Che cosa è la trigonometria?

Il significato della parola trigonometria *deriva dal greco:* "metron" *significa misura e* "trigonos" *vuol dire tre angoli; misura, dunque, di un triangolo, o, meglio, dei suoi elementi e cioè di angoli e lati.*

Vedrete però che la trigonometria non è "chiusa" nello studio dei triangoli ma abbraccia e influenza campi molto vasti, che vanno dall'astronomia all'acustica, dalla topografia all'ottica, all'elettronica.

Non rimane quindi che mettere sotto accusa la denominazione "trigonometria" che fa pensare solo al triangolo; questo nome fu dato nel 1595 dal matematico tedesco Bartolomeus Pitiscus in un libro che, senza troppa modestia, aveva intitolato Trigonometria sive de solutione triangolorum tractatus brevis et perspicuus, *cioè «Trigonometria, ovvero trattato breve e intelligente sulla risoluzione dei triangoli».*

Non è certo strano che sia stata l'astronomia ad avere eccitato la fantasia degli uomini fin dai tempi più remoti e in tanti paesi. Il sorgere e il tramontare del Sole, l'alternarsi dei giorni e delle notti, il succedersi, sempre uguale, delle fasi della Luna in un cielo immobile, sono fenomeni che non potevano sfuggire neanche all'occhio meno attento. Sulla volta celeste, due sono gli astri che, per la loro grandezza, avevano soprattutto impressionato: il Sole e la Luna. Quanto distavano dalla Terra? quanto erano grandi? È con queste domande che ha inizio l'astronomia.

Siamo in Grecia, e Aristarco di Samo, vissuto nel III secolo a.C., riesce a fissare il rapporto fra le distanze Terra-Luna e Terra-Sole. Ecco come procede: da un punto T della Terra (Fig. 1) vengono osservati la Luna L e il Sole S quando il triangolo TLS è rettangolo in L. Il rapporto $\frac{TL}{TS}$ *fu trovato da Aristarco misurando l'angolo* α *formato dai lati TL e TS; ma — è chiaro — non si può dire che è l'ampiezza dell'angolo* α *ad essere uguale a quel rapporto!*

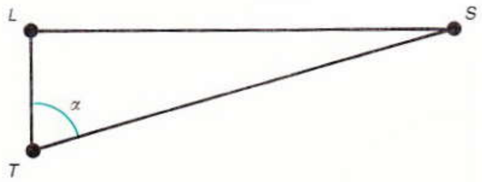

Fig. 1

Aristarco era dunque riuscito a fissare in una relazione le impressioni di bellezza e di ordine date dalle posizioni del Sole e della Luna. Erano gli inizi della scienza del cielo, ***l'astronomia****, ed erano anche gli inizi di un ramo della matematica,* ***la trigonometria****.*

Spettava ora alla trigonometria di precisare quella relazione fra un rapporto di lati di un triangolo rettangolo e l'ampiezza di un angolo acuto.

Ma torniamo all'astronomia: per misurare l'angolo α *si dovevano, prima di tutto, individuare le direzioni TL e TS; come* puntare *sulla Luna e sul Sole?*

