4
Esercizi

Grafici e trasformazioni affini

1. Tracciare il grafico delle seguenti leggi:

(a) $d = \operatorname{sen} t$; (b) $d' = 2 \operatorname{sen} t'$; (c) $d'' = 4 \operatorname{sen} t''$.

Descrivere la trasformazione del piano che muta la (a) nella (b), la trasformazione che muta la (b) nella (c) e quella che muta la (a) nella (c).

Ripetere l'esercizio n. 1 a partire dalle leggi esposte negli esercizi dal n. 2 al n. 8.

2. (a) $d = \operatorname{sen} t$; (b) $d' = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t'$; (c) $d'' = \frac{1}{4} \operatorname{sen} t''$

3. (a) $d = \cos t$; (b) $d' = 3 \cos t'$; (c) $d'' = 6 \cos t''$

4. (a) $d = \cos t$; (b) $d' = \frac{1}{3} \cos t'$; (c) $d'' = \frac{1}{9} \cos t''$

5. (a) $d = \operatorname{sen} t$; (b) $d' = \frac{3}{2} \operatorname{sen} t'$; (c) $d'' = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} t''$

(Tenere presenti le nozioni sulla simmetria rispetto all'asse delle x, esposte a p. 79).

6. (a) $d = \operatorname{sen} t$; (b) $d' = \frac{2}{3} \operatorname{sen} t'$; (c) $d'' = -\frac{2}{3} \operatorname{sen} t''$

7. (a) $d = \cos t$; (b) $d' = \sqrt{2} \cos t'$; (c) $d'' = -\sqrt{2} \cos t''$

8. (a) $d = \operatorname{sen} t$; (b) $d' = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} t'$; (c) $d'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} t''$

9. Descrivere le trasformazioni che mutano la funzione

$d = \operatorname{sen} t$

nella

$d' = -r \operatorname{sen} t'$

nei casi seguenti

(a) $0 < r < 1$; (b) $r > 1$.

Esaminare le leggi proposte negli esercizi dal n. 10 al n. 17 e tracciarne il grafico, indicando il periodo della curva ottenuta. Descrivere la trasformazione che muta la curva (a) nella (b), la trasformazione che muta la curva (b) nella (c) e quella che muta la (a) nella (c).

10. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d'=\operatorname{sen}\frac{1}{2}t'$; (c) $d''=\operatorname{sen}\frac{1}{4}t''$

11. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d'=\operatorname{sen} 2t'$; (c) $d''=\operatorname{sen} 4t''$

12. (a) $d=\cos t$; (b) $d'=\cos\frac{1}{3}t'$; (c) $d''=\cos\frac{1}{6}t''$

13. (a) $d=\cos t$; (b) $d'=\cos 4t'$; (c) $d''=\cos 8t''$

14. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d'=\operatorname{sen}\frac{3}{4}t'$; (c) $d''=\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{4}t''\right)$

(Tenere presenti le nozioni sulla simmetria rispetto all'asse delle y, p. 79).

15. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d'=\operatorname{sen}\frac{4}{3}t'$; (c) $d''=\operatorname{sen}\left(-\frac{4}{3}t''\right)$

16. (a) $d=\cos t$; (b) $d'=\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t'$; (c) $d''=\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t''\right)$

17. (a) $d=\cos t$; (b) $d'=\cos\sqrt{2}t'$; (c) $d''=\cos(-\sqrt{2}t'')$

18. Descrivere le trasformazioni che mutano la funzione

$$d=\operatorname{sen} t$$

nella

$$d'=\operatorname{sen}(-\omega t')$$

nei casi seguenti

(a) $0<\omega<1$; (b) $\omega>1$.

Tracciare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 19 al n. 25, descrivendo le trasformazioni che mutano la prima curva in ciascuna delle altre. Determinare, su ciascuna curva, il punto A, corrispondente al valore $t=\frac{\pi}{2}$, e il punto B, corrispondente al valore $t=\frac{\pi}{3}$.

19. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=2\operatorname{sen} t$; (c) $d=\operatorname{sen} 2t$

20. (a) $d=\cos t$; (b) $d=\frac{1}{2}\cos t$; (c) $d=\cos\frac{1}{2}t$

21. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$; (c) $d=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t$

22. (a) $d=\cos t$; (b) $d=2\cos 2t$; (c) $d=\cos 4t$

23. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t$; (c) $d=\operatorname{sen}\frac{1}{4}t$

24. (a) $d=\cos t$; (b) $d=-\frac{1}{2}\cos 3t$; (c) $d=\cos\left(-\frac{3}{2}t\right)$

25. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=-3\operatorname{sen}\frac{1}{2}t$; (c) $d=\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}t\right)$

Tracciare il grafico delle funzioni esposte dal n. 26 al n. 31, determinando periodo e asintoti di ciascuna curva.
Determinare, su ciascuna curva, il punto A corrispondente al valore $t=\frac{\pi}{4}$, quando ciò è possibile.
Descrivere le trasformazioni del piano che mutano la prima curva in ciascuna delle altre.

