3
Moto armonico e funzioni circolari

1. Un problema che rende necessario un nuovo modo di misurare gli angoli

Occupiamoci ora di un importante argomento di fisica: il moto armonico.

Il moto armonico è un particolare movimento periodico (cioè di andata e ritorno) come quello del pendolo (Fig. 1) o di un peso attaccato ad una molla (Fig. 2).

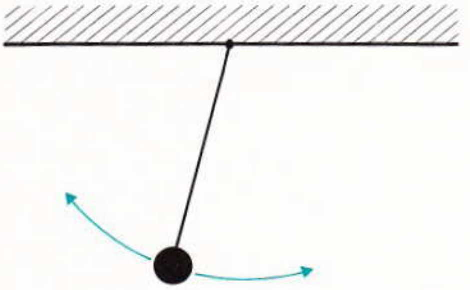


Fig. 1

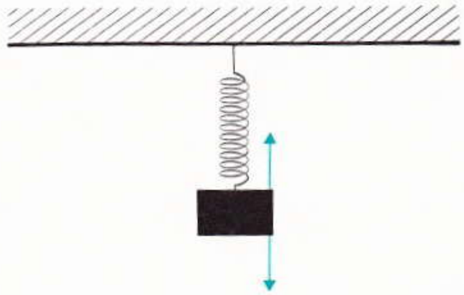


Fig. 2

Si tratta di un movimento fondamentale non solo nello studio della meccanica, ma anche in quello dell'acustica, delle onde e dell'elettromagnetismo, come vedremo in seguito.

Un modo semplice di descrivere il moto armonico si ottiene proiettando un movimento circolare uniforme su di una retta[1]: si consideri (Fig. 3) una pallina P che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di centro O e raggio r e si osserva la proiezione ortogonale Q di P su un diametro, per esempio AB.

Si nota che, mentre P percorre la circonferenza, Q compie un movimento di andata e ritorno lungo il diametro AB; O è centro di simmetria di tale movimento. Q si muove di *moto armonico*.

Il tempo T necessario a P per percorrere l'intera circonferenza è anche necessario a Q per compiere un'intera oscillazione completa, cioè un ciclo di andata e ritorno. Dunque, moto circolare e moto armonico hanno lo stesso *periodo* T.

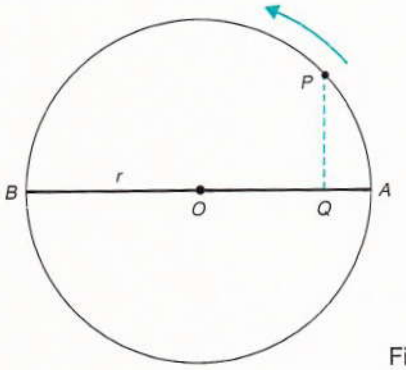


Fig. 3

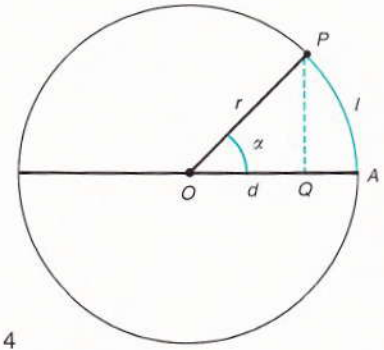


Fig. 4

[1] Si può accompagnare lo studio dell'argomento con la visione del film "Moti periodici" a cura del PSSC.

Ma queste prime osservazioni non bastano a descrivere completamente il moto armonico; occorre invece conoscere la legge oraria, cioè la legge che lega la distanza variabile $d=OQ$ al variare del tempo t.

Osservando la Fig. 4, siamo subito condotti a scrivere:

$$OQ=OP\cos\alpha,$$

cioè:

$$d=r\cos\alpha.$$

Questa relazione permette di ricavare la distanza d, quando è dato l'angolo α. Ma in molti problemi fisici non è dato l'angolo α, è dato invece lo spazio percorso da P, cioè la lunghezza l dell'arco AP. Ci si chiede: si può, anche in questo caso, calcolare la distanza d?

Certamente sì, ma è necessario avere una relazione fra angoli e corrispondenti archi di circonferenza.

2. La misura degli angoli in radianti

Un nuovo modo di misurare gli angoli viene dalla ricerca di relazioni fra angoli al centro e corrispondenti archi di circonferenza.

Osservando la Fig. 5, è immediato verificare che, al raddoppiare dell'angolo al centro di una circonferenza, raddoppia anche la lunghezza del corrispondente arco.

Più in generale, sappiamo che gli angoli al centro e i relativi archi sono direttamente proporzionali; si ha, per esempio (Fig. 6):

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{l}{m}.$$

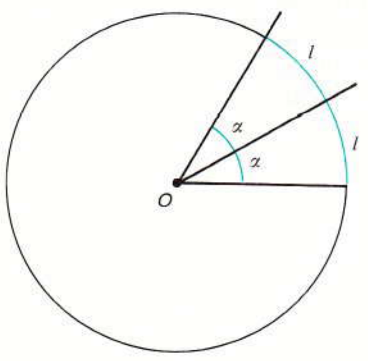


Fig. 5

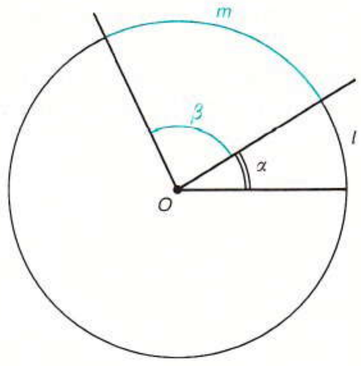


Fig. 6

Se scegliamo uno degli angoli, per esempio β, di 360°, l'arco corrispondente sarà l'intera circonferenza, lunga $2\pi r$. Si avrà allora:

$$\frac{\alpha}{360°}=\frac{l}{2\pi r}$$

da cui

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi}{180°}\alpha.$$

Scopriamo così che il rapporto $\frac{l}{r}$ dipende solo dall'ampiezza α dell'angolo e quindi non cambia se cambia il raggio della circonferenza. Fissiamo dunque (Fig. 7) un angolo di vertice O e tracciamo diverse circonferenze di centro O; rimane sempre costante il rapporto $\frac{l}{r}$ fra la lunghezza dell'arco (pensato rettificato) e la lunghezza r del raggio.