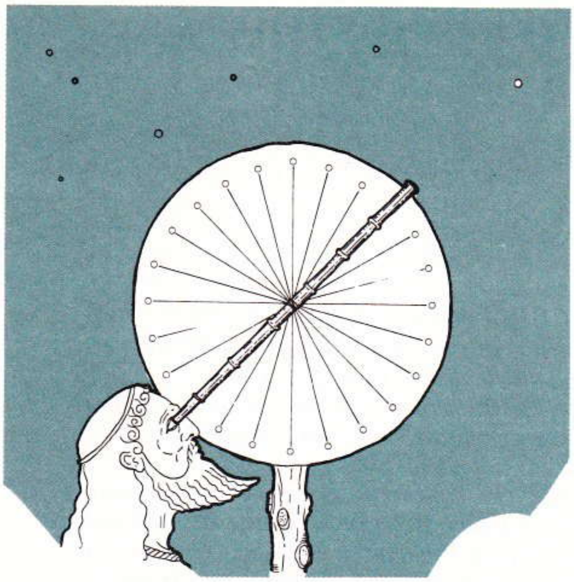

Fig. 2

A questa domanda risponde uno strumento ideato da un altro greco, Ipparco di Nicea, vissuto un secolo dopo Aristarco. Dotato di un particolare senso tecnico, Ipparco costruisce la diottra, *un apparecchio che può considerarsi come il teodolite dell'antichità. La diottra (Fig. 2) è costituita essenzialmente da un disco situato verticalmente e sostenuto da un paletto ad altezza d'uomo; sul bordo del disco c'è una graduazione di 360°, e al centro del disco è imperniata, in modo che si possa ruotare, una canna di bambù, cioè un tubicino. Guardando attraverso questo tubicino si può puntare l'astro, e si riesce così a determinare l'angolo di elevazione rispetto ad un riferimento fisso (Fig. 3).*

È probabilmente proprio questo strumento ad aver suggerito l'idea di sostituire all'ampiezza α *di un angolo la lunghezza* l *dell'arco corrispondente.*

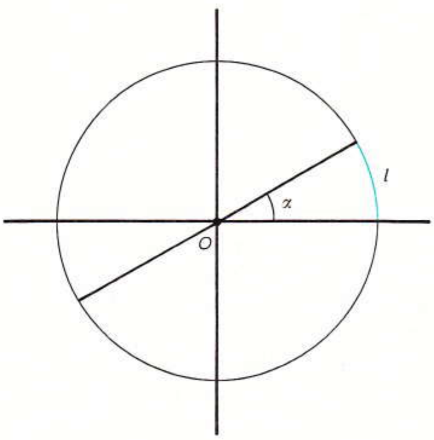

Fig. 3

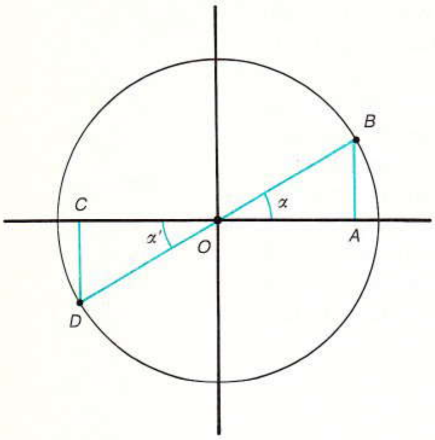

Fig. 4

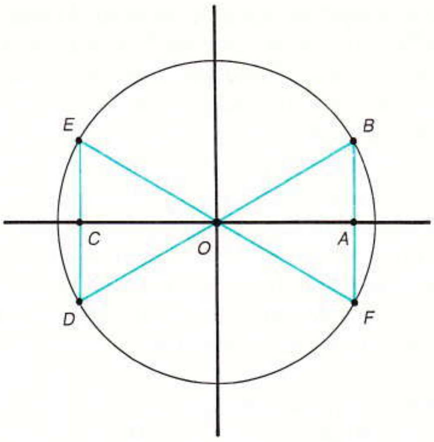

Fig. 5

Passano i secoli: il cerchio graduato porta a riflettere: se l'ampiezza dell'angolo α del triangolo OAB (Fig. 4) è legata da una certa relazione al rapporto $\frac{AB}{OB}$, la stessa relazione dovrebbe valere per il rapporto $\frac{CD}{OD}$ del triangolo OCD (che è uguale ad OAB), dato che $\alpha'=\alpha$; e dovrebbe anche valere per i triangoli OCE e OAF (Fig. 5) che sono anch'essi uguali ad OAB. Ma allora, come distinguere un triangolo dall'altro? È solo dopo l'introduzione del piano cartesiano (XVII secolo) che quei 4 angoli al centro uguali vengono distinti dal segno dell'ascissa e dell'ordinata dei punti B, E, D, F. Ecco, dalla considerazione statica di un triangolo si passa a quella dinamica di un angolo di vertice O (Fig. 6): l'ampiezza dell'angolo formato dalla lancetta OP con l'asse delle x cambia da un istante all'altro, e cambiano anche, a seconda del quadrante che si considera, i segni delle coordinate di P.

