1. Esercizi

Presentiamo un eserciziario molto vasto per dare ad ogni insegnante la possibilità di adeguare il suo corso alle attitudini e agli interessi degli studenti. Desideriamo tuttavia sottolineare che un insegnamento della matematica, in particolare della trigonometria, in cui viene data troppa importanza all'esecuzione ripetitiva di tanti esercizi non è né scientificamente valido né didatticamente efficace.

1
Esercizi

Sulla nozione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto

1. Esprimere per mezzo di radicali seno, coseno e tangente dell'angolo di 60°. (Basarsi sulla Fig. 1).

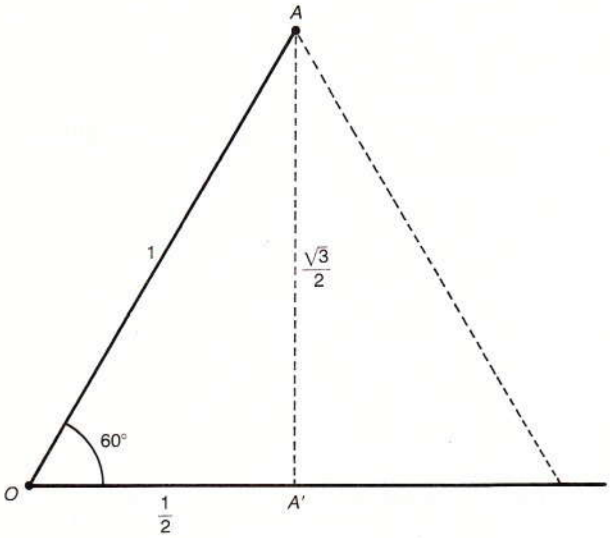


Fig. 1

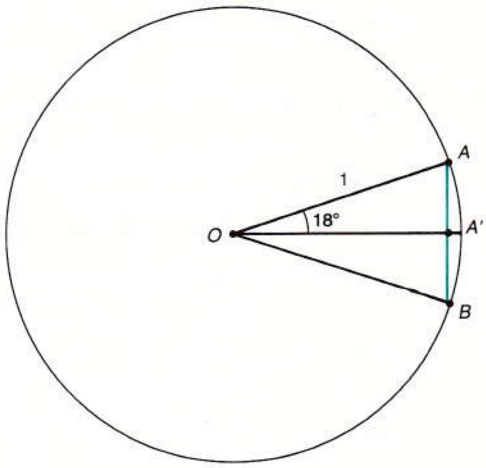


Fig. 2

2. Esprimere per mezzo di radicali il seno, il coseno e la tangente dell'angolo di 18°. Calcolare, mediante il calcolatore tascabile, le espressioni ottenute e confrontare i risultati con i corrispondenti valori di sen 18°, cos 18°, tg 18° dati direttamente dal calcolatore.

(Basarsi sulla Fig. 2 per ricordare che la corda AB è il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1; perciò la lunghezza x di AB è la sezione aurea del raggio, cioè risulta

$$1:x=x:(1-x),$$

da cui

$$1-x=x^2,$$

ossia

$$x^2+x-1=0.$$

Si ottengono per l'incognita x i due valori:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};$$

consideriamo solo il valore positivo

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Risulta dunque

$$\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

perciò si avrà che

$$AA'=\frac{1}{2}AB$$

ha la lunghezza

$$\overline{AA'}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Per determinare OA' applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAA'...).

3. Determinare, per mezzo del calcolatore tascabile, seno, coseno, tangente dei seguenti angoli:

$1'$, $55'$, $30'$, $1''$, $20''$, $45''$.

$\left[\textit{Tenere presente che risulta: } 1'=\left(\frac{1}{60}\right)^\circ \textit{ e } 1''=\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ\right].$

4. Determinare, per mezzo del calcolatore, seno, coseno e tangente dei seguenti angoli:

$15°3'4''$, $15°30'40''$, $88°40'50''$, $64°32'58''$, $1°1'1''$, $89°59'59''$.

$\left[\textit{Tenere presente che risulta: } 15°3'4''=15°+\left(\frac{3}{60}\right)^\circ+\left(\frac{4}{3600}\right)^\circ\right].$

5. Determinare l'angolo α, esprimendolo in gradi, primi e secondi, sapendo che risulta:

$\cos\alpha=0{,}978.$

Soluzione: *con la sequenza*

$\boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{9}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}$

si ha, come ampiezza dell'angolo α,

$12{,}122352=12°+0{,}122352\ 1°.$

Tenendo presente che risulta

$1°=60',$

possiamo scrivere

$0{,}122352\cdot 1°=0{,}122352\cdot 60'=7{,}341134=7'+0{,}341134\cdot 1'.$

Ricordando, poi, che si ha

$1'=60'',$

scriveremo:

$0{,}341134\cdot 1'=0{,}341134\cdot 60''=20{,}468064\cong 20''.$

In definitiva risulta:

$12°{,}122352\cong 12°7'20''.$

6. Determinare gli angoli α, β, γ, esprimendoli in gradi, primi e secondi, sapendo che risulta:

$\operatorname{tg}\alpha=0{,}002;\qquad \operatorname{sen}\beta=0{,}002;\qquad \cos\gamma=0{,}00007.$

7. Determinare gli angoli α, β, γ, esprimendoli in gradi, primi e secondi, sapendo che risulta:

$\operatorname{tg}\alpha=100;\qquad \operatorname{sen}\beta=0{,}999;\qquad \cos\gamma=0{,}999.$

8. Servendosi del calcolatore, determinare seno e coseno delle seguenti coppie di angoli:

$15°$ e $75°$; $20°$ e $70°$; $30°$ e $60°$; $10°40'$ e $79°20'$.

Che cosa si osserva?

9. Basandosi sulla definizione di seno e coseno di un angolo, dimostrare che risulta sempre

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\gamma$$

quando si ha:

$$\beta+\gamma=90°.$$

10. Servendosi del calcolatore tascabile, determinare la tangente delle stesse coppie di angoli complementari proposte nell'esercizio 8 e moltiplicare fra loro i valori ottenuti; per esempio, calcolare

$$\operatorname{tg}5°\cdot\operatorname{tg}85°, \qquad \operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}70°, \qquad \ldots$$

Che cosa si ottiene?

11. Basandosi sulla definizione di tangente di un angolo acuto, dimostrare che risulta sempre

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

quando si ha:

$$\beta+\gamma=90°.$$

12. Determinare il valore delle seguenti espressioni:

a) $(\operatorname{sen}10°)^2+(\cos 10°)^2$ b) $(\operatorname{sen}30°)^2+(\cos 30°)^2$
c) $(\operatorname{sen}60°)^2+(\cos 60°)^2$ d) $(\operatorname{sen}45°)^2+(\cos 45°)^2$

Che cosa si ottiene?

13. Dimostrare che si ottiene, per qualunque angolo acuto,

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$$

(Basarsi sulla definizione di seno e coseno di un angolo acuto α e sul teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OAA' di Fig. 3).

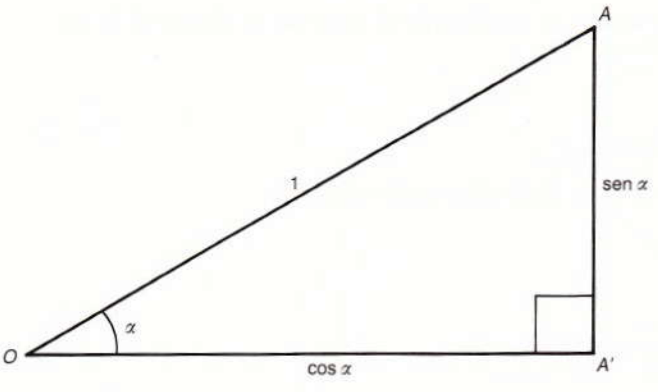


Fig. 3

14. Determinare il valore delle seguenti espressioni:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}10°}{\cos 10°}$ e $\operatorname{tg}10°$ b) $\dfrac{\operatorname{sen}30°}{\cos 30°}$ e $\operatorname{tg}30°$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}45°}{\cos 45°}$ e $\operatorname{tg}45°$ d) $\dfrac{\operatorname{sen}70°}{\cos 70°}$ e $\operatorname{tg}70°$

Che cosa si osserva?