26. (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $y = 2 \operatorname{tg} x$; (c) $y = \operatorname{tg} 2x$

27. (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$; (c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

28. (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $y = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (c) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$

29. (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $y = -2 \operatorname{tg} 2x$; (c) $y = \operatorname{tg}(-4x)$

30. (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$; (c) $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{4} x\right)$

31. (a) $y = 2 \operatorname{tg} x$; (b) $y = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 3x$; (c) $= 3 \operatorname{tg} \frac{2}{3} x$

32. Dare un criterio generale per riconoscere il periodo e gli asintoti paralleli all'asse delle y di una funzione del tipo

$$y = a \operatorname{tg} bx$$

33. Ripetere gli esercizi 26-31, considerando come funzione (a) la funzione

$$y = \operatorname{ctg} x,$$

di cui si è parlato nel testo a p. 43 e negli esercizi alle pp. 196 e 256.

34. Dare un criterio generale per riconoscere il periodo e gli asintoti paralleli all'asse delle y di una funzione del tipo

$$y = a \operatorname{ctg} bx.$$

Sulle somme grafiche

Tracciare i grafici delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 35 al n. 59, sulla base delle nozioni esposte nel testo (p. 95); indicare, per ogni caso, il periodo della curva ottenuta.

35. (a) $d = \cos t + \cos 2t$; (b) $d = 2 \cos t + \cos 2t$

36. (a) $d = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$; (b) $d = 2 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$

37. (a) $d = \operatorname{sen} 2t + 2 \cos t$; (b) $d = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} t$

38. (a) $d = \cos t + \cos 3t$; (b) $d = 3 \cos t + \cos 3t$

39. (a) $d = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t$; (b) $d = 3 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t$

40. (a) $d = \operatorname{sen} 3t + 3 \cos t$; (b) $d = \cos 3t + 3 \operatorname{sen} t$

41. (a) $d = 2 \operatorname{sen} 3t + 3 \cos 2t$; (b) $d = 3 \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 3t$

42. (a) $d = \cos \frac{t}{2} + \cos t$; (b) $d = 2 \cos \frac{t}{2} + \cos t$

43. (a) $d = \operatorname{sen} 6t + \operatorname{sen} 5t$; (b) $d = \operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 7t$

44. (a) $d = \operatorname{sen} t - \cos t$; (b) $d = \operatorname{sen} 2t - \cos t$

(*Tenere presente che si può scrivere*

$$\operatorname{sen} t - \cos t = \operatorname{sen} t + (-\cos t).$$

In tal modo le curve proposte nell'esercizio 44 si possono ottenere come somma grafica...).

45. (a) $d = \operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t$ (b) $d = \operatorname{sen} 3t - 3 \operatorname{sen} t$

46. (a) $d=\cos 2t-\cos 3t$; (b) $d=\operatorname{sen} 3t-\operatorname{sen} 2t$

47. (a) $d=\cos 2t-\operatorname{sen} 3t$; (b) $d=\cos 3t-\operatorname{sen} 2t$

48. (a) $d=2\operatorname{sen}\frac{3}{2}t-2\operatorname{sen}\frac{t}{2}$; (b) $d=2\operatorname{sen}\frac{3}{2}t-6\operatorname{sen}\frac{t}{2}$

49. (a) $d=3\operatorname{sen}\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{2}$; (b) $d=3\operatorname{sen} t-3\cos\frac{t}{2}$

50. Che cosa si osserva confrontando le curve indicate nell'esercizio 35 con quelle dell'esercizio 42?

51. Che cosa si osserva confrontando le curve indicate nell'esercizio 44 con quelle dell'esercizio 49?

52. Che cosa si osserva confrontando le curve dell'esercizio 45 con quelle dell'esercizio 48?

53. (a) $d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 3t$; (b) $d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 3t+\operatorname{sen} 5t$

54. (a) $d=\cos 2t+\cos 4t$; (b) $d=\cos 2t+\cos 4t+\cos 6t$

55. (a) $d=\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$; (b) $d=\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t$

56 $d=\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t+\frac{1}{7}\operatorname{sen} t.$

Si riesce ad avere un'idea della curva a cui si avvicina la seguente serie di Fourier:

$$\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t+\frac{1}{7}\operatorname{sen} 7t+\frac{1}{9}\operatorname{sen} 9t+\ldots?$$

57. (a) $d=\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$; (b) $d=\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$

58. $d=\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t.$

Si riesce ad avere un'idea della curva a cui si avvicina la seguente serie di Fourier:

$$\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6t+\ldots?$$

59. (a) $d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t$; (b) $d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$

60. $d=\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t.$

Si riesce ad avere un'idea della curva, a cui si avvicina la seguente serie di Fourier:

$$\frac{\operatorname{sen} t}{1}+\frac{2\operatorname{sen} 2t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}+\frac{\operatorname{sen} 5t}{5}+\frac{2\operatorname{sen} 6t}{6}+\frac{\operatorname{sen} 7t}{7}+\ldots?$$

Tracciare i grafici delle seguenti funzioni, basandosi sempre sulla nozione di somma grafica.

61. (a) $y=x+2\operatorname{sen} x$; (b) $y=x-2\operatorname{sen} x$; nell'intervallo $-2\pi\leq x\leq 2\pi$.

62. (a) $y=\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x$; (b) $y=\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} x$; nell'intervallo $-\pi\leq x\leq\pi$.