Si osserva allora il punto H, e così il problema passa al campo della fisica: è come se H fosse l'ombra sull'asse delle x di un punto P che si muove su un cerchio (Fig. 7); si è dunque condotti a studiare il moto armonico.

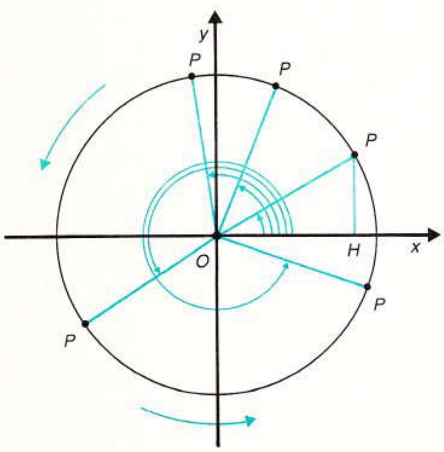

Fig. 6

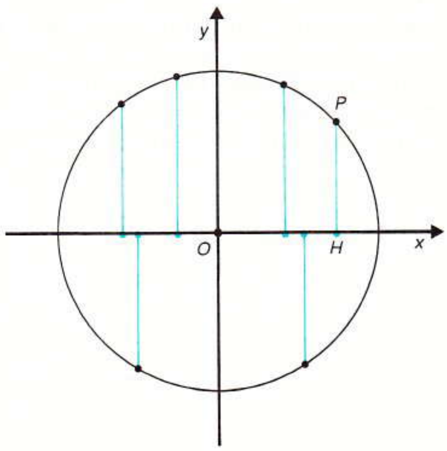

Fig. 7

Dal problema astronomico di Aristarco allo studio geometrico dei triangoli, alla considerazione del cerchio graduato che porta a sostituire l'arco all'angolo, alla fisica dei moti armonici,... : ecco un cammino che può dare un'idea dello sviluppo della trigonometria. Ma si tratta solo di un'interpretazione che è, senz'altro, molto limitata rispetto a quanto accade veramente nella storia. Perché, prima di tutto, le investigazioni di Aristarco non erano "nate dal nulla"; risentivano certamente di osservazioni e di studi condotti, lungo molti secoli, dagli Egiziani e dai Babilonesi. Ci rimane però ben poco delle ricerche trigonometriche di questi popoli. E, del resto, nulla ci rimane direttamente delle opere di Aristarco e di Ipparco; è solo attraverso gli scritti dell'astronomo Tolomeo di Alessandria (vissuto nel II secolo d.C.) che sappiamo qualcosa dei lavori dei due astronomi greci.

Dopo Tolomeo occorre fare un salto di secoli per giungere, con la rivoluzione islamica del secolo VIII, ad un nuovo accendersi dello spirito investigativo. La cultura islamica riuscì ad assorbire la scienza greca, ormai in piena decadenza, a svilupparne alcuni settori, per trasmetterla poi, attraverso numerose traduzioni in arabo, ad un'Europa ancora addormentata negli anni bui del Medioevo. Il territorio dove avvenne la diffusione di questa cultura era immenso, dall'India ai Pirenei, un territorio dunque ancor più vasto di quello che era stato l'Impero Romano. È proprio in questo mondo musulmano, dove s'incrociavano correnti culturali provenienti da paesi tanto diversi come la Grecia, la Siria, la Persia e l'India, che lo studio della trigonometria raggiunse un alto livello. E sono queste conoscenze che arrivarono in Europa negli anni mille, attraverso la Spagna.

Occorre dire che oggi, con il ritrovamento recente di numerosi manoscritti negli archivi di Istanbul, ci si rende conto sempre di più del come la matematica araba s'imponga con ricerche originali ad altissimo livello; si tratta soprattutto di lavori di algebra e di trigonometria.

