1
Triangoli rettangoli e funzioni trigonometriche

1. Alla ricerca di relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo
2. Seno, coseno e tangente di particolari angoli acuti
3. Seno, coseno e tangente di un angolo acuto. Uso del calcolatore tascabile
4. Le funzioni trigonometriche
5. Risolvere problemi con le funzioni trigonometriche
6. Risoluzione di triangoli rettangoli. Casi possibili

1. Alla ricerca di relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo

La trigonometria è nata e si è sviluppata soprattutto per risolvere problemi. Vediamo subito qualche esempio.

I) L'interesse per l'astronomia è molto antico e ovunque presente nella storia: Greci, Indiani, Arabi, Cinesi, popoli dell'America in epoca precolombiana furono affascinati dalle stelle, dal Sole, dalla Luna e ne studiarono i movimenti. E proprio questo interesse condusse a risolvere tanti problemi; ecco un esempio classico, che risale al greco Aristarco di Samo (III secolo a.C.):

«Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante: quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?» (Fig. 1).

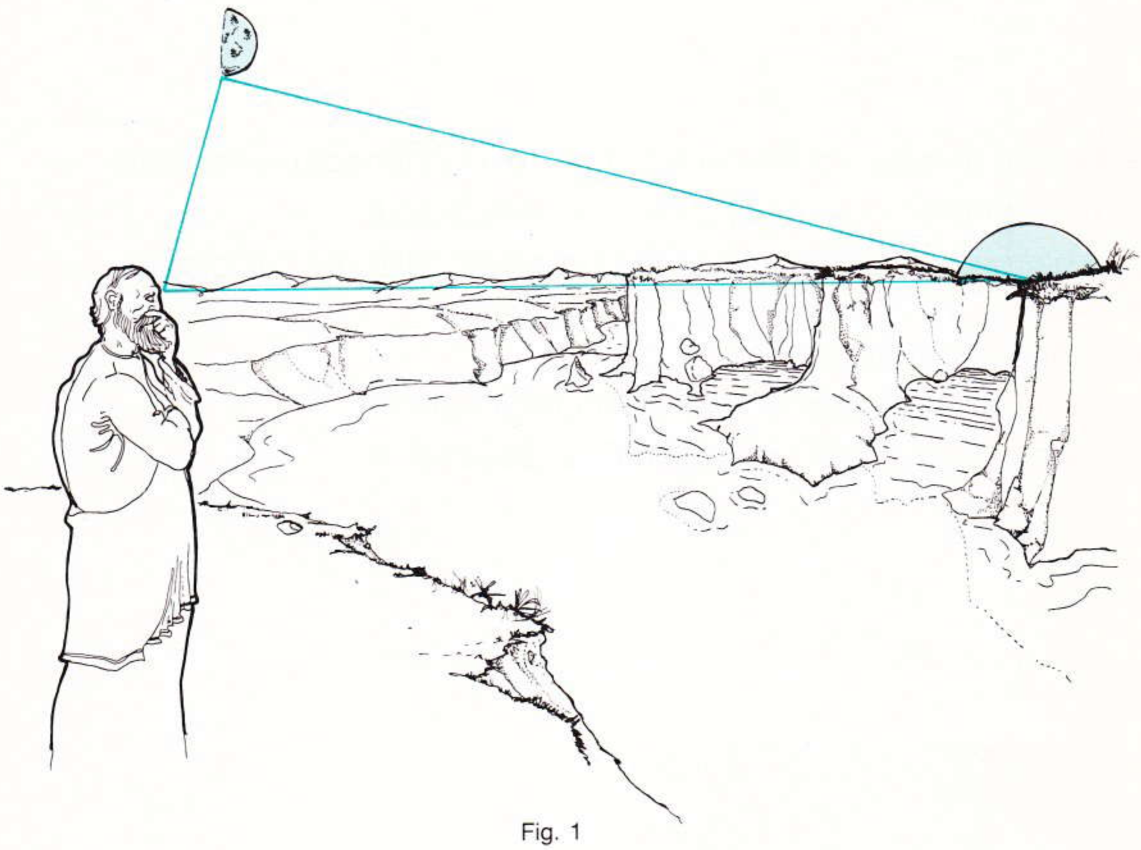


Fig. 1

Il problema così descritto è davvero di difficile comprensione, soprattutto perché al tempo di Aristarco non c'era un uso sistematico della misura degli angoli in gradi. Questa suddivisione del cerchio in 360 gradi (Fig. 2) sembra invece già nota all'astronomo greco Ipparco di Nicea (II secolo a.C.) che, probabilmente, aveva preso l'idea, come i Babilonesi, dal ciclo delle stagioni di 360 giorni. Questa suddivisione si trova poi nelle opere di Tolomeo d'Alessandria (II secolo d.C.) che, riprendendo l'uso Babilonese, suddivise il grado in 60 *«partes minutae primae»* e ciascuna di queste in 60 *«partes minutae secundae»*.

Ed è da queste espressioni latine che i traduttori hanno derivato le nostre espressioni "primo" e "secondo".

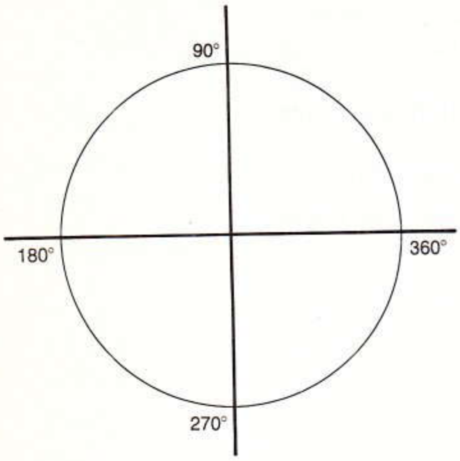


Fig. 2

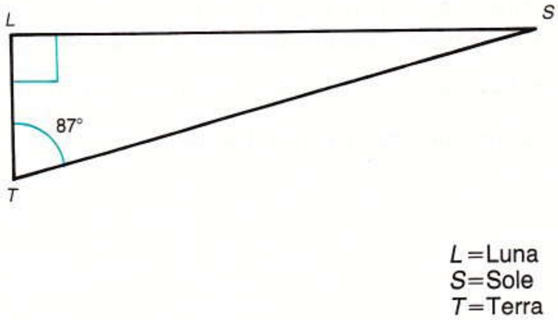


Fig. 3

Usando la misura degli angoli in gradi, il "quadrante" di Aristarco equivale ad un angolo di 90 gradi (Fig. 2) e un trentesimo di quadrante sarà un angolo ampio:

$$90° : 30 = 3°.$$

Perciò l'angolo indicato da Aristarco (un quadrante meno un trentesimo) risulta ampio:

$$90° - 3° = 87°.$$

Il problema può quindi essere schematizzato dalla Fig. 3: nel triangolo LTS si conosce l'angolo $L\hat{T}S = 87°$ e si vuole calcolare il rapporto fra la distanza Terra-Luna (cioè il cateto LT) e la distanza Terra-Sole (l'ipotenusa TS).

