4
Acustica, funzioni circolari, trasformazioni, formule

1. Vedere i suoni sull'oscilloscopio. Intensità, altezza, timbro
2. Suoni, sinusoidi, trasformazioni affini
3. Comporre suoni e comporre sinusoidi. Somma grafica. Serie di Fourier
4. Suoni sfasati e sinusoidi traslate
5. La formula di sottrazione del coseno
6. Formule di addizione e sottrazione
7. Formule di addizione e sottrazione in problemi reali
8. Le formule di duplicazione e bisezione
9. Le formule di Werner e le formule di prostaferesi
10. Disegnare in modo semplice funzioni complicate, valendosi delle formule

Fig. 1

Fig. 2

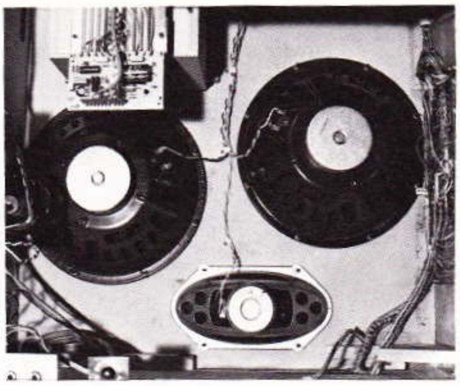


Fig. 3

1. Vedere i suoni sull'oscilloscopio. Intensità, altezza, timbro

Tastiere, organi elettronici, sintetizzatori sono gli strumenti musicali di oggi: sempre più spesso ascoltiamo suoni generati elettronicamente. Ma come funziona un organo elettronico? (Fig. 1).

Senza entrare nei dettagli tecnici, possiamo dire che fra i componenti fondamentali di uno strumento elettronico ci sono dei particolari circuiti elettrici che generano segnali sinusoidali (Fig. 2) e gli altoparlanti (Fig. 3).

Per capire meglio di che cosa si tratta, possiamo collegare un oscilloscopio all'uscita di un organo elettronico.

Predisponiamo l'organo su un registro "flauto" e suoniamo un *la*: percepiremo un suono che somiglia molto a quello di un flauto e, contemporaneamente, vedremo una sinusoide sullo schermo dell'oscilloscopio (Fig. 4).

Dunque, l'organo elettronico permette di "ascoltare sinusoidi"! Cerchiamo d'interpretare meglio questa esperienza.

Quando si predispone l'organo a suonare su un registro flauto, in realtà si attiva un dispositivo elettronico che emette un segnale elettrico variabile con legge sinusoidale. L'oscilloscopio visualizza questo segnale, ed è per questo motivo che vediamo sullo schermo proprio una sinusoide.

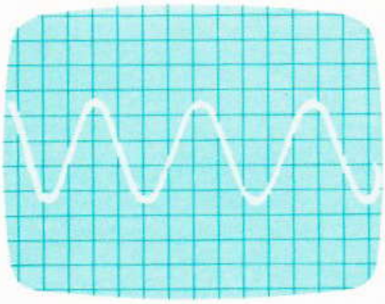


Fig. 4

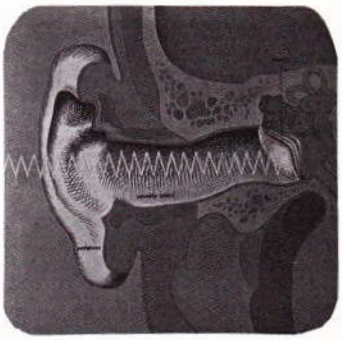


Fig. 5

D'altra parte, lo stesso segnale elettrico sinusoidale fa vibrare la membrana dell'altoparlante di moto armonico; in conseguenza, l'aria circostante viene periodicamente compressa e rarefatta e trasmette così il moto oscillatorio al timpano del nostro orecchio, permettendoci di udire il suono (Fig. 5).

Dunque la curva sinusoidale che compare sullo schermo dell'oscilloscopio, visualizza anche il movimento della membrana dell'altoparlante. Del resto è facile descrivere questo movimento, se fissiamo l'attenzione, per esempio, sul punto Q al centro della membrana (Fig. 6): Q si muove di moto armonico, che, come abbiamo visto a p. 67 e p. 72, è regolato da una legge del tipo

$$d = r \operatorname{sen} \alpha. \qquad (1)$$

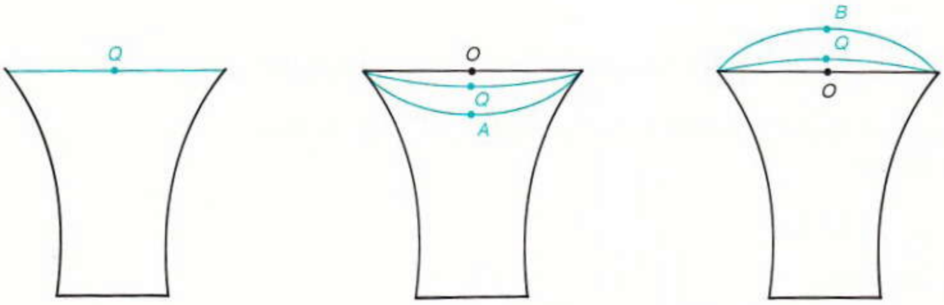


Fig. 6

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato solo un caso semplice di moto armonico: si proiettava su una retta un particolare moto circolare uniforme, che avveniva lungo una circonferenza di raggio $r=1$ e con una velocità di 1 radiante al secondo. Così si aveva nella (1):

$$r=1, \qquad \alpha=t,$$

e si otteneva la legge:

$$d=\operatorname{sen} t.$$

Ma, più in generale, si ottiene un moto armonico proiettando un moto circolare che avviene su una circonferenza di raggio r e con una velocità di ω radianti al secondo; in tal caso si ha nella (1):

$$\alpha=\omega t.$$

Così la legge del moto armonico assume la forma:

$$d=r \operatorname{sen} \omega t. \qquad (2)$$

Per valersi facilmente della legge (2), è opportuno tenere presente due nozioni:

I) la costante ω è legata al periodo T del moto circolare (e quindi del moto armonico) dalla relazione

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

dato che T indica il tempo necessario a percorrere un'intera circonferenza;

II) in acustica spesso si caratterizza un moto armonico con la frequenza f, che indica il numero di oscillazioni al secondo ed è legata al periodo T dalla relazione

$$f=\frac{1}{T}.$$

Ecco un esempio: se un moto armonico ha periodo $T=\frac{1}{10}$ di secondo (cioè occorre $\frac{1}{10}$ di secondo per effettuare un'oscillazione completa), è chiaro che in 1 secondo avverranno 10 oscillazioni complete. Dunque, se si conosce

$$T=\frac{1}{10} \text{ di secondo}=0{,}1 \text{ sec},$$

risulta

$$f=10 \text{ cicli al secondo}=10 \text{ Hz.}$$ [1]

Così, invece della relazione

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{1}{T},$$

possiamo scrivere

$$\omega=2\pi f.$$

Proprio perché è così strettamente legato alla frequenza, ad ω si dà anche il nome di *pulsazione*.

In conclusione, il moto armonico del punto Q di Fig. 6 può essere descritto dalla legge:

$$d=r \operatorname{sen} \omega t$$

dove

t è il tempo variabile,
$\omega=2\pi f$ è la pulsazione, proporzionale alla frequenza,
r è l'ampiezza massima dell'oscillazione ($OA=OB$),
d è la distanza variabile del punto P dal punto O.

Torniamo ora all'organo elettronico e proviamo a cambiare le caratteristiche del suono prodotto.

A) Agendo sul pedale del volume, possiamo aumentare o diminuire l'intensità del suono, lasciando inalterata la nota scelta, per esempio il *la* dell'ottava centrale. Percepiamo un suono più forte o più debole e, contemporaneamente, l'oscilloscopio mostra delle curve come quelle in Fig. 7.

Sono curve che hanno tutte lo stesso periodo (e, quindi, la stessa frequenza), ma ampiezza massima differente. Dunque l'intensità del suono è legata all'ampiezza massima dell'oscillazione: i suoni diventano sempre più forti quando l'ampiezza massima aumenta e sempre più deboli quando l'ampiezza massima diminuisce.

B) Proviamo ora a cambiare nota, suonando, per esempio, il *la* dell'ottava precedente o seguente, ma lasciando fissa l'intensità. Percepiamo suoni che sono più acuti o più gravi e, contemporaneamente, l'oscilloscopio ci mostra le curve di Fig. 8.

Queste curve differiscono per il periodo: al suono più acuto corrisponde — come vediamo sull'oscilloscopio — un periodo T minore, mentre al suono più grave corrisponde un periodo T maggiore.

Scopriamo così che, cambiando nota, si altera il periodo T $\left(\text{e dunque la frequenza } f=\frac{1}{T}\right)$ dell'oscillazione e varia l'altezza del suono; i suoni sono più alti (o più acuti) quando la frequenza f aumenta, sono invece più bassi (o più gravi) quando diminuisce.

[1] 1 ciclo al secondo prende spesso il nome di "Hertz" e si abbrevia Hz.

Fig. 7

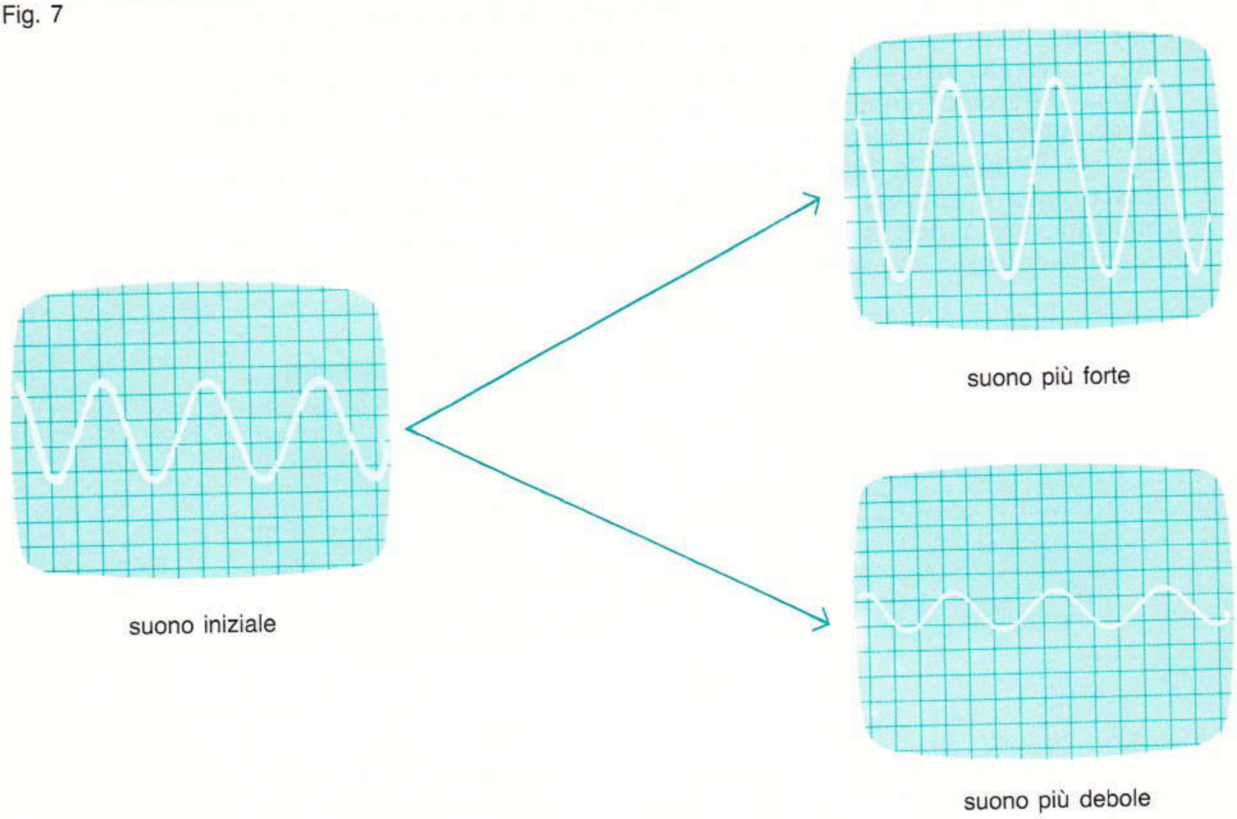
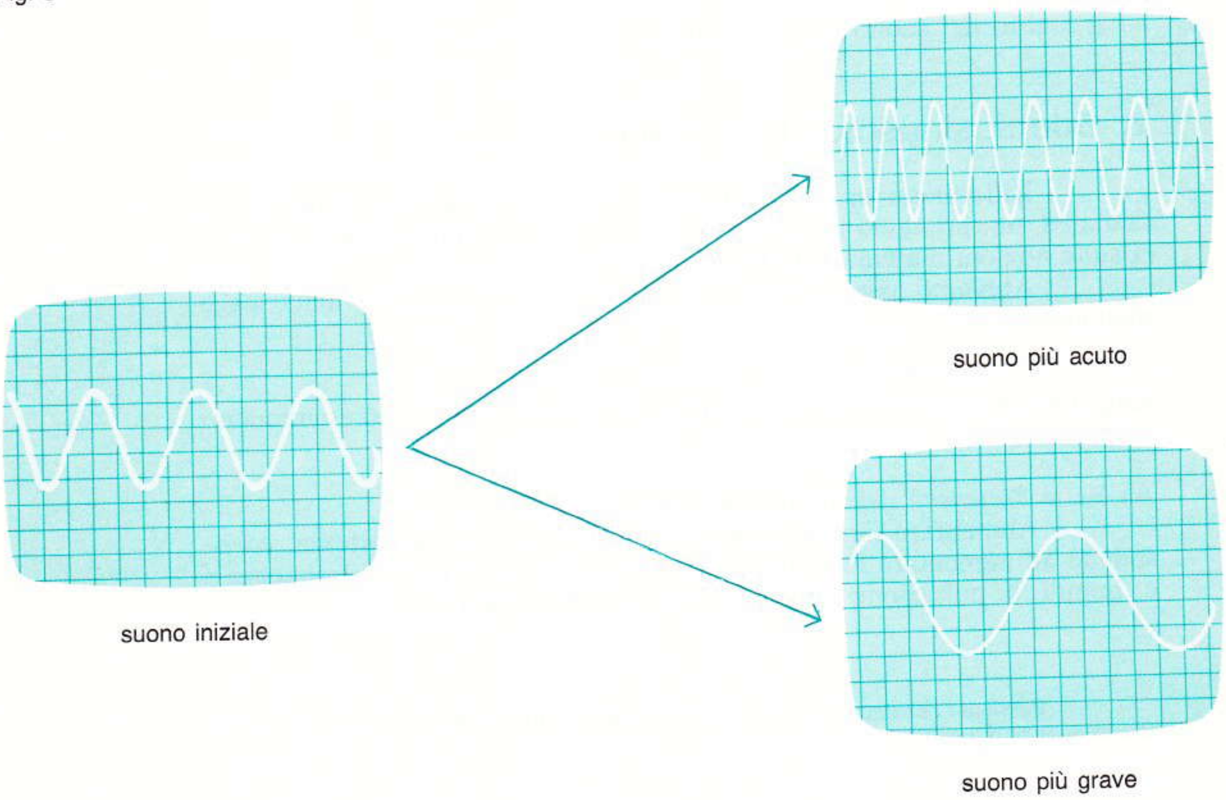

suono più forte
suono iniziale
suono più debole

Fig. 8


suono più acuto
suono iniziale
suono più grave

C) Proviamo ora a predisporre l'organo su registri diversi: tromba, violino, oboe,.... ma suoniamo sempre la stessa nota con la stessa intensità. Vedremo sull'oscilloscopio delle curve come quelle della Fig. 9, cioè curve che hanno lo stesso periodo, la stessa ampiezza massima ma forma differente; contemporaneamente, percepiremo suoni che hanno stessa altezza e intensità, ma timbro diverso.