63. (a) $y=\cos x+2x$; (b) $y=\cos x-2x$; nell'intervallo $-2\pi\leq x\leq 2\pi$.

64. (a) $y=\operatorname{tg} x+2\cos x$; (b) $y=\operatorname{tg} x-2\cos x$; nell'intervallo $-\pi\leq x\leq\pi$.

65. (a) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$; (b) $y=\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$; nell'intervallo $-\pi\leq x\leq\pi$.

66. (a) $y=\sec x+\cos x$; (b) $y=\sec x-\cos x$; nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.

67. (a) $y=\operatorname{cosec} x+\operatorname{sen} x$; (b) $y=\operatorname{cosec} x-\operatorname{sen} x$; nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.

68. (a) $y=\sec x+\operatorname{cosec} x$; (b) $y=\sec x-\operatorname{cosec} x$; nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.

Sui grafici e sulle traslazioni

Tracciare i grafici delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 69 al n. 80. Confrontare le curve disegnate con le proprietà relative agli angoli associati esposte nel testo a p. 38 e negli esercizi alle pp. 207 e 253.

69. (a) $d=\cos t$; (b) $d=\cos(t+\pi)$

70. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen}(t+\pi)$

71. (a) $d=\cos t$; (b) $d=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

72. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

73. (a) $d=\cos t$; (b) $d=\cos\left(t+\frac{3}{2}\pi\right)$

74. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen}\left(t+\frac{3}{2}\pi\right)$

75. (a) $d=\cos(-t)$; (b) $d=\cos(-t+\pi)$

76. (a) $d=\operatorname{sen}(-t)$; (b) $d=\operatorname{sen}(-t+\pi)$

77. (a) $d=\cos(-t)$; (b) $d=\cos\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)$

78. (a) $d=\operatorname{sen}(-t)$; (b) $d=\operatorname{sen}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)$

79. (a) $d=\cos(-t)$; (b) $d=\cos\left(-t+\frac{3}{2}\pi\right)$

80. (a) $d=\operatorname{sen}(-t)$; (b) $d=\operatorname{sen}\left(-t+\frac{3}{2}\pi\right)$

Tracciare i grafici delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 81 al n. 88. Indicare, per ogni curva disegnata, le seguenti caratteristiche: ampiezza massima r; pulsazione ω; frequenza f; periodo T; fase φ.

81. (a) $d=\operatorname{sen} 2(t-\pi)$; (b) $d=\operatorname{sen}(2t-\pi)$

82. (a) $d=\cos 3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$; (b) $d=\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$

83. (a) $d=3\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$; (b) $d=3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$

84. (a) $d=2\cos\frac{1}{3}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$; (b) $d=2\cos\left(\frac{1}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)$

85. (a) $d=\cos(4t-1)$; (b) $d=\cos 4(t-1)$

86. (a) $d=\operatorname{sen}\left(\frac{3t+1}{2}\right)$; (b) $d=\operatorname{sen}\frac{3}{2}(t+1)$

87. (a) $d=5\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t-2)$; (b) $d=5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t-2\right)$

88. (a) $d=2\cos\left(2\frac{\pi}{3}-2t\right)$; (b) $d=4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}t\right)$

89. Disegnare le curve di cui è data l'equazione. Traslare poi il grafico di $\frac{\pi}{3}$ lungo l'asse delle t, prima verso destra e poi verso sinistra, scrivendo, per ogni caso, l'equazione della curva ottenuta:

(a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen} 2t$; (c) $d=\operatorname{sen}\frac{t}{2}t$.

90. Ripetere l'esercizio 89 a partire dalle curve seguenti, da traslare di $\frac{\pi}{4}$:

(a) $d=\cos t$; (b) $d=\cos 3t$; (c) $d=\cos\frac{1}{3}t$.

91. Ripetere l'esercizio 89, a partire dalle curve seguenti, da traslare di 0,5:

(a) $d=2\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen}\frac{2}{3}t$; (c) $d=2\operatorname{sen}\frac{3}{2}t$.

92. Ripetere l'esercizio 89, a partire dalle curve seguenti, da traslare di 1,5:

$$\text{(a) } d=3\cos t; \quad \text{(b) } d=3\cos\frac{3}{4}t; \quad \text{(c) } d=\cos\frac{4}{3}t.$$

93. Le Figg. 1 e 2 mostrano il grafico di una legge del tipo

$$d=r\,\text{sen}\,\omega(t-\varphi);$$

disegnato in un periodo.