A questo rapporto, che non dipende dalla circonferenza scelta, si dà il nome di *misura dell'angolo in radianti*.

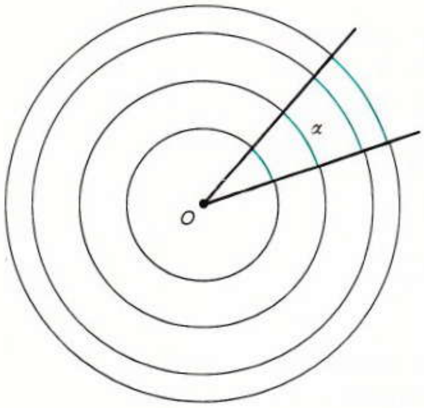


Fig. 7

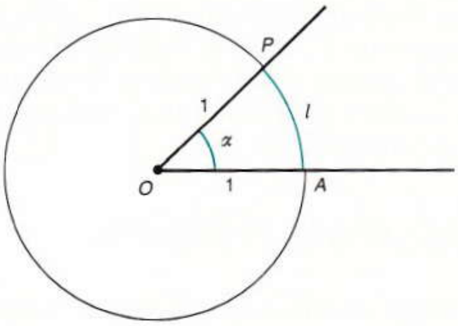


Fig. 8

Possiamo visualizzare la misura in radianti di un angolo nel modo seguente (Fig. 8): tracciamo la circonferenza che ha centro nel vertice O dell'angolo e raggio $r=1$. L'angolo intercetta sulla circonferenza un arco AP, la cui lunghezza l indica proprio la misura dell'angolo in radianti.

Si capisce così che la misura degli angoli in radianti conduce a considerare, invece degli angoli, i corrispondenti archi sulla circonferenza di raggio unitario.

In alcuni casi è molto semplice misurare un angolo in radianti. Consideriamo per esempio l'angolo giro a cui corrisponde l'intera circonferenza c (Fig. 9); si ha:

$$\frac{c}{r}=2\pi.$$

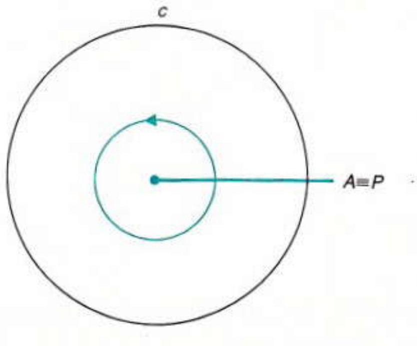


Fig. 9

Dunque l'angolo giro misura 2π radianti. Ne segue che l'angolo piatto, metà dell'angolo giro, misura π radianti e l'angolo retto, metà di quello piatto, misura $\frac{\pi}{2}$ radianti; l'angolo di 45°, metà del retto, misura $\frac{\pi}{4}$ radianti e così via.

Riassumiamo e completiamo queste osservazioni nella tabella seguente:

angolo in gradi	angolo in radianti
$360°$	2π
$180°=\frac{360°}{2}$	π
$90°=\frac{180°}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$60°=\frac{180°}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$45°=\frac{90°}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$30°=\frac{90°}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$270°=3\cdot 90°$	$\frac{3\pi}{2}$

In generale, le cose non sono così semplici e, per passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti o viceversa, dobbiamo usare la relazione:

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi}{180°}\alpha. \tag{1}$$

Ecco due esempi.

A) *Esprimere in radianti l'angolo che misura un grado.*
Se poniamo $\alpha=1°$ nella relazione (1), otteniamo:

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi}{180°}$$

cioè:

$$\frac{l}{r}\cong 0{,}017.$$

Dunque l'angolo di un grado misura circa 0,017 radianti.

Se poi conosciamo la misura α di un angolo in gradi e vogliamo averne la misura in radianti, basterà moltiplicare α per 0,017.

B) *Esprimere in gradi l'angolo che misura un radiante.*
Se l'angolo α misura un radiante, vuol dire che si ha:

$$\frac{l}{r}=1,$$

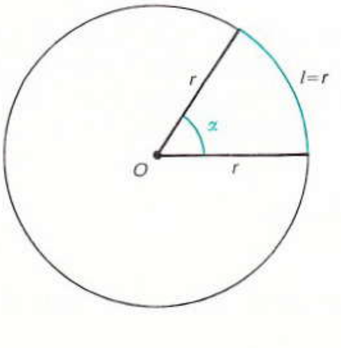


Fig. 10

cioè all'angolo α corrisponde un arco lungo quanto il raggio della circonferenza (Fig. 10). Dalla (1) risulta poi:

$$1=\frac{\pi}{180°}\alpha$$

e quindi

$$\alpha=\frac{180°}{\pi}\cong 57°18'.$$

Troviamo così che l'angolo che misura un radiante è ampio circa 57 gradi. Se quindi conosciamo la misura l di un angolo in radianti e vogliamo averne la misura in gradi, basta moltiplicare l per 57.