Dunque, la forma della curva è strettamente legata al timbro: una tromba e un violino possono produrre la stessa nota con la stessa intensità, ma i due suoni restano facilmente distinguibili perché sono descritti da curve che hanno forme diverse.

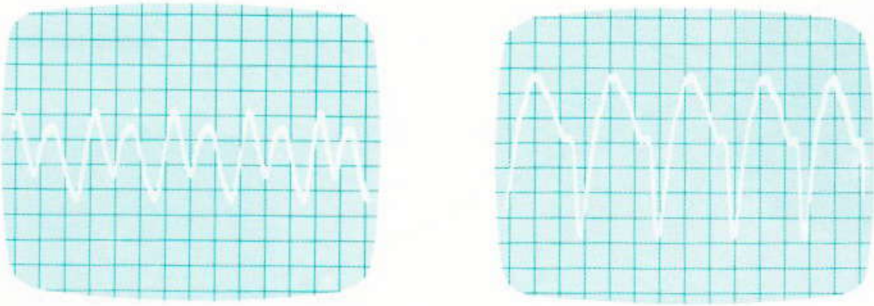


Fig. 9

In conclusione, le curve viste sull'oscilloscopio sono strettamente legate alle caratteristiche dei suoni che ascoltiamo. In particolare:
— l'intensità del suono è legata all'ampiezza massima della curva;
— l'altezza del suono è legata al periodo T (e quindi alla frequenza $f=\frac{1}{T}$);
— il timbro del suono è legato alla forma della curva.

2. Suoni, sinusoidi, trasformazioni affini

Riflettiamo ora sugli esperimenti descritti nel paragrafo precedente ed interpretiamo le varie situazioni che si sono presentate, basandoci sulle nozioni matematiche finora introdotte.

Abbiamo visto che un suono può essere descritto dalla legge matematica

$$d=r\,\mathrm{sen}\,\omega t;$$

scegliamo ora un caso particolare, ponendo $r=1$ ed $\omega=1$[1], ed esaminiamo varie situazioni.

A) *Varia l'intensità del suono, ma resta fissa l'altezza.*

Aumentare l'intensità del suono, lasciando fissa l'altezza, corrisponde ad aumentare l'ampiezza massima r lasciando fissa la frequenza f e, quindi, la pulsazione ω. Ecco alcuni casi particolari.

[1] Possiamo pensare di misurare ω in migliaia di radianti al secondo; così si sceglie una frequenza data da:

$$f=\frac{1000}{2\pi}\cong 160 \text{ Hz},$$

che consente di considerare frequenze udibili dall'orecchio umano.

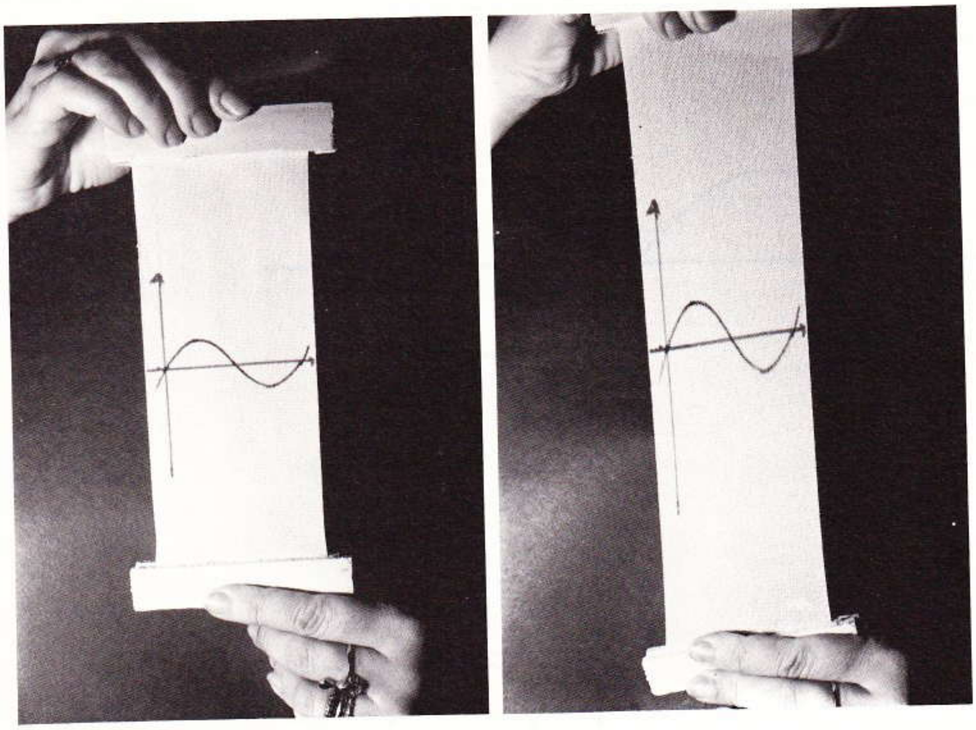


Fig. 10 a) tela non dilatata b) tela dilatata

1) A partire dalla legge

$$d = \operatorname{sen} t \qquad (r=1,\ \omega=1) \tag{1}$$

si raddoppia r; si ottiene un suono più forte, descritto dalla legge

$$d' = 2 \operatorname{sen} t' \qquad (r=2,\ \omega=1). \tag{2}$$

Confrontando le due leggi, si osserva che risulta

$$t' = t \qquad d' = 2d,$$

cioè si passa dalla curva (1) alla curva (2) raddoppiando le ordinate e lasciando fisse le ascisse. È come se avessimo disegnato la curva $d = \operatorname{sen} t$ su di una tela elastica, per poi dilatare la tela nella direzione dell'asse delle d (Figg. 10a e 10b).

2) Analogamente, se, sempre a partire dalla legge (1), si triplica r, si ottiene un suono ancora più forte, descritto dalla legge

$$d' = 3 \operatorname{sen} t' \qquad (r=3,\ \omega=1). \tag{3}$$

Risulta dunque

$$t' = t \qquad d' = 3d.$$

È ora chiaro che dobbiamo dilatare con forza maggiore la tela elastica, se vogliamo che le ordinate siano triplicate e appaia il grafico della (3).

3) È facile capire che, invece, per diminuire l'intensità del suono bisogna diminuire il valore di r. Così si passa, per esempio, dalla (1) alla

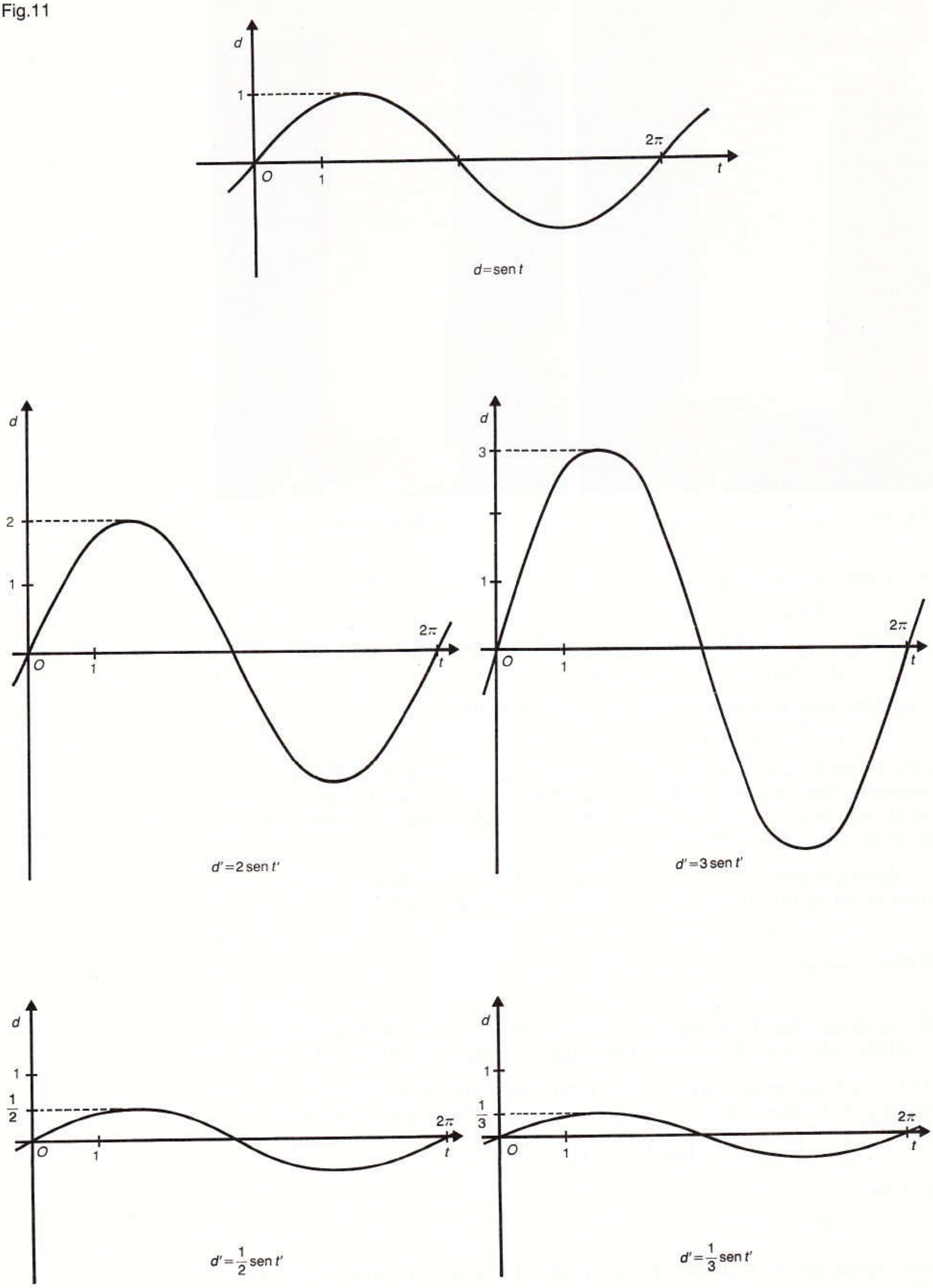
$$d' = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t' \qquad \left(r = \frac{1}{2},\ \omega = 1\right)$$

e si ha:

$$t' = t \qquad d' = \frac{1}{2} d,$$

cioè dimezzano le ordinate, restando fisse le ascisse. È come se avessimo disegnato la curva (1) sulla tela elastica già dilatata lungo l'asse delle ascisse, per poi lasciarla contrarre.

Fig.11


$d = \text{sen}\, t$
$d' = 2\,\text{sen}\, t'$
$d' = 3\,\text{sen}\, t'$
$d' = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t'$
$d' = \frac{1}{3}\,\text{sen}\, t'$

4) In modo del tutto analogo, si passa dalla legge (1) alla

$$d'=\frac{1}{3}\operatorname{sen} t' \qquad \left(r=\frac{1}{3},\ \omega=1\right)$$

con una contrazione lungo l'asse delle d.

La Fig. 11 riassume le osservazioni finora svolte.

Il procedimento che abbiamo seguito è di carattere generale e può essere sempre ripetuto quando si considera il suono descritto dalla legge

$$d=\operatorname{sen} t \tag{1}$$

e se ne modifica l'intensità, ottenendo

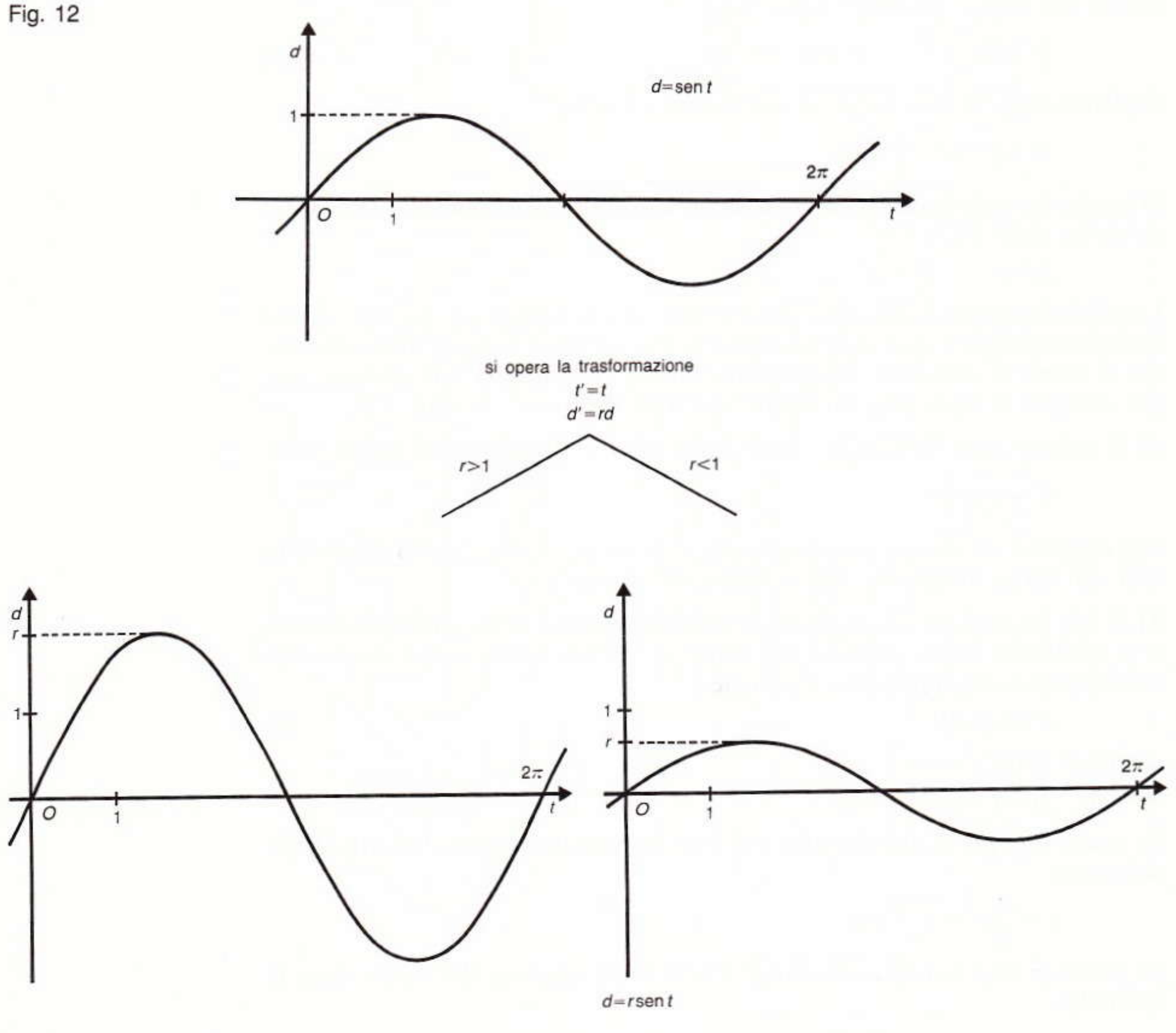
$$d'=r\operatorname{sen} t'. \tag{4}$$

Confrontando le due leggi, risulta che si passa dalla (1) alla (4) con una trasformazione del piano descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} t'&=t \\ d'&=rd. \end{aligned}$$

Queste equazioni descrivono particolari *trasformazioni affini* (Fig. 12): stiramenti lungo l'asse delle ordinate se $r>1$, contrazioni se $r<1$.