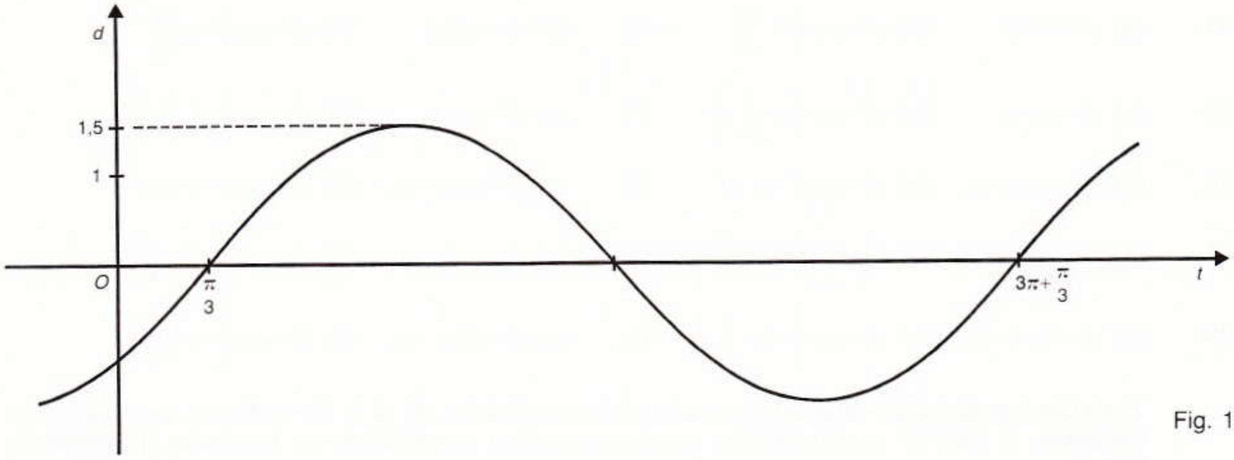

Fig. 1

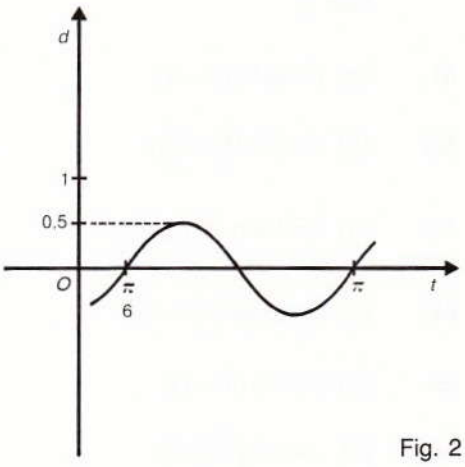

Fig. 2

Determinare, relativamente a ciascuna figura:
- l'ampiezza massima r;
- il periodo T;
- la frequenza f;
- la pulsazione ω;
- la fase φ;
- la legge che descrive d al variare di t.

94. Un segnale, regolato da una legge del tipo

$$d=r\,\text{sen}\,\omega(t-\varphi),$$

ha ampiezza massima $r=2{,}23$, frequenza $f=10$ Hz, fase $\varphi=0{,}3$ sec; determinare la legge che descrive il segnale e tracciarne il grafico.

95. Scrivere una legge del tipo

$$d=r\cos\omega(t-\theta)$$

nella forma

$$d=r\,\text{sen}\,\omega(t-\varphi).$$

Quale relazione lega θ e φ?

96. Scrivere una legge del tipo

$$d=r\cos\omega(t+\theta)$$

nella forma

$$d=r\,\text{sen}\,\omega(t+\varphi).$$

Quale relazione lega θ e φ?

Tracciare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 97 al n. 104. Descrivere le trasformazioni che mutano la curva (a) in ciascuna delle altre.

97. (a) $d=\operatorname{sen} t$; (b) $d=\operatorname{sen}(t+1)$; (c) $d=\operatorname{sen} t+1$.

(Tenere presente che, aggiungendo lo stesso numero k positivo alle ordinate d di tutti i punti di una curva, si trasla il grafico di k lungo l'asse delle ordinate verso l'alto).

98. (a) $d=\cos t$; (b) $d=\cos(t-1)$; (c) $d=\cos t-1$.

(Tenere presente che, sottraendo lo stesso numero k positivo alle ordinate d di tutti i punti di una curva, si trasla il grafico di k lungo l'asse delle ordinate verso il basso).

99. (a) $d=3\operatorname{sen} t$; (b) $d=3\operatorname{sen}(t-2)$; (c) $d=3\operatorname{sen}(t-2)+1$

100. (a) $d=\operatorname{sen} 2t$; (b) $d=\operatorname{sen} 2(t+0{,}5)$; (c) $d=\operatorname{sen} 2(t+0{,}5)-3$

101. (a) $d=3\operatorname{sen} 2t$; (b) $d=3\operatorname{sen} 2(t+0{,}5)$; (c) $d=3\operatorname{sen} 2(t+0{,}5)+3$

102. (a) $d=\frac{1}{2}\cos t$; (b) $d=\frac{1}{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$; (c) $d=\frac{1}{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}$

103. (a) $d=\cos 3t$; (b) $d=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$; (c) $d=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{3}$

104. (a) $d=\frac{1}{2}\cos 3t$; (b) $d=\frac{1}{2}\cos 3\left(t-\frac{2}{3}\pi\right)$; (c) $d=\frac{1}{2}\cos 3\left(t-\frac{2}{3}\pi\right)+2$

105. Le Figg. 3 e 4 mostrano il grafico di una legge del tipo

$$d=r\operatorname{sen}\omega(t-\varphi)+k,$$

disegnato in un periodo.

