3. Complementi

Ipocicloidi ed epicicloidi. L'asteroide e la cardioide

Nella "nota storica" di p. 161 e nelle pagine precedenti si è parlato della cicloide: è la curva generata da un cerchio che rotola, senza strisciare, lungo una retta. Ci occuperemo ora di curve generate da un cerchio che rotola, senza strisciare, non lungo una retta ma lungo la circonferenza di un cerchio fisso (Fig. 12). Si hanno cue casi a seconda che il cerchio mobile si trovi all'interno o all'esterno del cerchio fisso: nel primo caso la curva descritta si chiama **ipocicloide** (dal greco *ipo*, che significa *sotto*), nel secondo caso la curva si chiama **epicicloide** (dal greco *epi*, che significa *sopra*). Il cerchio mobile può avere un raggio di lunghezza qualunque, e, a seconda del raggio, le curve generate assumono forme diverse; noi considereremo due curve particolarmente interessanti:

A) *l'asteroide*, e cioè l'ipocicloide che si ottiene quando il raggio del cerchio mobile è $\frac{1}{4}$ del raggio del cerchio fisso;
B) *la cardioide*, e cioè l'epicicloide che si ottiene quando il raggio del cerchio mobile è uguale al raggio del cerchio fisso.

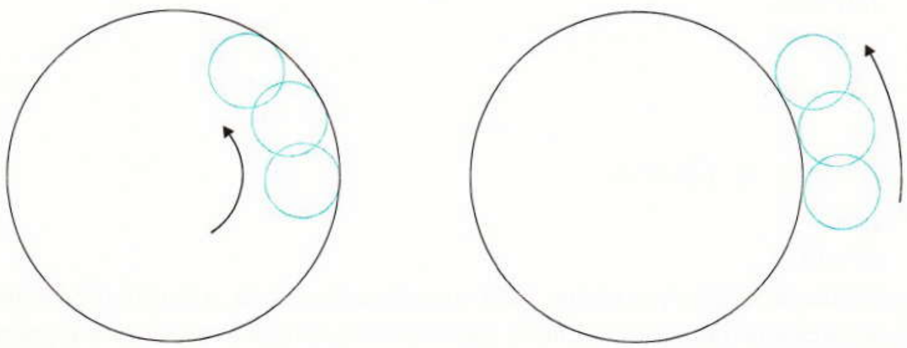

Fig. 12

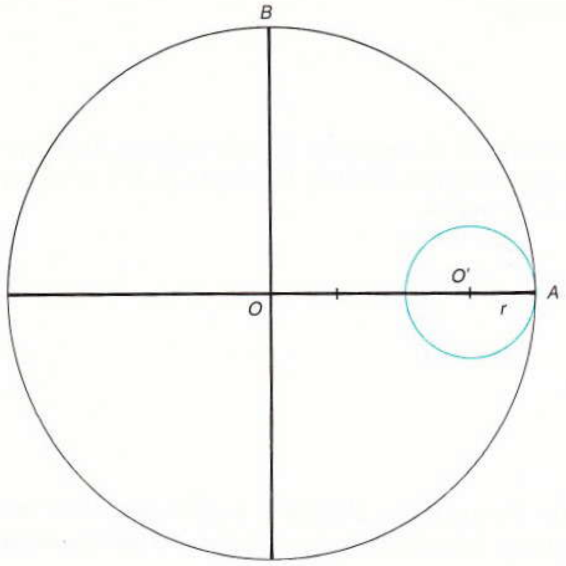

Fig. 13

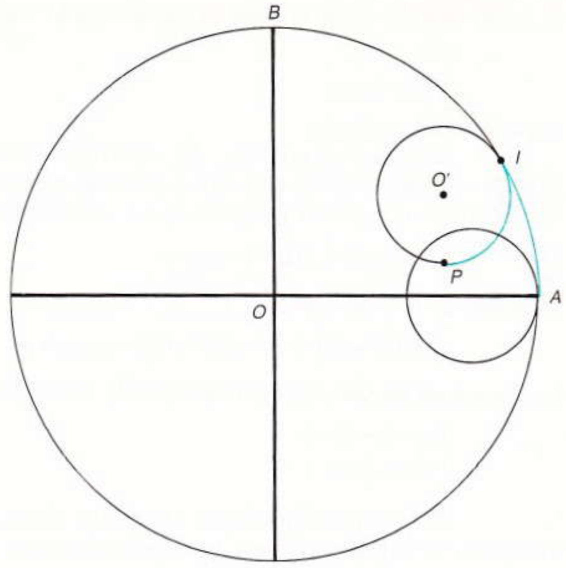

Fig. 14

A) L'asteroide

Riferiamoci alla Fig. 13: il cerchio mobile ha il raggio $O'A$ uguale a $\frac{1}{4}$ del raggio OA del cerchio fisso; poniamo:

$$O'A = r$$

e quindi:

$$OA = 4r.$$

Notiamo subito che la circonferenza piccola sarà lunga $\frac{1}{4}$ della circonferenza grande, e quindi la lunghezza della circonferenza piccola risulta uguale all'arco $\overset{\frown}{AB}$, quarta parte della grande.

Facciamo ora rotolare il cerchio piccolo lungo il grande (Fig. 14), e fissiamo l'attenzione su un punto qualunque P della circonferenza mobile; seguiamone il movimento per scoprire quale curva descrive. Se il punto, all'istante zero, si trovava in A, dopo qualche istante si troverà in una posizione P, e si dimostra che

$$\overset{\frown}{PI} = \overset{\frown}{AI}.$$

Riferiamoci alla Fig. 15 per far vedere che questi due archi, che appartengono a cerchi diversi, sono uguali: l'arco $\overset{\frown}{AI}$ corrisponde all'angolo al centro $I\hat{O}A = \alpha$, mentre l'arco $\overset{\frown}{PI}$ corrisponde all'angolo $I\hat{O}'P$, che è doppio dell'angolo alla circonferenza $I\hat{M}P$; ora siccome risulta

$$I\hat{M}P = 2\alpha,$$

sarà:

$$I\hat{O}'P = 4\alpha.$$

Risulta così:

$$\overset{\frown}{IP} = r \cdot 4\alpha \quad \text{e} \quad \overset{\frown}{IA} = 4r \cdot \alpha,$$

e quindi:

$$\overset{\frown}{IP} = \overset{\frown}{IA}.$$

Riportando dunque, istante per istante, sulla circonferenza piccola, a partire dal suo punto di contatto I, l'arco $\overset{\frown}{IA}$, si ottengono punti P della curva: questa curva si chiama **asteroide** ed è rappresentata in Fig. 16.

Si scopre — e riferiamoci ora alla Fig. 17 — che un punto qualunque P dell'asteroide è vertice di un angolo retto: l'angolo $I\hat{P}M$ è infatti retto perché è inscritto nella semicirconferenza di diametro IM.

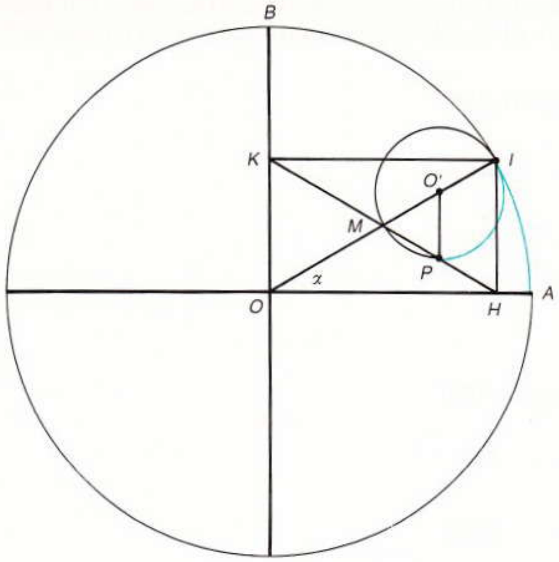

Fig. 15

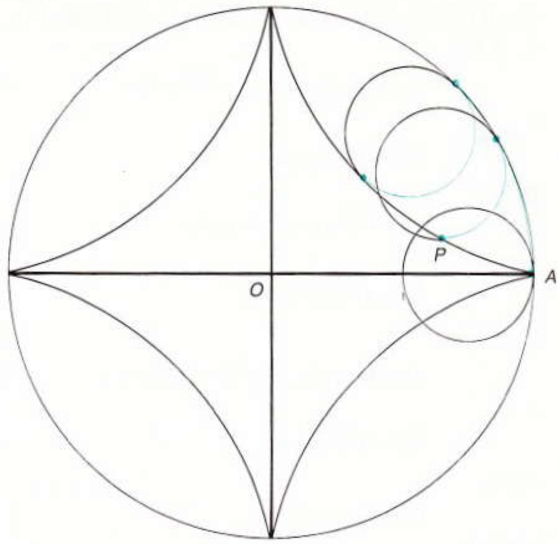

Fig. 16

Si ha così un altro modo per *costruire l'asteroide per punti*: basta condurre per il punto di contatto I la perpendicolare alla diagonale KH del rettangolo $IKOH$; il piede P di questa perpendicolare è un punto dell'asteroide.

