3
Complementi

La nascita della sinusoide come "compagna della cicloide". Le equazioni della sinusoide e della cicloide

Nella "nota storica" di p. 161 abbiamo visto come dal rotolamento di una ruota lungo una retta nasca una curva: la cicloide. È una curva formata da una successione di archi compresi fra due cuspidi (Fig. 1).

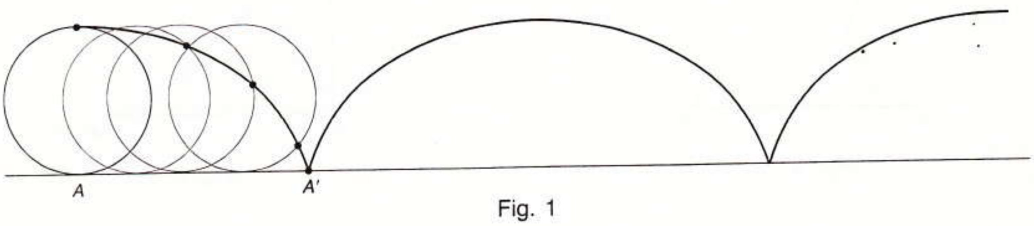

Fig. 1

Abbiamo anche parlato della "sfida" che si accese fra i matematici della prima metà del Seicento sul come determinare l'area della cicloide compresa fra due cuspidi. È proprio questo problema, risolto dal francese Roberval in base al Principio di Cavalieri, che ha condotto alla scoperta di una nuova curva, la "compagna della cicloide"; curva che fu, in seguito, riconosciuta come una sinusoide. In queste pagine vedremo come si riesce a dimostrare che questa curva è veramente una sinusoide.

Riprendiamo ora il discorso già fatto nella "nota storica". Riferiamoci alla Fig. 2: il problema è di determinare l'area compresa fra l'arco AA' di cicloide, la semicirconferenza di diametro OA e il tratto OA' che rappresenta la semicirconferenza rettificata; tale semicirconferenza è lunga πr, e quindi

$$OA' = \pi r.$$

Se si fissa $r=1$, come in figura, risulta:

$$OA' = \pi.$$

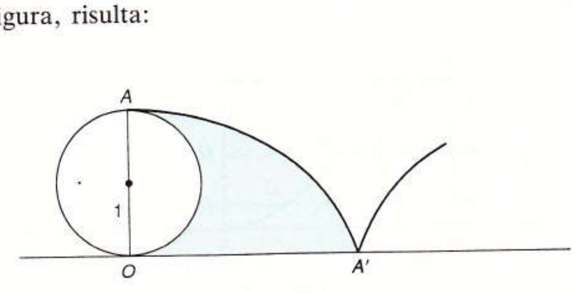

Fig. 2

Abbiamo calcolato la lunghezza dei tratti paralleli ad OA', che "formano l'area" della zona che c'interessa (Fig. 3); si ha:

per $\widehat{AB}=\frac{1}{4}$ semicirconferenza: $BB'=\frac{1}{4}OA'=\frac{1}{4}\pi$

per $\widehat{AC}=\frac{1}{2}$ » : $CC'=\frac{1}{2}OA'=\frac{1}{2}\pi$

per $\widehat{AD}=\frac{3}{4}$ » : $DD'=\frac{3}{4}OA'=\frac{3}{4}\pi$

e, in generale, se l'arco $\widehat{AP}=\frac{m}{n}$ della semicirconferenza, risulterà $PP'=\frac{m}{n}\pi$.

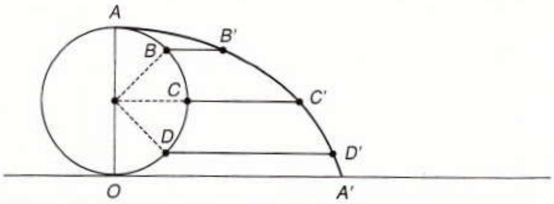

Fig. 3

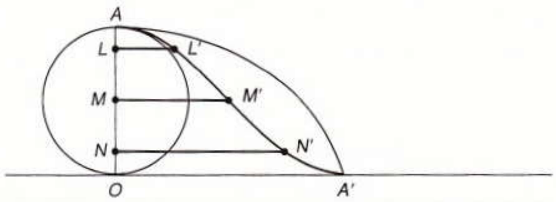

Fig. 4

Questi segmenti vengono fatti slittare verso sinistra (Fig. 4) in modo che un loro estremo si trovi sul diametro OA; gli altri estremi, quelli di destra, vengono allora a trovarsi su una nuova curva che fu appunto chiamata «la compagna della cicloide». Abbiamo indicato questi segmenti con LL', MM', NN', ... Le Figg. 5 e 6 mettono in evidenza le due zone: esse sono equivalenti per il Principio di Cavalieri.