Fig. 12



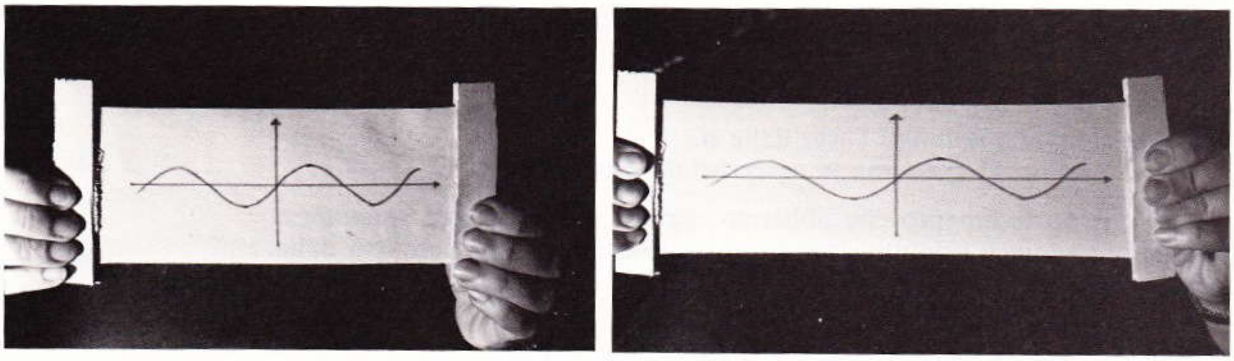


Fig. 13 a) tela non dilatata b) tela dilatata

B) *Varia l'altezza del suono, ma resta fissa l'intensità.*

Variare l'altezza del suono senza variarne l'intensità significa alterarne la frequenza, senza modificare l'ampiezza massima r. Ecco alcuni casi particolari.

1) Partiamo sempre da un suono descritto dalla legge

$$d=\operatorname{sen} t \qquad (r=1,\ \omega=1) \tag{1}$$

e dimezziamo la pulsazione ω dimezzando la frequenza f. Otterremo un suono più grave, descritto dalla legge

$$d'=\operatorname{sen}\frac{1}{2}t' \qquad \left(r=1,\ \omega=\frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Confrontando le due leggi, si osserva che risulta:

$$d'=d \quad \text{se} \quad \frac{1}{2}t'=t.$$

Si passa dunque dalla legge (1) alla (5) con una trasformazione del piano descritta dalle equazioni:

$$t'=2t, \qquad d'=d.$$

La trasformazione lascia fisse le ordinate, ma raddoppia le ascisse; è uno stiramento lungo l'asse delle ascisse che raddoppia il periodo della sinusoide. È come se avessimo disegnato la curva (1) su di una tela elastica, per poi dilatare la tela nella direzione dell'asse delle ascisse (Fig. 13).

2) È sempre uno stiramento lungo l'asse delle t a trasformare la (1) nella

$$d'=\operatorname{sen}\frac{1}{3}t'$$

che descrive un suono ancora più grave. Ora, però, dobbiamo dilatare la tela con forza maggiore, fino a triplicare le ascisse.

3) È ora immediato interpretare le situazioni in cui la frequenza aumenta e si ascoltano suoni sempre più acuti. A partire sempre dal suono (1), raddoppiando la frequenza si ottiene:

$$d'=\operatorname{sen} 2t' \tag{6}$$

e quindi risulta:

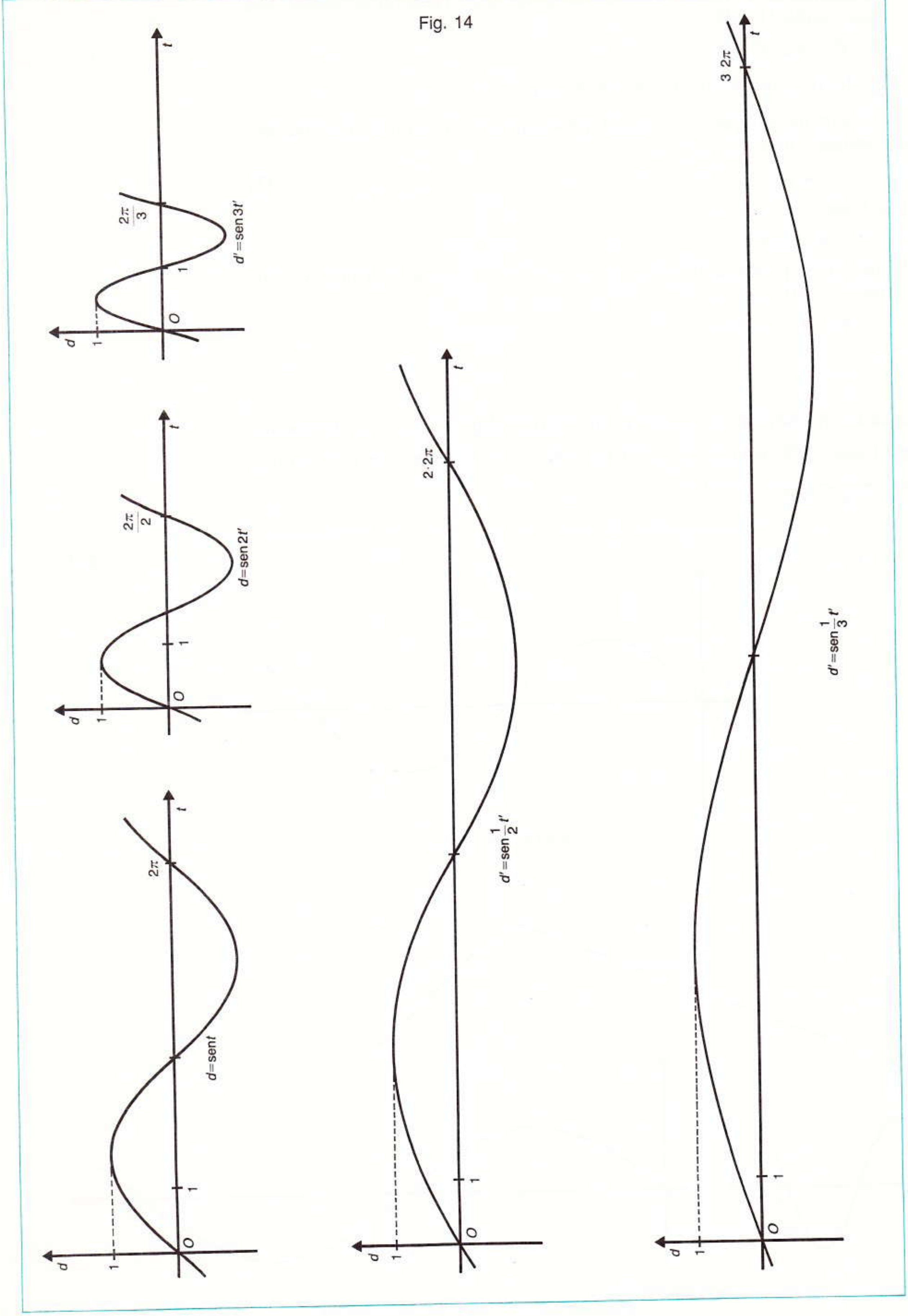
$$2t'=t \quad \text{se} \quad d'=d.$$

Si passa dunque dalla (1) alla (6) con la trasformazione descritta dalle equazioni:

$$t'=\frac{1}{2}t, \qquad d'=d.$$

Si tratta di una contrazione lungo l'asse delle ascisse, che lascia fisse le ordinate.

Fig. 14



4) Analogamente, è ancora una contrazione lungo l'asse delle ascisse che fa passare dalla (1) alla

$$d' = \text{sen}\, 3t'.$$

La Fig. 14 riassume le nostre osservazioni.

Anche in questo caso, il procedimento è valido in generale. Confrontiamo infatti la legge

$$d = \text{sen}\, t \qquad (1)$$

con la legge

$$d' = \text{sen}\, \omega t';$$

vediamo che si passa dalla prima alla seconda equazione con una trasformazione descritta da

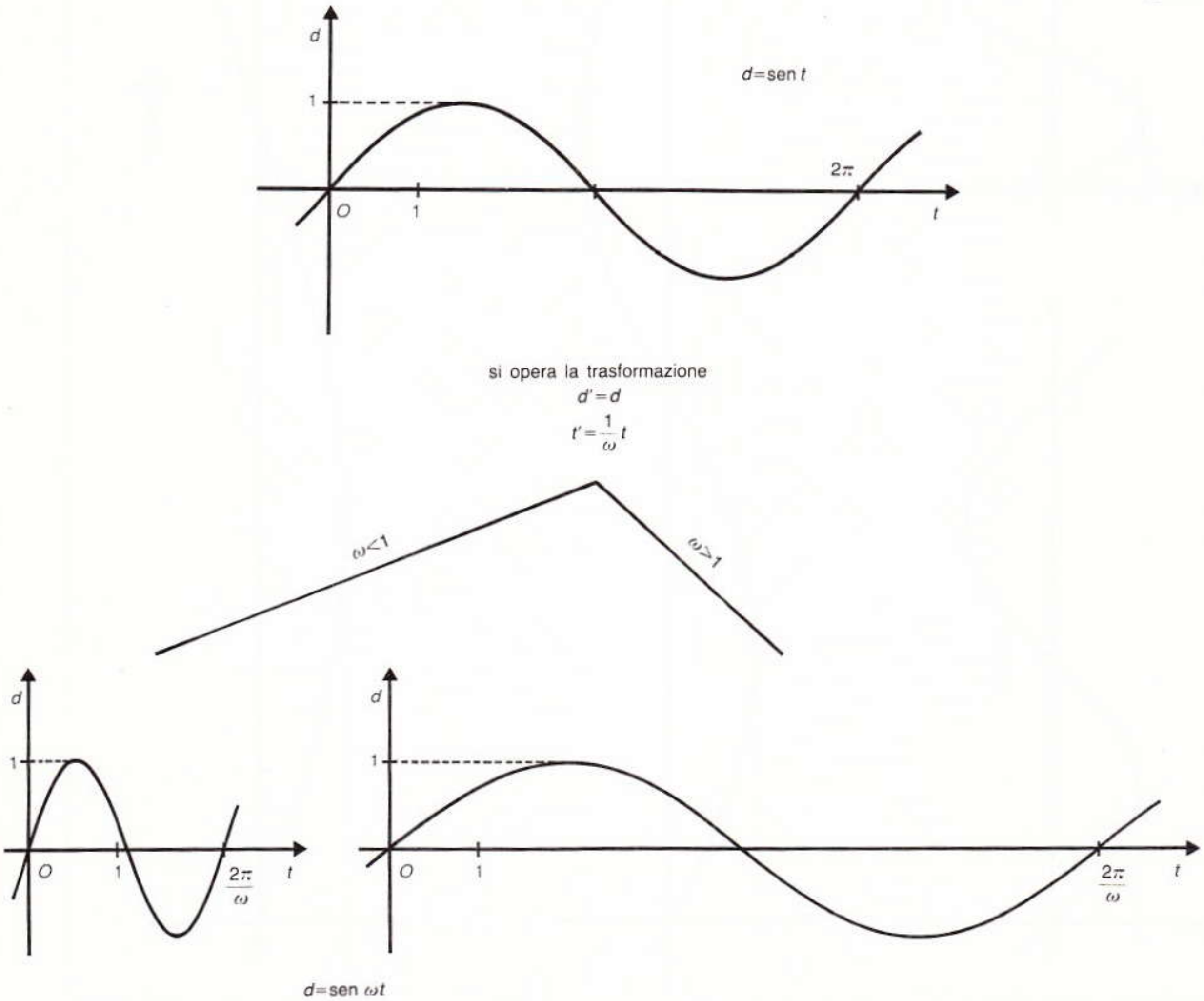
$$\omega t' = t \qquad d' = d$$

ossia

$$t' = \frac{1}{\omega} t \qquad d' = d.$$

Questa trasformazione è ancora di tipo affine (Fig. 15); è uno stiramento lungo l'asse delle ascisse se $\frac{1}{\omega} > 1$ (e cioè se $\omega < 1$), è invece una contrazione se $\frac{1}{\omega} < 1$ (cioè $\omega > 1$).

Fig. 15



C) *Variano sia l'altezza che l'intensità del suono.*

Vediamo ora cosa accade quando si varia sia l'altezza che l'intensità del suono, quando, cioè, alteriamo sia la frequenza che l'ampiezza massima; iniziamo con qualche caso particolare.

1) Sempre a partire dal suono

$$d = \operatorname{sen} t \qquad (r=1,\ \omega=1) \tag{1}$$

raddoppiamo r e dimezziamo ω; otterremo un suono più forte e più grave, descritto dalla legge:

$$d' = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t'. \tag{7}$$

È evidente che si passa dalla (1) alla (7) con la trasformazione descritta dalle equazioni:

$$t' = 2t$$
$$d' = 2d.$$

Questa trasformazione raddoppia sia le ascisse che le ordinate. È ancora una trasformazione affine: un uguale stiramento lungo entrambi gli assi (Fig. 16).