Tutti i calcolatori tascabili per uso scientifico hanno la possibilità di fornire misure di angoli in radianti, ma, naturalmente, usano un valore approssimato per il numero irrazionale π.

3. La legge oraria del moto armonico

Nel paragrafo 1 abbiamo considerato un punto P (Fig. 4) che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio r; abbiamo visto che la proiezione Q di P sul diametro della circonferenza è animata da un moto armonico descritto dalla legge:

$$d=r\cos\alpha.$$

Vogliamo ora visualizzare questa legge, tracciandone il diagramma cartesiano; per farlo, scegliamo una circonferenza di raggio $r=1$ in modo da poter scrivere semplicemente:

$$d=\cos\alpha.$$

È chiaro che conviene misurare gli angoli in radianti; in questo modo, la misura di un angolo è visualizzata direttamente dalla lunghezza dell'arco AP (Fig. 11). Anzi, per questo motivo parleremo, a volte, di "coseno di un arco", intendendo riferirci al coseno dell'angolo misurato in radianti.

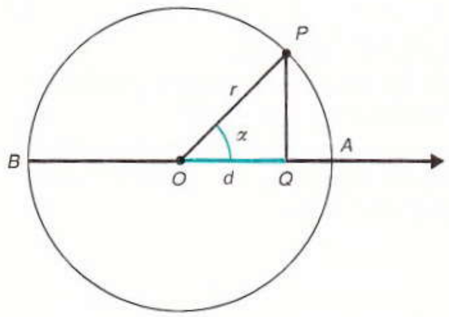


Fig. 11

Resta ancora da fissare la velocità con cui P si muove lungo la circonferenza. Cominciamo da un caso semplice: stabiliamo che P si muova lungo la circonferenza percorrendo un radiante al secondo, cioè percorra, ogni secondo, un arco lungo quanto il raggio. Risulta così:

$$\alpha=t,$$

e dunque la legge oraria del moto armonico diventa:

$$d=\cos t.$$

È ora facile tracciare il grafico della legge $d=\cos t$, aiutandosi con la tabella seguente, dove sono indicati solo alcuni valori di t e d; altri se ne potranno trovare con il calcolatore.

t in gradi	t in radianti	$\cos t$
0°	0	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
180°	π	-1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
360°	2π	1

Si ottiene la curva della Fig. 12, in cui π è approssimato con 3.

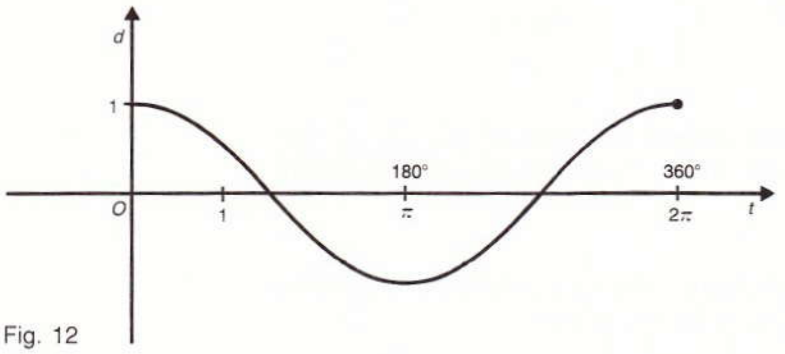


Fig. 12

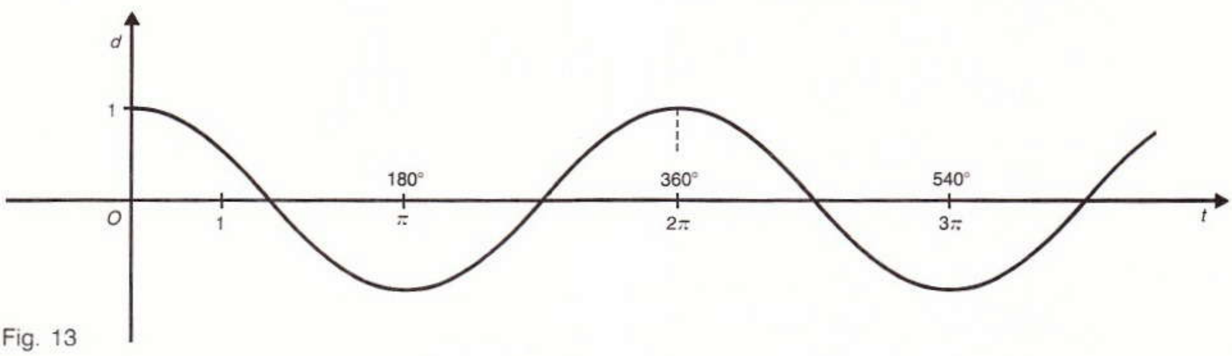


Fig. 13

Il grafico tracciato in figura è il diagramma orario del moto armonico solo durante la prima oscillazione, dato che risulta

$$0 < t < 2\pi.$$

Ma, pensando che il moto circolare, e quindi il moto armonico, continuino nel tempo, possiamo ripetere tanti archi come quello disegnato in Fig. 12; otteniamo così il grafico di Fig. 13.