15. Dimostrare che risulta, per qualunque angolo α,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

(Basarsi sulla definizione di seno, coseno e tangente e sulla Fig.3).

Sulla risoluzione di triangoli rettangoli

Esempi di risoluzione di triangoli rettangoli

Riassumiamo qui tutte le relazioni che abbiamo trovato, relativamente ad un triangolo rettangolo (Fig. 4):

$$\beta+\gamma=90°$$
$$a^2=b^2+c^2$$
$$\frac{c}{a}=sen\ \gamma=\cos\beta$$
$$\frac{b}{a}=\cos\gamma=sen\ \beta$$
$$\frac{c}{b}=tg\ \gamma=\frac{1}{tg\ \beta}.$$

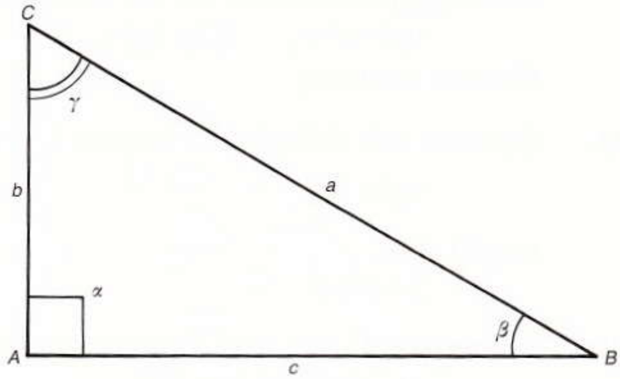


Fig. 4

Consideriamo prima di tutto 4 casi di risoluzione di triangoli rettangoli, basandoci su esempi numerici.

I) Sono dati i due cateti:

$$b=10,\quad c=7.$$

Possiamo procedere nel seguente ordine:

— *ricaviamo l'ipotenusa* ***a****, applicando il teorema di Pitagora; si ha:*

$$a=\sqrt{b^2+c^2}.$$

Si ottiene:

$$a=\sqrt{10^2+7^2}\cong 12;$$

— *ricaviamo l'angolo* γ, *basandoci sulla relazione*

$$\frac{c}{b}=tg\ \gamma;$$

si ottiene:

$$tg\ \gamma=\frac{7}{10}=0,7$$

da cui:

$$\gamma\cong 35°;$$

— *ricaviamo l'angolo* β, *basandoci sulla relazione*

$$\beta+\gamma=90°;$$

si ottiene:

$$\beta\cong 90°-35°=55°.$$

Siamo così arrivati a conoscere tutti gli elementi del triangolo; si ha:

lati $a\cong 12,\quad b=10,\quad c=7;$

angoli $\alpha=90°,\quad \beta\cong 55°,\quad \gamma\cong 35°.$

II) Sono assegnati l'ipotenusa ed un cateto:

$$a=35,\quad b=13.$$

Possiamo procedere nell'ordine seguente:

— *determiniamo il cateto* **c**, *basandoci sul teorema di Pitagora; si ottiene:*

$$c=\sqrt{a^2-b^2};$$

sostituendo i dati numerici, si ottiene:

$$c=\sqrt{35^2-13^2}\cong 32;$$

— *determiniamo l'angolo* β, *mediante la relazione*

$$\frac{b}{a}=\operatorname{sen}\beta;$$

nel nostro caso si ha:

$$\frac{13}{35}=\operatorname{sen}\beta$$

e quindi:

$$\beta\cong 22°;$$

— *ricaviamo l'angolo* γ, *basandoci sulla relazione*

$$\beta+\gamma=90°;$$

nel nostro caso risulta:

$$\gamma\cong 90°-22°=68°.$$

Dunque gli elementi del triangolo sono:

lati $a=35,\quad b=13,\quad c\cong 32;$
angoli $\alpha=90°,\quad \beta\cong 22°,\quad \gamma\cong 68°.$

III) Sono assegnati un cateto ed un angolo acuto:

$$b=40,\quad \beta=15°.$$

Procediamo nell'ordine seguente:

— *determiniamo l'angolo* γ, *basandoci sulla relazione*

$$\beta+\gamma=90°,$$

che, nel nostro caso, fornisce

$$\gamma=90°-15°=75°.$$

— *Ricaviamo l'ipotenusa* **a**, *a partire dalla relazione*

$$\frac{b}{a}=\operatorname{sen}\beta,\quad \text{ossia}\quad a=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

che, nel nostro caso, diventa:

$$a=\frac{40}{\operatorname{sen}15°}\cong 154;$$

— *determiniamo l'altro cateto* **c**, *basandoci sulla relazione:*

$$\frac{b}{c}=\operatorname{tg}\beta,\quad \text{ossia}\quad c=\frac{b}{\operatorname{tg}\beta};$$

nel nostro caso si ottiene:

$$c=\frac{40}{\operatorname{tg}15°}\cong 149.$$

Gli elementi del triangolo esaminato sono dunque:

lati $a\cong 154,\quad b=40,\quad c\cong 149;$
angoli $\alpha=90°,\quad \beta=15°,\quad \gamma=75°.$

IV) Sono assegnati l'ipotenusa ed un angolo acuto:

$$a=120,\quad \gamma=10°.$$

Procediamo nel modo seguente:

— *ricaviamo l'angolo* β, *basandoci sulla relazione*

$$\beta+\gamma=90°;$$

si ottiene:

$$\beta=90^\circ-10^\circ=80^\circ;$$

— *determiniamo il cateto* **b**, *a partire dalla relazione*

$$\frac{b}{a}=\cos\gamma, \quad \text{ossia} \quad b=a\cdot\cos\gamma,$$

che, nel nostro caso, fornisce:

$$b=120\cdot\cos 10^\circ\cong 118;$$

— *determiniamo il cateto* **c**, *a partire dalla relazione*

$$\frac{c}{a}=\text{sen}\,\gamma, \quad \text{ossia} \quad c=a\cdot\text{sen}\,\gamma,$$

che permette di ricavare

$$c=120\cdot\text{sen}\,10^\circ\cong 21.$$

Dunque gli elementi del triangolo assegnato sono:

lati $a=120,\quad b\cong 118,\quad c\cong 21;$

angoli $\alpha=90^\circ,\quad \beta=80^\circ,\quad \gamma=10^\circ.$

Osservazioni sul metodo seguito per risolvere i triangoli

Riflettendo sui procedimenti seguiti per risolvere i triangoli precedenti, si osserva che abbiamo usato le relazioni note in un certo ordine; ma, in ciascuno dei casi esaminati, si potevano seguire procedimenti differenti, utilizzando le stesse relazioni in un ordine diverso.
Ecco un esempio di «procedimento alternativo», per risolvere l'ultimo triangolo esaminato, di cui conosciamo:

$$a=120 \quad e \quad \gamma=10^\circ.$$

Si procede così:

— *ricaviamo il cateto* **b**, *a partire dalla relazione*

$$\frac{b}{a}=\cos\gamma, \quad \text{ossia} \quad b=a\cdot\cos\gamma;$$

si ottiene:

$$b=120\cdot\cos 10^\circ\cong 118;$$

— *ricaviamo il cateto* **c**, *usando il teorema di Pitagora:*

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Si ottiene:

$$c=\sqrt{120^2-118^2}\cong 22;$$

— *determiniamo l'angolo* β, *a partire dalla relazione*

$$tg\,\beta=\frac{b}{c},$$

che, nel nostro caso, diventa

$$tg\,\beta=\frac{118}{22};$$

si ottiene:

$$\beta\cong 79^\circ$$

(il calcolatore mostra 79,438989).

Confrontiamo i risultati ora ottenuti con quelli precedenti: il cateto **b**, *determinato in ambedue i casi nello stesso modo, ha ovviamente lo stesso valore, ma il cateto* **c** *e l'angolo* β *non hanno lo stesso valore. Infatti, con l'attuale procedimento si è ottenuto*

$$c\cong 22 \quad e \quad \beta\cong 79^\circ$$

e quindi la somma dei tre angoli

$$\alpha+\beta+\gamma$$

non risulta di 180° ma di 179°; in precedenza, invece, si era ottenuto

$c \cong 21$ e $\beta \cong 80°$.