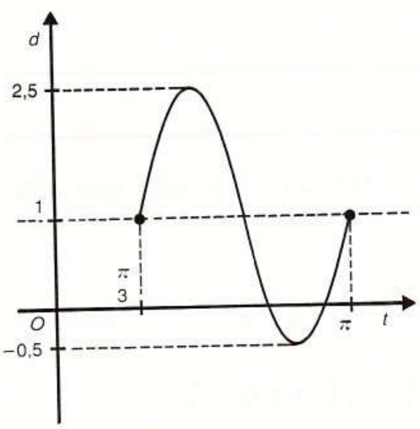

Fig. 3

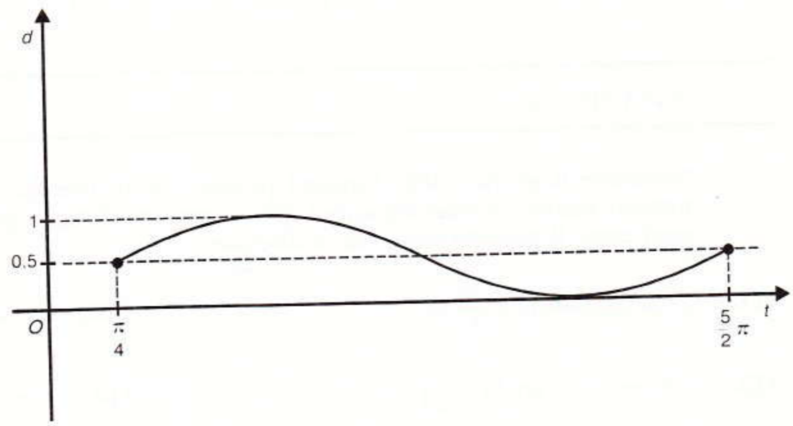

Fig. 4

Determinare, relativamente a ciascuna figura:

- l'ampiezza massima r;
- la fase φ;
- la costante k di traslazione lungo l'asse delle ordinate;
- il periodo T;
- la frequenza f;
- la pulsazione ω;
- la legge che descrive d al variare di t.

106. La Fig. 5 mostra il grafico di una legge del tipo

$$d=r\,\mathrm{sen}\,\omega(t-\varphi)+k$$

in un periodo. Verificare che risulta:

$$T=\beta-\alpha$$

$$f=\frac{1}{\beta-\alpha}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{\beta-\alpha}$$

$$\varphi=\alpha$$

$$k=\frac{a+b}{2}$$

$$r=\frac{b-a}{2}$$

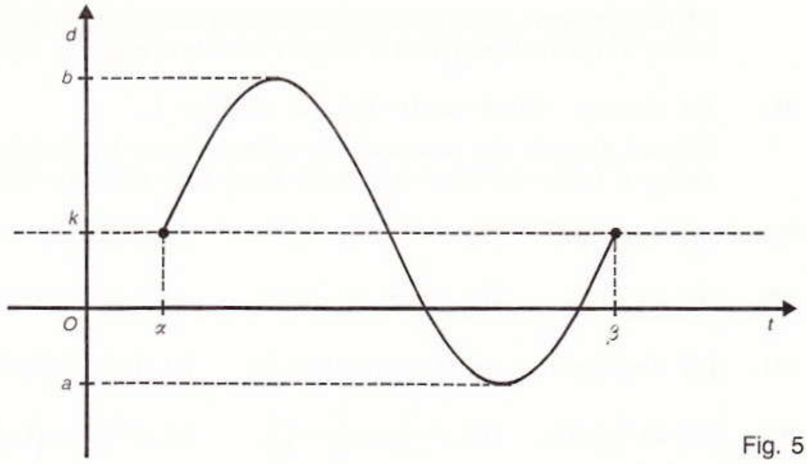

Fig. 5

Tracciare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 107 al n. 110, determinando periodo e asintoti delle curve ottenute.
Descrivere le trasformazioni che mutano la prima curva in ciascuna delle altre.

107. (a) $y=\mathrm{tg}\,2x$; (b) $y=\mathrm{tg}\,2(x-1)$; (c) $y=\mathrm{tg}\,2(x-1)+3$

108. (a) $y=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x$; (b) $y=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x+0{,}5)$; (c) $y=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x+0{,}5)-4$

109. (a) $y=2\,\mathrm{tg}\,3x$; (b) $y=2\,\mathrm{tg}\,3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; (c) $y=2\,\mathrm{tg}\,3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$

110. (a) $y=3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{3}x$; (b) $y=3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; (c) $y=3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$

Altri grafici

Tracciare il grafico delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 111 al n. 123, sulla base delle nozioni relative a trasformazioni affini, traslazioni lungo gli assi e somme grafiche. Indicare, per ogni caso, il periodo della curva disegnata.

111. $y=\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$

112. $y=\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$

113. $y=3\,\mathrm{sen}\,x+2\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$

114. $y=2\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{2}$

115. $y=\mathrm{sen}\,4x+\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$

116. $y=\mathrm{sen}\,2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{sen}\,4x+1$

117. $y=\mathrm{tg}\,2x-2\,\mathrm{sen}\,2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$

118. $y=\frac{1}{2}\cos 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3$

119. $y=2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1$

120. $y=2\,\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+1$

121. $y=\mathrm{sen}\,2x+\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2$

122. $y=\mathrm{sen}\,4x+\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2$

123. $y=3\,\mathrm{sen}\,2x-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\,\mathrm{sen}\,3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

Sulle formule di addizione e sottrazione

Esprimere mediante radicali le funzioni goniometriche degli angoli proposti negli esercizi dal n. 124 al n. 128, basandosi sulle formule di addizione e sottrazione e sui risultati esposti nel testo a p. 18 e negli esercizi a p. 169.