È bene osservare che per descrivere un moto armonico non siamo certo obbligati a proiettare un moto circolare sul diametro AB (Fig. 11); possiamo anche scegliere un altro diametro, ad esempio CD, come in Fig. 14. In questo caso, avremo

$$d = OQ = PP',$$

e quindi

$$d = \operatorname{sen} t.$$

Otteniamo dunque una legge diversa dalla precedente.

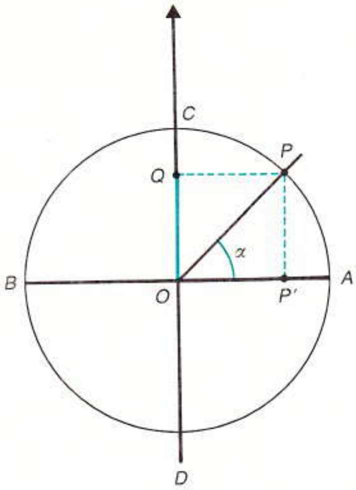


Fig. 14

Nel Cap. 4 approfondiremo meglio la relazione tra queste due situazioni; ora ci limitiamo a tracciare, anche in questo caso, il diagramma cartesiano della legge:

$$d = \operatorname{sen} t.$$

Nella tabella seguente sono raccolti alcuni valori di t e del corrispondente seno, mentre in Fig. 15 è tracciato il relativo grafico.

t in gradi	t in radianti	sen t
0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
180°	π	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
360°	2π	0

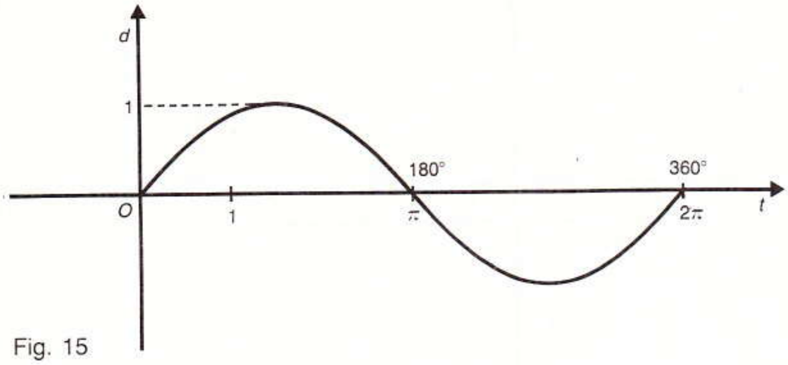


Fig. 15

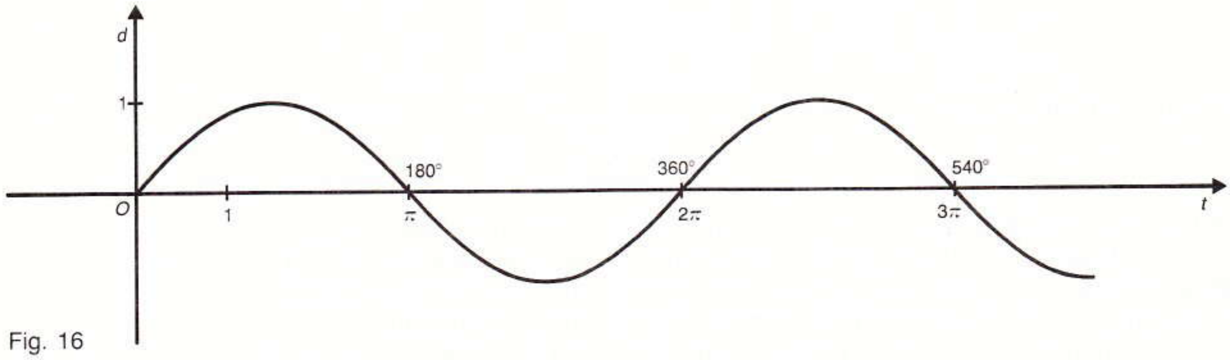


Fig. 16

Anche in questo caso, possiamo ripetere tanti archi di curva, pensando che il moto armonico continui nel tempo; si ottiene così la curva di Fig. 16.

Le due curve di Fig. 13 e di Fig. 16 visualizzano l'andamento del moto armonico nel tempo, e diventano espressive soprattutto nella descrizione dei fenomeni acustici, come vedremo nel Cap. 4.

4. Le funzioni circolari $y = \text{sen}\, x$ e $y = \cos x$

Riflettiamo ora sugli argomenti che sono stati finora introdotti, seguendo a grandi linee l'evoluzione storica della trigonometria.

Le prime nozioni introdotte sono state il seno e il coseno di un angolo acuto, e abbiamo visualizzato $\text{sen}\, \alpha$ e $\cos \alpha$ mediante la lunghezza dei cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa uguale a 1 (Fig. 17).

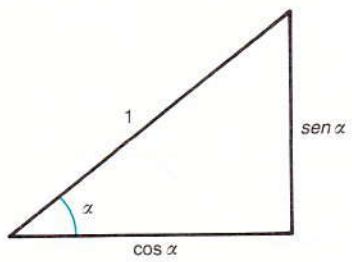


Fig. 17

Successivamente, il problema di passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane ci ha condotti ad estendere le funzioni $\text{sen}\, \alpha$ e $\cos \alpha$ ad