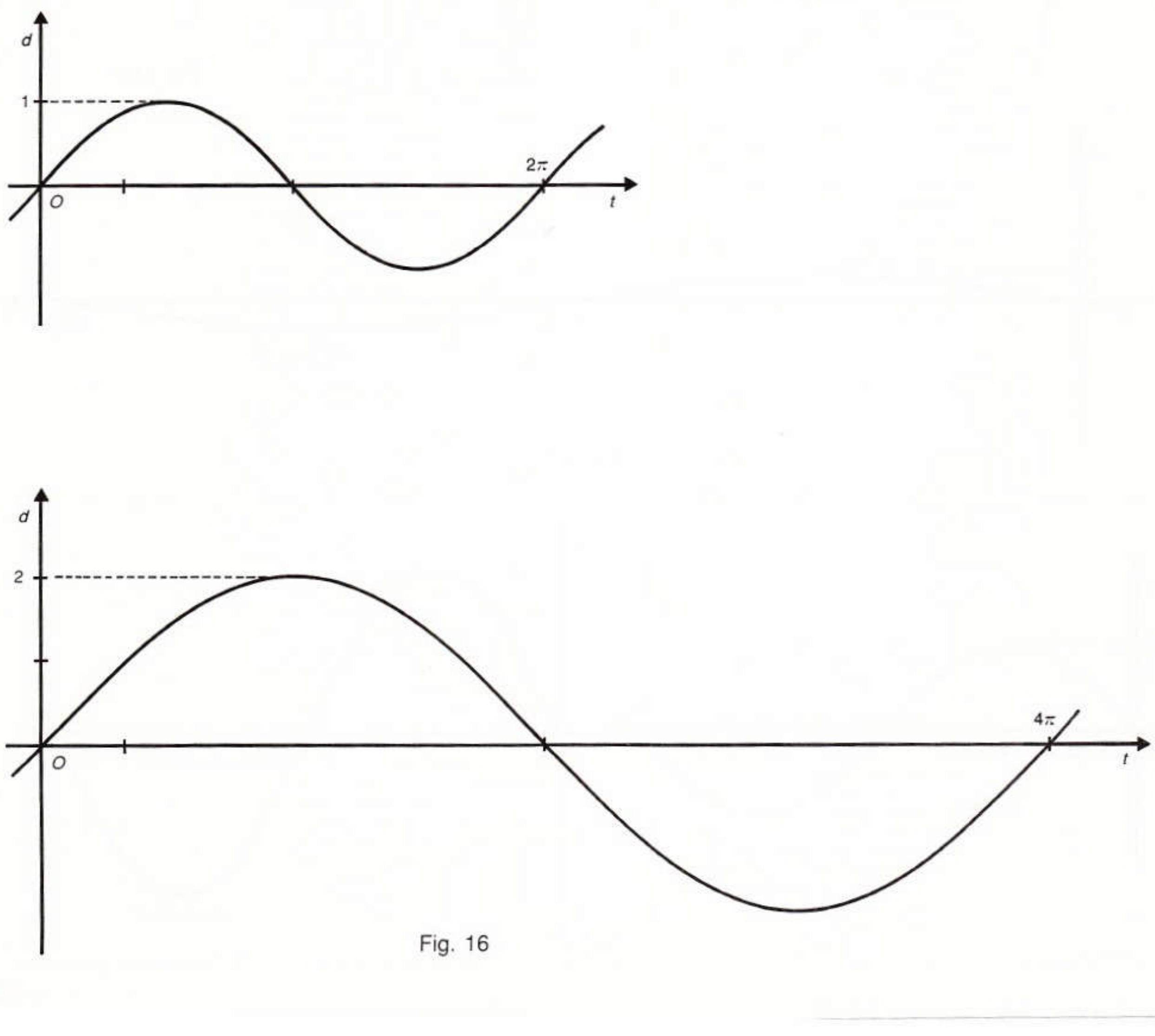


Fig. 16

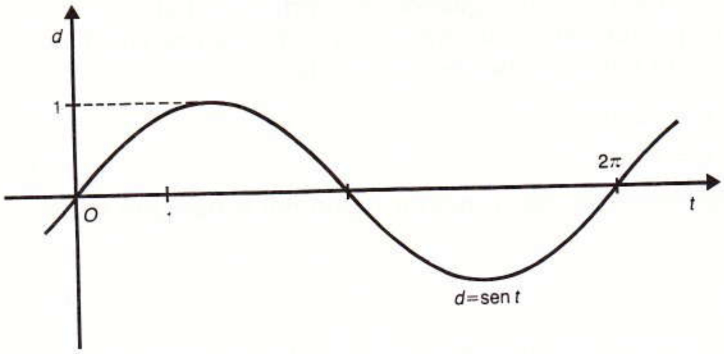


Fig. 17

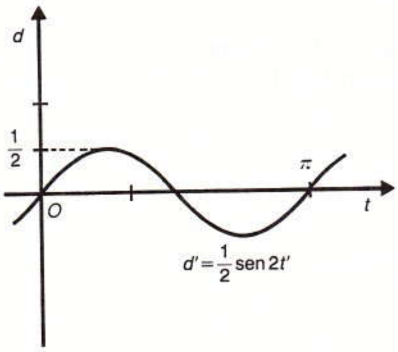


Fig. 18a

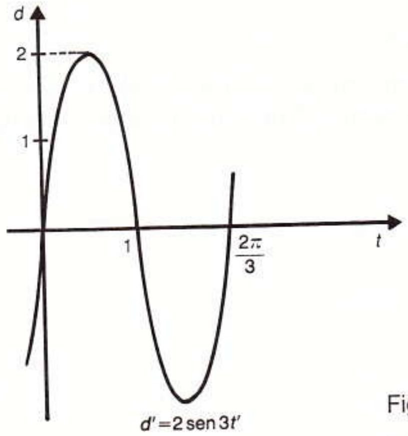


Fig. 18b

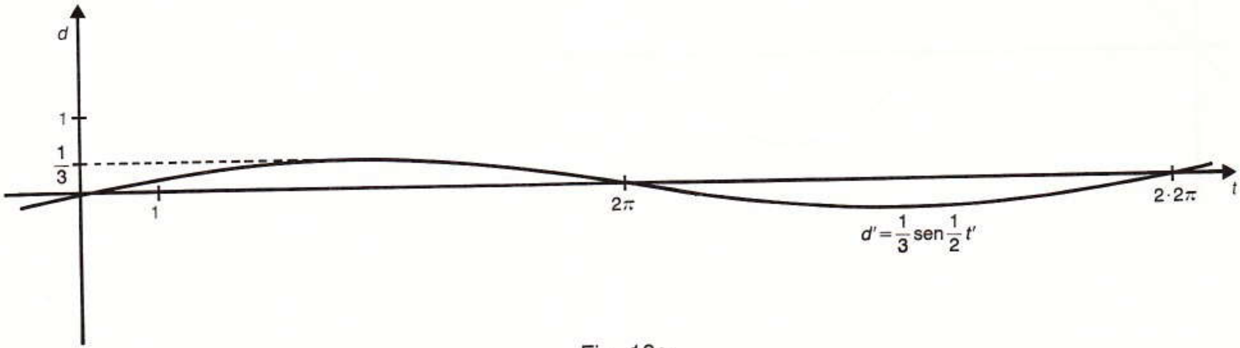


Fig. 18c

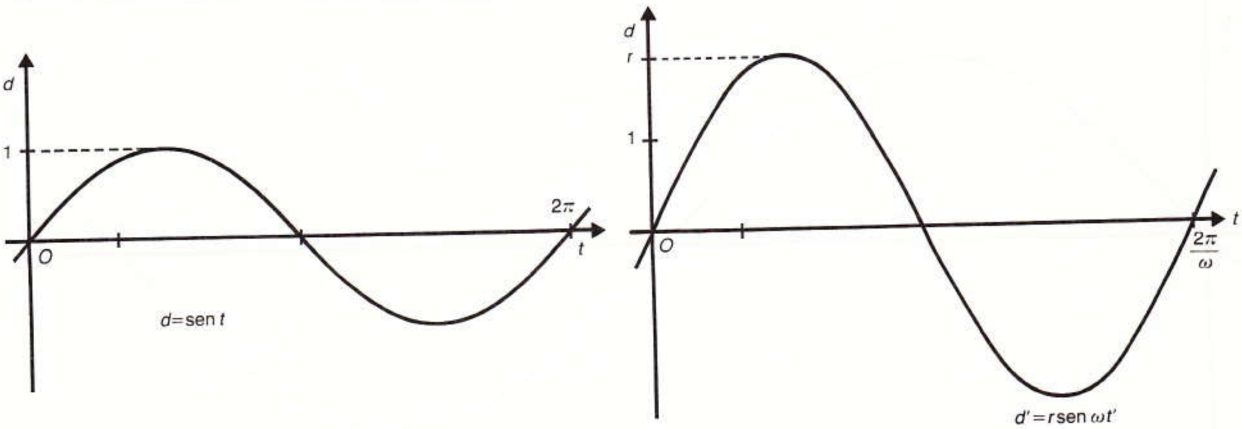


Fig. 19

2) Proviamo ora a dimezzare r e raddoppiare ω; otterremo un suono meno forte e più acuto, descritto dalla legge:

$$d' = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t'. \tag{8}$$

Si passa ora dalla (1) (Fig. 17) alla (8) (Fig. 18a) con un'uguale contrazione sia lungo l'asse delle ascisse che lungo l'asse delle ordinate.

3) Le Figg. 18b e 18c presentano altri due casi particolari.

Siamo ora in grado di arrivare a conclusioni generali. A partire dalla legge

$$d = \operatorname{sen} t \tag{1}$$

alterando l'ampiezza massima r e la frequenza f si ottiene un suono che ha diversa intensità e diversa altezza, ed è descritto dalla legge:

$$d' = r \operatorname{sen} \omega t'. \tag{9}$$

Si passa dalla curva (1) alla curva (9) con la trasformazione descritta dalle equazioni:

$$d' = rd$$
$$t' = \frac{1}{\omega} t;$$

si tratta sempre di una trasformazione affine (Fig. 19).

3. Comporre suoni e comporre sinusoidi. Somma grafica. Serie di Fourier

Nel paragrafo precedente è rimasto senza interpretazione un interessante fenomeno che si osserva visualizzando i suoni sull'oscilloscopio; si tratta di questo: si possono generare due suoni che hanno stessa intensità e stessa frequenza, ma che vengono chiaramente percepiti come suoni differenti. E la diversità si può "vedere" sull'oscilloscopio perché le leggi orarie che descrivono i due suoni hanno forma diversa (Figg. 20-22).

Ma quali relazioni hanno le curve mostrate nelle Figg. 21 e 22 con la sinusoide che compare nella Fig. 20?

La risposta a questa domanda non è affatto immediata ed ha richiesto lunghe ed accurate ricerche sia nel campo teorico che in quello sperimentale.

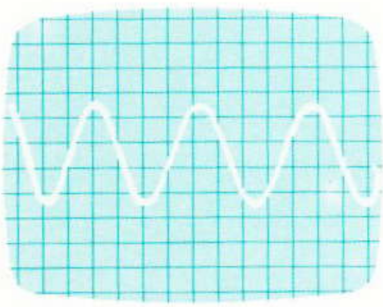


Fig. 20

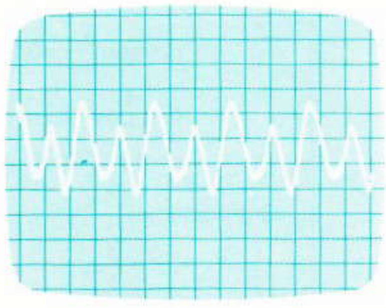


Fig. 21

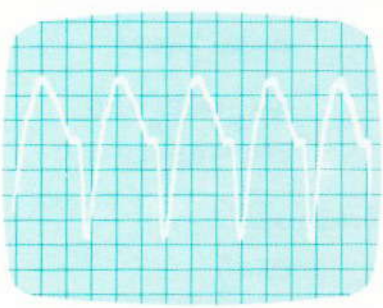


Fig. 22

È soltanto verso la metà del 1800 che Helmholtz prima, e i fratelli Weber poi, riuscirono a costruire degli *analizzatori* di suoni, arrivando ad una scoperta fondamentale: *suoni come quelli rappresentati nelle Figg. 21 e 22 sono composti di tanti suoni sinusoidali puri (come quello mostrato in Fig. 20) di frequenza e di ampiezza opportune*; a questi suoni sinusoidali puri si dà spesso il nome di *armoniche*.

Cerchiamo ora di capire il significato di questo risultato, riflettendo su dei semplici casi particolari.

Comporre due suoni sinusoidali puri significa emettere due suoni *contemporaneamente*, per esempio quello descritto dalla legge

$$d_1 = \operatorname{sen} t \tag{1}$$

e quello descritto dalla legge

$$d_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t. \tag{2}$$

In tal caso, con quale legge oscillerà il centro dell'altoparlante? Quale curva vedremo sull'oscilloscopio?

È chiaro che allo spostamento d_1, dovuto al 1° suono, si sovrappone lo spostamento d_2, dovuto al 2° suono. Si avrà dunque un'oscillazione complessiva, regolata dalla legge:

$$d = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

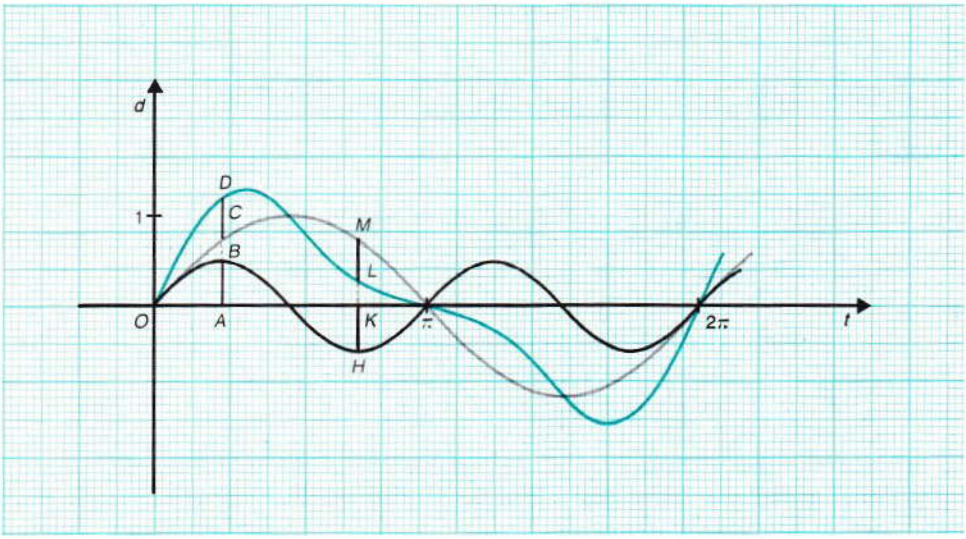


Fig. 23

Per $t = \frac{\pi}{4}$ si ha:

$$d_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cong 0{,}7$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} = 0{,}5$$

$$d \cong 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2$$

Graficamente:

$$\overline{OA} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = \overline{AC} \\ d_2 = \overline{AB} = \overline{CD} \end{array}\right\} d = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

Per $t = \frac{3}{4}\pi$ si ha:

$$d_1 = \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi \cong 0{,}7$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\frac{3}{4}\pi = -0{,}5$$

$$d \cong 0{,}7 + (-0{,}5) = 0{,}2$$

Graficamente:

$$\overline{OK} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = \overline{KM} \\ d_2 = -\overline{KH} = -\overline{ML} \end{array}\right\} d = \overline{KM} - \overline{ML} = \overline{KL}$$

È facile disegnare questa legge oraria, trovando per via grafica la somma della (1) con la (2). Ecco come si procede: sullo stesso piano cartesiano (Fig. 23) si traccia il grafico di

$d_1 = \operatorname{sen} t$ (in grigio nella Fig. 23)

e il grafico di

$d_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$ (in nero nella Fig. 23).

Poi, in corrispondenza alle ascisse t di vari punti, si calcola graficamente la somma algebrica delle ordinate. Si otterrà la curva in colore di Fig. 23.

Si osserva immediatamente che la curva in colore ottenuta non è una sinusoide; è però sempre una curva periodica con periodo 2π. Il periodo è uguale al più grande fra i periodi delle curve sommate; infatti è chiaro che la somma grafica potrà ripetersi solo quando la curva di periodo maggiore ha completato il suo ciclo.

Il procedimento può continuare: per esempio si può sommare alla curva prima ottenuta (in grigio nella Fig. 24), la curva

$d_3 = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t$ (in nero nella Fig. 24).

Si otterrà ancora una curva diversa, che abbiamo disegnato in colore in Fig. 24.

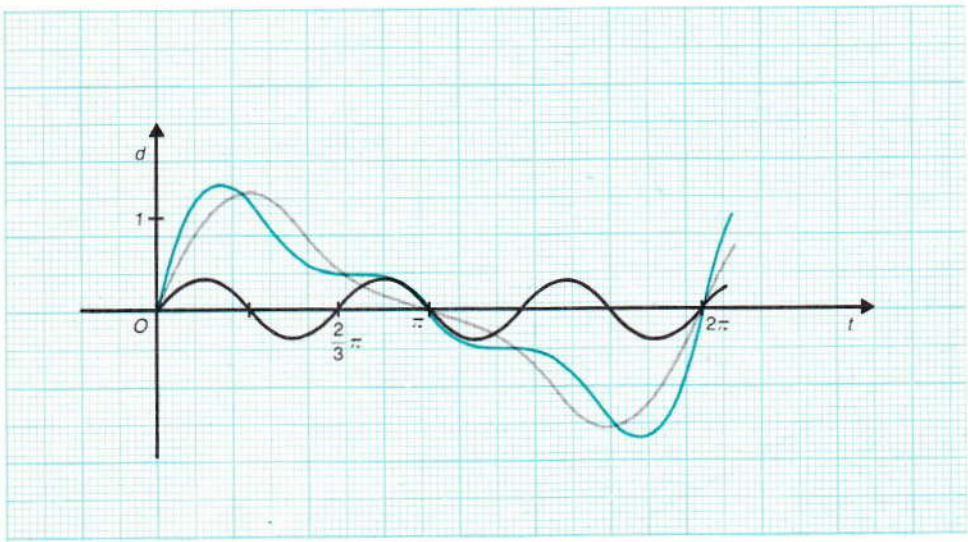


Fig. 24

Se, poi, continuiamo a sommare funzioni del tipo

$d_4 = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t,$

$d_5 = \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t,$

otteniamo curve come quelle mostrate nelle Figg. 25 e 26, che si avvicinano sempre più alla curva mostrata in Fig. 27, che certo non ha più nulla di sinusoidale!

