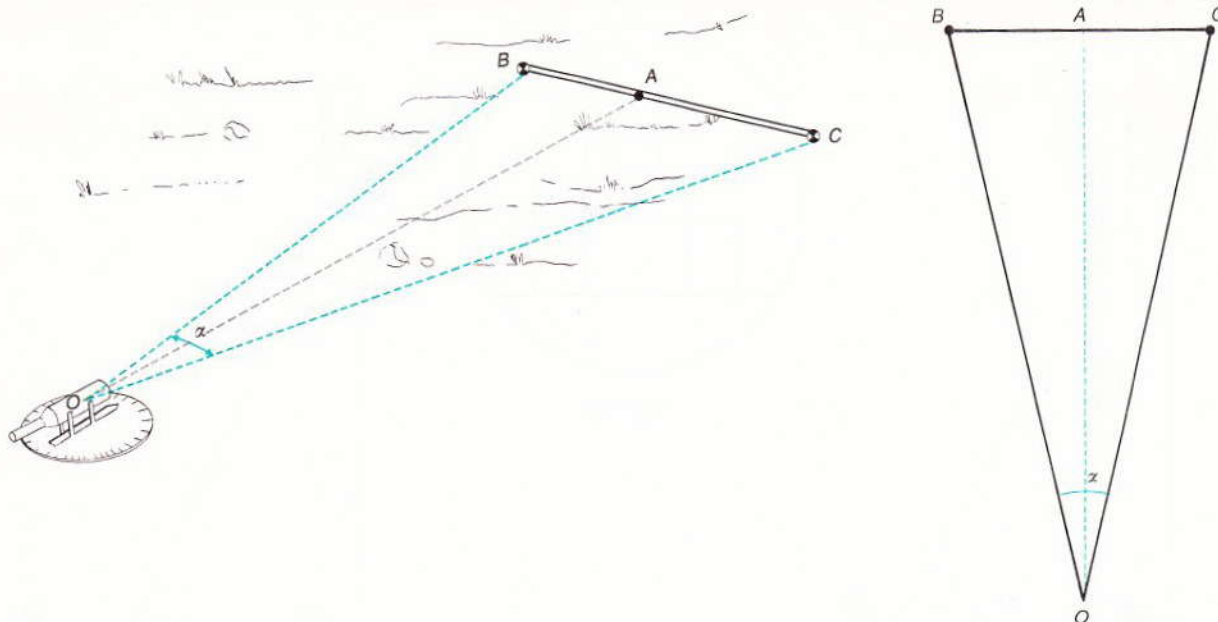


Fig. 8

Si misura quindi, con il teodolite, l'angolo α fra le visuali degli estremi B e C della stadia; si ha così il triangolo isoscele OBC di cui si conosce l'angolo α e il lato BC . È immediato allora calcolare l'angolo $A\hat{O}C = \frac{\alpha}{2} = \beta$ e la lunghezza $\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{2} = l$. Si ha:

$$\overline{OA} = \frac{l}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Con lo sviluppo dell'elettronica sono stati creati nuovi strumenti per la misura delle distanze. Questi strumenti sfruttano la propagazione della luce: si sa che un raggio di luce viaggia a circa 300.000 km/sec. Si procede così: per misurare una distanza OA (Fig. 9), si dispone in O una sorgente di raggi laser e in A un apparecchio che, appena riceve i raggi, li invia di nuovo in A . Misurando allora con grande precisione il tempo impiegato dai raggi per il doppio tragitto, si risale alla distanza OA .

Questo metodo funziona bene per grandi distanze, quando invece l'uso dei goniometri topografici porta a forti imprecisioni. Ad esempio, facendo riflettere un raggio laser sulla superficie della Luna si è potuto misurare la distanza Terra-Luna con un errore di pochi centimetri!