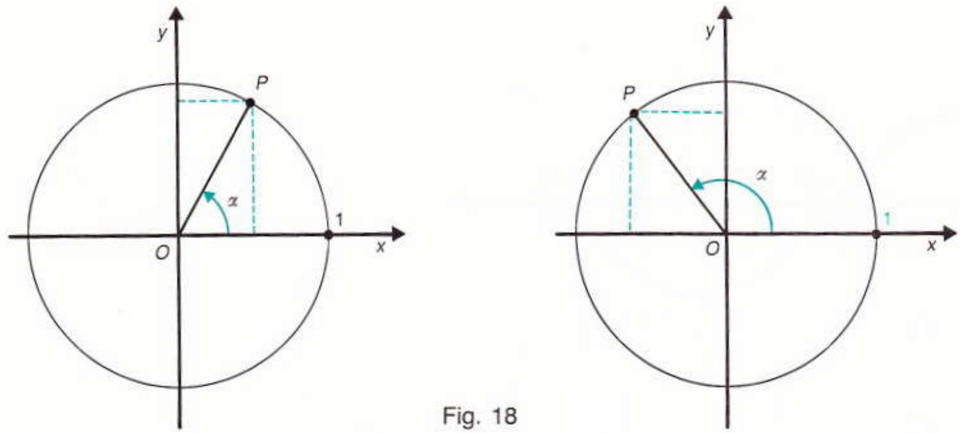


Fig. 18

angoli ampi fino a 360° (Fig. 18); siamo così arrivati alle definizioni:

$$\cos \alpha = x$$
$$\operatorname{sen} \alpha = y$$

con x e y coordinate cartesiane del punto P di coordinate polari $(1, \alpha)$.

Infine, il problema di descrivere il moto armonico a partire dal moto circolare ci ha condotto a considerare seno e coseno di angoli comunque ampi e ad introdurre la misura degli angoli in radianti.

Siamo così arrivati a tracciare due grafici cartesiani molto espressivi, riportando su un asse il valore dell'angolo in radianti e sull'altro il relativo valore del seno o del coseno.

Ripetiamo qui la costruzione del grafico relativo al seno (Fig. 19), riportando sull'asse delle x l'ampiezza dell'angolo, misurata dalla lunghezza dell'arco AP, e sull'asse delle y il valore del seno dell'arco.

Quando pensiamo al punto P che continua a girare sulla circonferenza, ci rendiamo conto del fatto che l'arco percorso assume valori sempre più grandi. Tuttavia, il suo estremo P si ritrova periodicamente nella stessa posizione; per esempio, si ha $P=B$ quando l'arco percorso è:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots$$

Possiamo anche pensare di cambiare il verso di rotazione di P sulla circonferenza; per distinguere questo caso, premettiamo il segno "meno" alle misure degli archi percorsi.

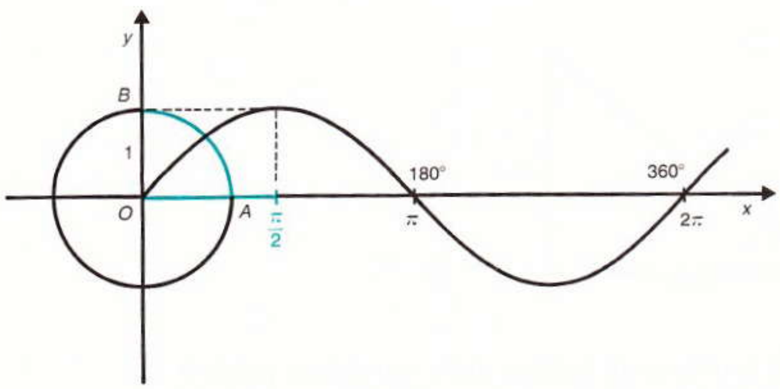


Fig. 19

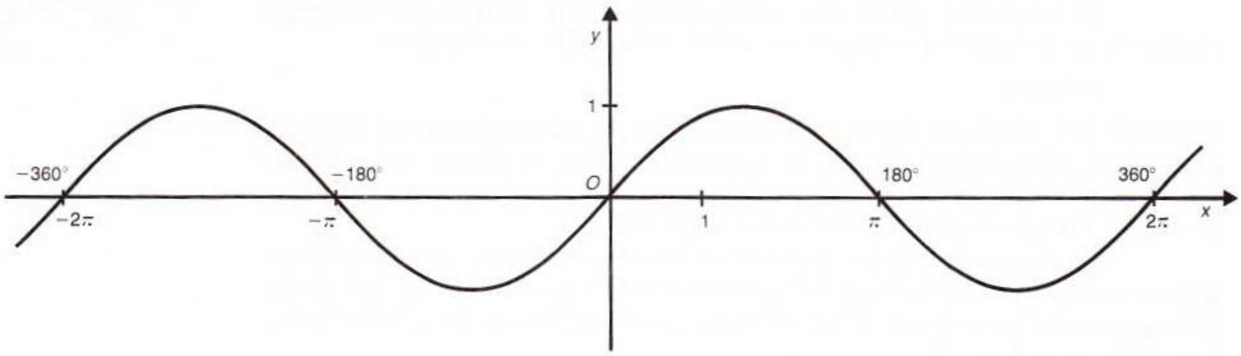


Fig. 20

Si arriva così a tracciare il grafico della Fig. 20. La curva ottenuta è la *sinusoide*, grafico della funzione

$$y=\operatorname{sen} x.$$

Il grafico mette in rilievo alcune interessanti caratteristiche di questa funzione:

I) la x può assumere qualunque valore reale e si ottiene sempre un valore per la y; basta considerare x come misura di un arco AP sulla circonferenza goniometrica e y come ordinata del punto P;

II) la y, invece, assume solo valori che cadono nell'intervallo compreso fra -1 e 1; risulta:

$$-1 \leq y \leq 1;$$

III) per ogni valore di x risulta:

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(x+2\pi),$$

cioè la funzione è *periodica con periodo* 2π; è per questo che il grafico è composto di tanti archi uguali che si ripetono.