L'ultima osservazione conduce ad una nuova scoperta e alla costruzione dell'asteroide come *inviluppo delle sue tangenti*. Ci si basa su considerazioni cinematiche immaginando di fotografare il cerchio durante il suo movimento: nell'istante in cui la macchina fotografica scatta, il punto P sta ruotando attorno ad I, e quindi la sua velocità ha la direzione HK, perpendicolare al raggio IP in P. Ora, dato che la direzione della velocità è, istante per istante, tangente alla traiettoria, la retta HK sarà tangente all'asteroide nel punto P. Si osserva poi che il segmento HK è sempre uguale al raggio $4r$ del cerchio grande; si arriva così alla seguente conclusione: *l'asteroide risulta, in ogni suo punto, tangente a un segmento di lunghezza costante i cui estremi scorrono lungo due rette perpendicolari*; si ha così la costruzione dell'asteroide come *inviluppo* (Fig. 18).

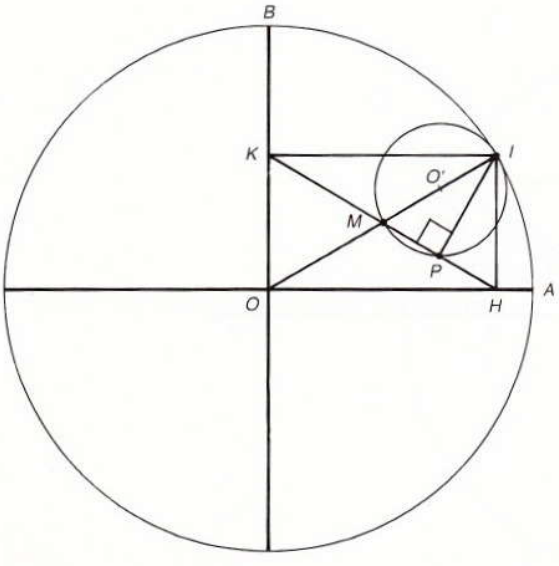

Fig. 17

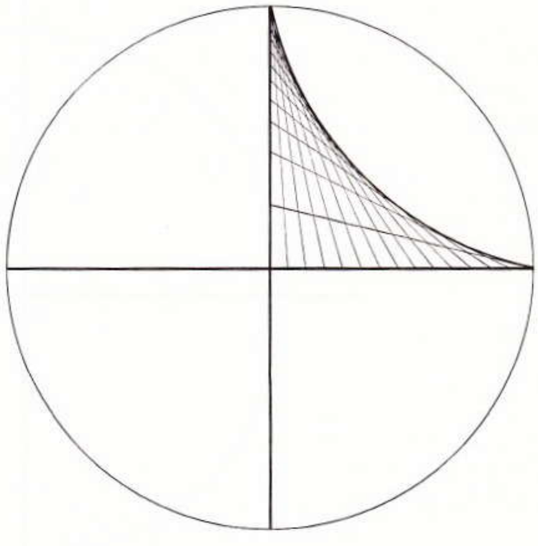

Fig. 18

È facile determinare **le equazioni parametriche** dell'asteroide, esaminando l'ascissa e l'ordinata di un punto P della curva. Riferiamoci alla Fig. 19: detto α l'angolo compreso fra la retta OI e l'asse delle x, si ha:

ascissa di $P=\overline{PS}=\overline{KP}\cos\alpha$ dal triangolo PSK

e

$\overline{KP}=\overline{IK}\cos\alpha$ » » PKI

dove

$\overline{IK}=\overline{OI}\cos\alpha=4r\cos\alpha$ » » KIO.

Quindi

$$\overline{PS}=4r\cos^3\alpha.$$

Si ha poi:

ordinata di $P=\overline{PR}=\overline{PH}\,\text{sen}\,\alpha$ dal triangolo PRH

e

$\overline{PH}=\overline{IH}\,\text{sen}\,\alpha$ » » PHI

dove

$\overline{IH}=4r\,\text{sen}\,\alpha$ » » KIH.