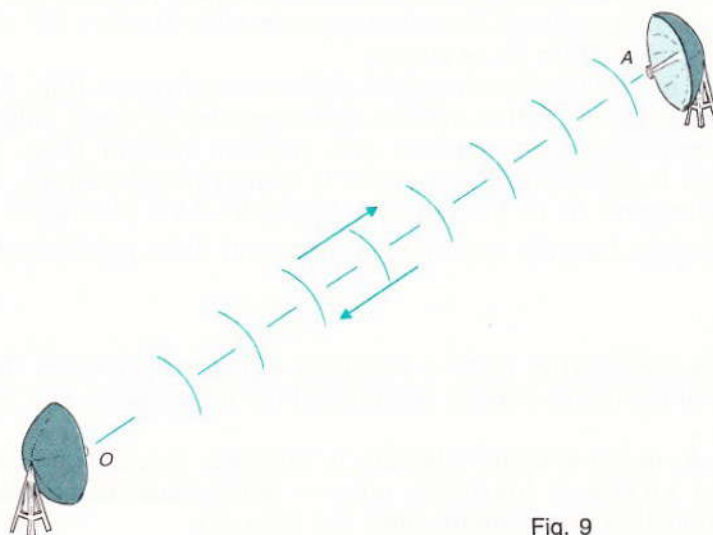


Fig. 9

2. Equazioni parametriche e curve di Lissajous

A) Equazioni parametriche del cerchio

Sappiamo che l'equazione del cerchio di centro O e raggio r (Fig. 10) è:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad (1)$$

questa equazione traduce il fatto che se un punto P "percorre" la circonferenza, risulta $\overline{OP} = r$, e quindi, per il Teorema di Pitagora, si ha la (1).

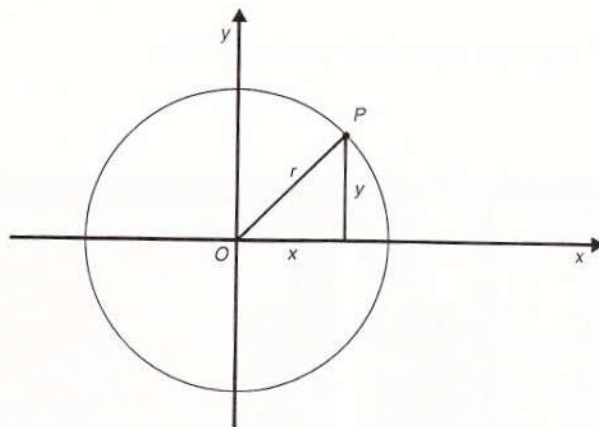


Fig. 10

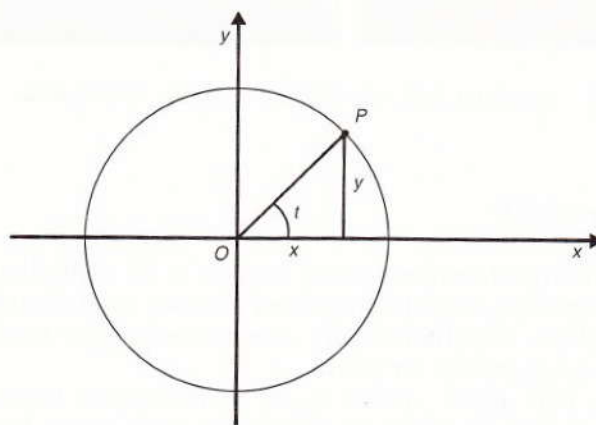


Fig. 11

La stessa condizione, $\overline{OP} = r$, può essere espressa (Fig. 11) sotto la forma:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t. \end{cases} \quad (2)$$

Le coordinate x, y del punto variabile sulla circonferenza sono date, ora, in funzione di *un parametro*, l'angolo t che OP forma con l'asse delle x ; le (2) sono dette **equazioni parametriche del cerchio**.

È chiaro che le (2) sono equivalenti alla (1): si passa dalle (2) alla (1) *eliminando* il parametro t : a questo scopo, basta addizionare le (2) dopo averle elevate al quadrato; si ha:

$$x^2 + y^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

cioè:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

B) Equazioni parametriche dell'ellisse

Vogliamo ora scrivere le equazioni parametriche dell'ellisse. Ricordiamo che si passa dal cerchio all'ellisse (fig. 12) con *trasformazioni affini* (cap. 4, n. 1 e 2). Se le equazioni dell'affinità sono

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by, \end{cases}$$

dal cerchio d'equazione

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

si passa all'ellisse che ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad (3)$$