Perché queste differenze?

*Esaminiamo attentamente l'ultimo procedimento seguito: per determinare il lato **c** ci siamo basati sul cateto **b**, già calcolato in modo approssimato, inoltre abbiamo ricavato l'angolo β a partire dai valori di **b** e di **c**, ambedue calcolati in modo approssimato, invece di usare solo i dati iniziali.*
È poi immediato osservare che, per ricavare l'angolo β, si svolgono calcoli molto più elaborati rispetto alla semplice sottrazione eseguita precedentemente... e aumentare il numero di calcoli da eseguire significa aumentare la probabilità di errori banali nella scrittura o nell'uso del calcolatore.
È chiaro dunque che si possono seguire vari procedimenti per risolvere uno stesso triangolo. Tuttavia è sempre consigliabile scegliere il procedimento basandosi su due osservazioni evidenti:

A) il procedimento che richiede il numero minore di operazioni e i calcoli più semplici riduce al minimo la probabilità di errori banali;

B) il procedimento che utilizza maggiormente i dati iniziali conduce a risultati più precisi.

Risolvere triangoli usando il calcolatore tascabile

Il calcolatore è, ovviamente, di valido aiuto nella risoluzione dei triangoli, specialmente se è usato in modo consapevole.
Vediamo ora qualche esempio di calcolo svolto per mezzo del calcolatore.
— Per calcolare

$$a=\sqrt{10^2+7^2},$$

come richiesto nel problema di p. 172, conviene usare la sequenza di tasti:

$\boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{x^2}\ \boxed{)}\ \boxed{\sqrt{\ }}$.

Infatti, per eseguire il calcolo, si debbono svolgere le operazioni nell'ordine seguente:

1°) l'addizione 10^2+7^2;

2°) l'estrazione di radice.

Si deve dunque alterare l'ordine stabilito dal Sistema Operativo Algebrico[1] (S.O.A.), perciò si debbono usare le parentesi.

— Per calcolare l'angolo β, sapendo che

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{13}{35}$$

(come richiesto dalla risoluzione del II triangolo di p. 172), conviene usare la sequenza di tasti:

$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$;

si ottiene il quoziente

0,3714286.

Successivamente, premendo i tasti

$\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{SEN}}$

si ottiene l'angolo richiesto.

— Per calcolare

$$b=120\cdot\cos 10°$$

(come richiesto dalla risoluzione del IV triangolo di p. 173), useremo la sequenza di tasti:

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{COS}}\ \boxed{=}$.

[1] *Il Sistema Operativo Algebrico è l'ordine convenzionale, seguito anche dal calcolatore, per svolgere più operazioni in un'espressione. L'ordine è il seguente:*

I) calcolare seno o coseno o tangente di un angolo; eseguire elevazioni a potenza o estrazioni di radice;
II) eseguire moltiplicazioni o divisioni;
III) eseguire addizioni o sottrazioni.

Infatti, con questa sequenza si svolgono le operazioni nell'ordine stabilito dal S.O.A., cioè:

1°) si calcola cos 10°;

2°) si moltiplica il risultato per 120.

— *Per calcolare*

$$a=\frac{40}{\operatorname{sen} 15^\circ}$$

(come richiesto dalla risoluzione del III triangolo di p. 173), ci si basa sulla sequenza di tasti:

4 0 ÷ 1 5 SEN =.

Risolvere i triangoli rettangoli, di cui sono assegnati gli elementi seguenti, riferendosi in ogni caso alla Fig. 5.

16. $c=10$ e $b=10$

17. $a=50$ e $\beta=30^\circ$

18. $b=100$ e $\gamma=18^\circ$

19. $a=232$ e $c=116$

20. $b=0{,}15$ e $c=15{,}23$

21. $a=325{,}48$ e $\beta=40^\circ 35'$

22. $b=1327{,}27$ e $\gamma=84^\circ 17'$

23. $a=453{,}86$ e $c=23{,}71$

24. $b=1{,}45\cdot 10^6$ e $c=2{,}36\cdot 10^5$

25. $a=4{,}731\cdot 10^{-3}$ e $\gamma=12^\circ 3' 47''$

26. $b=7{,}381\cdot 10^4$ e $\beta=3^\circ 23' 5''$

27. $a=5{,}428\cdot 10^{-4}$ e $b=2{,}714\cdot 10^{-5}$

28. $a=2\sqrt{3}$ e $b=3$

29. $a=12$ e $c=6\sqrt{3}$

30. $b=10$ e $c=10\sqrt{2}$

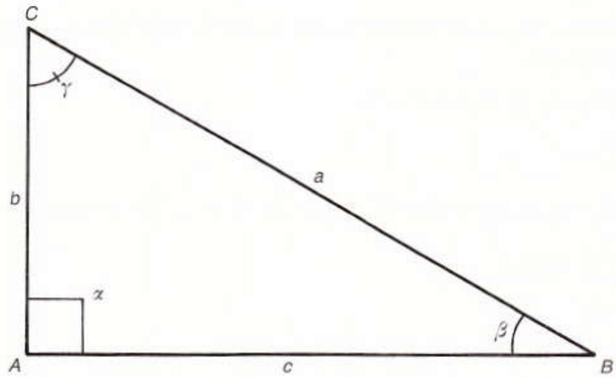


Fig. 5

Altri problemi di geometria

31. Risolvere il triangolo ABC, rettangolo in A, sapendo che il cateto AC è lungo 2 m e che l'altezza AH, relativa all'ipotenusa, è lunga 1,4 m.

32. Risolvere il triangolo ABC, rettangolo in A, sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono:

$CH=10$ cm e $HB=40$ cm.

33. In un triangolo rettangolo ABC la bisettrice AK dell'angolo retto divide l'ipotenusa in due parti, tali che

$$\frac{CK}{BK}=\frac{5}{4}.$$

Risolvere il triangolo.

34. Risolvere il triangolo ABC, rettangolo in A, di cui si conosce l'angolo

$$\beta=40°$$

e l'area

$$S=900\ \text{m}^2.$$

35. Risolvere il triangolo ABC, rettangolo in A, che ha l'area di 600 m^2, sapendo che il cateto AB è triplo del cateto AC.

36. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, l'angolo

$$\beta=50° \quad \text{e} \quad \overline{AB}=10.$$

BM è la mediana del cateto AC e BK è la bisettrice dell'angolo β.
Quanto sono lunghi AK e AM?

37. Calcolare l'area e il perimetro della piastra poligonale rappresentata in Fig. 6, valendosi dei dati indicati.

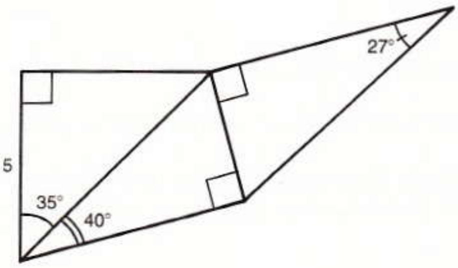


Fig. 6

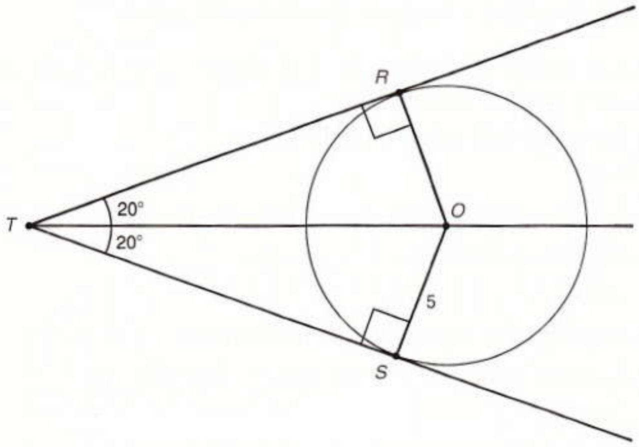


Fig. 7

38. Le tangenti condotte al cerchio di Fig. 7 dal punto esterno T formano un angolo di 40°. Calcolare la distanza TO e l'area del quadrilatero $RTSO$.