Quindi:

$$\overline{PR}=4r\,\text{sen}^3\alpha.$$

Le equazioni parametriche dell'asteroide sono dunque:

$$\begin{cases} x=4r\cos^3\alpha \\ y=4r\,\text{sen}^3\alpha. \end{cases}$$

Si può ottenere **l'equazione cartesiana della curva** eliminando α; si ha:

$$\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{4r}},\quad \text{sen}\,\alpha=\sqrt[3]{\frac{y}{4r}}$$

e tenendo presente che risulta

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

si ottiene

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(4r)^{\frac{2}{3}}.$$

Questa equazione, contenendo x e y al quadrato, mette bene in evidenza che la curva è simmetrica rispetto agli assi.

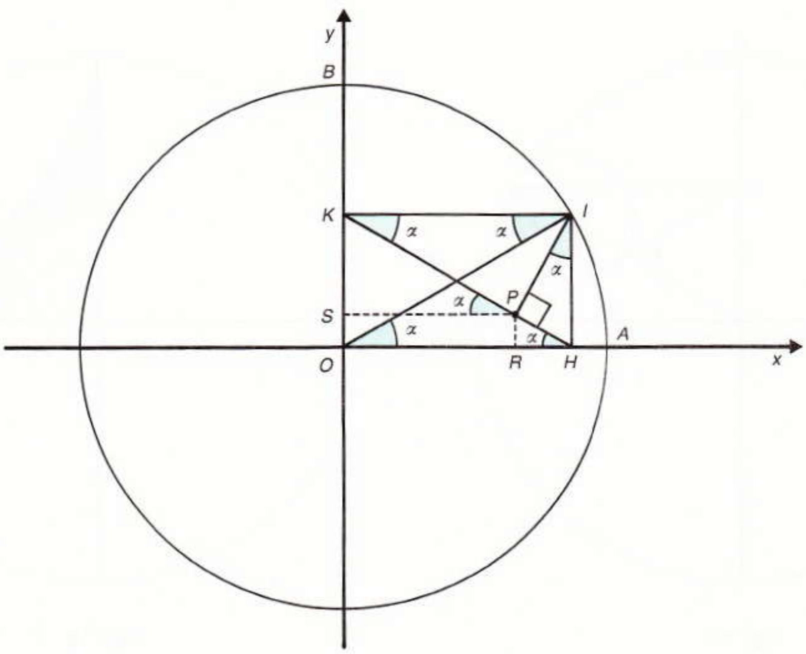

Fig. 19

B) La cardioide

Riferiamoci alla Fig. 20: il cerchio di centro C è fisso, e il cerchio, uguale, di centro C' rotola senza strisciare attorno al cerchio fisso. Ogni punto del cerchio mobile descrive una curva; ci renderemo conto della forma di questa curva attraverso la sua *equazione polare*.