124. $63°=45°+18°$ e $27°=45°-18°$

125. $48°=30°+18°$ e $12°=30°-18°$

126. $78°=60°+18°$ e $42°=60°-18°$

127. $105°=60°+45°$ e $15°=60°-45°$

128. $87°=75°+12°$ e $3°=15°-12°$

129. Calcolare, mediante le formule di addizione:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{sen}(180°+\alpha) & \text{e} & \cos(180°+\alpha), \\ \operatorname{sen}(90°+\alpha) & \text{e} & \cos(90°+\alpha), \\ \operatorname{sen}(270°+\alpha) & \text{e} & \cos(270°+\alpha). \end{array}$$

Verificare che si ottengono gli stessi risultati forniti dalle relazioni sugli angoli associati esposte nel testo (p. 38) e negli esercizi (p. 207).

130. Calcolare, mediante le formule di sottrazione:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{sen}(180°-\alpha) & \text{e} & \cos(180°-\alpha), \\ \operatorname{sen}(90°-\alpha) & \text{e} & \cos(90°-\alpha), \\ \operatorname{sen}(270°-\alpha) & \text{e} & \cos(270°-\alpha), \\ \operatorname{sen}(360°-\alpha) & \text{e} & \cos(360°-\alpha). \end{array}$$

Verificare che si ottengono gli stessi risultati forniti dalle relazioni sugli angoli associati esposte nel testo (p. 38) e negli esercizi (p. 207).

Scrivere nella forma più breve le espressioni proposte negli esercizi dal n. 131 al n. 140, valendosi delle formule di addizione e sottrazione.

131. $\operatorname{sen}(60°+\alpha)-\operatorname{sen}(60°-\alpha)$ $[-\operatorname{sen}\alpha]$

132. $\operatorname{sen}(\alpha-60°)+\cos(\alpha-30°)$ $[\operatorname{sen}\alpha]$

133. $2\cos 45°\cos(45°+\alpha)$ $[\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha]$

134. $\operatorname{sen}(135°-\alpha)+\cos(135°+\alpha)$ $[0]$

135. $\operatorname{sen}(60°-\alpha)+\operatorname{sen}(240°+\alpha)$ $[-\operatorname{sen}\alpha]$

136. $\cos 330°\operatorname{sen}(\alpha+120°)+\cos 120°\operatorname{sen}(\alpha+240°)$ $\left[\frac{3}{2}\cos\alpha\right]$

137. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $[0]$

tracciare il grafico della funzione

$$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

basandosi sul metodo esposto a p. 96 e verificare i risultati ottenuti mediante le formule di addizione e sottrazione.

138. $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; $[0]$

tracciare il grafico della funzione

$$y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

come proposto nell'esercizio 137.

139. $\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$; [0]

tracciare il grafico della funzione

$$y=\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right),$$

come proposto nell'esercizio 137.

140. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\frac{5}{3}\pi\right)$; [0]

tracciare il grafico della funzione

$$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\frac{5}{3}\pi\right),$$

come proposto nell'esercizio 137.

Sulle formule di duplicazione e bisezione

Esprimere mediante radicali le funzioni goniometriche degli angoli proposti negli esercizi dal n. 141 al n. 144, basandosi sulle formule di duplicazione o bisezione e sui risultati esposti nel testo a p. 18 e negli esercizi a p. 169.

141. $36°=18°\cdot 2$ e $72°=36°\cdot 2$

142. $144°=72°\cdot 2$ e $288°=144°\cdot 2$

143. $9°=\frac{18°}{2}$ e $4°30'=\frac{9°}{2}$

144. $15°=\frac{30°}{2}$ e $7°30'=\frac{15°}{2}$

Scrivere nella forma più semplice le espressioni proposte negli esercizi dal n. 145 al n. 154, valendosi delle formule di duplicazione.

145. $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$ [$2\cos\alpha$]

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

146. $\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha$ [$\cos 2\alpha$]

147. $(1+\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$ [$\operatorname{sen} 2\alpha$]

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

148. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{sen} 2\alpha$ [2]

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

149. $(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2+\cos 2\alpha+\operatorname{sen} 2\alpha$ [$2\cos^2\alpha$]

150. $\left(\dfrac{1}{1-\cos 2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos 2\alpha}\right)\operatorname{sen}^2 2\alpha$ [$2\cos 2\alpha$]

C'è qualche valore di α, per cui l'espressione non ha significato?

151. $\dfrac{1+\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ $\left[\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha+1)^2\right]$

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

152. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{sen} 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$ [$\operatorname{tg} 2\alpha$]

(Per la formula di duplicazione relativa alla tangente, vedere il complemento «Altre formule», p. 288).

153. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$ $[\operatorname{tg} 2\alpha]$

154. $\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha}$ $[\operatorname{tg} 2\alpha]$

Scrivere nella forma più semplice le espressioni proposte negli esercizi dal n. 155 al n. 164 valendosi delle formule di bisezione.