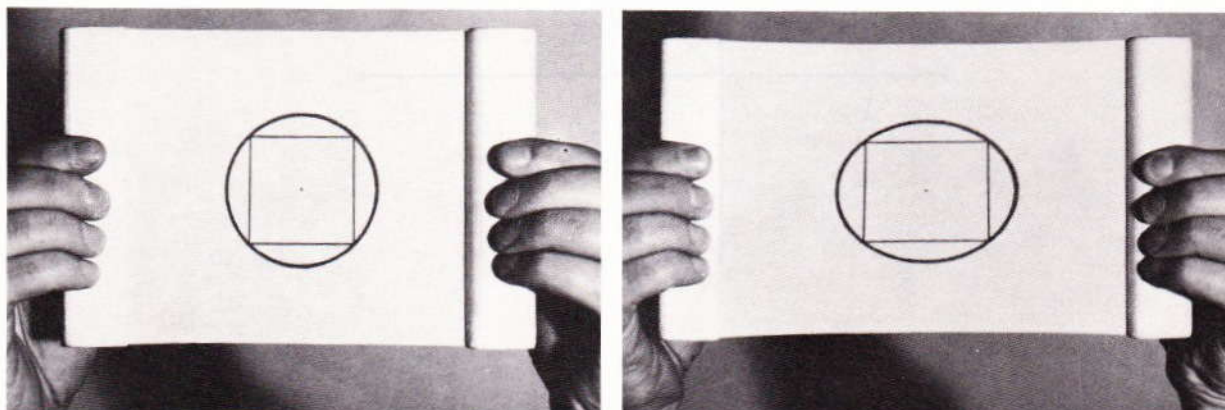


Fig. 12. A sinistra, tela non dilatata; a destra, tela dilatata.

C) Composizione di moti armonici

Le (3) si possono interpretare (vedi testo, cap. 3, n. 3) come le equazioni di due moti armonici aventi la stessa pulsazione ($\omega=1$) e ampiezze diverse, moti che si svolgono lungo i due assi cartesiani. Possiamo allora concludere che *componendo due moti armonici di uguale pulsazione e ampiezze diverse si ottiene un'ellisse*.

Questo risultato si può anche *vedere* su un oscilloscopio: basta inviare due correnti sinusoidali con la stessa frequenza in modo da imprimere a un punto luminoso dello schermo un movimento orizzontale e un movimento verticale; si vede allora comparire sullo schermo un'ellisse, e, come caso particolare, quando anche le ampiezze sono uguali, un cerchio.

Viene allora la curiosità di vedere che cosa accade se si inviano correnti con frequenze diverse: si vedono sullo schermo dell'oscilloscopio delle curve di forme diverse (Fig. 13). Per scoprire la natura di queste curve siamo obbligati a tornare a considerazioni matematiche.

Cominciamo da qualche esempio numerico: consideriamo le equazioni:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin 2t. \end{cases} \quad (4)$$

Queste equazioni esprimono due moti armonici, uno di pulsazione 1 lungo l'asse delle x e uno di pulsazione doppia lungo l'asse delle y .

Ma le (4) esprimono anche le equazioni parametriche di una curva; si tratta di una curva compresa entro il rettangolo di dimensioni $2a$ e $2b$ (Fig. 14), dato che il seno e il coseno sono compresi fra -1 e $+1$. Non si ha, però, un'ellisse perché, mentre la x compie un'oscillazione fra $+a$ e $-a$, la y si muove con frequenza doppia e compie quindi due oscillazioni fra $+b$ e $-b$. Accade quanto è illustrato nella Fig. 15: via via che P si muove sulla curva, le sue