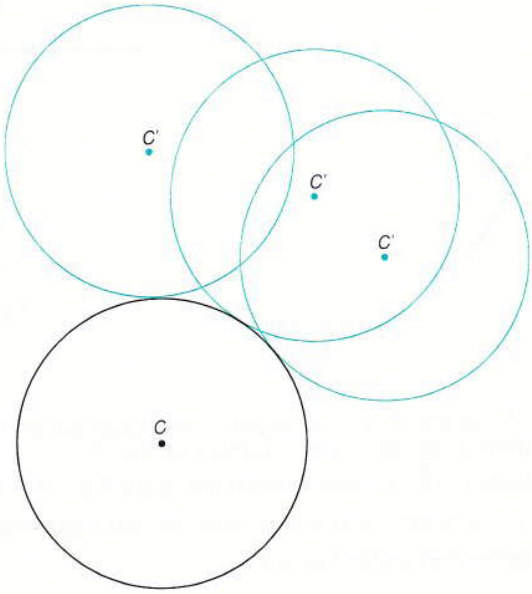

Fig. 20

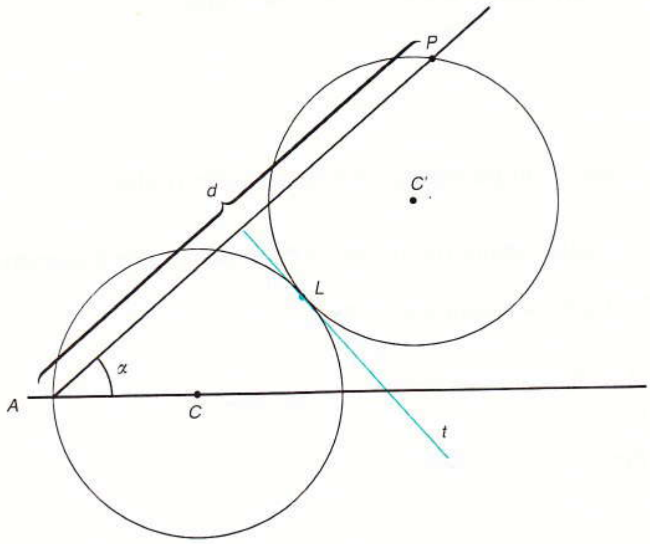

Fig. 21

Consideriamo come *polo* un punto A del cerchio fisso (Fig. 21), e come *asse polare* la semiretta AC. La posizione di un punto P del cerchio mobile è determinata quando si conoscono la lunghezza $\overline{PA}=d$ e l'angolo α formato da PA e dall'asse polare.

Se L è il punto di contatto dei due cerchi in un certo istante e sia t la tangente comune in L; *i due cerchi risultano simmetrici rispetto a t.* Da questa osservazione discende che esiste sempre, sulla

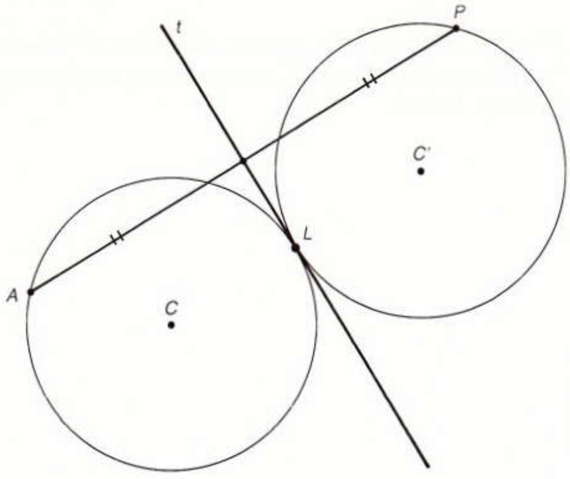

Fig. 22

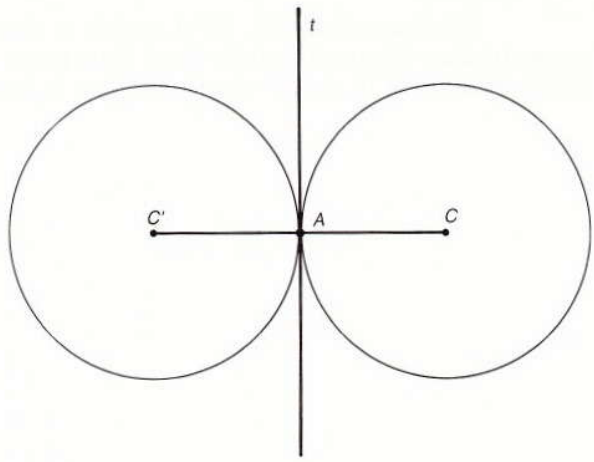

Fig. 23

circonferenza mobile, un punto P simmetrico di A rispetto alla tangente comune (Fig. 22); tale punto coincide con A se il cerchio si trova nella posizione indicata in Fig. 23.

Per determinare la distanza $\overline{AP}=d$, basta osservare nella Fig. 24 i seguenti poligoni:

1) il quadrilatero $ACC'P$ che è certamente un trapezio isoscele, dato che risulta

$AP//CC'$, perché entrambe perpendicolari a t,

$\overline{CA}=\overline{C'P}=r.$

Si ottiene così:

$$M\hat{A}C=M\hat{P}C'=\alpha;$$

2) il triangolo ACM, che è certamente isoscele, dato che risulta

$\overline{CA}=\overline{CM}=r;$

si ha così:

$$M\hat{A}C=C\hat{M}A=\alpha;$$

3) il quadrilatero $MCC'P$, che è un parallelogramma, dato che risulta

$\overline{CM}=\overline{C'P}=r,$

$CM//C'P$, perché tagliate dalla trasversale AP, formano angoli corrispondenti uguali.