155. $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + 3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ $[\cos \alpha + 2]$

156. $3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ $[2 \cos \alpha + 1]$

157. $2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha$ $[\operatorname{tg} \alpha]$

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

158. $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha$ $[\operatorname{tg} \alpha]$

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?

159. $\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}$ $[\cos \alpha]$

160. $\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}$ $\left[\dfrac{1 + \cos^2 \alpha}{2}\right]$

161. $\cos^2 \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - (1 - \operatorname{sen} \alpha)^2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2$ $[0]$

162. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$ $\left[\dfrac{1}{\cos \alpha}\right]$

C'è qualche valore di α per cui l'espressione non ha significato?
(Per la formula di bisezione relativa alla tangente, vedere il complemento «Altre formule», p. 289).

163. $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ $[4 \cos \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha]$

164. $\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2$ $\left[\dfrac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}\right]$

Sulle formule di Werner e di prostaferesi

Esprimere per mezzo di radicali o di frazioni il risultato delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 165 al n. 170, valendosi delle formule di Werner.

165. $\operatorname{sen} 17° \cos 13° + \operatorname{sen} 73° \operatorname{sen} 13°$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

166. $\operatorname{sen} 70° \cos 20° - \operatorname{sen} 10° \cos 40°$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

167. $\cos 47° \cos 13° + \cos 118° \cos 28°$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

168. $\cos 56° \cos 34° - \operatorname{sen} 26° \operatorname{sen} 4°$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

169. $\operatorname{sen}\frac{7}{18}\pi\cos\frac{\pi}{9}+\operatorname{sen}\frac{8}{9}\pi\cos\frac{7}{18}\pi$ $[1]$

170. $\operatorname{sen}\frac{7}{60}\pi\cos\frac{\pi}{20}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{2}{15}\pi$ $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]$

Verificare che, per qualunque angolo α, sono vere le uguaglianze proposte negli esercizi dal n. 171 al n. 180, valendosi delle formule di Werner.

171. $2\operatorname{sen} 3\alpha\cos\alpha=\operatorname{sen} 4\alpha+\operatorname{sen} 2\alpha$

172. $2\operatorname{sen}\alpha\cos 3\alpha=\operatorname{sen} 4\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha$

173. $2\cos 2\alpha\cos 3\alpha=\cos 5\alpha+\cos\alpha$

174. $2\operatorname{sen} 3\alpha\operatorname{sen} 8\alpha=\cos 5\alpha-\cos 11\alpha$

175. $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 4\alpha+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 6\alpha=\operatorname{sen} 3\alpha\operatorname{sen} 4\alpha$

176. $\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos 4\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos 6\alpha=\operatorname{sen} 3\alpha\cos 4\alpha$

177. $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\alpha-1$

178. $\cos(10°+\alpha)\cos(10°-\alpha)+\cos(80°-\alpha)\cos(80°+\alpha)=\cos 2\alpha$

179. $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha\operatorname{sen} 4\alpha}{\cos\alpha}=\cos 3\alpha-\cos 5\alpha.$

C'è qualche valore di α per cui l'uguaglianza non ha significato?

180. $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha\operatorname{sen} 4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{sen} 3\alpha+\operatorname{sen} 5\alpha.$

C'è qualche valore di α per cui l'uguaglianza non ha significato?

Scrivere sotto forma di prodotto le espressioni proposte negli esercizi dal n. 181 al n. 188, valendosi delle formule di prostaferesi.

181. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ $[\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha]$

182. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ $\left[-2\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

183. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ $[\sqrt{3}\cos\alpha]$

184. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ $[\cos\alpha]$

185. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$ $\left[\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]$

(Tenere presente che, per qualunque angolo γ, risulta:

$$sen\,\gamma=cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right);$$

perciò $sen\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)=cos\ldots).$

186. $\operatorname{sen} 3\alpha+\operatorname{sen}\alpha$ $[2\operatorname{sen} 2\alpha\cos\alpha]$

187. $\cos 4\alpha+\cos 2\alpha$ $[2\cos 3\alpha\cos\alpha]$

188. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen} 3\alpha+\operatorname{sen} 5\alpha+\operatorname{sen} 7\alpha$ $[4\operatorname{sen} 4\alpha\cos 2\alpha\operatorname{sen}\alpha]$

Ancora sulle formule

Tracciare i grafici delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 189 al n. 202, basandosi sulle operazioni grafiche e sulle formule.

189. $y=\operatorname{sen} x \cos x+1$

190. $y=\cos^2 x+2 \operatorname{sen} x \cos x-\operatorname{sen}^2 x$

191. $y=2 \operatorname{sen}^2 x+2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x$

192. $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos x$

193. $y=\cos^2 x-\cos x$

194. $y=1+\cos x-\operatorname{sen}^2 x$

195. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
(confrontare con l'esercizio 182)

196. $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
(confrontare con l'esercizio 183)

197. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
(confrontare con l'esercizio 184)

198. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$
(confrontare con l'esercizio 185)

199. $y=2 \operatorname{sen} 3x \cos x$
(confrontare con l'esercizio 171)

200. $y=2 \operatorname{sen} x \cos 3x$
(confrontare con l'esercizio 172)

201. $y=\operatorname{sen} 2x \cos x$

202. $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
(confrontare con l'esercizio 177)

203. Un segnale radio, descritto dall'equazione

$$y_1=10 \operatorname{sen} \pi\cdot 10^6 t,$$

viene modulato in ampiezza da un segnale audio descritto dall'equazione

$$y_2=\operatorname{sen} 2\pi\cdot 10^4 t.$$

L'equazione che descrive il segnale risultante è

$$y=y_2\cdot y_1.$$

Disegnare nell'intervallo

$$0\leq t\leq \frac{1}{500.00}$$

le seguenti curve:

(a) il segnale radio;
(b) il segnale audio;
(c) il segnale risultante.