39. Calcolare l'angolo formato dalle tangenti condotte ad un cerchio di raggio r da un punto T esterno e distante dal centro $3r$.

40. Calcolare l'altezza di un triangolo isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r ed avente l'angolo al vertice di 36°.

41. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$ (Fig. 8) è data una corda AT, tale che

$$T\hat{A}B=15°.$$

Condurre la tangente in T; questa interseca il prolungamento di AB in C. Calcolare il perimetro del triangolo ATC.

(Ricordare che se l'angolo alla circonferenza $T\hat{A}O$ è ampio 15°, l'angolo al centro corrispondente è ampio...; ricordare inoltre che il raggio OT forma con la tangente TC un angolo ampio...).

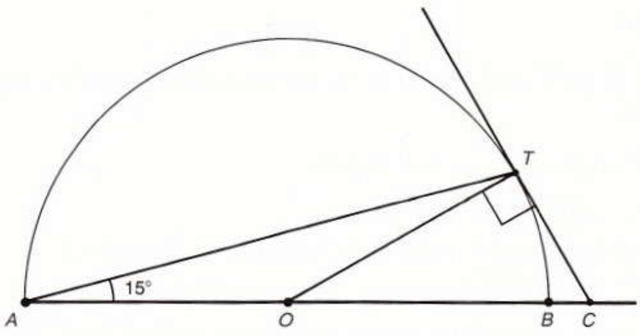


Fig. 8

42. Determinare l'ampiezza dell'angolo α che la diagonale di un cubo forma con la diagonale di una delle sue facce.
(Determinare la lunghezza delle due diagonali e osservare il triangolo rettangolo...).

43. Determinare l'angolo α, formato dallo spigolo l del tetraedro regolare con l'altezza h.
(Tenere presente che le facce del tetraedro sono tutte triangoli equilateri di lato l e osservare il triangolo rettangolo...).

44. Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale d lunga $2\cdot\sqrt{3}$; questa forma con la diagonale b della base un angolo di 30°, mentre b forma con il lato l della base un angolo di 75°. Determinare l'area della superficie totale e il volume del solido.

45. Dato un cono circolare retto, indicare con r il raggio, con h l'altezza e con α l'angolo di semiapertura. Risolvere i seguenti problemi:

a) calcolare α e la superficie laterale S_l, conoscendo

$$r=10 \quad \text{e} \quad h=15.$$

Scrivere la formula generale che esprime S_l in funzione di r e h.

b) Calcolare h e la superficie totale S_t, conoscendo

$$\alpha=20° \quad \text{e} \quad r=50.$$

Scrivere la formula generale che esprime S_t in funzione di r e di α.

c) Calcolare r, la superficie totale S_t e il volume V, sapendo che

$$\alpha=40° \quad \text{e} \quad h=30.$$

Scrivere le formule generali che esprimono S_t e V in funzione di h e α.

46. Nel cono dell'esercizio precedente, calcolare:

a) α ed h, essendo noti $r=10$ e il volume $V=300\cdot\pi$;
b) α ed r, essendo noti $h=20$ e il volume $V=960\cdot\pi$;
c) h ed r, essendo noti $\alpha=30°$ e il volume $V=9\cdot\sqrt{3}\cdot\pi$.

47. Una piramide retta ha la base quadrata $ABCD$ di area 16 cm^2 e l'angolo α che lo spigolo VB forma con la base ampio 30°. Calcolare:

a) la lunghezza dello spigolo VB;
b) l'angolo fra lo spigolo VB e l'altezza VH.

48. Nella stessa piramide dell'esercizio precedente, calcolare:

a) la lunghezza dell'apotema VK;

b) l'angolo che l'apotema forma con la base.

49. In un cono di semiapertura $\alpha=36°$ si vuole inscrivere una sfera di raggio $r=59$ cm; quanto deve essere lungo il raggio R del cono?

50. In una sfera di raggio r sono inscritti un cilindro ed un cono, come in Fig. 9. Determinare il rapporto fra il volume del cilindro e quello del cono, sapendo che l'angolo di apertura del cono è di 30°.

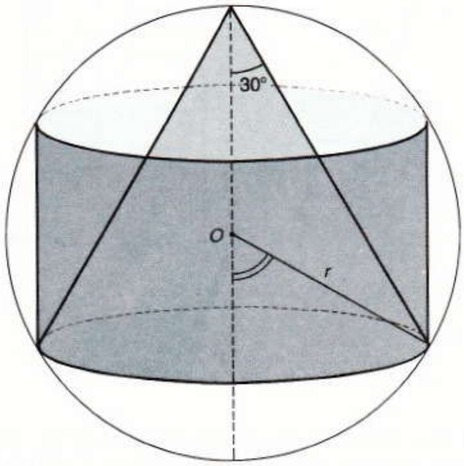


Fig. 9

Problemi vari

51. Un ragazzo fa volare un aquilone tenuto con un filo lungo 70 metri. A quale altezza dal suolo si trova l'aquilone, se il filo, supposto rettilineo, forma un angolo di 65° con il terreno e la mano che tiene il filo si trova ad 1 metro dal suolo?
Se un secondo ragazzo si trova esattamente sotto l'aquilone, quanto è distante dal primo ragazzo?

52. Si progettano oggi aerei di linea supersonici in cui varia, durante il volo, l'angolo formato dalle ali; la Fig. 10 mostra il progetto di uno di questi aerei con le ali lunghe 16 m e l'angolo α variabile. Di quanto varia l'apertura delle ali se l'angolo α passa da 70° durante il decollo a 30° durante il volo supersonico?

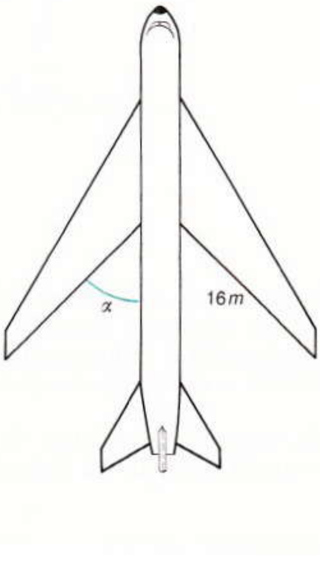


Fig. 10

53. Il filo d'ancoraggio di un'antenna televisiva è lungo 120 metri ed è fissato al terreno a 81 m dalla base dell'antenna. Quanto è ampio l'angolo α che il filo forma con il terreno?
Se si costruisce un modello in scala dell'antenna e il filo d'ancoraggio risulta lungo 40 cm, a quale distanza dalla base deve essere fissato?

54. Le due porte di un'autorimessa, ciascuna larga 1,5 m, sono aperte di un angolo di 70° (Fig. 11); qual è la larghezza dell'apertura fra le due porte in questa posizione?

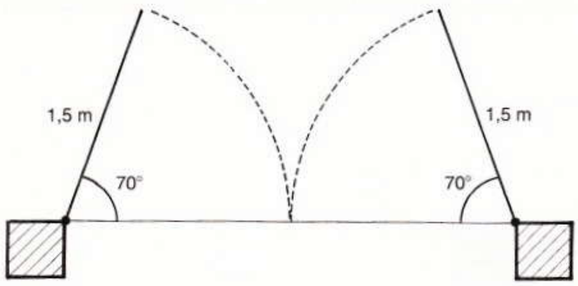


Fig. 11

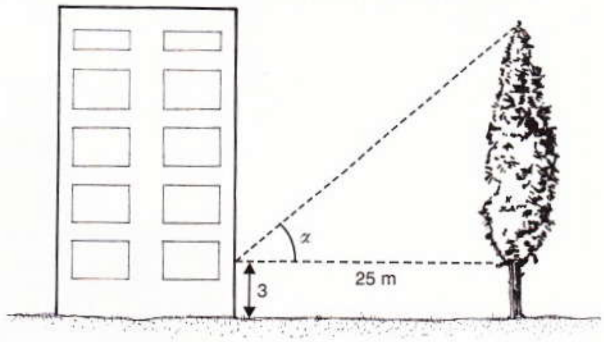


Fig. 12

55. Si deve abbattere un albero che dista 25 m da un palazzo (Fig. 12); da una finestra del primo piano si vede la cima dell'albero con un angolo d'elevazione $\alpha=40°$. Se l'albero cade verso la casa, può produrre danni?