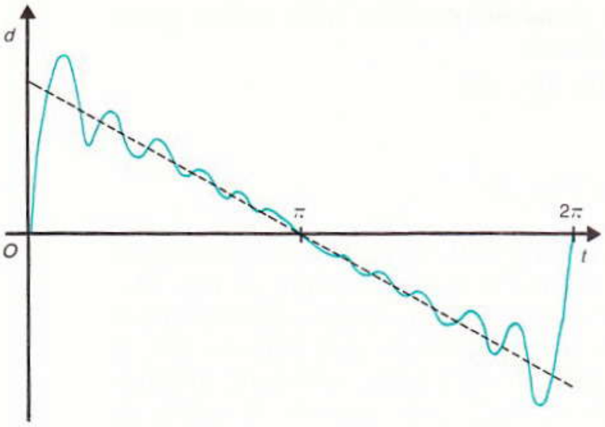


Fig. 25

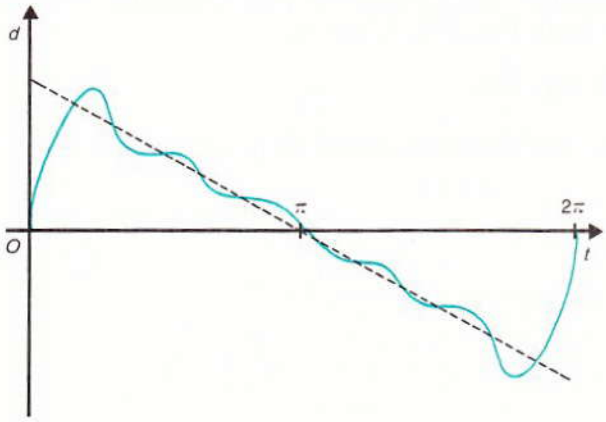


Fig. 26

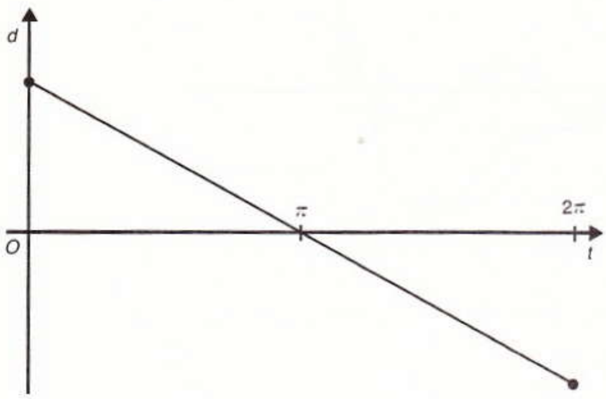


Fig. 27

Abbiamo così un'idea intuitiva dell'importante risultato che nel 1822 ha stabilito il grande fisico-matematico francese Joseph Fourier:

qualunque funzione periodica può essere espressa con una somma di infinite funzioni circolari del tipo

$$a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \operatorname{sen} 3t + \ldots$$

purché si scelgano in modo opportuno gli infiniti coefficienti a_1, b_1, ...

Questa somma di infiniti termini è detta, appunto, *serie di Fourier*.

Questo risultato ha portato a unificare ricerche matematiche e ricerche sperimentali, suggerendo un'idea che ha del sorprendente: tanti oscillatori sinusoidali che vibrano contemporaneamente riescono a "ricostruire" qualunque suono. È proprio questa l'idea che è alla base degli strumenti musicali elettronici, organi e sintetizzatori.

Così può accadere qualche volta di vedere un musicista dall'orecchio particolarmente esercitato che predispone un organo elettronico ad emettere il suono della tromba o del violino "costruendo ad orecchio" la serie di Fourier (Fig. 28): il musicista infatti regola l'intensità di vari registri flauto che debbono suonare contemporaneamente, così sceglie i suoni sinusoidali da comporre, decidendo, per ogni sinusoide, l'ampiezza, cioè il valore del coefficiente a e b.

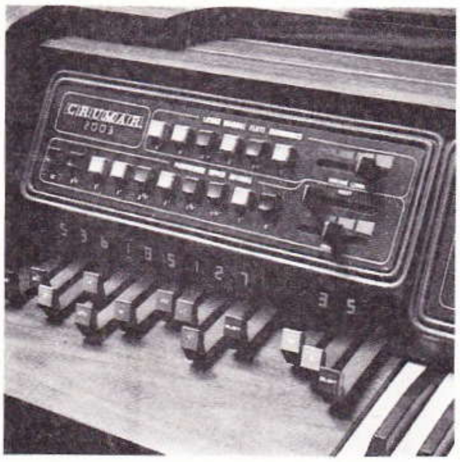


Fig. 28. I controlli estraibili (o *drawbars*) permettono di regolare l'intensità dei suoni sinusoidali emessi. Le cifre sopra i *drawbars* indicano appunto le intensità predisposte.

È anche interessante ed attualissimo osservare che un dato suono, descritto da una legge oraria qualunque, può essere identificato tramite il valore dei coefficienti della serie di Fourier che ne "ricostruiscono" la legge oraria. Questa è l'idea alla base dei calcolatori che identificano una persona riconoscendone la voce.

Ma, è chiaro, il procedimento è assai delicato perché una voce potrebbe essere perfettamente identificata solo da infiniti numeri!

4. Suoni sfasati e sinusoidi traslate

Finora abbiamo esaminato più suoni emessi contemporaneamente e siamo riusciti a descriverne gli effetti. E se i suoni non sono emessi contemporaneamente?

Riflettiamo prima di tutto su due casi particolari.

1) Cominciamo a cronometrare il tempo quando viene emesso un suono regolato dalla legge

$d=\text{sen}\, t,$

di cui abbiamo tracciato il grafico in Fig. 29. Produciamo, dopo 2 secondi, un suono uguale; sarà descritto da un diagramma orario come quello di Fig. 30.

Ovviamente la seconda curva non è altro che la prima traslata di 2 unità verso destra lungo l'asse delle t.

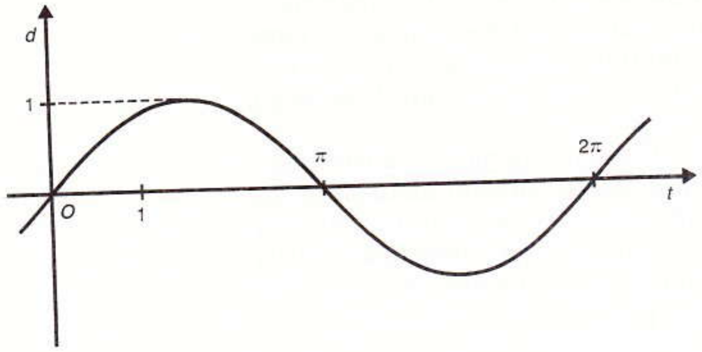


Fig. 29

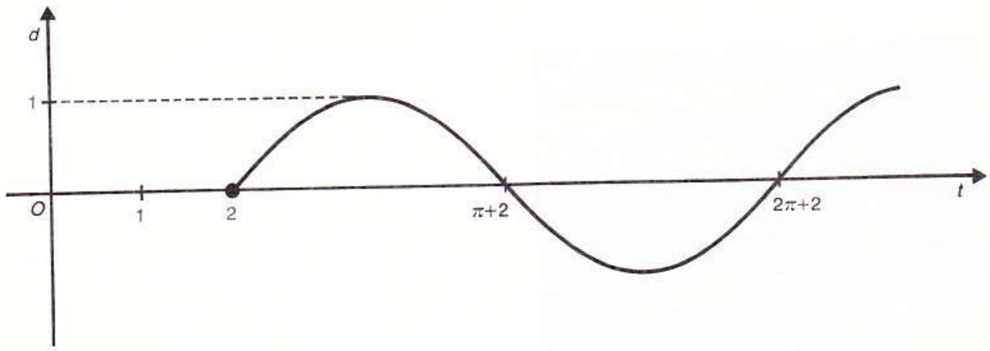


Fig. 30

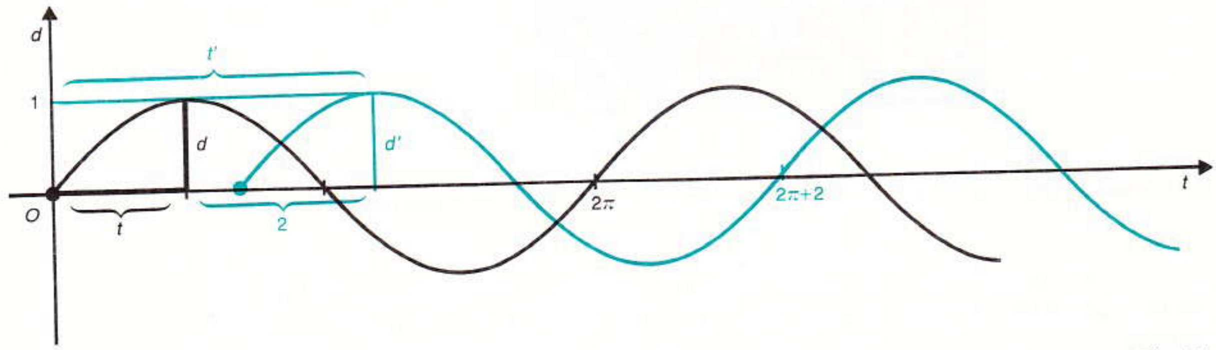


Fig. 31

Osservando la Fig. 31, si capisce che questa traslazione trasforma la funzione

$$d = \operatorname{sen} t$$

nella

$$d' = \operatorname{sen}(t' - 2)$$

dato che risulta

$$d' = d$$

e

$$t' = t + 2,$$

ossia

$$d = d'$$

se

$$t = t' - 2.$$

2) Descriviamo ora, insieme al suono regolato dalla legge

$$d = \operatorname{sen} t,$$

(in nero in Fig. 32), un suono uguale, ma emesso 1 secondo prima (in colore in Fig. 32).

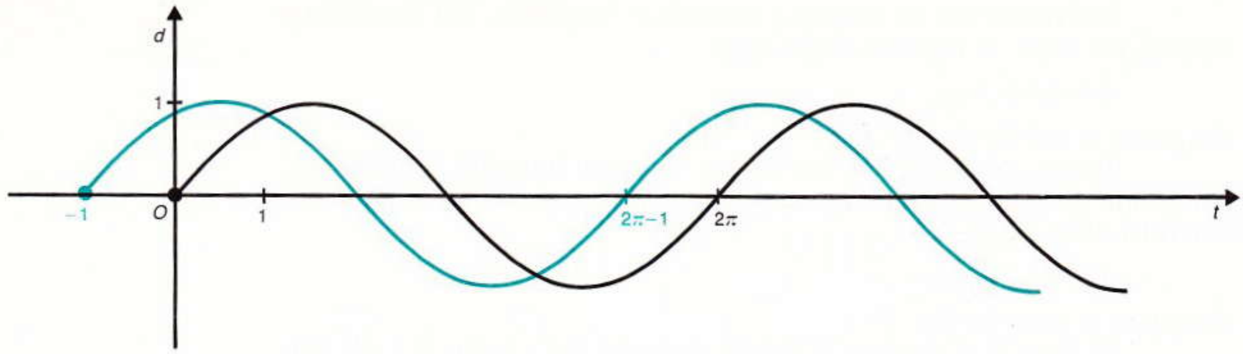


Fig. 32

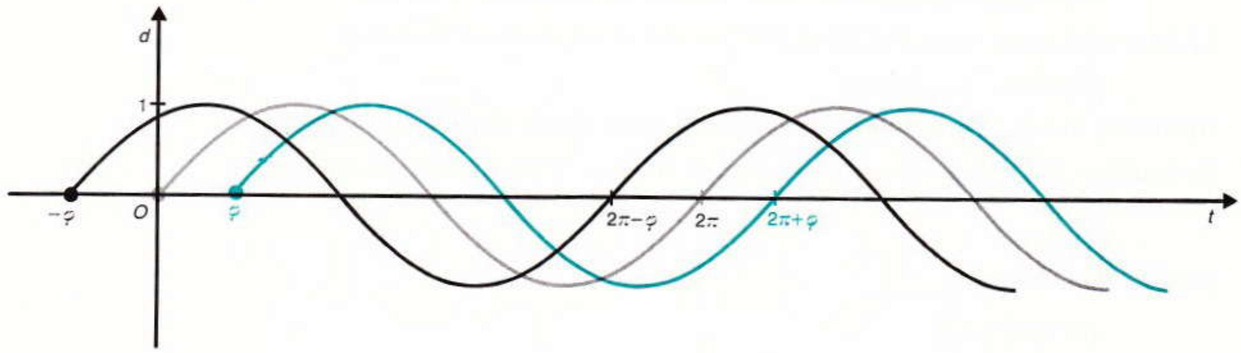


Fig. 33 $d=\operatorname{sen} t$ viene traslata di φ lungo l'asse delle t verso destra per ottenere $d'=\operatorname{sen}(t'-\varphi)$
$d=\operatorname{sen} t$ viene traslata di φ lungo l'asse delle t verso sinistra per ottenere $d'=\operatorname{sen}(t'+\varphi)$

Nel grafico di Fig. 32 la curva in colore non è altro che la curva in nero traslata lungo l'asse delle t di un'unità (cioè di 1 secondo) verso sinistra; così la curva in colore visualizza il fatto che il suono è stato emesso 1 secondo prima del "tempo 0". In questo caso la funzione

$$d=\operatorname{sen} t$$

viene trasformata nella

$$d'=\operatorname{sen}(t'+1),$$

dato che risulta

$$d'=d$$

e

$$t'=t-1,$$

ossia

$$d=d'$$

se

$$t=t'+1.$$

I ragionamenti fin qui seguiti su casi particolari possono essere facilmente generalizzati.

Cominciamo a cronometrare il tempo quando viene emesso un suono regolato dalla legge

$$d=\operatorname{sen} t \tag{1}$$

rappresentata in grigio in Fig. 33.

Un suono che ha la stessa intensità e frequenza, ma è emesso φ secondi più tardi, è regolato dalla legge

$$d' = \operatorname{sen}(t' - \varphi),$$

disegnata in colore in Fig. 33.

Invece un suono che ha sempre la stessa intensità e frequenza, ma è stato emesso φ secondi prima di iniziare a cronometrare il tempo, è descritto dalla legge

$$d' = \operatorname{sen}(t' + \varphi),$$

disegnata in nero in Fig. 33.

Si dice che, rispetto al suono descritto dalla legge (1), gli altri due suoni sono sfasati di φ, e φ prende il nome di fase.

Ecco due applicazioni delle considerazioni ora svolte.

1) Se osserviamo "con l'occhio abituato alle traslazioni" i grafici di

$$d = \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad d = \cos t,$$

riprodotti in Fig. 34, notiamo che la cosinusoide non è altro che la sinusoide traslata di $\frac{\pi}{2}$ lungo l'asse delle t verso sinistra. Così, invece di scrivere

$$d = \cos t,$$

possiamo scrivere

$$d = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Del resto, è immediato verificare questa proprietà, basandosi sulla circonferenza goniometrica (Fig. 35).

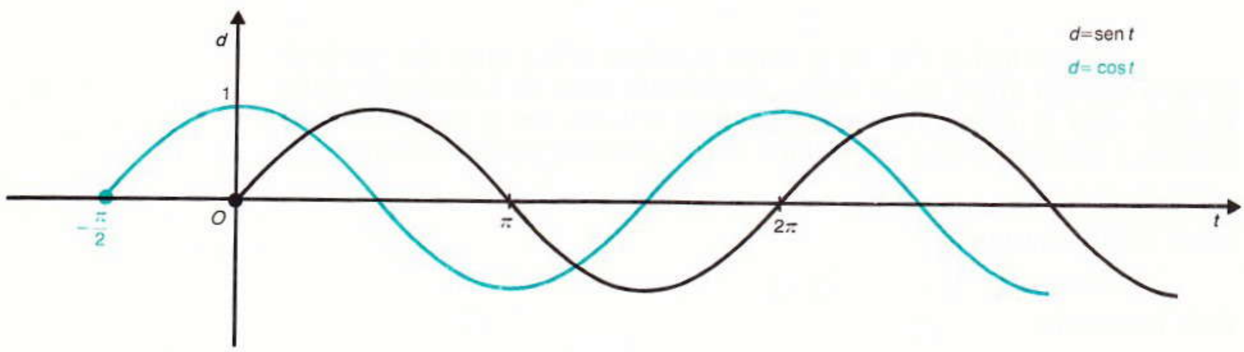


Fig. 34

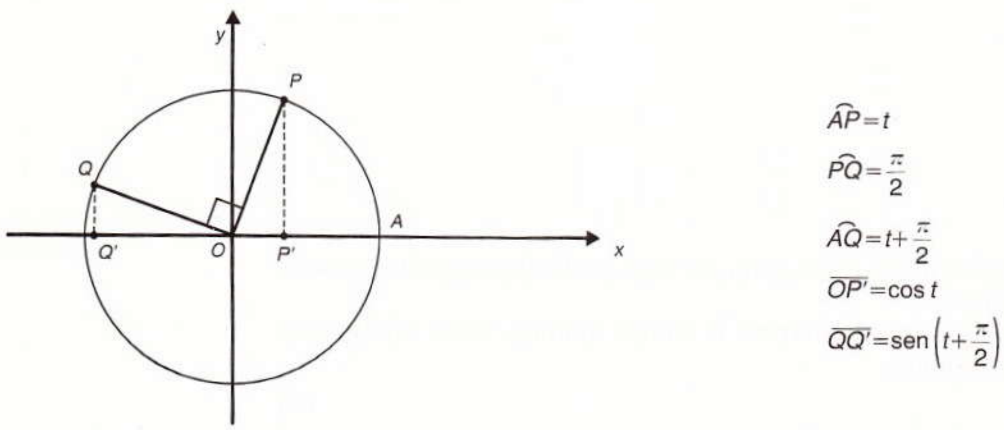


Fig. 35

Possiamo anche interpretare questo risultato dal punto di vista acustico: un suono descritto dalla legge

$$d=\cos t$$

non è altro che un suono descritto dalla legge

$$d=\operatorname{sen} t,$$

ma emesso $\frac{\pi}{2}$ ($\cong 1{,}5$) secondi prima.