Ma quale relazione lega l'angolo $L\hat{T}S$ al rapporto $\frac{LT}{TS}$? Non lo sappiamo ancora, ma lo vedremo nelle pagine seguenti.

II) Lungo e faticoso è stato il cammino che ha portato a descrivere con leggi matematiche la rifrazione che subisce la luce, passando da un mezzo trasparente ad un altro. In Fig. 4 è stato fotografato il cammino della luce che passa dall'aria al vetro.

Si nota (Fig. 5) che raggio incidente a, raggio rifratto b e normale n si trovano sullo stesso piano, ma dall'esperienza risulta che l'angolo d'incidenza i e l'angolo di rifrazione r sono disuguali.

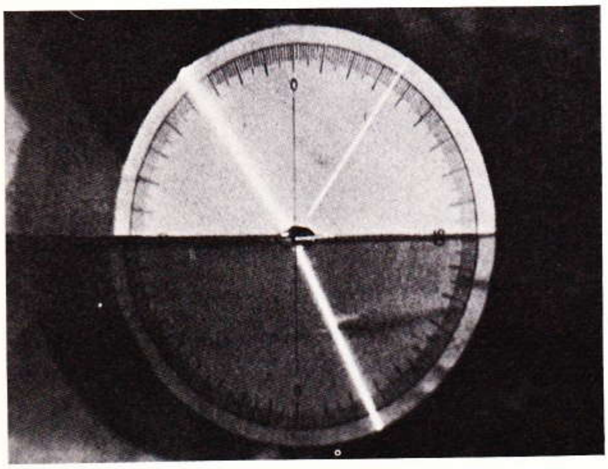


Fig. 4

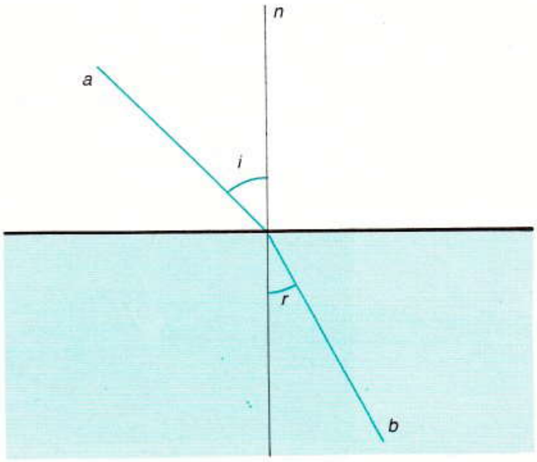


Fig. 5

C'è una legge matematica che lega i ed r? L'esperienza mostra che, all'aumentare di i, aumenta anche r ed è spontaneo pensare che ci sia una proporzionalità diretta fra i ed r. Così pensarono gli scienziati medioevali, e così pensò anche il grande Keplero, fermando la sua attenzione su valori piccoli di i.

Invece, osservando la tabella seguente, è immediato verificare che il valore del rapporto $\frac{i}{r}$ non si mantiene costante. Perciò i ed r non sono direttamente proporzionali.

i	r	$\frac{i}{r}$
10°	6°30′	1,5
20°	12°30′	1,6
30°	18°30′	1,6
40°	24°	1,7
50°	29°	1,7
60°	33°30′	1,8
70°	36°30′	1,9

Ma allora, quale relazione lega l'angolo d'incidenza all'angolo di rifrazione?

Solo nel XVII secolo si è trovata la formulazione corretta della legge della rifrazione. Sembra che questa legge sia stata trovata per la prima volta nel 1621 dall'olandese Willebord Snell, che però non pubblicò i suoi risultati. Fu successivamente formulata in modo strettamente empirico da Isaac Voss e, finalmente, fu pubblicata da Cartesio.

È facile spiegare la legge di Snell aiutandosi con un cerchio graduato, come in Fig. 6.

Misurando le semicorde AB e CD relative a diverse ampiezze di i e di r, si osserva che, nel passaggio della luce dall'aria al vetro, risulta sempre:

$$\frac{AB}{CD}=1{,}5.$$

Si scopre così che le semicorde AB e CD sono direttamente proporzionali.

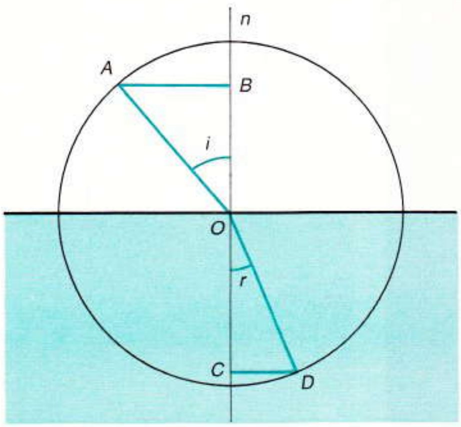


Fig. 6

Ma questa legge non è ancora del tutto soddisfacente, perché non lega gli angoli i ed r, ma le relative semicorde ed obbliga a servirsi sempre di un cerchio graduato. Eppure, osservando i due triangoli rettangoli ABO e CDO della Fig. 6, si capisce che la lunghezza dei cateti AB e CD dipende solo dagli angoli i ed r, dato che le ipotenuse sono uguali.

Dunque, anche fra i ed r ci deve essere una relazione; per trovare questa relazione, dobbiamo esaminare triangoli con la stessa ipotenusa e scoprire come un cateto è legato all'angolo opposto. Questo problema somiglia a quello di Aristarco; lo studieremo nelle pagine seguenti.

III) Ecco, infine, un problema accuratamente studiato da Indiani e Arabi fin dal X secolo: la lunghezza delle ombre al variare dell'altezza del sole. Si era notato (Fig. 7) che l'ombra di un paletto conficcato orizzontalmente su una parete verticale variava al variare dell'altezza del sole. Questo fenomeno fu studiato per trovare l'angolo di elevazione del sole a partire dalla lunghezza dell'ombra. La Fig. 8 schematizza la situazione studiata e fa capire che, ancora una volta, entrano in gioco relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.