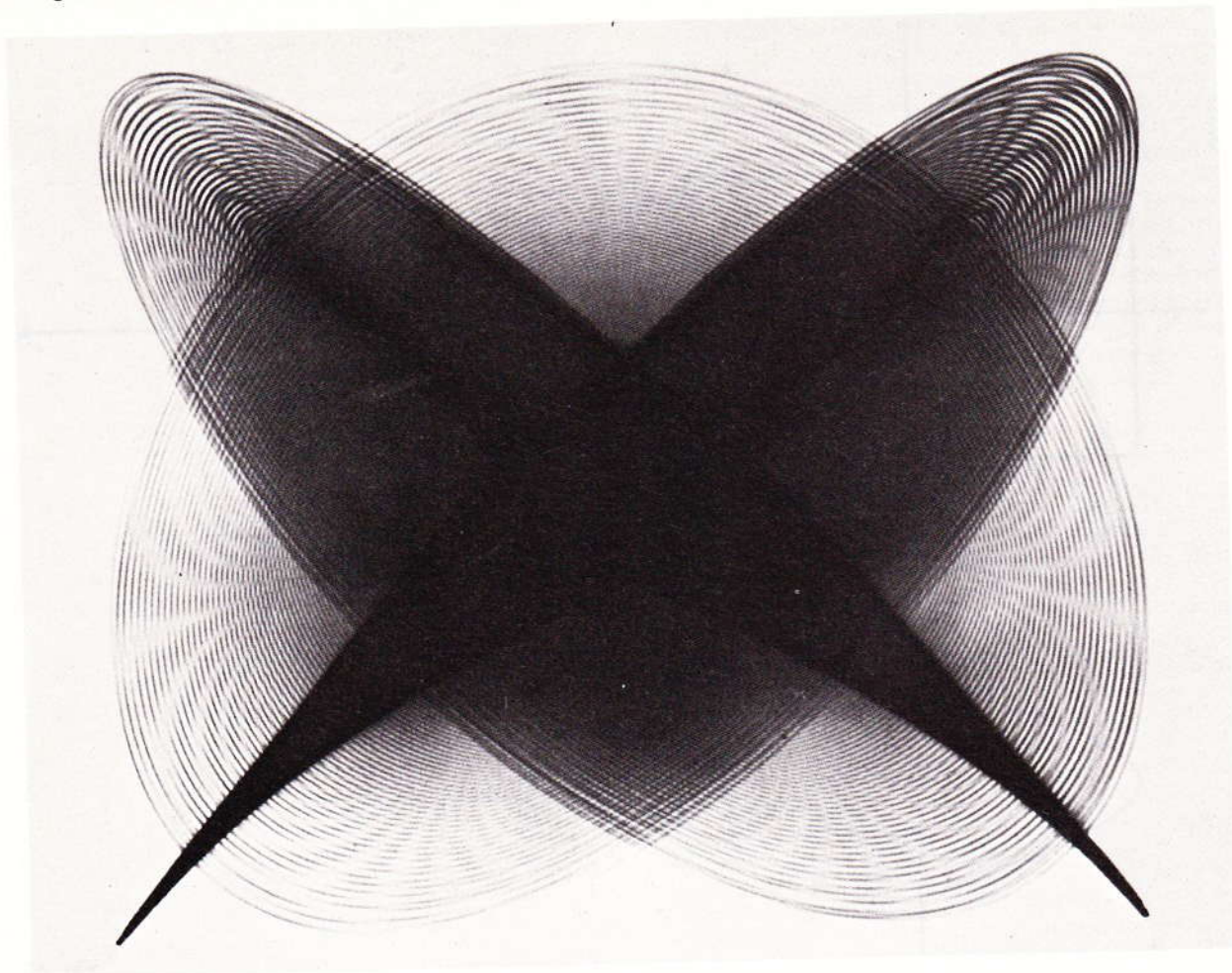


Fig. 13

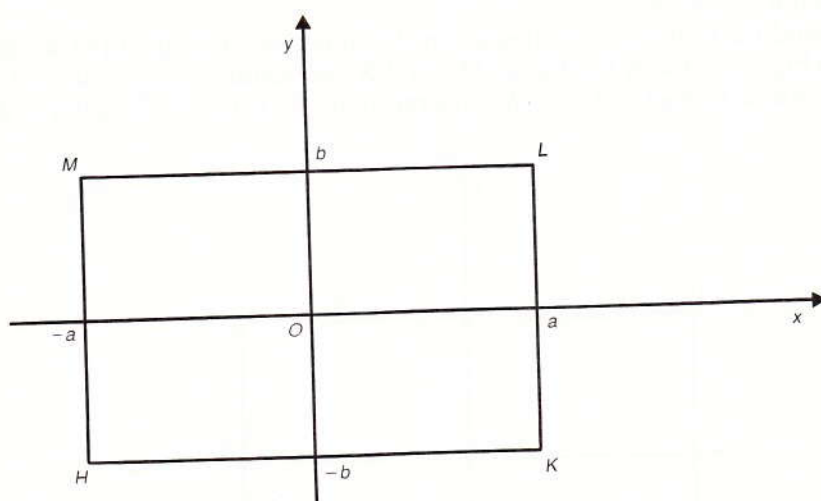


Fig. 14

Ecco un altro esempio: le equazioni

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin 3t \end{cases}$$

rappresentano una curva (Fig. 17), sempre compresa nel rettangolo di dimensioni $2a$ e $2b$, tale che tocca le due altezze del rettangolo in un punto, mentre tocca le due basi in tre punti. Così, le equazioni

$$\begin{cases} x = a \cos 2t \\ y = b \sin 3t \end{cases}$$

rappresentano la curva di Fig. 18, che tocca in 2 punti e in 3 punti i lati del rettangolo di dimensioni $2a$ e $2b$; la forma cambia dunque un'altra volta.

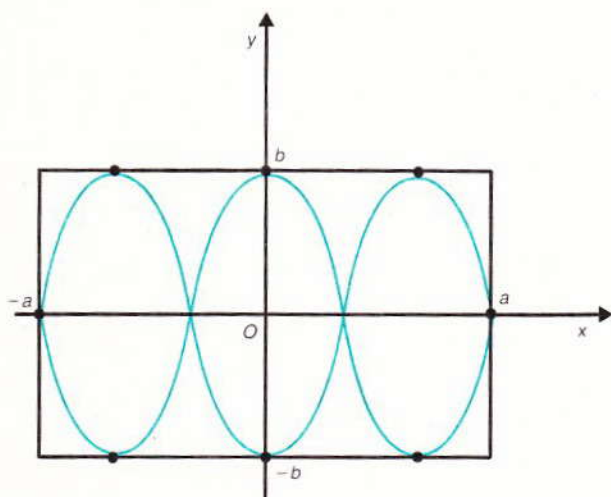


Fig. 17

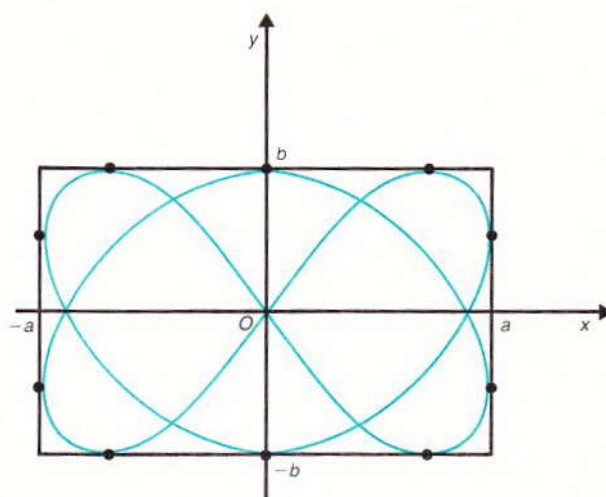


Fig. 18

In generale, curve che hanno le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cos mt \\ y = b \sin nt \end{cases}$$

sono dette curve (o figure) di Lissajous, dal nome del fisico francese che le studiò nel secolo scorso.

Il fatto che un fisico, piuttosto che un matematico, fosse interessato a tale argomento si spiega facilmente: queste curve trovano importanti applicazioni nello studio dei fenomeni periodici.

Il caso che più spesso si presenta nelle applicazioni è quello in cui si hanno due correnti sinusoidali con frequenze diverse. Si inviano queste correnti in un oscilloscopio, in modo che una corrente controlli il movimento orizzontale e l'altra quello verticale di un punto luminoso sullo schermo. Allora, se sullo schermo si vede comparire un'ellisse, si può essere certi che le due correnti hanno la stessa frequenza, e quindi, se una delle due correnti aveva frequenza nota, viene automaticamente ad essere nota anche la frequenza dell'altra.

Se invece compare sullo schermo una curva "ad otto", come quella di Fig. 16, la frequenza della corrente applicata lungo l'asse delle y sarà doppia dell'altra.

Bastano questi esempi per capire quale importanza abbia in elettronica lo studio di questo argomento geometrico.