2) Le considerazioni svolte a proposito dello sfasamento possono essere estese a suoni regolati da una legge del tipo

$$d=r \operatorname{sen} \omega t. \qquad (2)$$

Cominciamo dunque a cronometrare il tempo quando viene emesso un suono regolato dalla legge (2). Un suono che ha la stessa intensità e frequenza, ma emesso φ secondi più tardi, è regolato dalla legge

$$d'=r \operatorname{sen} \omega (t'-\varphi). \qquad (3)$$

La Fig. 36 visualizza la legge (3) e ne presenta un caso particolare.

Un suono che ha sempre la stessa intensità e frequenza, ma è emesso φ secondi prima che si inizi a cronometrare il tempo, è regolato dalla legge

$$d'=r \operatorname{sen} \omega (t'+\varphi). \qquad (4)$$

La Fig. 37 visualizza la legge (4) e ne presenta un caso particolare.

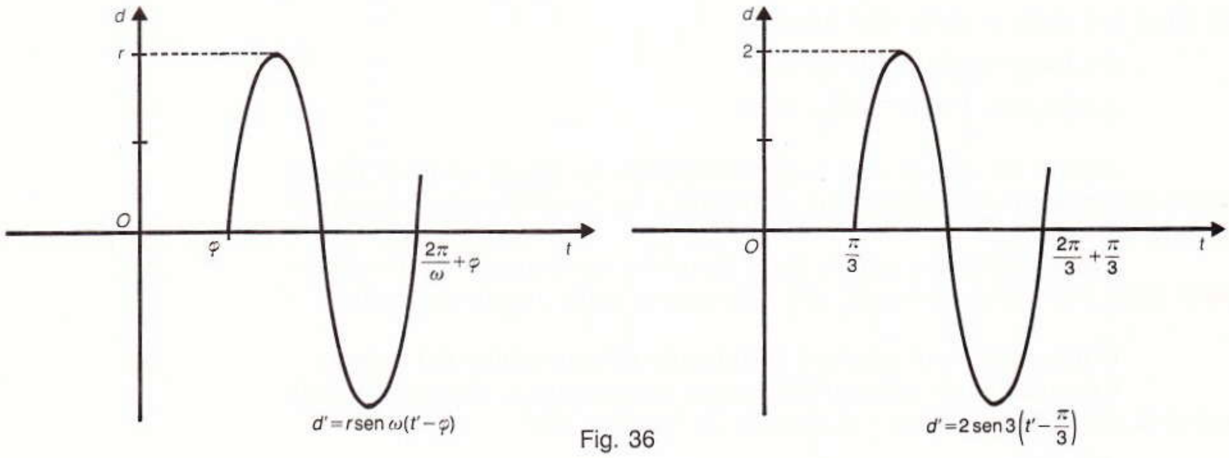


Fig. 36

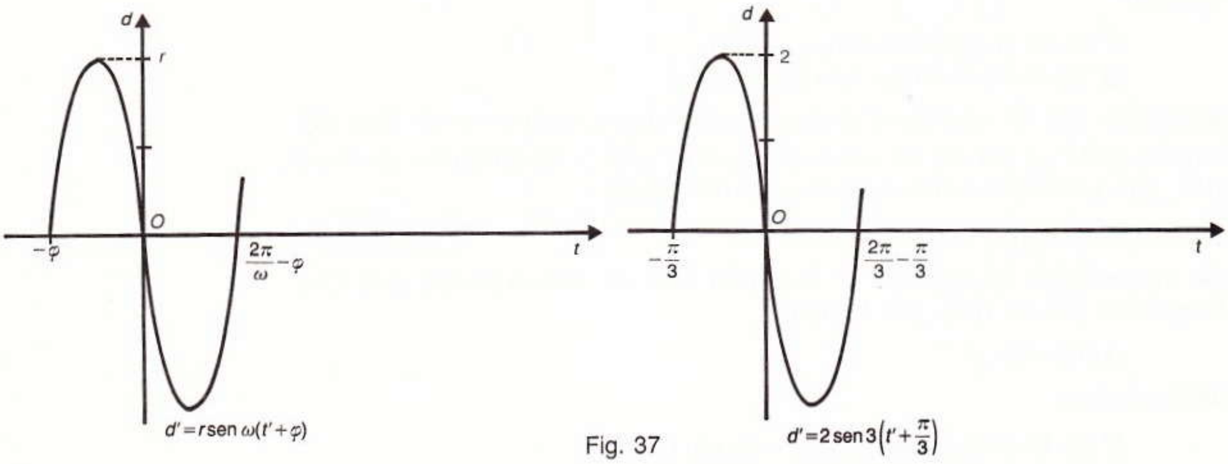


Fig. 37

5. La formula di sottrazione del coseno

Nel paragrafo 3 abbiamo visto che, componendo funzioni goniometriche di diverso periodo, si ottengono funzioni che non sono più sinusoidali.

Ci chiediamo ora: che cosa accade se si compongono funzioni goniometriche d'ugual periodo? Consideriamo alcuni casi.

1) Si ha ovviamente:

$$d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} t=2 \operatorname{sen} t$$
$$d=2 \cos t+\cos t=3 \cos t.$$

2) Qual è il grafico della funzione

$$d=\cos t+\operatorname{sen} t?$$

Riferiamoci alla Fig. 38. Sommando graficamente la curva d'equazione

$$d_1=\cos t \quad \text{(in grigio)}$$

con

$$d_2=\operatorname{sen} t \quad \text{(in nero)},$$

si arriva a disegnare la curva in colore.

La curva ottenuta sembra una sinusoide che ha subito, rispetto a $d=\operatorname{sen} t$, una traslazione lungo l'asse delle t e uno stiramento.

3) Qual è il grafico delle due funzioni

$$d=3 \operatorname{sen} t+\cos t \quad \text{(Fig. 39)}$$
$$d=2 \cos t+\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \quad \text{(Fig. 40)?}$$

Anche in questi due casi, osservando le figure sembra che la curva ottenuta (in colore) sia una sinusoide, che ha subito una traslazione ed uno stiramento.

Come verificare questo fatto in modo matematico? Sono necessarie delle particolari formule, che ricaveremo nelle pagine seguenti.

Cominciamo col ricavare **la formula di sottrazione del coseno**.

Consideriamo, sulla circonferenza goniometrica, due angoli ampi α e β di cui è dato il seno e il coseno. Si ha (Fig. 41):

$$A\hat{O}P=\alpha$$
$$A\hat{O}Q=\beta$$

e quindi:

P ha le coordinate $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$
Q ha le coordinate $(\cos \beta, \operatorname{sen} \beta)$.

Cerchiamo ora di esprimere il coseno dell'angolo ampio $\alpha-\beta$, cioè dell'angolo $Q\hat{O}P$, a partire da $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\beta$. Osserviamo, prima di tutto, che possiamo valutare il coseno dell'angolo

$$\alpha-\beta=Q\hat{O}P$$

solo ruotandolo intorno ad O in modo che un lato coincida con OA. Disegnamo perciò (Fig. 42) l'angolo

$$A\hat{O}R=\alpha-\beta.$$

Risulterà che:

R ha le coordinate $[\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$.

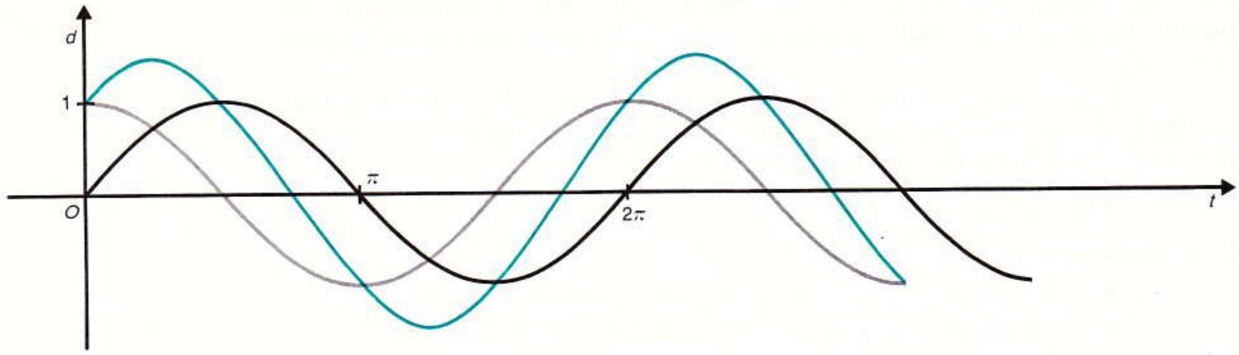


Fig. 38

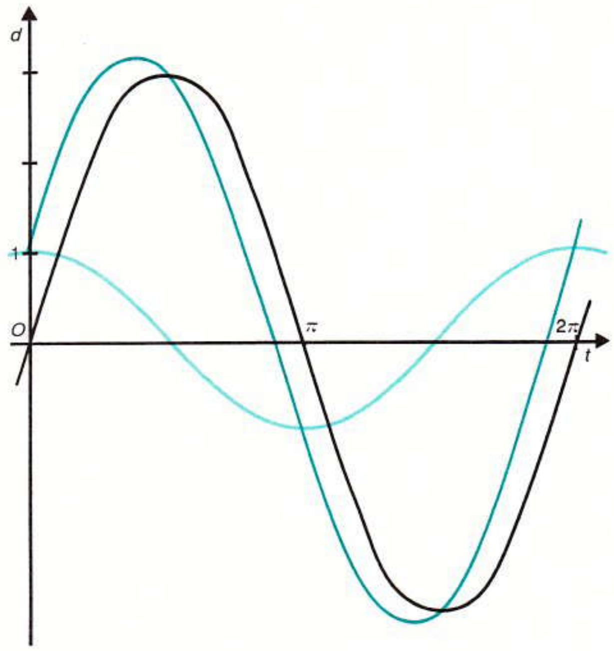


Fig. 39

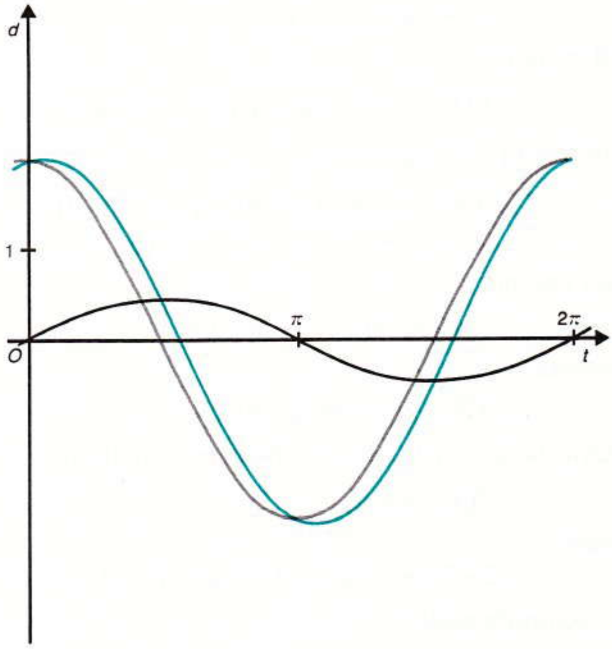


Fig. 40

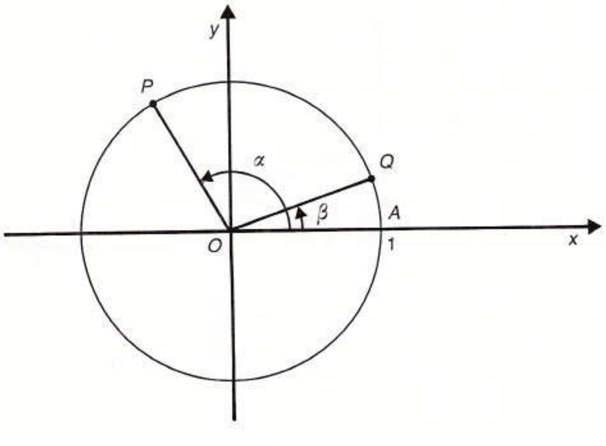


Fig. 41

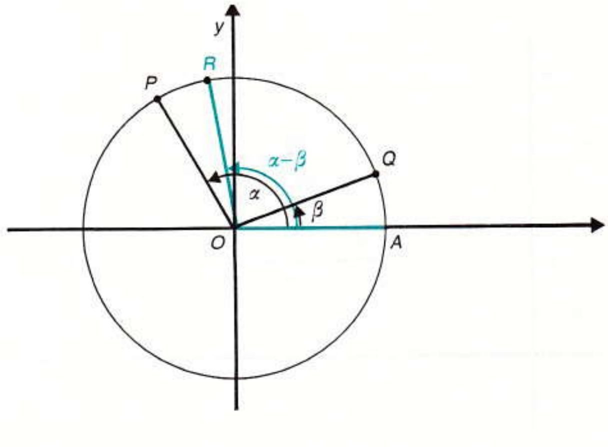


Fig. 42

Ora, se risulta $P\hat{O}Q=A\hat{O}R$, sarà anche $QP=AR$. Confrontando le lunghezze di queste corde si arriva proprio alla formula che volevamo stabilire.

Calcoliamo dunque le lunghezze delle corde QP e AR, ricordando che la distanza fra due punti $A(a,b)$ e $B(c,d)$ di coordinate assegnate si trova (Fig. 43) a partire dalla formula:

$$\overline{AB}^2=(c-a)^2+(d-b)^2.$$

Le corde in esame sono (Fig. 44):

PQ che ha per estremi $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$
AR che ha per estremi $A(1,0)$ e $R(\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$.

Risulta dunque:

$$\overline{PQ}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)^2=$$
$$=\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Ricordando, poi, che per qualunque angolo α si ha:

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$$

si ottiene:

$$\overline{PQ}^2=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

In modo analogo si calcola $\overline{AR}$; si ha:

$$\overline{AR}^2=[1-\cos(\alpha-\beta)]^2+[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]^2=$$
$$=1+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

ed essendo

$$\cos^2(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)=1$$

risulta

$$\overline{AR}^2=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

Ora, se le corde PQ e AR sono uguali, si ha:

$$\overline{PQ}^2=\overline{AR}^2$$

cioè

$$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=2-2\cos(\alpha-\beta),$$

e semplificando:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Questa formula prende il nome di formula di sottrazione del coseno e permette di determinare il coseno dell'angolo $(\alpha-\beta)$, a partire dal seno e dal coseno degli angoli α e β.