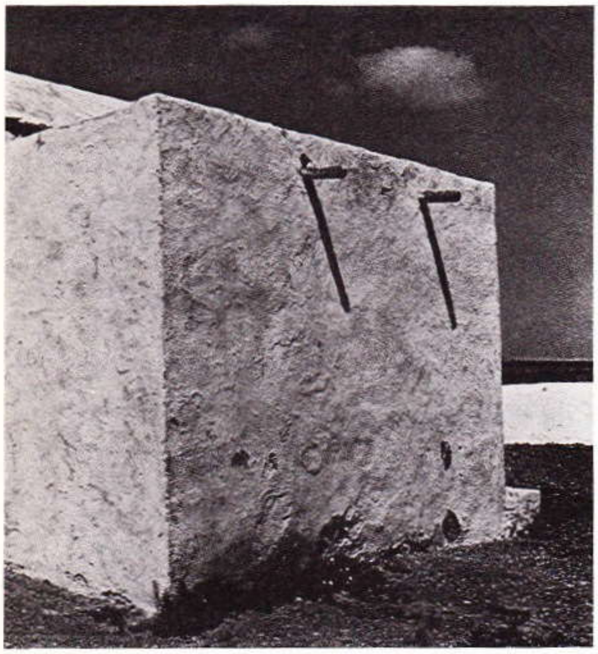


Fig. 7

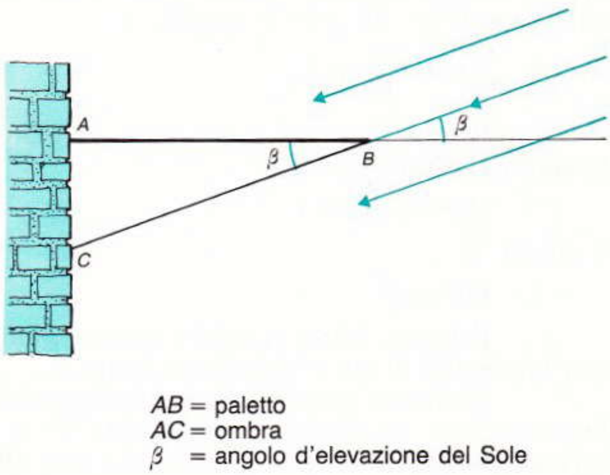


Fig. 8

Tre esempi, dunque, di natura apparentemente diversa: distanze astronomiche, rifrazione della luce, ombre... ma in tutti riconosciamo lo stesso problema geometrico: scoprire in che modo sono legati i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo.

2. Seno, coseno e tangente di particolari angoli acuti

Cominciamo ad esaminare dei particolari triangoli rettangoli, già noti dalla geometria elementare.

A) Triangoli rettangoli con un angolo di 30°

La Fig. 9 rappresenta il triangolo rettangolo OAB con l'ipotenusa OA lunga 2 e l'angolo $\widehat{O}$ di 30°.

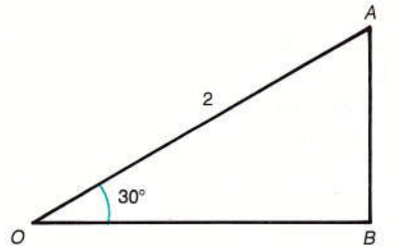


Fig. 9

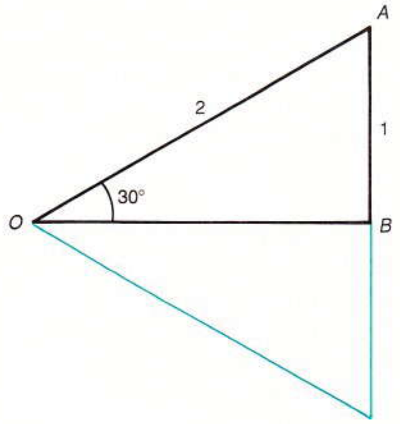


Fig. 10

Siamo capaci di scoprire la lunghezza del lato AB? Osserviamo che, se l'angolo in $\widehat{O}$ è di 30°, quello in $\widehat{A}$ è di 60°, e 30° è proprio la metà di 60°. Allora possiamo pensare che OAB sia la metà di un triangolo equilatero (Fig. 10); perciò risulta:

$$AB = \frac{OA}{2} = 1.$$

Ricordando poi il teorema di Pitagora, è facile calcolare la lunghezza di OB; risulta:

$$OB^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

e quindi

$$OB = \sqrt{3}.$$

Dunque, siamo riusciti a trovare i lati di un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e l'ipotenusa lunga 2.

Possiamo generalizzare questo risultato? Ecco, riflettiamo che l'osservazione risolutoria è stata che 30° è la metà di 60°; dunque, un'osservazione relativa solo all'angolo, non all'ipotenusa. È allora chiaro che possiamo ripetere il ragionamento per altri triangoli rettangoli, purché abbiano un angolo di 30°.

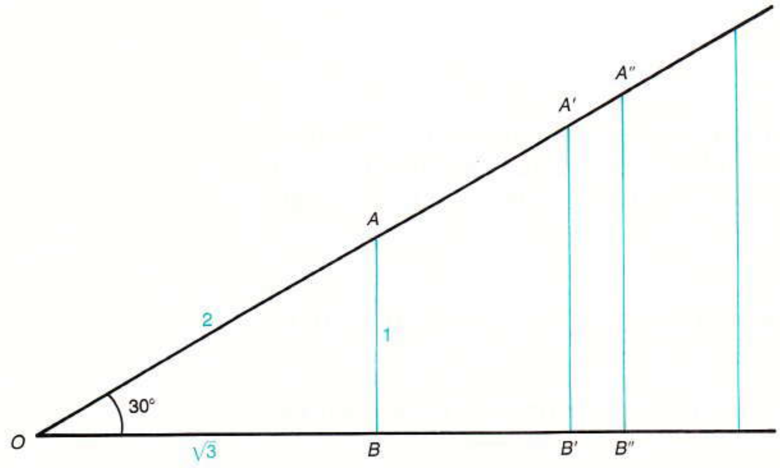


Fig. 11

Anzi, possiamo costruire infiniti triangoli di questo tipo nel modo seguente: disegnamo un angolo di 30°, indichiamo su uno dei suoi lati tanti punti A, A', A''... e da questi conduciamo le perpendicolari AB, $A'B'$, $A''B''$ all'altro lato (Fig. 11).

Otteniamo tanti triangoli rettangoli, tutti con un angolo di 30° e simili fra loro perché hanno gli angoli uguali. Si ha dunque:

$$\frac{A'B'}{OA'}=\frac{AB}{OA}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{OB'}{OA'}=\frac{OB}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{A'B'}{OB'}=\frac{AB}{OB}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Queste formule valgono per tutti i triangoli rettangoli con un angolo di 30°; conviene riscriverle mettendo meglio in evidenza l'angolo di 30°:

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30°}{\text{ipotenusa}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30°}{\text{ipotenusa}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30°}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

B) Triangoli rettangoli con un angolo di 45°

La Fig. 12 rappresenta il triangolo rettangolo OAB che ha un angolo di 45° e un cateto lungo 1.

Ovviamente, anche l'altro angolo acuto è di 45° e, quindi, il triangolo è la metà del quadrato di lato 1; dunque l'ipotenusa OA è lunga $\sqrt{2}$. Perciò è immediato trovare i lati di un triangolo rettangolo con un angolo di 45° e un cateto lungo 1. Anzi, come abbiamo fatto prima, potremo pensare a tutti i triangoli simili a questo (Fig. 13). Si ha:

$$\frac{A'B'}{OA'}=\frac{AB}{OA}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{OB'}{OA'}=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{A'B'}{OB'}=\frac{AB}{OB}=1.$$