Ancora dei secoli dovevano passare perché la cultura araba fosse fatta "propria" e l'Europa riuscisse a produrre dei lavori originali. Si deve al matematico tedesco Johann Müller, detto Regiomontano (era questo il nome latino di Könisberg, la città dove era nato), l'opera De triangulis omnimodis libri V*; è questo lavoro, scritto nel 1464, che costituisce il primo libro esclusivamente dedicato alla trigonometria.*

Lo sviluppo dell'algebra, e cioè la nascita del simbolo per sostituire un segno a una parola e una formula ad una frase — siamo alla fine del Cinquecento —, ha condotto poi i matematici ad unificare varie scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse. Furono così messe in rilievo quelle poche idee fondamentali che illuminano tutta una teoria. Sono queste idee che vengono oggi applicate per risolvere i problemi più vari, anche molto distanti da quelli astronomici che avevano motivato la nascita della trigonometria; sono problemi che vanno — come vedrete — dalla topografia all'acustica, dall'ottica all'elettronica, all'economia.

Seno, coseno, tangente come funzioni periodiche. La nascita della sinusoide

Fra i tanti aspetti che presenta lo studio della trigonometria, due sono quelli che hanno particolarmente marcato lo sviluppo della matematica:

1) l'introduzione dei rapporti seno, coseno, tangente, e cioè di relazioni fra angoli e lati di un triangolo rettangolo. Tale introduzione permette di sviluppare quella parte della trigonometria che conduce alla risoluzione di un triangolo qualunque. Da qui, la possibilità di applicazioni riguardanti questioni astronomiche e topografiche;

2) lo studio di seno, coseno e tangente come funzioni periodiche, indipendentemente dalla considerazione di triangoli. È questo studio che ha condotto a collegare le funzioni trigonometriche, in particolare il seno e il coseno, a fenomeni periodici quali le onde sonore, aprendo così un sempre più vasto campo di applicazioni.

Mentre il primo aspetto, motivato da problemi astronomici, trova le sue origini in tempi molto antichi, il secondo aspetto è invece relativamente recente: non certo prima del XVII secolo. Sembra incredibile che una funzione come

$$y = \operatorname{sen} x$$

e la sua immagine grafica — la sinusoide — sia entrata così tardi a far parte della matematica astratta e, ancor più tardi, ad imporsi nel campo applicativo. È difficile rendersene conto dato che sono molti i fattori che potevano sollecitare i matematici in questo senso:

— la costruzione del cerchio graduato con la sua asta girevole attorno al centro poteva far pensare, fin dal tempo della diottra di Ipparco, ad una rotazione dell'asta di un angolo maggiore di 360°;

— la considerazione delle tavole trigonometriche relative al seno di un angolo, tavole costruite con sempre maggiore precisione nel corso dei secoli da Greci, Indiani, Arabi, Persiani ed Europei, poteva far pensare ad un prolungamento dei valori della prima colonna oltre 360°, e portare quindi ad osservare la costante ripetizione dei valori del seno dell'angolo.

Ma, oltre a considerazioni di matematica, questa nascita così tardiva della sinusoide e delle funzioni periodiche appare inspiegabile se si riflette su fattori di carattere psicologico: sappiamo infatti che fin da tempi molto antichi gli uomini rimasero affascinati da fatti che si ripetevano con regolarità, come i fenomeni astronomici o le onde del mare; e sappiamo anche come il senso piacevole e riposante di un qualcosa che si ripete ad intervalli fissi abbia avuto, fin da tempi remoti, una forte influenza sull'arte, dove è stato tradotto in ritmi musicali e in fregi decorativi.

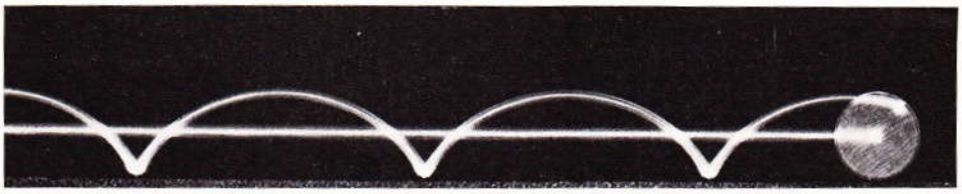

Fig. 1. La foto è stata realizzata fissando una lampadina sul bordo della ruota e un'altra lampadina al centro. La macchina fotografica è rimasta in funzione mentre la ruota rotolava.