56. Quanto vale l'angolo d'elevazione del sole quando l'asta di una bandiera, alta 10 m, proietta un'ombra lunga 8 m?

57. La Fig. 13 rappresenta una strada che sale di 15 m su una distanza orizzontale di 100 m; in questo caso si dice che la pendenza è del 15%. Quanto vale l'angolo α di inclinazione della strada?
In generale, se una strada sale di s metri su una distanza orizzontale di d metri, come si calcola la pendenza? Come si trova l'angolo di inclinazione?

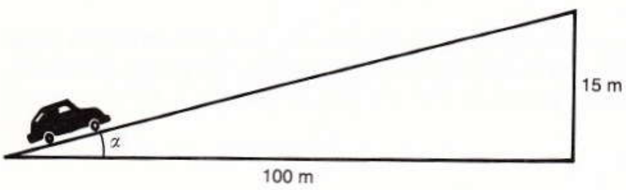


Fig. 13

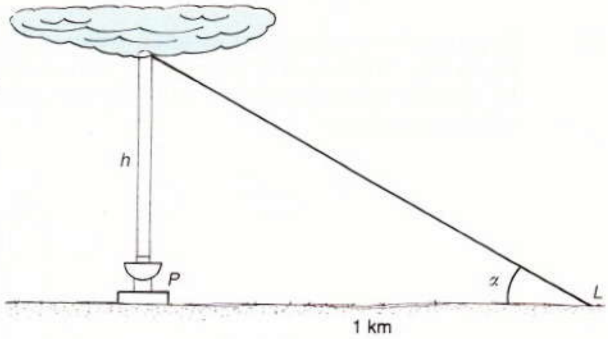


Fig. 14

58. Per misurare di notte l'altezza di una nuvola si procede così (Fig. 14): da terra si punta un proiettore P verticalmente in modo da colpire la nuvola con un fascio di luce; si osserva la macchia luminosa sulla nuvola da una località L, allo stesso livello del proiettore, che dista 1 km da P e si misura un angolo d'elevazione α di 58°. Qual è l'altezza della nuvola?

59. Un ricognitore militare A fotografa una base missilistica M in costruzione. Se la situazione è quella illustrata in Fig. 15, quanto vale la distanza fra il paese P e l'istallazione militare M?

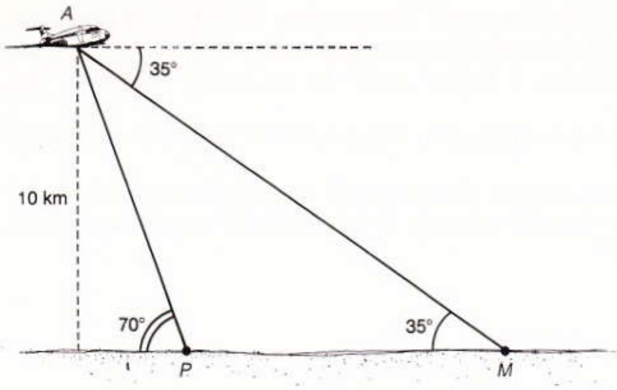


Fig. 15

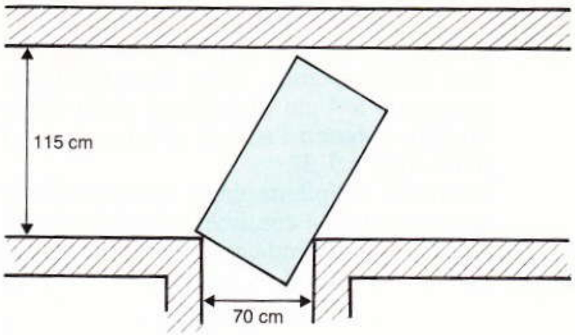


Fig. 16

60. Si è acquistato un mobile largo 65 cm e lungo 125 cm; si riuscirà a farlo passare per la porta e per il corridoio, se le misure sono quelle illustrate in Fig. 16?

Problemi di ottica

61. Tenendo presenti i dati indicati nella Fig. 17, calcolare l'indice di rifrazione per la luce che passa dall'aria alla sostanza *x*.

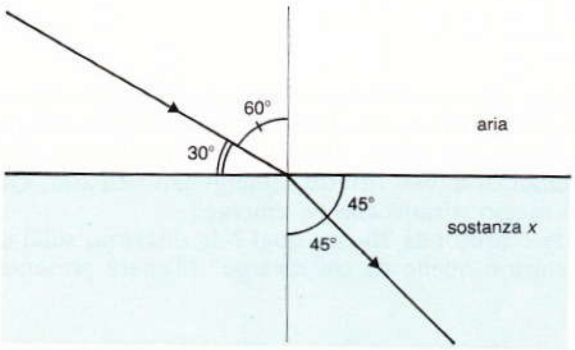


Fig. 17

62. Gli angoli di incidenza e di rifrazione di un raggio luminoso che passa dall'aria ad un altro mezzo trasparente misurano rispettivamente 50° e 25°; qual è l'indice di rifrazione del mezzo?

63. Un raggio luminoso incide con un angolo $i=70°$ sulla superficie di separazione fra l'aria ed un altro mezzo trasparente; calcolare l'angolo di rifrazione nei seguenti casi quando il secondo mezzo trasparente è:

— l'acqua, con indice $n=1{,}33$;
— il vetro, con indice $n=1{,}50$;
— il diamante, con indice $n=2{,}42$.

64. L'indice di rifrazione del vetro varia al variare del colore della luce incidente, assumendo i valori elencati nella tabella seguente:

Colore	violetto	azzurro	verde	giallo	arancio	rosso
Indice	1,532	1,528	1,519	1,517	1,514	1,513

Calcolare l'angolo di rifrazione di raggi di luce dei vari colori quando l'angolo di incidenza è $i=80°$.

65. Un recipiente rettangolare profondo 10 cm (Fig. 18) è pieno d'acqua fino all'orlo. Un raggio di luce attraversa la superficie superiore dell'acqua esattamente in un punto in corrispondenza di un lato del recipiente. Dopo aver subito la rifrazione, il raggio incide in un punto del fondo del recipiente a 4 cm di distanza dallo stesso lato.
Quanto valgono l'angolo di rifrazione e l'angolo di incidenza, sapendo che l'indice di rifrazione dell'acqua è 1,3?
Lo stesso recipiente viene riempito di un liquido diverso dall'acqua. Il raggio rifratto incide sullo stesso punto a 4 centimetri di distanza dal lato, quando l'angolo di incidenza del raggio entrante è di 31°; qual è l'indice di rifrazione del liquido?

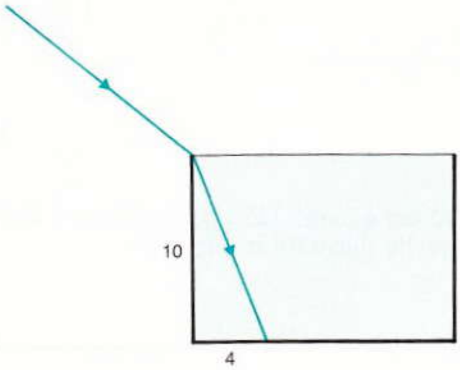


Fig. 18

66. Una sorgente di luce è posta nell'acqua e un sottile pennello di luce incide sulla superficie dell'acqua con un angolo i=30°; qual è l'angolo di rifrazione? Tenere presente che la legge che lega gli angoli i ed r è, in questo caso:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{1}{1{,}3}.$$

67. Un sottile pennello di luce attraversa la superficie superiore dell'acqua contenuta in un recipiente rettangolare con un angolo di incidenza di 50°. Il pennello rifratto prosegue verso il fondo del recipiente colpendo uno specchio piano, disposto orizzontalmente, che lo riflette di nuovo verso la superficie e viene quindi di nuovo rifratto, emergendo nell'aria. Qual è l'angolo fra il raggio che entra nell'acqua; il raggio rifratto che ne emerge?
Se l'acqua del recipiente è profonda 10 cm, qual è la distanza, sulla superficie dell'acqua, fra il punto in cui il raggio entra e quello da cui emerge? (Tenere presente che l'indice di rifrazione dell'acqua è 1,3).