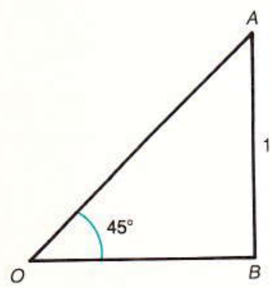


Fig. 12

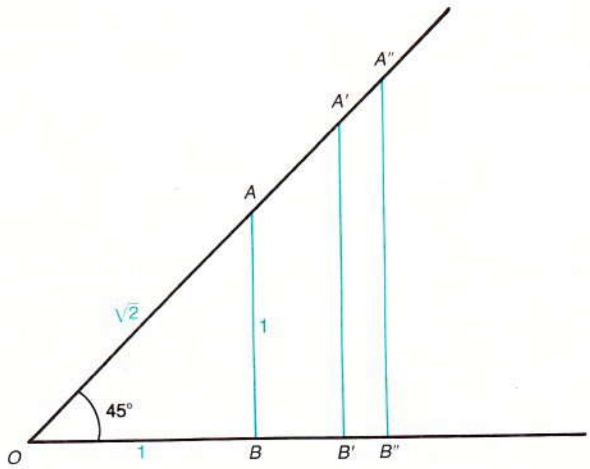


Fig. 13

Per fissare meglio l'attenzione sull'angolo di 45°, scriveremo poi:

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 45°}{\text{ipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 45°}{\text{ipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 45°}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 45°} = 1.$$

In questo modo abbiamo individuato dei rapporti che rimangono costanti una volta fissato un angolo acuto. Questi rapporti non dipendono dal particolare triangolo rettangolo, piccolo o grande che sia; sono invece legati solamente all'ampiezza dell'angolo (nei nostri esempi, 30° e 45°).

Ai numeri che indicano il valore di questi rapporti è stato dato un nome particolare: **seno**, **coseno**, **tangente**. Si scrive dunque (Figg. 14 e 15):

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30°}{\text{ipotenusa}} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30°}{\text{ipotenusa}} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30°}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30°} = \text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

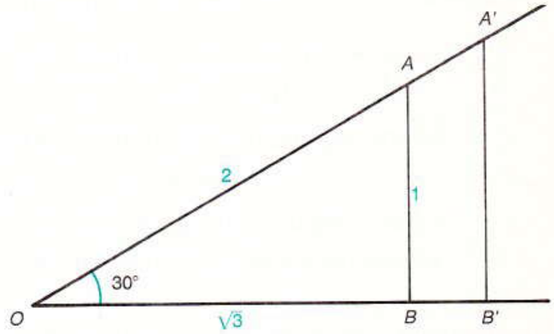


Fig. 14

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 45°}{\text{ipotenusa}} = \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 45°}{\text{ipotenusa}} = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 45°}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 45°} = \text{tg } 45° = 1$$

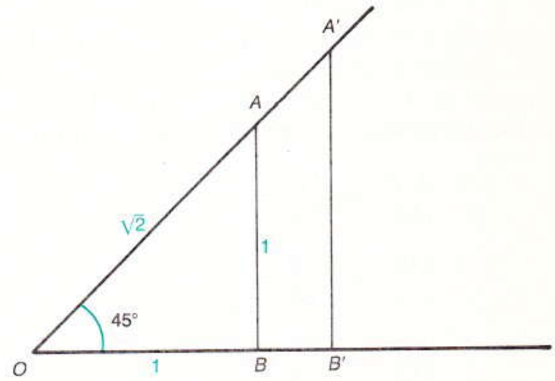


Fig. 15

La scrittura "sen 30°" si legge "seno dell'angolo di 30°" o, più brevemente, "seno di 30°"; così "sen 45°" si legge "seno di 45°".

Il nome "seno" fu introdotto nel XII secolo da Roberto di Chester, uno dei più accurati traduttori di opere arabe di astronomia e trigonometria. La storia è veramente curiosa ed è legata al fatto che nelle lingue semitiche non si scrivono le vocali; ecco qual è la ragione: in un'antica opera indiana (il Siddhantas), scritta in sanscrito verso il 400 d.C., compariva una relazione fra metà della corda di un cerchio e metà dell'angolo al centro sotteso dall'intera corda (Fig. 16).

Il nome dato alla lunghezza del segmento AH era "jiva" che significa, appunto, "corda". Gli arabi tradussero la parola jiva con "jiba", ma scritta senza le vocali; perciò Roberto di Chester la interpretò come "jiaib", che significa "baia", "insenatura" e la tradusse in latino con "sinus".

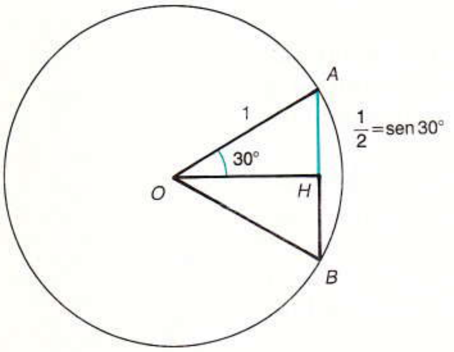


Fig. 16

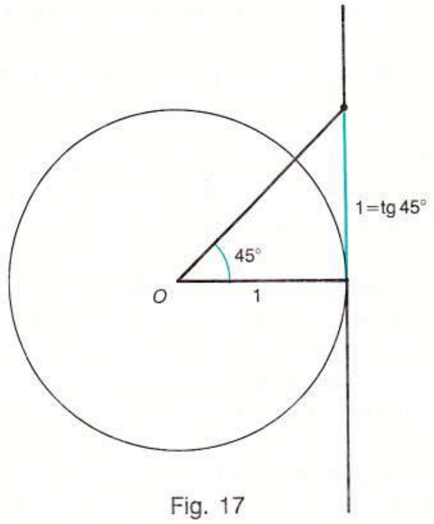


Fig. 17

La scrittura "cos 30°" si legge "coseno dell'angolo di 30°", o più semplicemente, "coseno di 30°"; il termine "coseno" è legato ad una proprietà degli angoli complementari che vedremo nelle pagine seguenti.

Infine, "tg 30°" si legge "tangente dell'angolo di 30°" o, più brevemente, "tangente di 30°"; in qualche testo è indicata con "tan 30°". Il termine "tangente" proviene forse dall'abitudine araba di ottenere la tangente di un angolo a partire dalla retta tangente ad un cerchio di raggio unitario (Fig. 17).

3. Seno, coseno e tangente di un angolo acuto. Uso del calcolatore tascabile

I procedimenti seguiti nel paragrafo precedente, a partire da angoli acuti particolari, possono essere ripetuti a partire da un qualunque angolo acuto, ampio α. Così si ha (Fig. 18):

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{ipotenusa}} = \text{sen}\,\alpha$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo}}{\text{ipotenusa}} = \cos\alpha$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{cateto adiacente all'angolo}} = \text{tg}\,\alpha$$

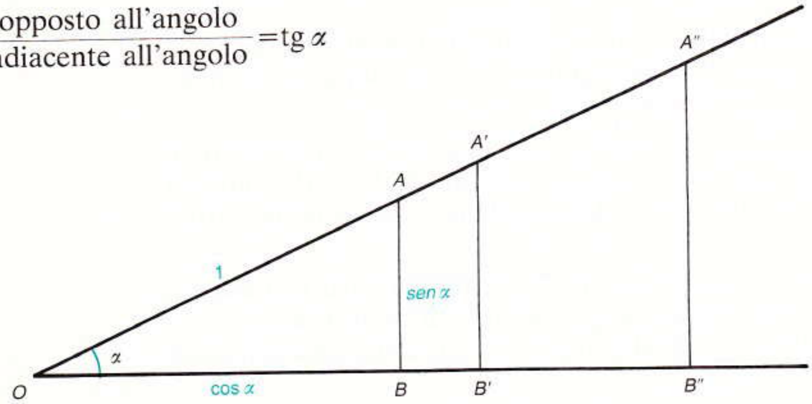


Fig. 18

Un'immediata osservazione: bisogna prestare particolare attenzione quando si usano i simboli $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$. Infatti, nel calcolo letterale un'espressione come

$$abc\alpha$$

indica abitualmente il prodotto di quattro numeri rappresentati dalle lettere a, b, c, α.