Essendo dunque $MCC'P$ un parallelogramma, si avrà:

$$\overline{MP}=\overline{CC'}=2r.$$

Così si può esprimere AP nella forma seguente:

$$\overline{AP}=\overline{AM}+\overline{MP};$$

infine, dato che risulta (Fig. 25),

$$\overline{AM}=2r\cos\alpha,$$

si ottiene:

$$\overline{AP}=2r+2r\cos\alpha.$$

L'equazione polare della curva è dunque

$$d=2r+2r\cos\alpha.$$

Questa equazione indica un modo molto semplice per costruire la cardioide: i punti della curva (Fig. 26) si ottengono prolungando il segmento AM (che è uguale a $2r\cos\alpha$) di un tratto costante uguale a $2r$. Da questa semplice costruzione appare la forma della cardioide: è una curva *a forma di cuore*.

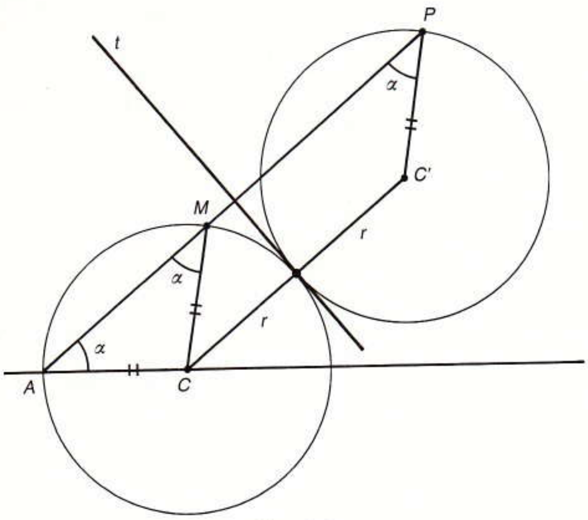

Fig. 24

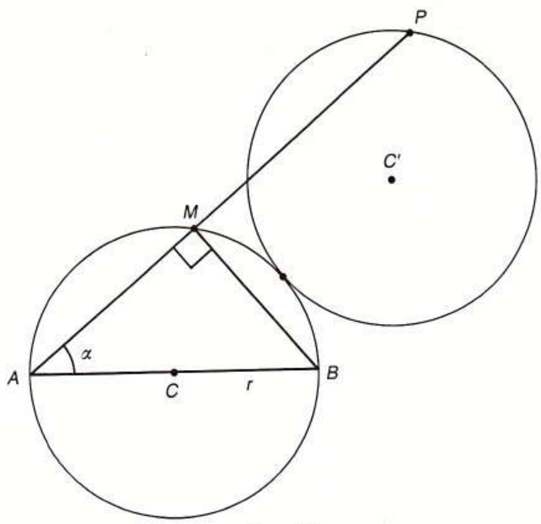

Fig. 25

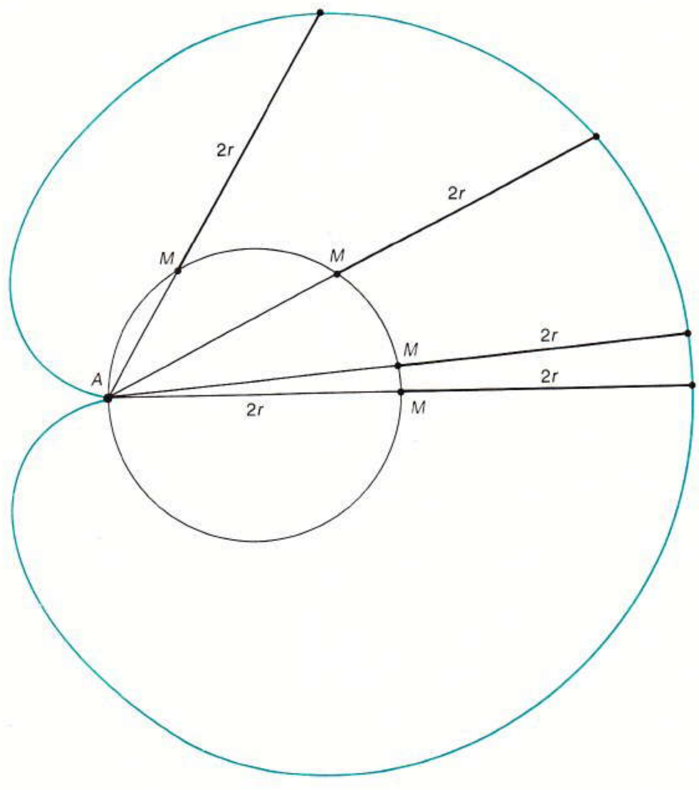

Fig. 26