68. Dei raggi luminosi di vari colori si propagano nell'aria ed attraversano una lastra di vetro a facce piane e parallele dello spessore di 5 cm. Sapendo che l'angolo di incidenza è di 80°, determinare la lunghezza d percorsa da ogni raggio all'interno della lastra e lo spostamento s subito da ogni raggio. (Tenere presente la tabella dell'esercizio 64).

69. Un raggio di luce passa dall'aria ad un altro mezzo trasparente, di cui si conosce l'indice di rifrazione n; dimostrare che, per determinare il raggio rifratto a partire dal raggio incidente, ci si può valere della seguente costruzione (Fig. 19): con centro nel punto di incidenza P si tracciano nel secondo mezzo due circonferenze, una con raggio R (arbitrario) e l'altra con raggio

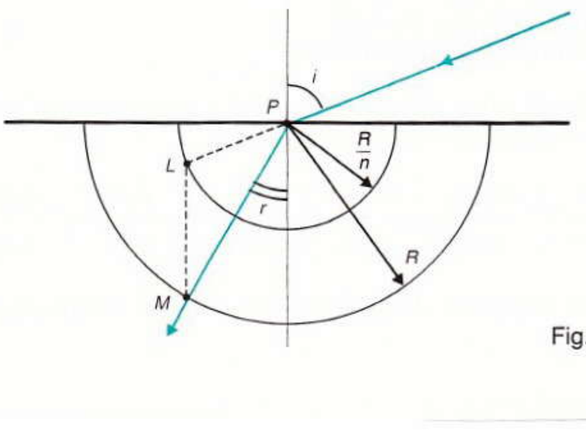


Fig. 19

$\frac{R}{n}$; si prolunga il raggio incidente fino ad incontrare la semicirconferenza più piccola in L, e per L si traccia la parallela alla normale alla superficie rifrangente fino ad incontrare in M la semicirconferenza più grande. Il raggio rifratto ha la direzione di PM.

70. Un disco opaco, di raggio $r=1$ cm, è disposto parallelamente ad uno schermo opaco dal quale dista cm 2; una lampada puntiforme L, posta sull'asse del disco, proietta sullo schermo un'ombra di raggio $R=3$ cm. Quanto vale l'angolo $2x$ di apertura del cono d'ombra?

71. Una sferetta opaca di dentro C e raggio r è disposta fra uno schermo piano, che dista $2r$ dal suo centro, e una lampada puntiforme L. Determinare l'angolo $2x$ di apertura del cono d'ombra e la distanza di L dallo schermo, quando l'ombra è un cerchio di raggio $4r$.

Problemi di cinematica

72. In acque calme una data imbarcazione può viaggiare con una velocità di 10 km/h. Il timoniere vuole procedere in linea retta attraverso un fiume in cui la corrente fluisce con una velocità uniforme di 5 km/h; per fare ciò il timoniere trova che deve dirigere l'imbarcazione controcorrente di un certo angolo. Qual è quest'angolo?

73. Un aereoplano vola verso Nord con una velocità di 800 km/h; all'improvviso l'aereo incontra un vento trasversale da Ovest, la cui velocità è di 100 km/h. Se il pilota non agisce sui comandi, quale sarà la nuova direzione e la nuova velocità dell'aereo rispetto al suolo?

74. Un automobilista viaggia sotto la pioggia ad una velocità di 80 km/h e osserva che le traiettorie delle gocce di pioggia sono inclinate di 70° rispetto alla verticale; calcolare la velocità della pioggia rispetto alla terra, supponendo che non ci sia vento.

75. In Fig. 20 sono rappresentati, in un riferimento cartesiano, quattro vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Determinare le componenti di ciascun vettore lungo gli assi x ed y.

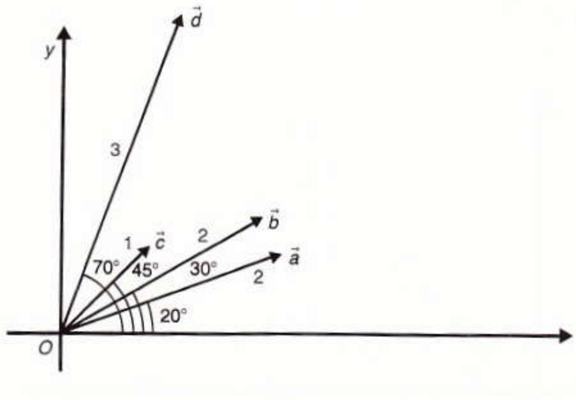


Fig. 20

76. Disegnare i seguenti vettori, di cui sono assegnate le componenti lungo gli assi cartesiani, dopo averne determinato il modulo e l'angolo con l'asse delle x:

$$\vec{a}: \begin{cases} a_x=5 \\ a_y=8{,}7 \end{cases} \quad \vec{b}: \begin{cases} b_x=10 \\ b_y=20 \end{cases} \quad \vec{c}: \begin{cases} c_x=15 \\ c_y=15 \end{cases} \quad \vec{d}: \begin{cases} d_x=18{,}8 \\ d_y=\ 6{,}8 \end{cases}$$

77. *A causa della difficoltà di seguire il movimento delle frecce o delle palle di cannone, le idee sul movimento dei proiettili erano vaghe e imprecise fino all'epoca di Galileo (Fig. 21).*
In Fig. 22 è riportato un disegno che si trova in un trattato di artiglieria del 1621; questo disegno, che risente degli studi di Galileo, rivela una chiara comprensione del moto dei proiettili.
Oggi, per descrivere la traiettoria di un proiettile si procede così. Data la velocità iniziale v_0 e il suo

84. La Fig. 26 mostra un blocco di massa m, tenuto in equilibrio sul piano inclinato mediante una fune attaccata alla parete verticale; il piano inclinato forma un angolo α con la direzione orizzontale. Determinare le forze f_1 e f_2 agenti sul blocco sia nella direzione del piano inclinato che nella direzione perpendicolare al piano inclinato (Fig. 27).
Esaminare prima di tutto alcuni casi particolari, per esempio:

$m=1$ kg e diversi valori dell'angolo α (15°, 30°, 45°, 60°, 75°, ...)
$m=5$ kg e » » » » » » » » » .

Formulare successivamente delle leggi generali che esprimano le forze agenti sul blocco nelle due direzioni in funzione di m, di g e di α.

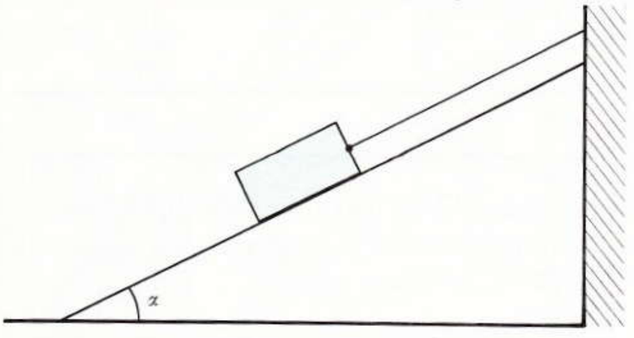


Fig. 26

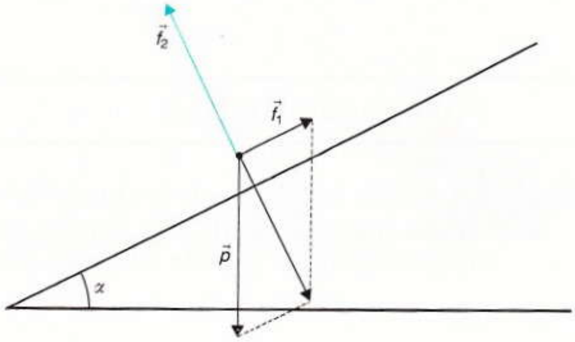


Fig. 27

85. Supponiamo di tagliare il filo che tratteneva il blocco fermo sul piano inclinato nell'esercizio precedente. Quale sarà l'accelerazione $\vec{a}$ che subisce il blocco? Quanto vale il tempo t impiegato dal blocco per arrivare a terra, se il piano inclinato è lungo l? Iniziare con dei casi numerici; per esempio:

$m=1$ kg, $\alpha=30°$, $l=2$ m,
$m=10$ kg, $\alpha=30°$, $l=2$ m,
$m=1$ kg, $\alpha=70°$, $l=2$ m,
$m=1$ kg, $\alpha=30°$, $l=4$ m.