Invece abbiamo visto che, per esempio, l'espressione

$$\operatorname{sen}\alpha$$

non indica un prodotto. Si tratta invece — abbiamo detto — dell'abbreviazione di "seno dell'angolo α" e ricorda, dunque, in modo assai conciso il procedimento necessario per calcolare il seno dell'angolo a partire dall'angolo stesso.

E ora, impadroniamoci meglio del procedimento che abbiamo descritto, lavorando ancora su di un esempio numerico: calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo di 70°.

Prima di tutto, disegnamo l'angolo di 70° aiutandoci con un goniometro; poi costruiamo un triangolo rettangolo come quello della Fig. 19.

Per costruire il triangolo OAB abbiamo fissato l'ipotenusa OA lunga 5 cm; abbiamo poi misurato i cateti AB e OB, trovando:

$$AB \cong 4{,}70 \text{ cm} \qquad OB \cong 1{,}71 \text{ cm}.$$

Risulta così:

$$\operatorname{sen} 70° \cong \frac{4{,}70}{5} = 0{,}94$$

$$\cos 70° \cong \frac{1{,}71}{5} = 0{,}34$$

$$\operatorname{tg} 70° \cong \frac{4{,}70}{1{,}71} = 2{,}75.$$

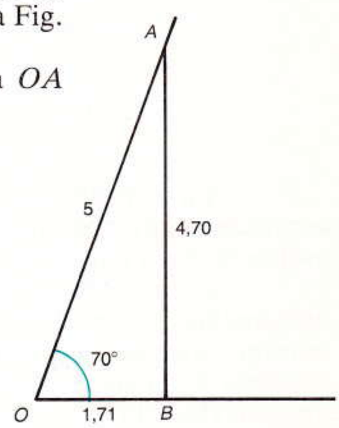


Fig. 19

È chiaro che un'analoga costruzione ci permette di determinare seno, coseno e tangente di qualunque angolo acuto. Ma è certo inutile ripetere ogni volta questo metodo costruttivo che richiede tempo e precisione; possiamo farlo una volta per tutte, determinando seno, coseno e tangente degli angoli che ci interessano e scrivendo i dati ottenuti in una tabella.

Si costruiscono così le *tavole trigonometriche* (vedi p. 402). Queste tavole, che si trovano in commercio, sono state compilate per la prima volta molti secoli fa, presumibilmente durante il II secolo a.C. Si ritiene che l'autore fosse l'astronomo Ipparco di Nicea, che per questo motivo fu chiamato "padre della trigonometria".

Oggi sempre più spesso le tavole sono sostituite dal calcolatore tascabile. È facile usare un calcolatore a questo scopo; basta qualche semplice avvertenza, di cui ora parleremo.

In generale, i calcolatori hanno la possibilità di esprimere la misura degli angoli con unità differenti: gradi sessagesimali, gradi centesimali, radianti. Vediamo meglio queste unità di misura.

— *Grado sessagesimale* (che useremo in questo testo): l'angolo giro è suddiviso in 360 parti, e quindi l'angolo retto in 90. Sul calcolatore il grado è abitualmente indicato con DEG, abbreviazione della parola inglese *degree*.

— *Grado centesimale*: l'angolo retto è suddiviso in 100 parti e, dunque, l'angolo giro in 400. Sul calcolatore questa unità di misura degli angoli è abitualmente indicata con GRAD, abbreviazione della parola inglese *grade*.

— *Radiante*: è un'unità di misura di cui ci occuperemo nel Cap. 3, n. 2; sul calcolatore è indicato con RAD, abbreviazione dell'inglese *radiant*.

Inoltre, la maggior parte dei calcolatori considera sottomultipli centesimali del grado, cioè il grado viene diviso in 100 parti anziché in 60. Così, quando sul visualizzatore compare, come misura di un angolo, il numero 57.35, questo indica usualmente l'angolo ampio

$$57° \text{ e } \left(\frac{35}{100}\right)°$$

e *non* l'angolo ampio 57°35'.

Comunque, per usare correttamente il calcolatore è opportuno leggere accuratamente le istruzioni per l'uso.

Accertiamoci, dunque, che il calcolatore sia predisposto per misurare gli angoli in gradi sessagesimali e... proviamo.

— Per ottenere sen 70°, basta premere la sequenza di tasti

$\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SIN}}$

e si vede comparire sul visualizzatore il numero

0.9396926,

cioè

0,9396926.

— Per ottenere cos 70°, si preme

$\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{COS}}$

e si ottiene:

0,3420201.

— Per ottenere tg 70°, si preme

$\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{TAN}}$

e si ottiene:

2,7474774.

È facilissimo.

Proviamo ora a trovare il seno di 45° che — abbiamo visto nel paragrafo 2 — vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Premendo la sequenza di tasti

$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{SIN}}$

otteniamo

0,7071068.

Come si spiega questo risultato? Ricordiamo che $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un numero irrazionale, cioè un numero decimale illimitato non periodico; è chiaro che, di questi numeri, il calcolatore ci mostra solo un valore approssimato, in genere con 7 cifre decimali. Di questo si deve tener conto quando si risolvono dei problemi, dato che la precisione richiesta dipende proprio dal tipo di questione esaminata. Ad esempio, il seno dell'angolo di rientro dello *Space Shuttle* dev'essere calcolato con almeno 8 cifre decimali, se non si vuol rischiare di distruggere il veicolo.

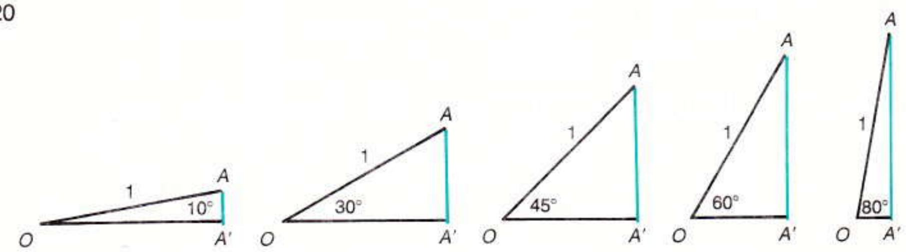
Le considerazioni svolte conducono ad un'osservazione di carattere generale: il seno, il coseno e la tangente di un angolo sono rapporti fra segmenti generalmente incommensurabili e quindi sono *numeri irrazionali*. Abbiamo detto *generalmente*, perché in alcuni casi questo non è vero; ad esempio, abbiamo visto che $\text{tg}\,45°=1$ e che $\text{sen}\,30°=\frac{1}{2}$.