Analoghe considerazioni possono essere ripetute a partire dalla funzione

$$y=\cos x,$$

di cui è riprodotto il grafico in Fig. 21; la curva ottenuta prende talvolta il nome di cosinusoide (vedi anche p. 102).

Le funzioni $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ così introdotte prendono il nome di *funzioni circolari*, per ricordare che sono state ottenute a partire dalla circonferenza goniometrica.

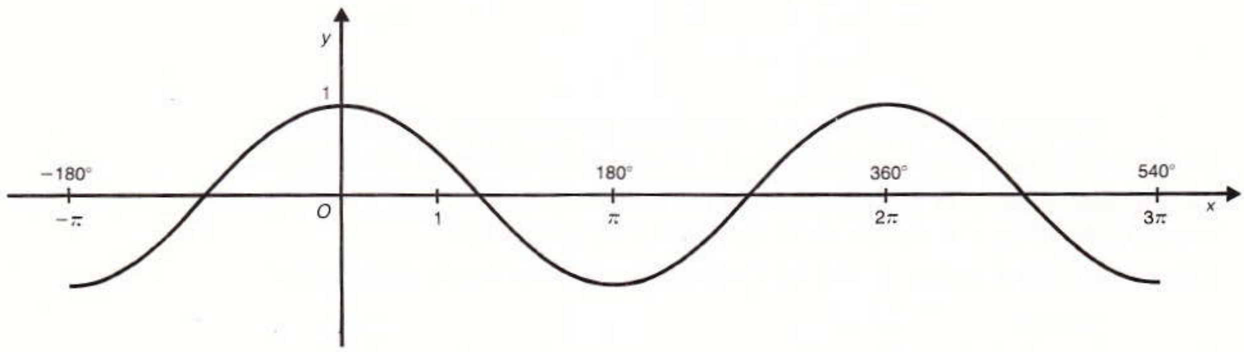


Fig. 21

Ci rendiamo conto che siamo ormai molto lontani dai semplici problemi sui triangoli rettangoli da cui siamo partiti; la funzione

$$y=\operatorname{sen} x$$

riassume ora secoli di storia e di ricerca. Se infatti pensiamo al faticoso lavoro dei compilatori di tavole trigonometriche, vediamo sintetizzata nella scrittura $y=\operatorname{sen} x$ una tabella come quella riportata a p. 402, che possiamo infittire e completare come vogliamo.

Ma possiamo anche pensare al lavoro dei fisici, che si valgono della sinusoide per descrivere i fenomeni acustici, le onde radio o il moto delle particelle elementari; ecco, ora fissiamo l'attenzione sul grafico della Fig. 20 o della Fig. 21.

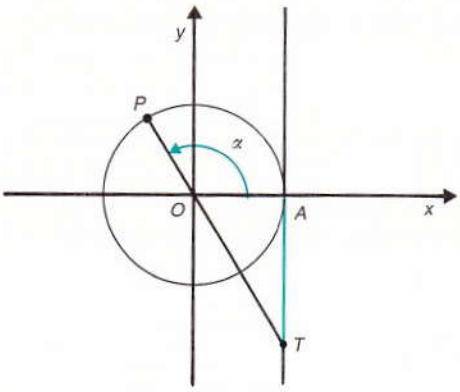
Possiamo infine pensare al lavoro dei matematici, che hanno riordinato e formulato in termini precisi tutti i concetti via via sviluppati nel corso dei secoli; vedremo allora nella scrittura $y=\operatorname{sen} x$ una legge di corrispondenza, una *funzione* che ad ogni numero reale x associa un altro numero reale y, compreso fra -1 e 1.

5. La funzione $y=\operatorname{tg} x$

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente a proposito delle funzioni seno e coseno possono essere ripetute per la funzione circolare:

$$y=\operatorname{tg} x.$$

Cominciamo col tracciarne il grafico, basandoci sulla definizione di tangente di un angolo α mediante la circonferenza goniometrica (Fig. 22) e misurando gli angoli in radianti come abbiamo fatto nel paragrafo precedente.



tg α=ordinata di T

Fig. 22

Disponiamo dunque la circonferenza goniometrica e il riferimento come in Fig. 23; scelto poi un punto P sulla circonferenza, riportiamo:

— sull'asse delle x la lunghezza dell'arco OP rettificato;
— sull'asse delle y il valore della tangente corrispondente.

Otteniamo così il punto B che ha le coordinate x e y legate dalla legge:

$$y=\operatorname{tg} x.$$

Ripetendo questo procedimento per ogni angolo compreso fra 0 e 2π, si ottiene il grafico della Fig. 24.

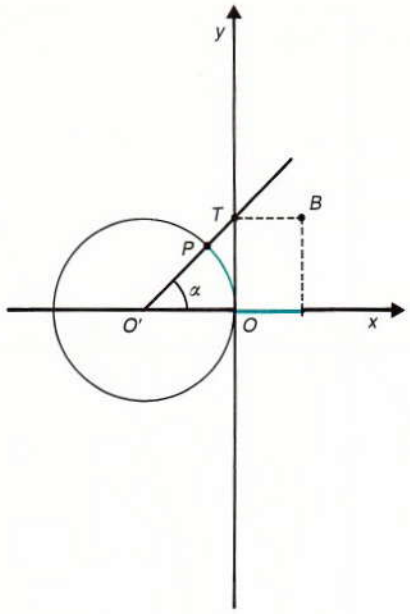


Fig. 23

Il grafico ottenuto mette in particolare rilievo il "valore proibito" $x=\frac{\pi}{2}$ radianti (ovvero $x=90°$), di cui avevamo già parlato a p. 35: la retta r d'equazione $x=\frac{\pi}{2}$, parallela all'asse delle y, non può essere attraversata dalla curva. Tuttavia, la curva si avvicina sempre più a questa retta, quando diamo a x valori sempre più prossimi a $\frac{\pi}{2}$; con il pensiero possiamo vedere questa "fessura" come una retta che separa i due rami della curva.