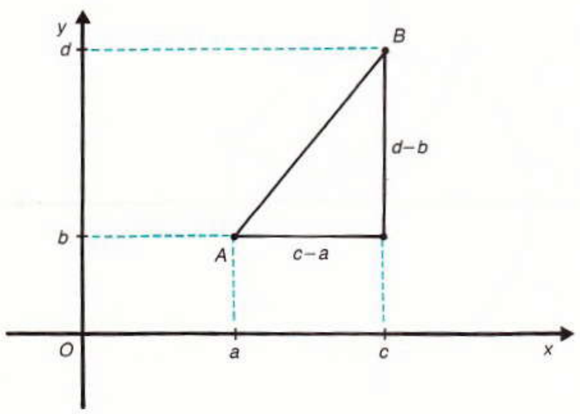


Fig. 43

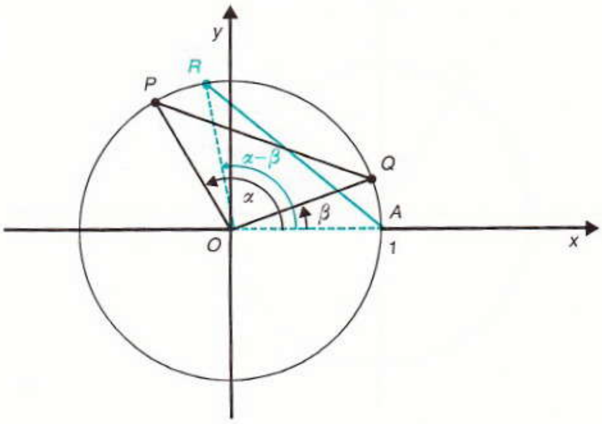


Fig. 44

6. Formule di addizione e sottrazione

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato la formula

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \qquad (1)$$

che permette di conoscere il coseno della differenza di due angoli.

È questa la prima di una serie di formule, di interesse essenzialmente applicativo, che verranno presentate in questo capitolo, ed è anche la sola a richiedere un procedimento tanto lungo ed elaborato.

Vedremo infatti nelle pagine seguenti come dall'unica formula (1) ne derivino molte altre, che possono essere ricavate con calcoli brevi e semplici. Ecco i primi casi.

La formula di addizione del coseno

Vogliamo conoscere il coseno della somma di due angoli α e β a partire dal seno e dal coseno di α e di β; vogliamo dunque calcolare:

$$\cos(\alpha+\beta).$$

Ci si vale della formula (1), scrivendo:

$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta).$$

Applichiamo allora la formula (1) sostituendo $-\beta$ al posto di β. Si ha:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta).$$

Ricordando poi (vedi p. 79) che risulta

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta,$$

si ottiene:

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta),$$

e infine

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (2)$$

La formula di sottrazione del seno

Calcoliamo ora il seno della differenza di due angoli, cioè:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta).$$

Si osserva che abbiamo a disposizione solo formule che riguardano il coseno di angoli; tuttavia potremo basarci su queste formule, ricordando (vedi p. 42) che, per qualunque angolo γ, risulta

$$\operatorname{sen}\gamma=\cos(90°-\gamma).$$

Perciò, considerando

$$\gamma=\alpha-\beta,$$

scriveremo:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos[90°-(\alpha-\beta)]=\cos[(90°-\alpha)+\beta].$$

Applichiamo ora le formule (2), sostituendo $(90°-\alpha)$ al posto di α. Si ha:

$$\cos[(90°-\alpha)+\beta]=\cos(90°-\alpha)\cos\beta-\operatorname{sen}(90°-\alpha)\operatorname{sen}\beta,$$

ossia:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (3)$$

La formula di addizione del seno

Per ottenere poi la formula relativa al seno dell'angolo

$$\alpha+\beta$$

ripeteremo il procedimento seguito per avere la formula (2) a partire dalla (1), considerando

$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta).$$

Così scriviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta),$$

e, infine:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (4)$$

Riscriviamo qui le formule trovate per l'addizione e la sottrazione degli angoli:

Formule di sottrazione

(1) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

(2) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

Formule di addizione

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

(4) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

Basta qualche esempio numerico per capire l'importanza che hanno avuto queste formule allo scopo di compilare tavole trigonometriche.

Conoscendo il seno e il coseno di 30° e di 45°, si possono calcolare il seno e il coseno di 15° e di 75°. Infatti, dato che risulta

$$15°=45°-30°,$$

dalla (1) si ha:

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\operatorname{sen}45°\operatorname{sen}30°.$$

Ricordando poi che risulta

$$\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2} \qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}45°=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

si ottiene:

$$\cos 15°=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

e, in definitiva:

$$\cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Dalla (2) si ottiene, poi:

$$\operatorname{sen}15°=\operatorname{sen}(45°-30°)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}.$$

Dunque risulta:

$$\operatorname{sen}15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Tenendo, poi, presenti le relazioni fra seno e coseno di angoli complementari (vedi p. 42), siccome risulta

$$90° - 15° = 75°,$$

si ha:

$$\cos 75° = \operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Ma, oggi, il calcolatore ha risolto molti problemi di calcolo numerico e, dunque, non sono certo questioni come quella appena esaminata a richiedere l'uso delle formule di addizione e sottrazione.

Vedremo, invece, nel prossimo paragrafo come queste formule siano essenziali oggi nella fisica e nella tecnologia.

7. Le formule di addizione e sottrazione in problemi reali

In questo paragrafo esamineremo due fra le tante situazioni in cui le formule di addizione e sottrazione risultano indispensabili per risolvere problemi attuali.

1) Acustica

La funzione

$$d = r \operatorname{sen}(t + \varphi) \qquad (1)$$

descrive un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega = 1$, ampiezza r e fase φ.

Riscriviamo la funzione (1), valendoci della formula di addizione del seno, che riscriviamo qui sotto:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\beta \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

Si ha, considerando

$$\alpha = t, \qquad \beta = \varphi,$$

$$\operatorname{sen}(t + \varphi) = \cos\varphi \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}\varphi \cos t.$$

È chiaro che, se è noto l'angolo φ, sono noti anche $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$; possiamo sottolineare questo fatto scrivendo:

$$\cos\varphi = c,$$

$$\operatorname{sen}\varphi = d.$$

Avremo allora:

$$\operatorname{sen}(t + \varphi) = c \operatorname{sen} t + d \cos t. \qquad (2)$$

Ora, dato che c e d sono i valori di $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$, risulterà sempre

$$-1 \le c \le 1$$

$$-1 \le d \le 1.$$

Tuttavia, se moltiplichiamo i due membri dell'uguaglianza (2) per uno stesso numero r, possiamo ottenere coefficienti numerici comunque grandi. Risulta dunque:

$$r \operatorname{sen}(t + \varphi) = r \cos\varphi \operatorname{sen} t + r \operatorname{sen}\varphi \cos t$$

dove $r\cos\varphi$ e $r\operatorname{sen}\varphi$ sono numeri noti, che possono assumere qualunque valore.

Indicando questi numeri con a e b, si scriverà:

$$r \operatorname{sen}(t + \varphi) = a \operatorname{sen} t + b \cos t.$$

Possiamo così concludere che la funzione

$$d = r \operatorname{sen}(t + \varphi), \qquad (1)$$

sviluppata con le formule di addizione, dà sempre una funzione del tipo

$$d = a \operatorname{sen} t + b \cos t, \qquad (3)$$

che è una combinazione lineare di funzioni sinusoidali di uguale frequenza (l'aggettivo lineare ricorda che $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ compaiono al 1° grado).

Viceversa è sempre possibile esprimere la (3) nella forma (1). È interessante interpretare questo risultato matematico dal punto di vista acustico, risalendo dalla funzione (3) alla funzione (1).

La funzione (3) descrive la sovrapposizione di due segnali

$$d_1 = a \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad d_2 = b \cos t,$$

che sono sinusoidali ed hanno la stessa frequenza, ma diversa intensità. Ora, esprimendo la (3) nella forma (1), si capisce che la sovrapposizione dei due segnali d_1 e d_2 è ancora sinusoidale ed ha la stessa frequenza dei segnali d_1 e d_2.

Si conclude così che, *sovrapponendo più segnali sinusoidali di uguale frequenza, si ottiene un segnale sinusoidale ancora con la stessa frequenza.*

Perciò, se si vuole ottenere un segnale non sinusoidale a partire da oscillatori sinusoidali, bisogna emettere contemporaneamente segnali di frequenza diversa.

È proprio su questo principio che si basano le tastiere degli organi elettronici (Fig. 45).

Fig. 45. I registri flauto (*flutes*) permettono di predisporre l'organo in modo che emetta la somma di più suoni sinusoidali aventi frequenze diverse.

2) La corrente trifase

La corrente elettrica distribuita nelle nostre case è *alternata*, cambia cioè continuamente di polarità; in questo modo è possibile far funzionare alcune macchine elettriche, come i trasformatori, che non potrebbero funzionare a corrente continua.

La corrente alternata è descritta con buona approssimazione da una legge sinusoidale del tipo

$$i = I \operatorname{sen} \omega t,$$

dove I è il valore massimo e ω è la pulsazione; in Italia è

$$\omega \cong 314 \text{ radianti/secondo}$$

ovvero

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \cong 50 \text{ Hz}.$$

La corrente viene prodotta nelle centrali elettriche, che si trovano nei luoghi più convenienti (presso un fiume o vicino ad un porto,...). Dalle centrali la corrente viene portata fino alle città, alle officine o dove altro serve per mezzo di linee elettriche, costituite da cavi sostenuti da tralicci (Fig. 46).

Le linee sono lunghe centinaia di chilometri e il loro costo è molto alto perché i cavi sono di rame, che è un metallo pregiato. Inoltre, sono necessari due cavi, perché la corrente produce i suoi effetti solo se percorre un circuito chiuso, come quello rappresentato in Fig. 47.

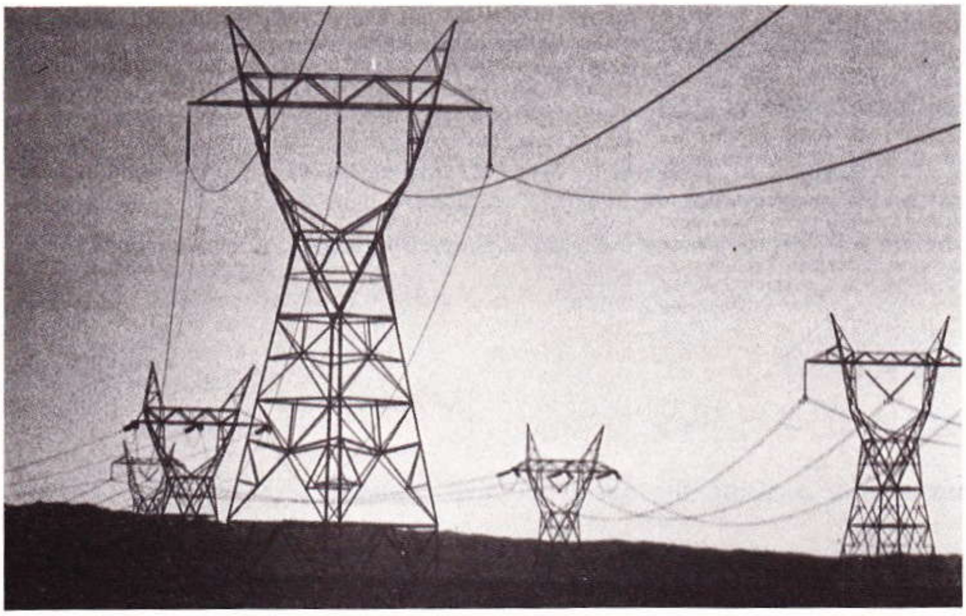


Fig. 46

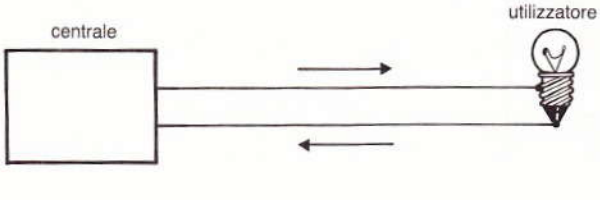


Fig. 47

Se però si hanno due correnti alternate da trasportare sono sufficienti tre cavi, invece di quattro: basta uno dei tre cavi per chiudere entrambi i circuiti, come si vede in Fig. 48.

In questo modo, però, si ha un risparmio relativo: si hanno, è vero, tre cavi invece di quattro, ma il cavo comune deve essere più grosso per permettere il passaggio di due correnti.

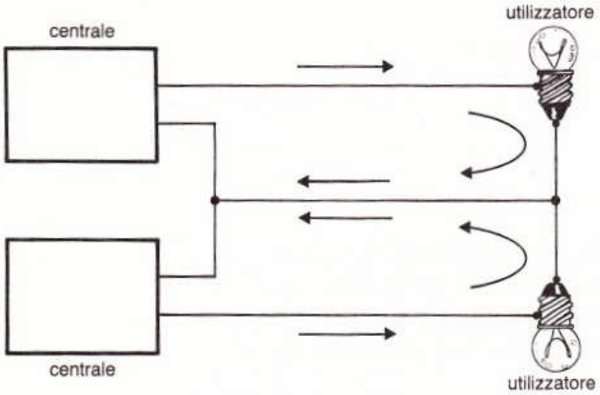


Fig. 48

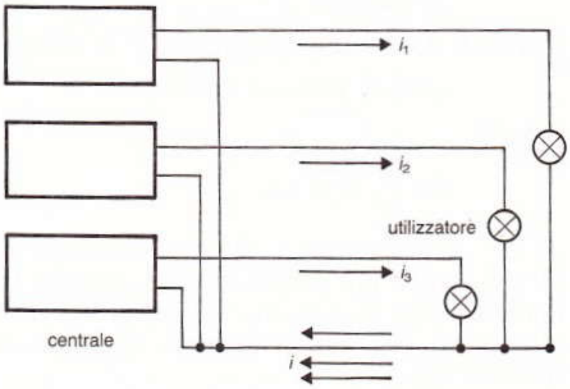


Fig. 49

È proprio la trigonometria a suggerire un modo di realizzare un notevole risparmio. Supponiamo, infatti di estendere il procedimento schematizzato nella figura 48, trasportando tre correnti con quattro cavi, come in Fig. 49.

Indichiamo le tre correnti con i simboli i_1, i_2, i_3 e scegliamole in modo che siano descritte da tre sinusoidi della stessa ampiezza e della stessa frequenza, ma sfasate fra loro di $\frac{2}{3}\pi$ (cioè di 120°). Si avrà dunque:

$$i_1 = I \operatorname{sen} \omega t$$
$$i_2 = I \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$i_3 = I \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Quanto vale, in questo caso la corrente che passa nel cavo comune? È chiaro che sarà

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = I \operatorname{sen} \omega t + I \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + I \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Sviluppiamo i calcoli, usando le formule si sottrazione del seno. Si ha:

$$i = I \operatorname{sen} \omega t + \left(I \operatorname{sen} \omega t \cos\frac{2\pi}{3} - I \cos \omega t \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) + \\ + \left(I \operatorname{sen} \omega t \cos\frac{4\pi}{3} - I \cos \omega t \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right).$$

Ricordiamo ora che risulta:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

si trova allora:

$$i=I\,\text{sen}\,\omega t-\frac{1}{2}I\,\text{sen}\,\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}I\cos\omega t-\frac{1}{2}I\,\text{sen}\,\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t$$

e cioè:

$$i=0.$$

Dunque, nel cavo di ritorno la corrente è sempre zero; è chiaro allora che questo cavo di ritorno può essere eliminato realizzando un notevole risparmio.

È questo il motivo principale per cui la corrente viene trasportata nella forma di tre correnti sfasate di 120° o, come si dice, nella forma *trifase*.

8. Le formule di duplicazione e bisezione

Le formule di duplicazione e bisezione si ottengono a partire dalle formule di addizione.