4. Le funzioni trigonometriche

Usando il calcolatore tascabile, è facile compilare una tabella come quella presentata in Fig. 20, dove abbiamo riportato il valore del seno per alcuni angoli, approssimando il risultato fornito dal calcolatore.

Nella stessa figura abbiamo anche visualizzato la tabella, disegnando tanti triangoli rettangoli con l'ipotenusa OA lunga 1 e con l'angolo α crescente. In questo modo, ogni valore di sen α è visualizzato dalla lunghezza del cateto AA' opposto all'angolo, dato che risulta sen $\alpha = \dfrac{AA'}{OA}$.

Fig. 20



α	sen α
10°	0,1736
30°	0,5
45°	0,7071
60°	0,8660
80°	0,9848

Osservando la tabella, si nota che senα non raggiunge il valore 1. La cosa è evidente: sen α indica il rapporto fra cateto e ipotenusa e il cateto è sempre più piccolo dell'ipotenusa.

È chiaro che possiamo arricchire ancora la nostra tabella, usando sempre il calcolatore tascabile, come è indicato nello schema seguente:

angolo α	tasto del calcolatore	sen α
2°	$\xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}}$	0,0350
15°	$\xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}}$	0,2588
78°	$\xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}}$	0,9781
$43''30'15''$	$\xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}}$	0,6884

Abbiamo così individuato un procedimento che permette di associare ad un angolo un ben determinato valore del seno di quell'angolo. La corrispondenza:

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} \text{sen}\,\alpha$$

è una *funzione*, cioè una legge che fa corrispondenre ad un valore di α *un solo valore* di sen α.

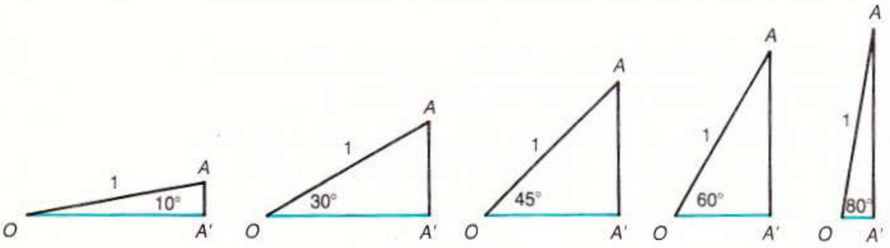
Considerazioni analoghe sono suggerite dalla Fig. 21, dove abbiamo riportato, per qualche angolo α, il relativo valore di cos α. Ora, il valore di cos α è visualizzato dalla lunghezza del cateto adiacente all'angolo.

Troviamo così che anche la legge di corrispondenza

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} \cos\alpha$$

è una funzione, dato che fa corrispondere ad un angolo acuto *un solo*

Fig. 21



α	$\cos \alpha$
10°	0,9848
30°	0,8660
45°	0,7071
60°	0,5
80°	0,1736

valore del coseno. Questo valore è, anche questa volta, più piccolo di 1, perché $\cos \alpha$ è dato dal rapporto fra un cateto e l'ipotenusa.

Infine, la Fig. 22 mostra una tabella in cui abbiamo riportato, per qualche angolo α, il relativo valore di $\operatorname{tg} \alpha$. Anche in questo caso abbiamo visualizzato i valori di $\operatorname{tg} \alpha$ costruendo triangoli rettangoli OAA' tutti con il cateto OA' lungo 1. Così $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{AA'}{OA'}$ rappresenta semplicemente la misura del cateto AA'.

Dalla Fig. 22 risulta come la funzione

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{TAN}}} \operatorname{tg} \alpha$$

faccia corrispondenre ad un angolo acuto un solo valore della tangente. Ma, ora, $\operatorname{tg} \alpha$ può assumere anche valori molto grandi, perché il cateto opposto all'angolo può essere molto più lungo del cateto adiacente.

Le tre funzioni ora esaminate:

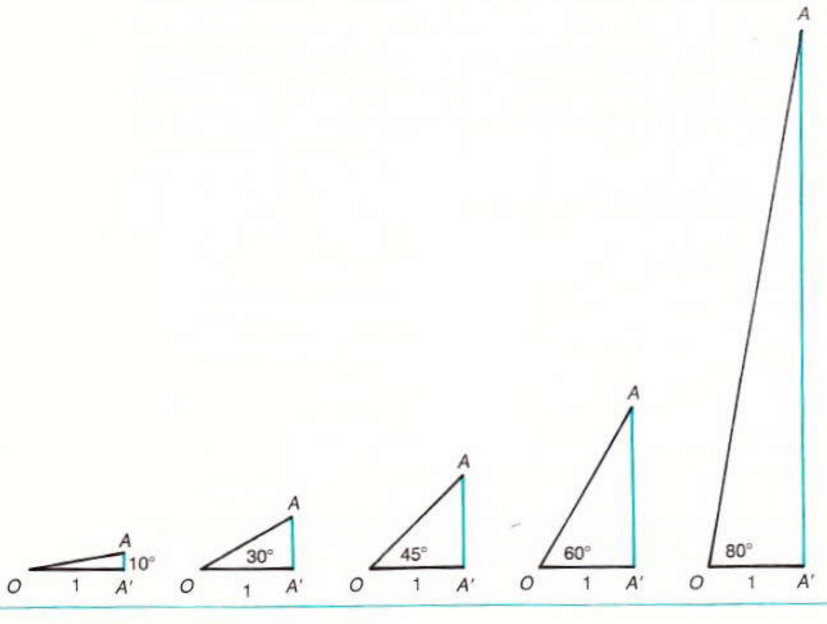
$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{COS}}} \cos \alpha$$

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{TAN}}} \operatorname{tg} \alpha$$

prendono il nome di *funzioni trigonometriche* per ricordare che le leggi di corrispondenza sono costruite basandosi su misure relative a triangoli (dal greco *trigonon*=triangolo e *metron*=misura).

Fig. 22



α	$\operatorname{tg} \alpha$
10°	0,1763
30°	0,5774
45°	1
60°	1,7321
80°	5,6713

5. Risolvere problemi con le funzioni trigonometriche

Con le funzioni trigonometriche che abbiamo appena introdotto, siamo in grado di risolvere i problemi proposti nel paragrafo 1.

I) Riprendiamo il problema di Aristarco (Fig. 23), e ricordiamo che si voleva conoscere il rapporto fra la distanza LT (Terra-Luna) e la distanza TS (Terra-Sole), conoscendo l'angolo $L\hat{T}S$ che Aristarco aveva valutato di 87°.