Questa retta particolare prende il nome di *asintoto* della curva; il nome, che proviene dal greco "*a-sympipto*", vuol dire "senza incontro" e dà particolare rilievo al fatto che la curva non può incontrare la retta, pur avvicinandosi ad essa sempre di più.

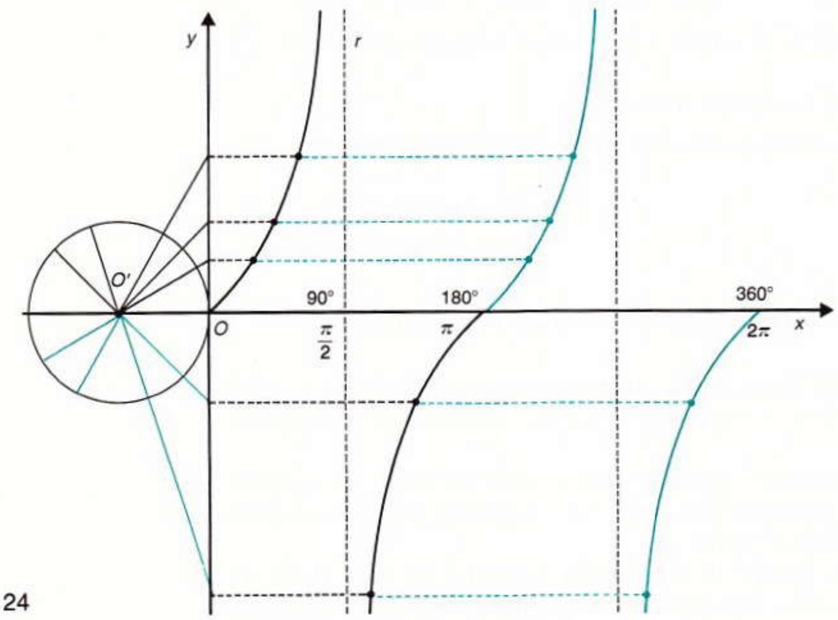


Fig. 24

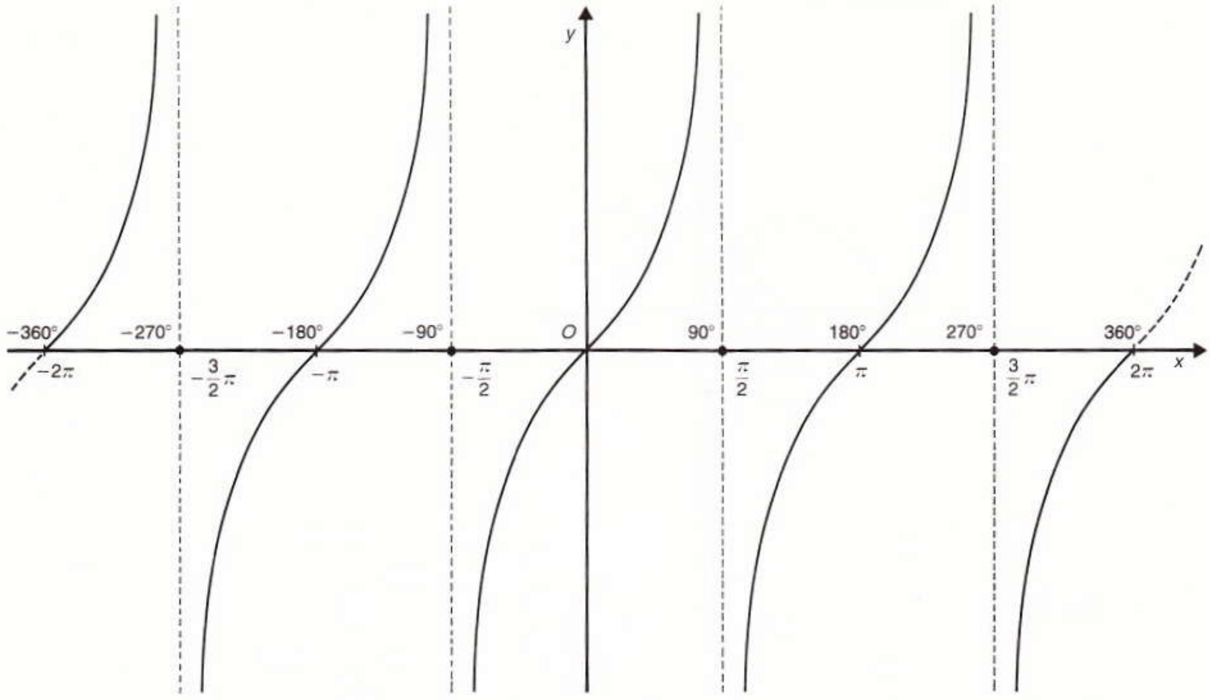


Fig. 25

Abbiamo ottenuto un grafico inconsueto, che diventa ancora più inconsueto se consideriamo angoli maggiori di 2π: si possono considerare valori di x sempre più grandi, immaginando che il punto P continui a girare sulla circonferenza; si hanno poi valori negativi di x, immaginando che P ruoti sulla circonferenza in verso opposto. Arriviamo così a tracciare il grafico di Fig. 25. La curva ottenuta, grafico della funzione

$$y = \operatorname{tg} x,$$

prende il nome di *tangentoide*. Come si vede dalla figura, questa curva presenta alcune caratteristiche a cui bisogna prestare attenzione:

I) dobbiamo scegliere con cura i valori di x, se vogliamo ottenere $\operatorname{tg} x$: possiamo infatti scegliere per x valori reali grandi o piccoli quanto si vuole, ma dobbiamo escludere il valore $\frac{\pi}{2}$ e tutti i multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$;

II) la y, invece, assume tutti i valori reali;

III) la funzione è ancora periodica, ma con periodo π; risulta infatti, come si vede anche dal grafico,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi).$$

6. Osservazioni sui grafici delle funzioni circolari

Nei due paragrafi precedenti abbiamo trovato i grafici delle funzioni $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$ e $y=\operatorname{tg} x$, notandone alcune caratteristiche particolari.

Vogliamo ora studiare qualche altra caratteristica di queste funzioni, basandoci sulle simmetrie più note: la simmetria rispetto all'asse delle x e quella rispetto all'asse delle y.

Consideriamo per prima la simmetria rispetto all'asse delle x; questa lascia inalterata l'ascissa dei punti, ma cambia segno all'ordinata.

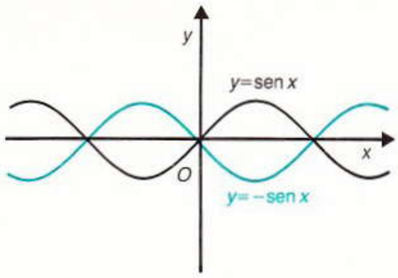


Fig. 26

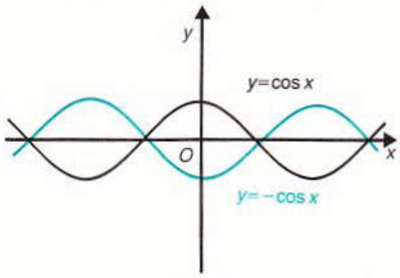


Fig. 27

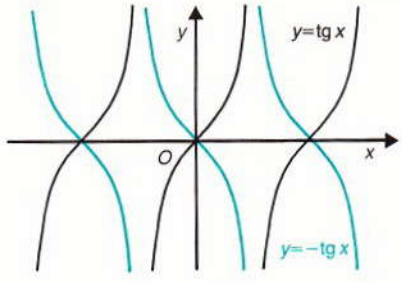


Fig. 28

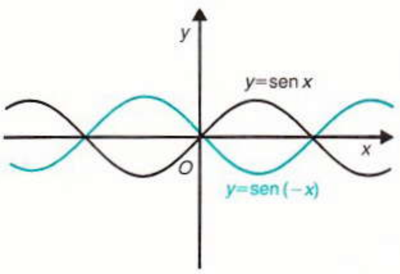


Fig. 29

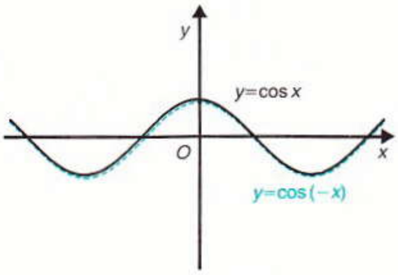


Fig. 30

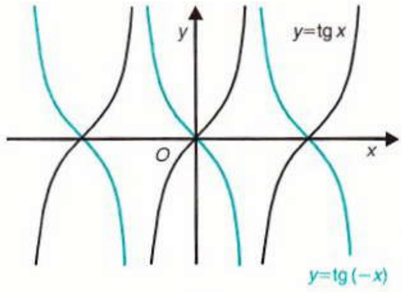


Fig. 31

Nella Fig. 26 la curva $y=\operatorname{sen} x$, in nero, è stata trasformata nella $y=-\operatorname{sen} x$, in colore; la stessa operazione è stata eseguita per le curve $y=\cos x$ e $y=\operatorname{tg} x$ nelle Figg. 27 e 28.

Operiamo ora con la simmetria rispetto all'asse delle y; questa lascia fissa l'ordinata dei punti ma cambia il segno dell'ascissa. Nella Fig. 29 vediamo disegnate le curve $y=\operatorname{sen} x$, in nero, e $y=\operatorname{sen}(-x)$, in colore; lo stesso procedimento è stato seguito per le curve $y=\cos x$ e $y=\operatorname{tg} x$ nelle Figg. 30 e 31.

Confrontando la Fig. 29 con la Fig. 26 è immediato notare che le due funzioni

$$y=-\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad y=\operatorname{sen}(-x)$$

hanno lo stesso grafico; risulta dunque:

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen} x.$$

Osservando invece la Fig. 30, notiamo che la curva $y=\cos x$ si è trasformata in se stessa; concludiamo perciò che risulta:

$$\cos(-x)=\cos x.$$

Confrontando infine la Fig. 31 con la Fig. 28, ci rendiamo subito conto che risulta:

$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x.$$

Riassumendo, abbiamo scoperto le seguenti proprietà delle funzioni circolari:

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen} x$$
$$\cos(-x)=\cos x$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$$

Si dice, a volte, che le funzioni seno e tangente sono *dispari*, mentre la funzione coseno è *pari*.