Le formule di duplicazione

Le formule di duplicazione esprimono il seno e il coseno dell'angolo ampio 2α, a partire dal seno e dal coseno dell'angolo di α. Per esprimere

$$\text{sen}\,2\alpha \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha$$

conviene considerare 2α come una somma; si ha:

$$2\alpha=\alpha+\alpha.$$

Ci si può valere così delle formule di addizione, che riscriviamo:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta,$$
$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

Se, infatti, si considera

$$\alpha=\beta,$$

si ha:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha,$$

cioè

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha.$$

Analogamente si ha:

$$\text{sen}(\alpha+\alpha)=\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha\cos\alpha,$$

cioè

$$\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha.$$

Le formule di duplicazione sono, dunque:

$$\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha. \qquad (2)$$

Si nota che il secondo membro delle due formule è un'espressione di 2° grado in $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$. Perciò queste formule trasformano un'espressione di 1° grado, relativa all'angolo 2α (come $\text{sen}\,2\alpha$ o $\cos 2\alpha$) in un'espressione di 2° grado relativa all'angolo α. E quindi un'espressione semplice viene trasformata in una più complicata.

È invece spesso utile seguire il procedimento inverso, cioè valersi delle formule di duplicazione per scrivere in una forma più semplice espressioni in cui compaiono $\text{sen}\,\alpha$ o $\cos\alpha$ al 2° grado.

Per ottenere questo è utile confrontare la formula

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha \tag{2}$$

con la relazione fondamentale

$$1=\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha. \tag{3}$$

Sommando membro a membro le due relazioni, si ottiene:

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha; \tag{2'}$$

sottraendo, invece, la (2) dalla (3), si ottiene:

$$1-\cos 2\alpha=2\operatorname{sen}^2\alpha. \tag{2''}$$

In definitiva abbiamo le tre relazioni seguenti:

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\operatorname{sen}2\alpha \tag{1}$$
$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha \tag{2'}$$
$$2\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos 2\alpha \tag{2''}$$

ossia

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2} \tag{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{6}$$

Sono queste le formule che permettono di scrivere in forma più semplice un'espressione di 2° grado in $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$: le vedremo all'opera nel paragrafo 10.

Le formule di bisezione

Consideriamo ora le formule (5) e (6) da un diverso punto di vista; scriviamole così:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \tag{5'}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \tag{6'}$$

Per mettere in rilievo che α è la metà di 2α, si scrive:

$$2\alpha=\beta \quad \text{e} \quad \alpha=\frac{\beta}{2}.$$

Si hanno così le formule di bisezione:

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \qquad \cos\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}.$$

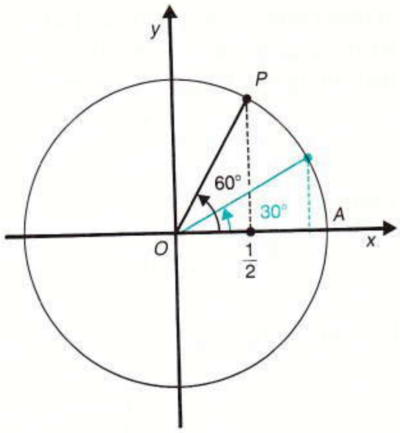
"Bisezione" significa dividere a metà e ci ricorda dunque che possiamo ottenere seno e coseno dell'angolo ampio $\frac{\beta}{2}$, conoscendo solo il valore di $\cos\beta$.

Tuttavia si osserva che la sola conoscenza del valore di $\cos\beta$ non basta a determinare anche il segno delle funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\beta}{2}$. La Fig. 50 spiega questa ambiguità di segno a partire da un esempio: è noto $\cos\beta=\frac{1}{2}$ e si calcola

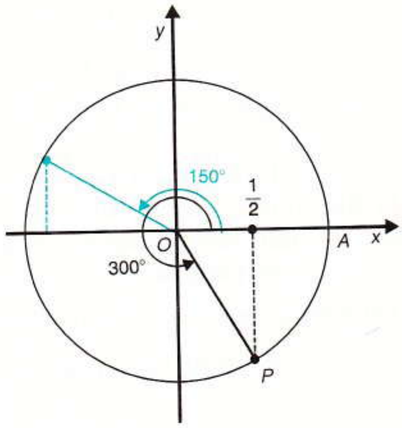
$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\cos\beta = \frac{1}{2}$ individua i seguenti angoli:

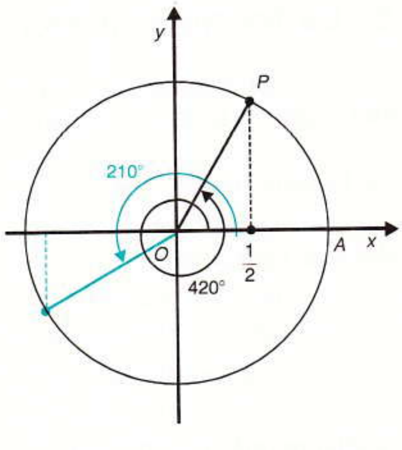
1) $\beta_1 = 60° \rightarrow \frac{\beta_1}{2} = 30°$ e perciò $\begin{cases} \text{sen}\,\frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\beta_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



2) $\beta_2 = 300° \rightarrow \frac{\beta_2}{2} = 150°$ e perciò $\begin{cases} \text{sen}\,\frac{\beta_2}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\beta_2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



3) $\beta_3 = 60° + 360° = 420° \rightarrow \frac{\beta_3}{2} = 210°$ e perciò $\begin{cases} \text{sen}\,\frac{\beta_3}{2} = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\beta_3}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



4) $\beta_4 = 300° + 360° = 660° \rightarrow \frac{\beta_4}{2} = 330°$ e perciò $\begin{cases} \text{sen}\,\frac{\beta_4}{2} = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\beta_4}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

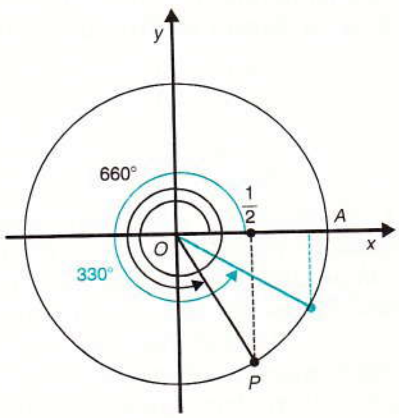


Fig. 50

Le formule di bisezione erano preziose per i compilatori di tavole trigonometriche, come quelle riportate a p. 402: infatti si possono determinare seno e coseno di moltissimi angoli, continuando a dividere a metà angoli noti. Ecco un esempio. Sono noti

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

risulta

$$\frac{45°}{2} = 22°30'.$$

Perciò si ottiene:

$$\operatorname{sen} 22°30' = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

Provate ora a svolgere con il calcolatore questi calcoli e valutate la differenza fra i valori così ottenuti e i valori del seno e del coseno di 22°30′, dati direttamente dal calcolatore. È un confronto interessante!

Si capisce che il procedimento può continuare e può portare a valutare seno e coseno di $\frac{22°30'}{2} = 11°15'$.

Anni di calcoli, dunque, per compilare le tavole trigonometriche!

9. Le formule di Werner e le formule di prostaferesi

Un'ultima serie di formule si può ottenere rielaborando ancora una volta le formule di addizione e sottrazione del coseno e del seno.

Le formule di Werner

Cominciamo col ricordare le formule di addizione e sottrazione, che ora riscriviamo:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned} \tag{2}$$

Addizionando o sottraendo membro a membro le (1) fra loro e le (2) fra loro, si hanno le formule seguenti:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned} \tag{1'}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned} \tag{2'}$$

Le formule (1′) e (2′) sono spesso dette formule di Werner, *dal nome dello studioso tedesco Johannes Werner (1468-1528) che le usava per semplificare calcoli astronomici. Ma risulta che almeno le (1′) erano già note agli Arabi nell'XI secolo, anche se entrarono nell'uso solo nel XVI secolo.*

Queste formule si diffusero ovunque perché permettevano di trasformare un prodotto in un'addizione, che era un'operazione più semplice da svolgere quando non esistevano i calcolatori.

Perciò questa tecnica di calcolo venne adottata nei principali osservatori astronomici, compreso quello di Tycho Brahe (1546-1601) in Danimarca (vedi la copertina di questo libro).

Venne anche coniato un nome apposito per queste formule: "prostaferesi", tratto dalle parole greche che significano addizione e sottrazione.

In quello stesso periodo, in Scozia, Nepero stava studiando l'introduzione dei logaritmi, *che avrebbero permesso, fra l'altro, di trasformare moltiplicazioni e divisioni in addizioni e sottrazioni. Per puro caso Nepero venne a conoscenza della "meravigliosa tecnica di prostaferesi" che usava Tycho Brahe, e così cercò di completare rapidamente i suoi studi, fino a pubblicare, nel 1614 il suo lavoro sui logaritmi.*

Ben presto i logaritmi si diffusero ovunque, e così tutti i calcoli si eseguivano usando le tavole dei logaritmi. Per questa ragione divenne conveniente trasformare le addizioni in moltiplicazioni, che, poi, venivano eseguite tramite le tavole dei logaritmi.

Le formule di Werner vennero adattate a questo nuovo scopo, esprimendole in una forma diversa; si ottennero così le formule di prostaferesi.

Le formule di prostaferesi

Ecco come si procede per passare dalle formule di Werner (1′) e (2′) alle nuove formule. Si indica con p il valore della somma $\alpha+\beta$ e con q il valore della differenza $\alpha-\beta$; si scrive dunque:

$$\begin{cases} p=\alpha+\beta \\ q=\alpha-\beta \end{cases}$$

da cui

$$\alpha=\frac{p+q}{2}$$

$$\beta=\frac{p-q}{2}.$$

Sostituendo nelle (1′) e (2′) al posto di α e β le espressioni ora ottenute, si ricavano le formule seguenti:

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p-\cos q=-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{sen}\,p+\mathrm{sen}\,q=2\,\mathrm{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{sen}\,p-\mathrm{sen}\,q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

e sono queste formule che oggi vengono dette "di prostaferesi".

10. Disegnare in modo semplice funzioni complicate, valendosi delle formule

Certamente oggi, nell'epoca dei calcolatori, non viene in mente di usare le formule di bisezione per compilare le tavole trigonometriche, né di usare le formule di prostaferesi per semplificare i calcoli.

Tuttavia possiamo servirci di queste formule per tracciare il grafico di funzioni goniometriche apparentemente complicate. Ecco due esempi.

A) Tracciare il grafico della funzione

$$y=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x+1.$$

Osserviamo subito che in questa funzione compaiono $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ al 2° grado; saranno perciò le formule di duplicazione che renderanno la funzione più semplice. Risulta, infatti (vedi p. 113):

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos 2x.$$

Possiamo così scrivere la funzione data nella forma:

$$y=\cos 2x+1.$$

E ora appare chiaro come disegnare il grafico a partire dalla cosinusoide d'equazione

$$y=\cos x,$$

rappresentata in Fig. 51. Si operano le seguenti trasformazioni:

— una contrazione lungo l'asse delle x, per dimezzare le ascisse; si ottiene la curva d'equazione:

$$y=\cos 2x,$$

rappresentata in Fig. 52;

— una traslazione lungo l'asse delle y di $+1$, per aggiungere 1 a tutte le ordinate. Si ottiene così il grafico della funzione

$$y=\cos 2x+1,$$

rappresentato in Fig. 53.

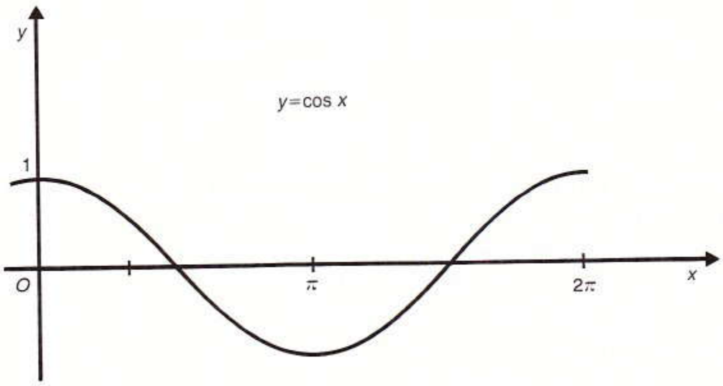


Fig. 51

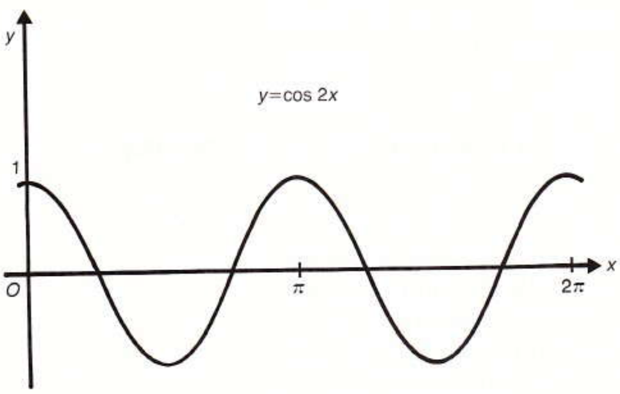


Fig. 52

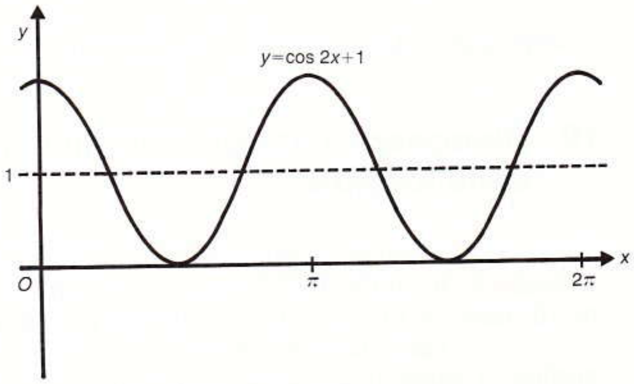


Fig. 53

B) Tracciare il grafico della funzione

$$y=2\cos 2x \cos x.$$

Ora compare il prodotto di funzioni goniometriche di diverso periodo. Se vogliamo ottenere rapidamente il grafico, converrà basarsi sulle formule di Werner, che trasformano la moltiplicazione in addizione. In particolare ricordiamo che risulta:

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta);$$

nel nostro caso si ottiene:

$$2\cos 2x\cos x=\cos(2x+x)+\cos(2x-x).$$

Possiamo così scrivere la funzione assegnata nella forma:

$$y=\cos 3x+\cos x.$$

È facile ora tracciarne il grafico, procedendo nel modo seguente: sullo stesso piano cartesiano si disegnano la cosinusoide

$$y=\cos x$$

(in grigio in Fig. 54) e la curva

$$y=\cos 3x$$

(in nero in Fig. 54), che si ottiene dalla cosinusoide operando lungo l'asse delle x una contrazione, che riduce le ascisse di un terzo; infine si disegna la somma grafica delle due curve precedenti.

Si ottiene così la curva in colore di Fig. 54, che rappresenta proprio la funzione

$$y=\cos 3x+\cos x.$$

Abbiamo ottenuto una curva *non sinusoidale*, dato che si tratta di *una combinazione lineare di sinusoidi di frequenza diversa.*

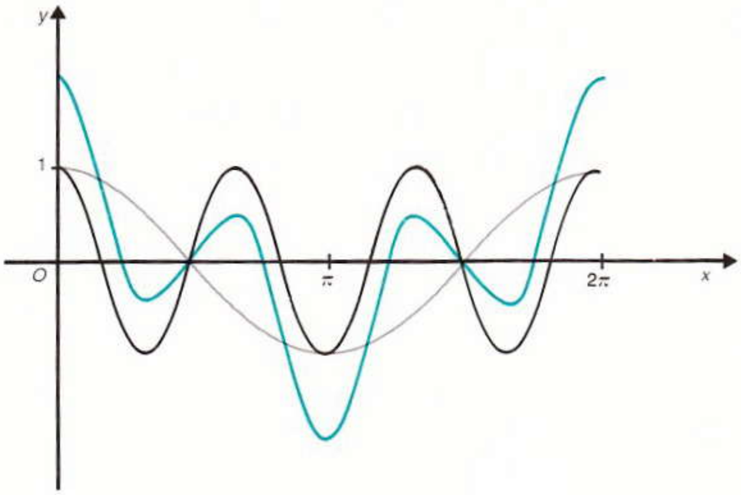


Fig. 54