Ritornando alla matematica, per noi, oggi, vedere una tabella a due colonne è lo stesso che visualizzarla in un disegno: l'interpretazione grafica viene spontanea. Ma, qualche secolo fa, questa reazione non sorgeva davvero spontanea: non si poteva infatti pensare ad una traduzione in grafico prima di aver preso piena coscienza del piano cartesiano. È in questo periodo, e precisamente nel 1634, che la sinusoide è entrata, come curva, a far parte della matematica; ma il suo ingresso in campo matematico non è stato davvero... diretto. Vedremo che la sinusoide è entrata in territorio matematico quasi in sordina, nascosta da un'altra curva — la cicloide — che interessava molto di più, per motivi meccanici.

Siamo agli inizi del '600 quando, sotto l'influsso di Galileo, vengono ripresi, interpretati e visti in chiave moderna dei temi proposti dai classici greci. Fra questi c'è il famoso problema della "rota Aristotelis", un problema che sembra risalire alla scuola di Aristotele. Il problema che studiano Galileo e con lui i suoi allievi Cavalieri e Torricelli, e vari matematici francesi, fra cui Roberval, è questo: «una ruota rotola senza strisciare lungo un percorso rettilineo; se P è un punto della ruota, si chiede quale curva viene descritta da questo punto durante il rotolamento" (Fig. 1).

La prima cosa che si osserva è che il punto P va giù e su, e, contemporaneamente, si allontana dalla posizione iniziale.

Per rendersi conto dell'esatta forma di questa curva riferiamoci al cerchio di diametro $OA=2r$ disegnato in Fig. 2, cerchio che è tangente alla retta x su cui rotola.

Se il cerchio ruotasse solamente, senza avanzare, per una rotazione di $\frac{1}{4}$ di angolo piatto, il punto A verrebbe a trovarsi in B; ma il cerchio avanza, ed è facile stabilire di quanto avanza il punto B. Si ragiona così: se il cerchio ruota di un angolo piatto il punto A si porta in un punto A' tale che OA' è lungo metà della circonferenza, cioè πr; allora, se il cerchio ruota solo di $\frac{1}{4}$ di un angolo piatto, il punto A non si troverà in B ma in B' tale che

$$BB'=\frac{1}{4}OA'=\frac{1}{4}\pi r.$$

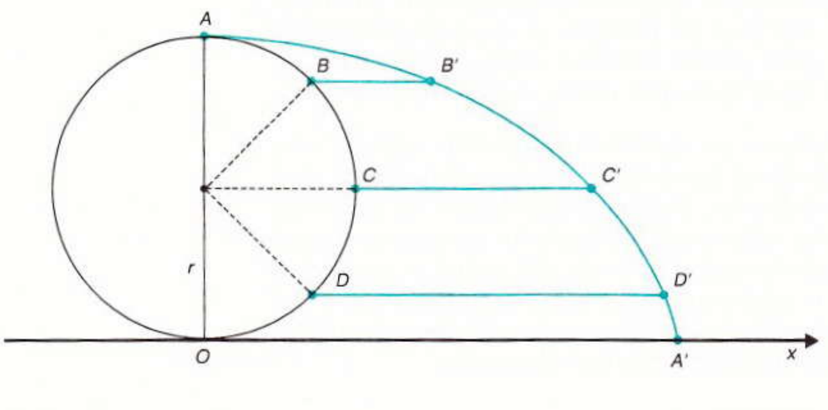

Fig. 2

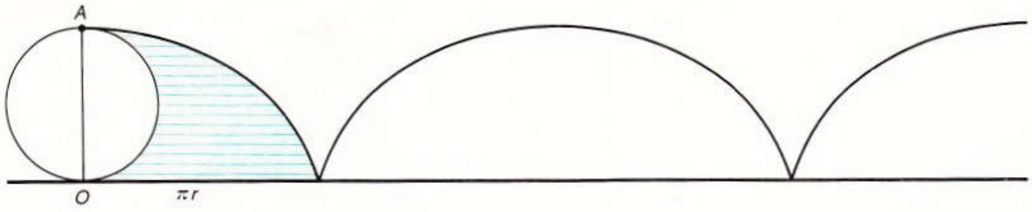

Fig. 3

Si capisce poi che se il cerchio ruota di $\frac{1}{2}$ *angolo piatto, il punto A verrà a trovarsi in C' tale che*