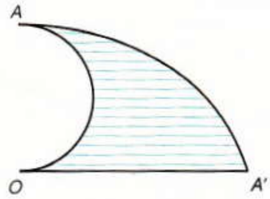

Fig. 5

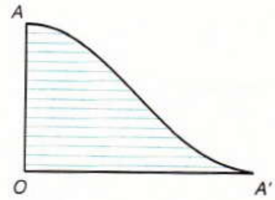

Fig. 6

Allora, invece di determinare l'area della zona di Fig. 5, si può calcolare quella della zona di Fig. 6. A tale scopo, riferiamoci alla Fig. 7: sappiamo che

$$LL'=\frac{1}{4}\pi \quad \text{e} \quad NN'=\frac{3}{4}\pi;$$

quindi, se prolunghiamo il segmento LL' di un tratto $L\bar{L}=NN'$, si ottiene il segmento

$$L\bar{L}=\frac{1}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi=\pi$$

e quindi un segmento lungo esattamente come OA'. E così se il segmento MM' viene prolungato di un tratto uguale, si ottiene:

$$M\bar{M}=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\pi.$$

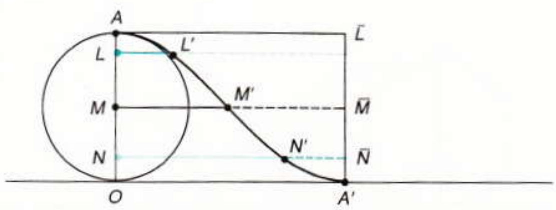

Fig. 7

Accade insomma che ogni segmento $PP'=\frac{m}{n}\pi$ trova il proprio corrispondente $QQ'=\frac{n-m}{n}\pi$; così risulta:

$$PP'+QQ'=\left(\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}\right)\pi=\pi.$$

Si viene in tal modo a costruire un rettangolo di base OA' e di altezza OA, e, quindi, di area

$$A=\pi\cdot 2=2\pi.$$

La parte colorata in Fig. 7, e cioè la zona compresa fra la "compagna della cicloide" e i segmenti OA e OA', costituisce ovviamente la metà di questo rettangolo, ed ha quindi un'area

$$A=\pi.$$

Questo significa che la zona di Fig. 6 ha area π e, dunque, ha area π anche la figura equivalente rappresentata in Fig. 5.

Si conclude che l'area compresa fra un arco di cicloide e la base (Fig. 8) ha il valore 3π; è dunque il triplo del cerchio generatore.

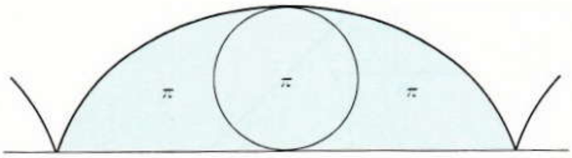

Fig. 8

Trascinati dall'area della cicloide abbiamo lasciato da parte la sinusoide. Vogliamo ora far vedere che la "compagna della cicloide" è una sinusoide; lo dimostriamo trovandone l'equazione.

Riferiamoci alla Fig. 9. Sia Q un punto generico della "compagna della cicloide"; determiniamone l'ascissa $x=\overline{OH}=\overline{RQ}$ e l'ordinata $y=\overline{OR}=\overline{HQ}$.

Ascissa

Si ha, per il modo stesso con cui abbiamo costruito la curva, slittando dei segmenti, che:

$$RQ=TS.$$

Ora, avevamo preso

$$TS=\text{arco } AT,$$

e quindi si ha:

$$x=\overline{RQ}=\text{lunghezza dell'arco } \widehat{AT}.$$

Se α è la misura in radianti dell'angolo corrispondente all'arco $\widehat{AT}$, risulta, dato che $r=1$:

$$\widehat{AT}=\alpha$$

e quindi

$$x=\alpha.$$

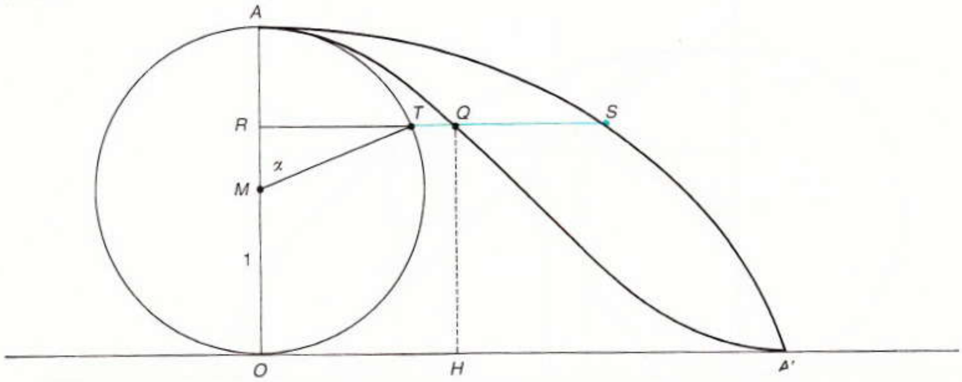

Fig. 9

Ordinata

Riferiamoci ora alla Fig. 10. Si ha:

$$\overline{HQ}=1+\overline{QV} \quad \text{e quindi} \quad \overline{HQ}=1+\overline{TW}.$$