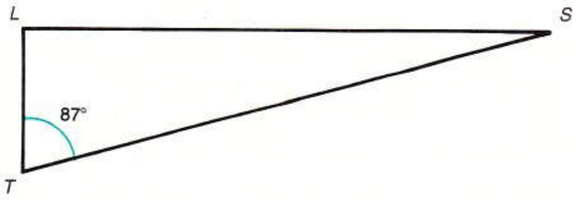


Fig. 23

La risposta è immediata; si ha:

$$\frac{LT}{TS}=\cos 87°\cong 0{,}0523.$$

Questo calcolo porta a concludere che risulta:

$$TS\cong\frac{LT}{0{,}0523}$$

ossia

$$TS\cong 19\,LT.$$

Dunque, il Sole sarebbe lontano dalla Terra circa 19 volte più della Luna. Questo risultato è grossolanamente errato; infatti, oggi conosciamo le distanze LT e TS, che valgono:

$$LT\cong 380.000 \text{ km}$$
$$TS\cong 145.000.000 \text{ km}.$$

Perciò si ha:

$$TS\cong 382\,LT.$$

Che cosa ha portato Aristarco a sbagliare? Non il procedimento, ma gli strumenti di misura: il metodo era corretto e, ancora oggi, è completamente valido, ma i grossolani strumenti di misura allora disponibili avevano permesso solo una valutazione molto imprecisa dell'angolo $L\hat{T}S$. Invece, le misure attuali di quest'angolo forniscono:

$$L\hat{T}S=89°51'.$$

Con questa nuova misura dell'angolo, si ottiene:

$$\frac{LT}{TS}=\cos 89°51'\cong 0{,}00262$$

da cui

$$TS\cong\frac{LT}{0{,}00262}$$

e infine

$$TS\cong 382\,LT.$$

Un errore che sembrava così modesto nella misura dell'angolo (meno di 3 gradi su 89) ha portato dunque ad un enorme errore nel valore del rapporto!

II) Esaminiamo il fenomeno della rifrazione (Fig. 24). Si è detto che, quando un raggio di luce passa dall'aria al vetro, si ha:

$$\frac{AB}{CD}=1{,}5.$$

Ma, allora, risulta anche

$$\frac{\frac{AB}{AO}}{\frac{CD}{OD}}=1{,}5$$

essendo $AO=OD$ il raggio del cerchio.
Ora, osservando il triangolo rettangolo AOB, si ha:

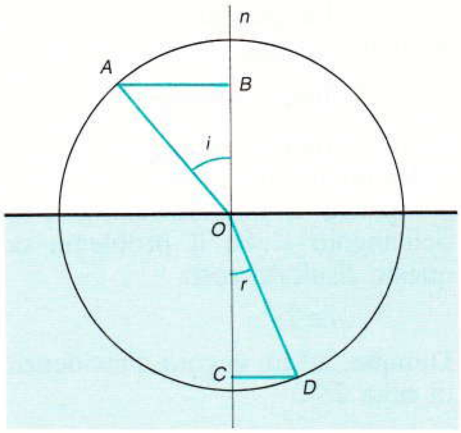


Fig. 24

$$\frac{AB}{AO}=\text{sen } i,$$

e, analogamente, a partire dal triangolo rettangolo DOC si ottiene:

$$\frac{CD}{OD}=\text{sen } r.$$

Perciò la legge della rifrazione si può esprimere nella forma:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}=1{,}5.$$

Sono dunque proporzionali i seni degli angoli i ed r e non gli angoli stessi.

La legge ora trovata ci permette di prevedere l'angolo di rifrazione corrispondente a qualunque angolo d'incidenza, senza dover ripetere l'esperienza.

Ecco un semplice esempio numerico: quanto vale l'angolo di rifrazione, se l'angolo d'incidenza è di 40°? Avremo:

$$\frac{\text{sen } 40°}{\text{sen } r}=1{,}5$$

da cui ricaviamo:

$$\text{sen } r=\frac{\text{sen } 40°}{1{,}5}.$$

Usiamo ora il calcolatore per trovare il valore di sen r. Ecco come fare:

a) calcoliamo sen 40°, premendo la sequenza di tasti

$\boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{SIN}}$

Otteniamo così, sul visualizzatore, il numero 0.6427876.

b) Dividiamo il numero presente sul visualizzatore per 1,5, premendo la sequenza di tasti:

$\boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

Si ottiene così 0,4285251, che è il valore di sen r. Come possiamo ora procedere per trovare il valore di r? Ci rendiamo conto che non possiamo ripetere il procedimento seguito finora. Infatti, prima era dato un angolo (40°) e se ne calcolava il seno, applicando la funzione

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{SIN}}} \text{sen } \alpha$$

che ad un dato angolo fa corrispondere il relativo seno; ora, invece, è dato il valore di sen α e dobbiamo risalire all'angolo α, cioè dobbiamo *invertire la funzione*.

La maggior parte dei calcolatori realizza questo mediante la sequenza di tasti:

INV SIN

("inv" proviene proprio da "invertire"). Dato che sul visualizzatore già abbiamo il valore di $\operatorname{sen} r$, basta premere i tasti INV SIN per veder comparire il numero 23.373994, che è, appunto, la misura in gradi dell'angolo r. Se il problema ce lo consente, possiamo approssimare questo risultato così:

$$r \cong 23°.$$

Dunque, ad un angolo d'incidenza di 40° ne corrisponde uno di rifrazione di circa 23°.

6. Risoluzione di triangoli rettangoli. Casi possibili

Consideriamo il III problema proposto nel paragrafo 1: calcolare l'angolo di elevazione del Sole a partire dall'ombra di un paletto (Fig. 25). Esaminiamo un esempio numerico: il paletto AB è lungo 50 cm e si vuole sapere quanto è alto il Sole quando l'ombra AC è lunga 30 cm.

Si osserva (Fig. 25) che l'angolo di elevazione del Sole, β, è uguale all'angolo $\widehat{B}$ del triangolo rettangolo ABC. Perciò vale la relazione:

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} \beta.$$

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$\frac{30}{50} = \operatorname{tg} \beta$$

ossia

$$\operatorname{tg} \beta = 0{,}6.$$

Abbiamo così il valore della tangente dell'angolo e vogliamo risalire all'angolo β. Useremo anche in questo caso il calcolatore, tenendo presente che dobbiamo invertire la funzione

$$\alpha \xrightarrow{\boxed{\text{TAN}}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Premeremo perciò la sequenza di tasti

0 · 6 INV TAN

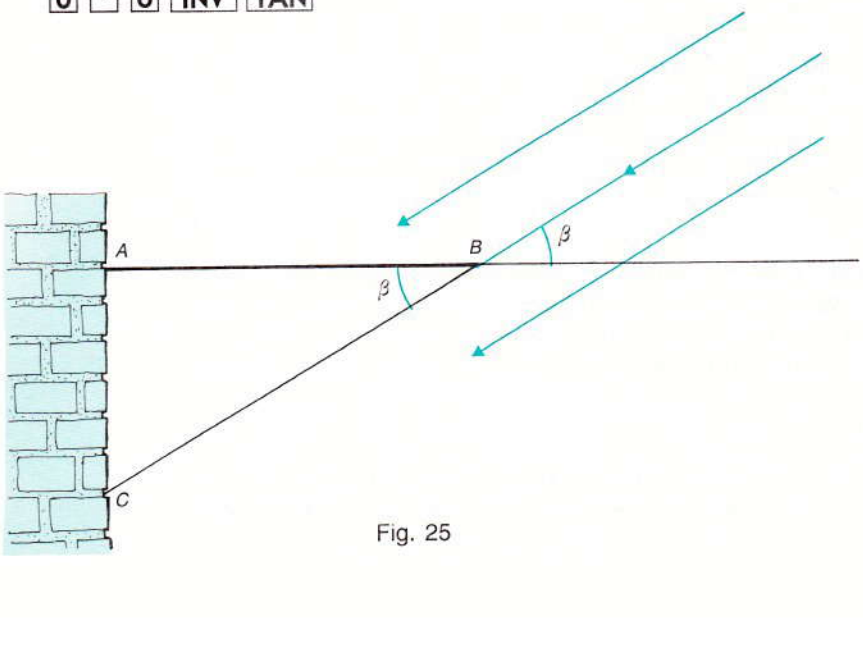


Fig. 25

Sul visualizzatore compare il numero 30.963757, che è la misura in gradi dell'angolo cercato. Se la precisione richiesta non è elevata, possiamo approssimare questo valore scrivendo che risulta:

$$\beta \cong 31°.$$

Ecco ora un problema più attuale: si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, di lato 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore rispetto alla latitudine del luogo. Perciò, trovandosi Roma a 41° di latitudine, il pannello dovrà essere inclinato di 31°. A che altezza da terra arriverà la sommità del pannello? A che distanza dalla parete si troverà la sua base?

Osservando la Fig. 26, si capisce che si deve fissare l'attenzione sul triangolo rettangolo AHB, di cui conosciamo l'ipotenusa AB lunga 3 m e l'angolo $\widehat{B}$ ampio 31°. Dovremo determinare la lunghezza di AH per rispondere alla prima domanda e quella di HB per rispondere alla seconda.

Usando le funzioni trigonometriche, possiamo scrivere:

$$\frac{AH}{AB} = \operatorname{sen}\beta \qquad \frac{HB}{AB} = \cos\beta$$

cioè

$$AH = AB\operatorname{sen}\beta \qquad HB = AB\cos\beta.$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$AH = 3\operatorname{sen}31° \qquad HB = 3\cos 31°$$

e poiché

$$\operatorname{sen}31° \cong 0{,}515 \qquad \cos 31° \cong 0{,}857$$

si trova:

$$AH \cong 1{,}545 \text{ m} \qquad HB \cong 2{,}571 \text{ m}.$$

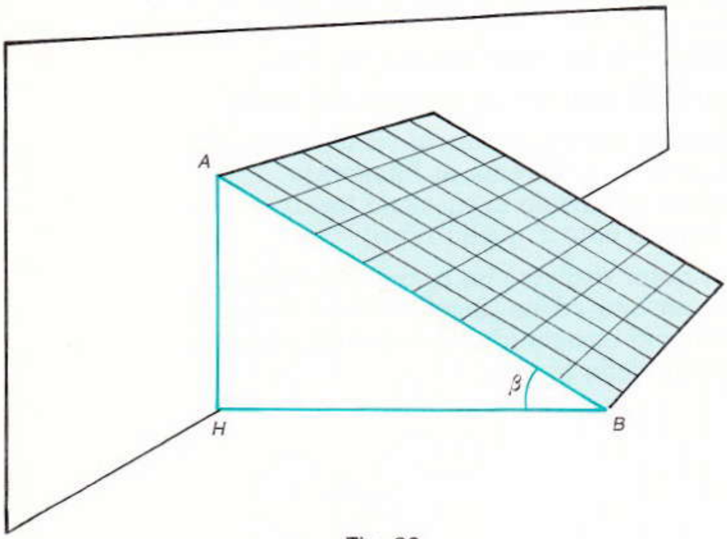


Fig. 26

Questi due problemi ora esaminati sono i primi esempi di una particolare applicazione delle funzioni trigonometriche: determinare lati ed angoli di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono solo alcuni elementi, cioè — come si dice — *risolvere un triangolo rettangolo*.

Confrontando i due problemi ora risolti con quelli visti nel paragrafo precedente, si osserva che nel problema di Aristarco non si arriva a conoscere le distanze Terra-Luna o Terra-Sole, ma solo il loro rapporto. In altre parole, non si riesce a risolvere il triangolo rettangolo LTS, di cui si conoscono solo gli angoli.

Invece, negli ultimi due problemi si possono trovare tutti gli elementi dei triangoli rettangoli esaminati, di cui si conoscono due lati e un angolo acuto. Perché questa diversità? e quali e quanti elementi di un triangolo rettangolo occorre conoscere per poter determinare tutti gli altri elementi?

Riflettiamo: il triangolo LTS proposto nel problema di Aristarco non è l'unico che abbia quegli angoli assegnati. Possiamo infatti disegnare tanti triangoli simili a LTS, come quelli di Fig. 27.

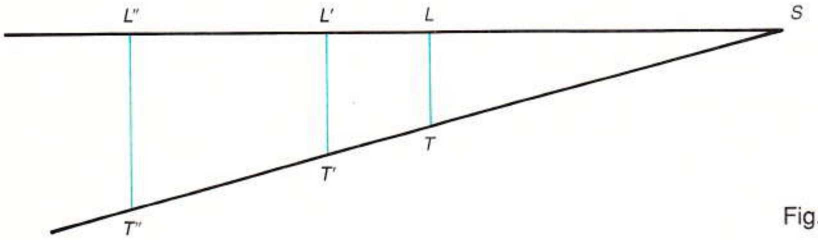


Fig. 27

Si capisce così che, per poter determinare lati ed angoli incogniti di un triangolo rettangolo, occorre che gli elementi noti determinino un solo triangolo. Gli elementi indispensabili per determinare un triangolo rettangolo sono stabiliti dai criteri di uguaglianza che si riferiscono ai triangoli rettangoli; ricordiamo perciò i criteri di uguaglianza e poi applichiamoli ai triangoli rettangoli.

Ecco i tre criteri di uguaglianza:

I) si può costruire un solo triangolo di cui siano fissati due lati e l'angolo compreso;

II) si può costruire un solo triangolo di cui siano fissati un lato e due angoli;

III) si può costruire un solo triangolo di cui siano fissati i tre lati.

Questi tre criteri, nel caso dei triangoli rettangoli, diventano:

I) si può costruire un solo triangolo rettangolo di cui siano fissati due lati (il terzo lato si può trovare con il teorema di Pitagora);

II) si può costruire un solo triangolo rettangolo di cui siano fissati un lato ed un angolo acuto (l'altro angolo noto è quello retto).

Si conclude così che, per poter risolvere un triangolo rettangolo, basta conoscere due lati, oppure un lato ed un angolo acuto. In questi casi, possiamo determinare gli elementi incogniti basandoci sulle relazioni che conosciamo e che sono riassunte nella Fig. 28.

$b^2+c^2=a^2$

$\beta=90°-\gamma$

$\operatorname{sen}\beta=\frac{b}{a} \qquad \cos\beta=\frac{c}{a} \qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{c}$

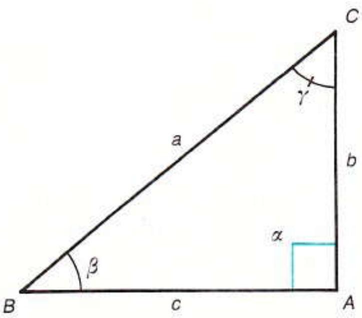


Fig. 28