$$CC' = \frac{1}{2} OA' = \frac{1}{2} \pi r;$$

e così, dopo una rotazione di $\frac{3}{4}$ *di angolo piatto, il punto A si troverà in D' tale che*

$$DD' = \frac{3}{4} OA' = \frac{3}{4} \pi r.$$

Questo ragionamento, fatto per angoli uguali a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ *di un angolo piatto può, ovviamente, ripetersi per un angolo* α *qualunque; si viene così a costruire* per punti *la curva descritta dal punto A della ruota (Fig. 3). Questa curva fu detta* cicloide.

È una curva periodica, composta di archi, e ogni arco è compreso fra due cuspidi. La cicloide entusiasmò Galileo che così ne parla in una lettera indirizzata al suo allievo Bonaventura Cavalieri: «Quella linea arcuata sono più di cinquanta anni che mi venne in mente di descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte». Dice poi, Galileo, che gli sembrava che l'area compresa entro un arco di curva e il tratto della sua base, fra due cuspidi successive, dovesse risultare uguale al triplo del cerchio che ne dà origine.

È proprio questo problema che fu preso come punto di sfida fra matematici italiani e francesi: calcolare l'area della cicloide. Un problema, questo, che non aveva dei fini concreti; no, si trattava solo di una sfida intellettuale! Ve ne vogliamo riferire, ma non crediate che, affascinati dalla storia della cicloide, si sia dimenticata la sinusoide; è che — come vedrete — la sinusoide nasce proprio da questo problema.

L'area sotto la cicloide fu calcolata dal francese Roberval nel 1634. La dimostrazione si basa sul Principio di Cavalieri, un principio di carattere evidente che si ispira alle seguenti considerazioni: l'area di un rettangolo si può pensare come costituita da tanti fili rettilinei lunghi come la base (Fig. 4); è come se la base si spostasse parallelamente a se stessa spazzando così l'area. Si capisce quindi che l'area è data dal prodotto "base per altezza".