Formulare, infine, delle leggi generali che esprimano $\vec{a}$ e t in funzione di m, l, α e g.

86. Un blocco è lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato, privo d'attrito, con velocità v_0; l'angolo di inclinazione del piano è α.
Quanto cammino percorre sul piano? Quanto tempo impiega a fermarsi?
Iniziare sempre esaminando dei casi numerici; per esempio:

$v_0=10$ m/sec, $\alpha=40°$;
$v_0=20$ m/sec, $\alpha=40°$;
$v_0=10$ m/sec, $\alpha=80°$.

Formulare, infine, delle risposte generali.

87. *Se lanciamo un blocco di massa* **m** *con velocità* **v** *lungo un piano orizzontale, dopo un certo tempo il blocco si ferma; ciò significa che il blocco, durante il movimento, decelera, cioè subisce un'accelerazione $\vec{a}$ che ha verso opposto a quello del movimento. Ora, in base al 2° principio della dinamica, a questa accelerazione corrisponde una forza $\vec{f}$; si tratta della* ***forza d'attrito dinamico*** *$\vec{f}_d$, data da*

$$\vec{f}_d=m\vec{a}.$$

Consideriamo ora lo stesso blocco di massa **m** *fermo su un piano orizzontale e proviamo a metterlo in movimento esercitando su di esso una forza; troveremo che il corpo non si muove sotto l'azione di una piccola forza. In questo caso diciamo che la forza da noi applicata è equilibrata da una* ***forza d'attrito statico****, esercitata dal piano sul corpo. Aumentando la forza applicata, troviamo una ben determinata forza per cui il corpo comincia appena a muoversi. La massima forza d'attrito statico $\vec{f}_s$ è proprio la più piccola forza necessaria per iniziare il movimento ed è regolata da due intuitive leggi empiriche:*

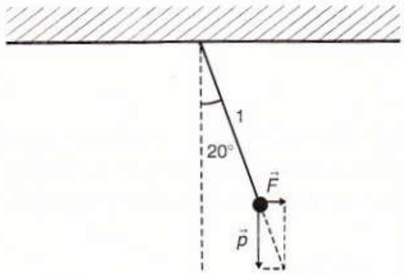
— *$\vec{f}_s$ è, in prima approssimazione, indipendente dall'area della superficie di contatto;*

80. Un proiettile è sparato con una velocità iniziale v_0, inclinata di 45° rispetto all'orizzontale; verificare che la gittata è uguale al quadruplo della quota massima raggiunta.

81. Durante la prima guerra mondiale, i Tedeschi costruirono un enorme cannone (chiamato dagli Alleati «La grossa Berta»); il cannone, montato su un carro ferroviario era destinato a bombardare Parigi da una distanza di 80 km.
Qual'era il valore minimo della velocità di uscita del proiettile per raggiungere tale gittata? Quale altezza raggiungeva il proiettile?
(Bisogna ricordare che la resistenza dell'aria riduce sempre la gittata; le formule semplici che conosciamo non tengono conto della presenza dell'aria).

Problemi di dinamica

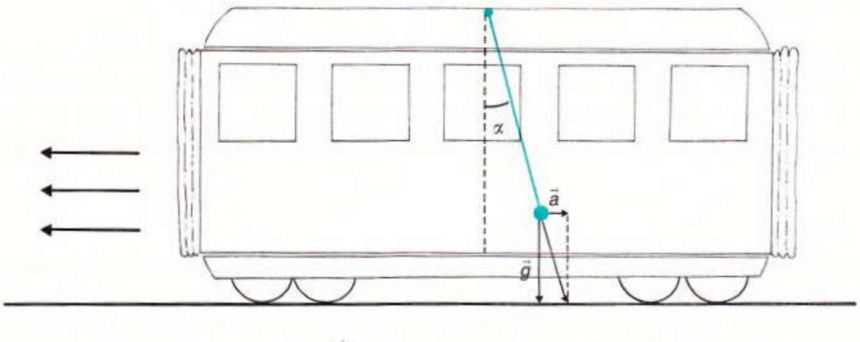
82. Un pendolo è costituito da una massa di 2 kg appesa ad un filo; il filo, lungo un metro, è fissato al soffitto di una stanza (Fig. 24). Determinare l'intensità della forza $\vec{F}$ orizzontale che mantiene il filo spostato di 20° rispetto alla posizione di equilibrio.



$\vec{p}$ è la forza peso, che ha modulo $p=mg$;
in questo caso risulta: $p=2\cdot 9{,}8$ Newton.

Fig. 24

83. Un filo a piombo appeso al soffitto di una carrozza ferroviaria può essere usato per determinare l'accelerazione $\vec{a}$ a cui è soggetto il vagone (Fig. 25).
Determinare l'accelerazione $\vec{a}$ quando l'angolo α è di 15°.
Determinare l'angolo α quando risulta $a=2$ m/sec^2.
Determinare la relazione generale che lega l'accelerazione orizzontale a del vagone all'angolo α compreso fra il filo e la verticale.



$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$ ha la stessa direzione di $\vec{F}$;

$\vec{g}=\frac{\vec{p}}{m}$ ha la stessa direzione di $\vec{p}$.

Fig. 25

retto, e quindi misura l'angolo $O\hat{C}A$, trovando

$$O\hat{C}A=57'.$$

Sapendo che il raggio della terra è

$$OA=6376{,}755 \text{ km},$$

determinare la distanza OC.

90. Per determinare la distanza della Terra dal Sole, lo stesso osservatore posto in A nella Fig. 30, aspetta che il sole sia in parallasse orizzontale; ora trova che l'angolo $O\hat{C}A$ vale

$$O\hat{C}A=8'',8;$$

quanto vale la distanza OC?

91. Nell'anno della sua morte (1543), l'astronomo Copernico pubblicò la sua opera *De revolutionibus*, nella quale spiega che i pianeti si muovono uniformemente su dei cerchi eliocentrici complanari nell'ordine seguente, a partire dal Sole: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno (gli altri pianeti furono scoperti più tardi).
Il sistema di Copernico descrive il movimento dei pianeti solo in prima approssimazione, tuttavia è molto vicino alla realtà e permette di determinare le distanze relative di ciascun pianeta dal Sole con un'approssimazione accettabile.
Ecco come si può procedere, tenendo presente che la distanza media Sole-Terra, chiamata «Unità Astronomica» (1 u.a.), vale circa 150 milioni di chilometri.
Cominciamo col determinare la distanza del Sole da Venere, che è un pianeta detto «inferiore», dato che la sua distanza dal Sole è inferiore ad 1 u.a.: dalla Terra T (Fig. 31) si osserva il Sole S, Venere V e si misura ripetutamente l'angolo $S\hat{T}V$; si trova così che quest'angolo non oltrepassa mai l'ampiezza di 48°, raggiunta quando la retta TV è tangente alla traiettoria.
Quanto vale la distanza SV?

92. Seguendo lo stesso metodo esposto nell'esercizio precedente, valutare la distanza Sole-Mercurio, sapendo che l'angolo $S\hat{T}M$ misura al massimo 23° (M indica la posizione di Mercurio).