204. Esprimere le funzioni goniometriche dell'angolo ampio 3α, mediante le funzioni goniometriche dell'angolo α, tenendo presente che risulta:

$$3\alpha=2\alpha+\alpha.$$

205. Esprimere le funzioni goniometriche dell'angolo ampio 4α, mediante le funzioni goniometriche dell'angolo α, tenendo presente che risulta:

$$4\alpha=2\cdot 2\alpha.$$

206. Esprimere le funzioni goniometriche dell'angolo ampio 5α, mediante le funzioni goniometriche dell'angolo α, tenendo presente che risulta:

$$5\alpha=2\alpha+3\alpha$$

(Si arriva alle formule generali, studiate dal matematico francese François Viète (1540-1603):

$$\cos nx=\cos^n x-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x-\dots$$

$$\operatorname{sen} nx=n\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x \operatorname{sen}^3 x+\dots).$$

207. Dedurre la formula

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

dalla costruzione di Fig. 6, in cui è rappresentato sulla circonferenza goniometrica l'angolo

$$A\hat{O}P = 2\alpha.$$

(Esprimere cos α, esaminando i triangoli rettangoli BHO e BCP; determinare BC...).

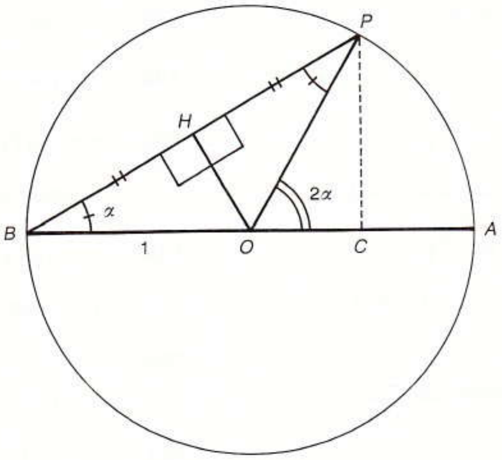

Fig. 6

208. Dedurre la formula

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

dalla costruzione rappresentata in Fig. 7.
(Esprimere in due modi l'area del triangolo ABC in funzione del lato l e dell'angolo α..; tenere presente che il triangolo ABC è isoscele e risulta $\overline{AB} = \overline{AC} = l$).

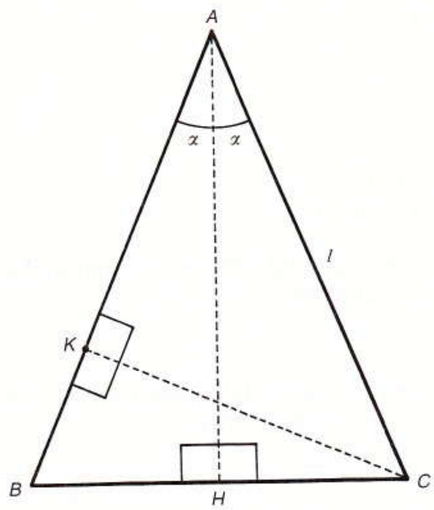

Fig. 7

209. Determinare le lunghezze delle bisettrici di un triangolo di cui sono noti i lati e gli angoli.
(Si otterrà, per esempio, per la bisettrice l dell'angolo α,

$$l = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{\alpha}{2}\Big).$$

210. Dimostrare che, per un triangolo qualunque, valgono le seguenti *formule di Delambre* (1749-1822):

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\;;\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

e analoghe.
(Dal teorema dei seni, si ottiene, per le proprietà delle proporzioni:

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{sen\,\alpha\pm sen\,\beta}{sen\,\gamma}\;;$$

si applicano al numeratore le formule di prostaferesi e al denominatore le formule di duplicazione, considerando

$$\gamma=2\frac{\gamma}{2}.$$

Si tiene presente poi che

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2},$$

e si considerano infine le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli complementari).

211. Si divide il lato AB di un triangolo equilatero in tre parti uguali e si congiungono i punti di divisione L e M col vertice opposto C. Calcolare l'ampiezza dei tre angoli $A\hat{C}L$, $L\hat{C}M$, $M\hat{C}B$.

212. In un triangolo del quale sono noti il lato $a=48$ e gli angoli

$$\beta=51°48' \quad \text{e} \quad \gamma=78°12',$$

si è diviso l'angolo α in tre parti uguali.
Calcolare i segmenti determinati sopra il lato a dalle rette di divisione.

213. Nello stesso triangolo dell'esercizio 212 si divide il lato a in tre parti uguali e si congiungono i punti di divisione L e M col vertice opposto A.
Calcolare l'ampiezza degli angoli $B\hat{A}L$, $L\hat{A}M$, $M\hat{A}C$.