Ora, dal triangolo rettangolo MTW risulta:

$$TW=\operatorname{sen}(90°-\alpha)=\cos\alpha;$$

si ha quindi:

$$HQ=1+\cos\alpha,$$

ossia

$$y=1+\cos\alpha.$$

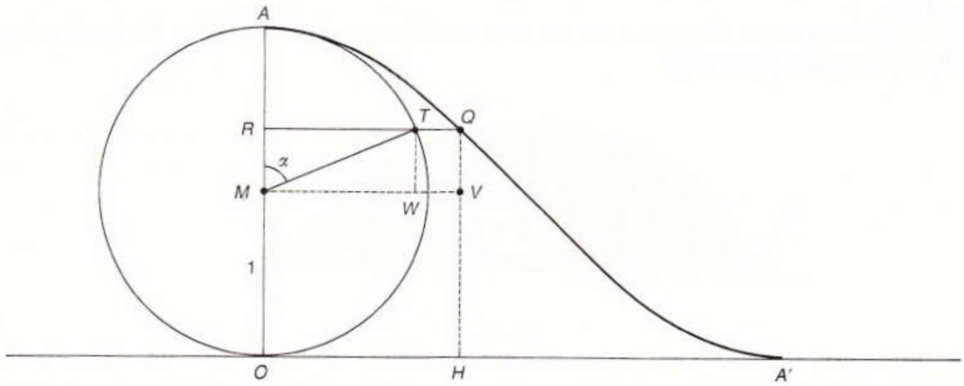

Fig. 10

Abbiamo così trovato ascissa e ordinata di un punto Q della curva in funzione dell'angolo α:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\cos\alpha. \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{y=1+\cos x}$$

e questa è proprio l'equazione cartesiana di una sinusoide.

Ecco: la sinusoide è entrata nella matematica come "compagna della cicloide", un ruolo quindi secondario, come se, lei stessa, non avesse tanta importanza! Ma il tempo doveva fare giustizia: la sinusoide si è rivelata ben più importante della cicloide.

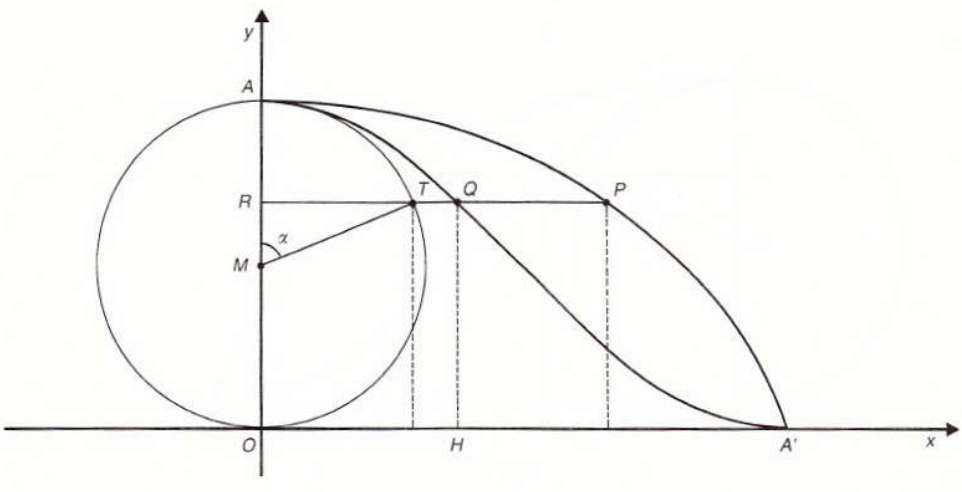

Fig. 11

È facile passare dalle **equazioni parametriche** della sinusoide

$$x=\alpha$$
$$y=1+\cos\alpha$$

a quelle della cicloide.

Riferiamoci alla Fig. 11: determineremo le coordinate di un punto P della cicloide. È chiaro che, per il modo stesso con cui si procede per passare da una curva all'altra, l'ordinata di P è la stessa dell'ordinata del punto Q che si trova sulla sinusoide; si ha quindi:

$$y_P=y_Q=1+\overline{MR}=1+\cos\alpha.$$

L'ascissa di P è data da:

$$x_P=\overline{RP}=\overline{RT}+\overline{TP}=\overline{RT}+\overline{RQ}=\text{sen}\,\alpha+\alpha.$$

Le equazioni parametriche della cicloide sono dunque:

$$\begin{cases} x=\alpha+\text{sen}\,\alpha \\ y=1+\cos\alpha. \end{cases}$$

Per avere l'equazione cartesiana della cicloide bisognerebbe eliminare α dalle equazioni ora ottenute; si capisce che un tale procedimento è piuttosto laborioso, e l'equazione cartesiana nulla aggiunge alla descrizione della curva.