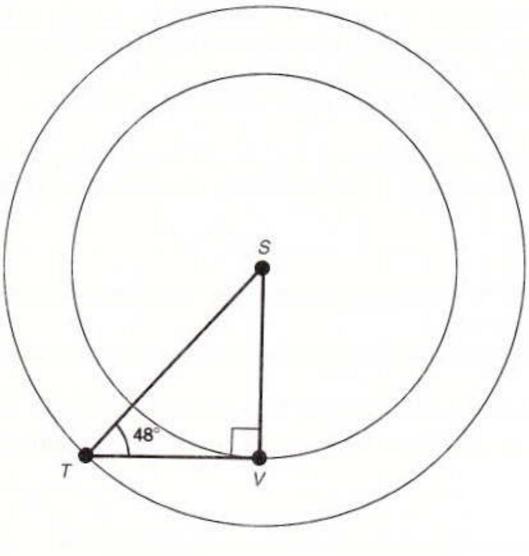


Fig. 31

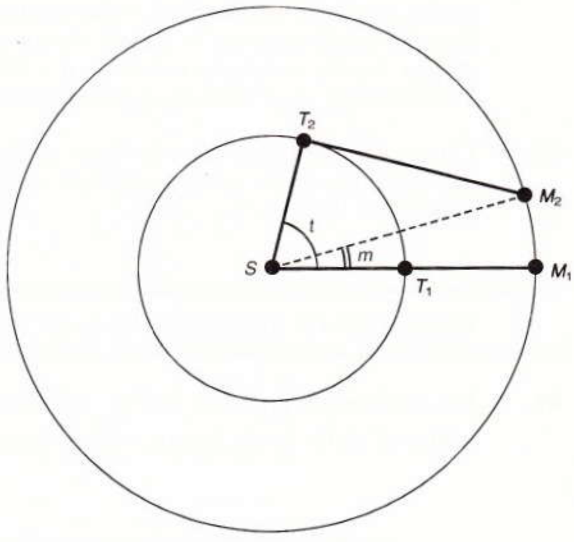


Fig. 32

93. Per determinare la distanza fra il Sole e Marte, che è un pianeta superiore, non si può ripetere inalterato il procedimento seguito per i pianeti inferiori. Ecco come si procede: si fissa l'attenzione sulle posizioni T_1, M_1 e T_2, M_2 rappresentate in Fig. 32, fra le quali trascorrono 106 giorni. Sapendo che la Terra compie una rivoluzione completa intorno al Sole in 365 giorni e Marte in

— *$\vec{f}_s$ è legata alla forza normale $\vec{N}$, cioè a quella forza, perpendicolare alla superficie di separazione, che nasce dalla deformazione elastica dei corpi a contatto. Più precisamente si ha:*

$$f_s \leq \mu_s \cdot N \qquad (1)$$

*dove μ_s è il **coefficiente di attrito statico**, N è il modulo della forza normale $\vec{N}$, f_s è il modulo di $\vec{f}_s$. Ecco un metodo per calcolare questo coefficiente μ_s: un blocco viene disposto su un piano inclinato che forma un angolo α con il piano orizzontale; aumentando l'inclinazione del piano, si trova che il corpo comincia a scivolare quando l'angolo è α_s. Osservando le Figg. 28 e 29, in cui è schematizzata la situazione, è immediato calcolare μ_s a partire dalla (1): risulta*

$$\mu_s = tg\ \alpha_s.$$

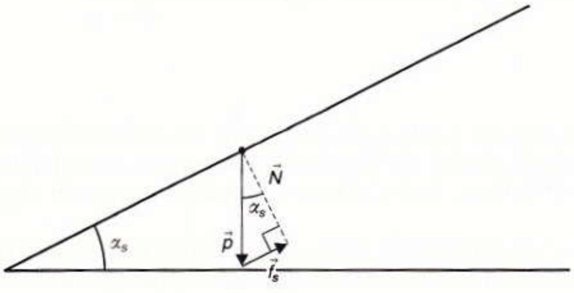


Fig. 28

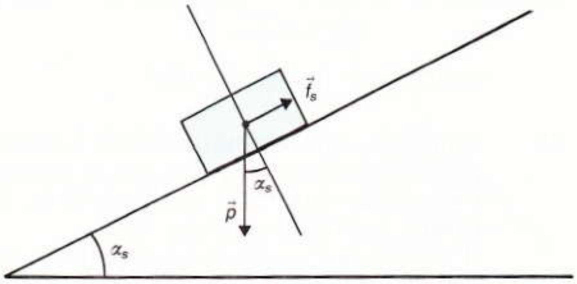


Fig. 29

Leggi analoghe regolano le forze di attrito dinamico; queste sono indipendenti dall'area della superficie di contatto e sono ancora legate alla forza normale $\vec{N}$. Si ha:

$$f_d = \mu_d \cdot N$$

*dove μ_d è il **coefficiente di attrito dinamico**.*
Con ragionamenti analoghi a quelli seguiti per determinare μ_s, si può determinare μ_d: si trova che

$$\mu_d = tg\ \alpha_d$$

dove α_d è l'inclinazione del piano che permette di mantenere costante la velocità del blocco, una volta che il movimento sia iniziato.

Ecco un'applicazione pratica delle considerazioni precedenti: per determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico fra una scatola ed un asse di legno, si appoggia la scatola sull'asse di legno e, gradualmente, si inclina il piano; quando l'inclinazione rispetto all'orizzontale raggiunge i 30°, la scatola comincia a muoversi e scivola per 4 m lungo l'asse in 4 secondi. In base a queste informazioni, determinare il coefficiente di attrito statico e quello di attrito dinamico.

88. Un pezzo di ghiaccio scivola lungo un piano, che è inclinato di 45°, in un tempo doppio di quello che impiegherebbe se il piano fosse senza attrito. Qual è il coefficiente di attrito dinamico fra il ghiaccio e il piano?

Problemi di astronomia e di topografia

89. Un osservatore posto in A (Fig. 30) vuole calcolare la distanza OC fra il centro O della Terra e il centro C della Luna; aspetta che la luna sia in *parallasse orizzontale*, cioè che l'angolo $C\hat{A}O$ sia

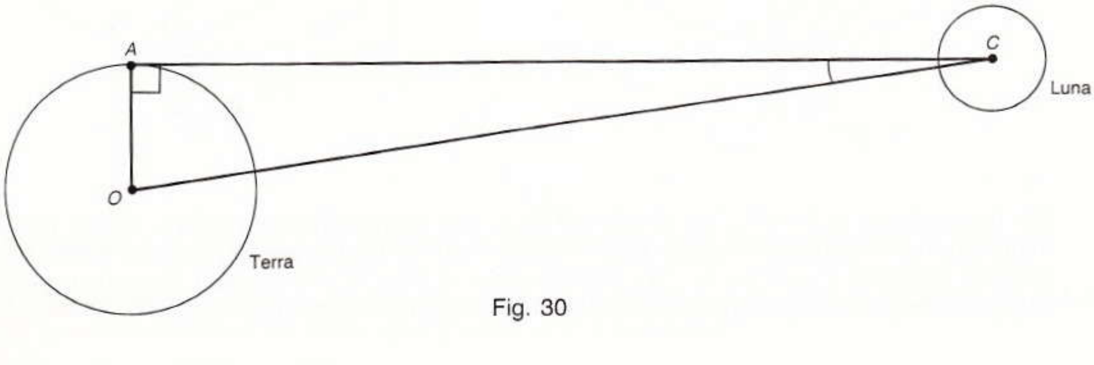


Fig. 30

99. Per misurare il dislivello fra due punti O e P di un terreno, si può procedere alla *livellazione trigonometrica*, quando i due punti hanno fr loro una distanza di qualche centinaio di metri (Fig. 37): basta conoscere la distanza d e misurare l'angolo α.
Calcolare il dislivello fra O e P, se risulta

$$d = 100 \text{ m} \quad \text{e} \quad \alpha = 75°.$$

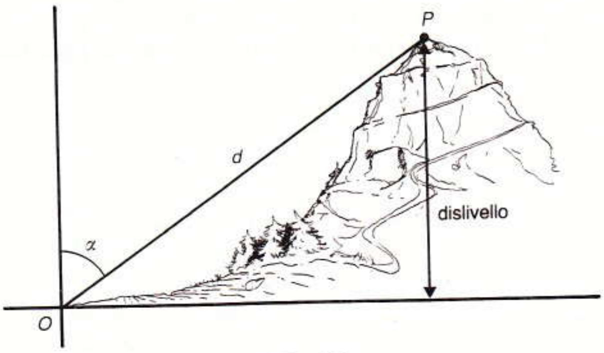


Fig. 37

100. Dalla cima di una scogliera alta 50 m si vede una nave sotto un angolo di 20° rispetto all'orizzontale. Quanto dista la nave dalla scogliera?