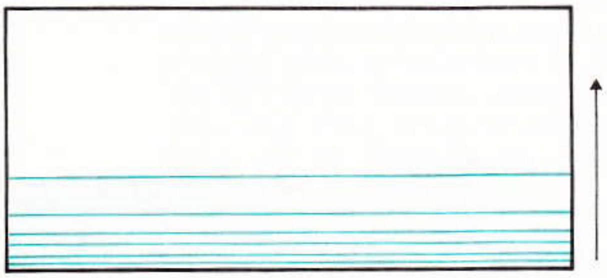

Fig. 4

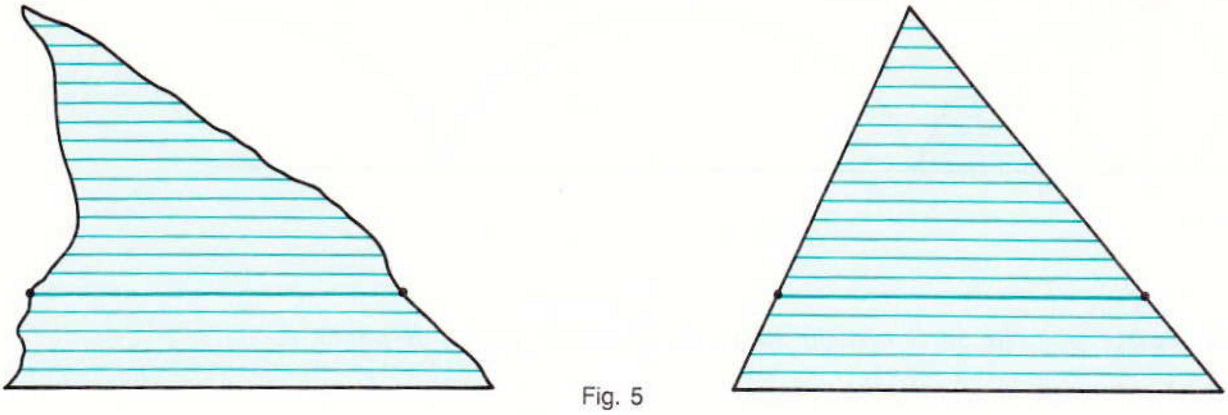

Fig. 5

Questa concezione porta a rendersi conto che se due figure (Fig. 5), tagliate con rette parallele a una direzione fissa, per esempio parallele alla base, danno luogo, ad ogni livello, a segmenti di uguale lunghezza, allora le due figure hanno la stessa area. Questa osservazione di carattere intuitivo è nota come Principio di Cavalieri. *È questo principio che ha portato in modo veramente originale a determinare l'area della cicloide, e che ha, contemporaneamente, creato una nuova curva: la sinusoide. Ecco il ragionamento che ha condotto Roberval a determinare questa area, ispirandosi alle idee di Cavalieri e Torricelli: i segmenti che in Fig. 6 riempiono la curva, a destra del cerchio, costituiscono un'area che avrà un certo valore; per quanto si è detto, il valore dell'area non cambia se quei segmenti vengono "slittati" assumendo così un'altra posizione. Bene, Roberval fa "slittare" quei segmenti verso sinistra (Fig. 7) in modo che un loro estremo venga a trovarsi sul diametro OA; gli altri estremi, quelli di destra, verranno a formare una nuova curva. Ecco, questa nuova curva è la* sinusoide[1].

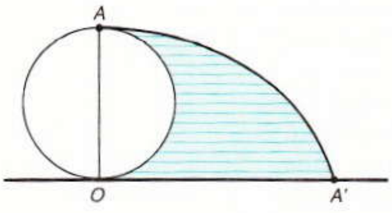

Fig. 6

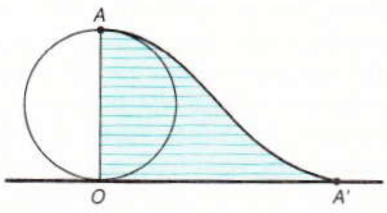

Fig. 7

Ma in quell'epoca questa curva non fu riconosciuta come "sinusoide"; non si pensò che "la compagna della cicloide" — come veniva chiamata — non era altro che la rappresentazione grafica dell'equazione

$y = \mathrm{sen}\, x;$

e non si pensò nemmeno che era possibile ottenerla per punti, come abbiamo fatto noi (p. 75) basandosi semplicemente sulle tavole trigonometriche. Perché — viene da chiedersi — questa mancanza di elasticità intellettuale? Riflettiamo: in quell'epoca si era solo agli inizi dell'interpretazione grafica di una legge matematica, era il principio del 1600, il secolo della nascita e dell'uso delle coordinate cartesiane. Ma sembra davvero incredibile che dovesse passare ancora un secolo per scoprire che quella curva, nata come per caso per risolvere il problema della cicloide, aveva un suo ruolo

[1] Questo problema verrà sviluppato nelle pp. 259 ss.

fondamentale sia in matematica che nelle scienze applicate; aveva pertanto diritto ad una sua cittadinanza, ad un suo nome. E fu chiamata sinusoide perché nasceva dal seno (sinus, in latino), nome che del resto le si addiceva bene per le sue dolci sinuosità...

Ma, ancora una volta, l'ingresso nel territorio matematico non fu... diretto. Ora vedremo come — almeno sembra che così ci dica la storia — si chiarirono a poco a poco "i documenti" di quella che doveva essere la sinusoide.

In un libro di Newton, scritto nel 1671, ma pubblicato solo nel 1736, viene, per la prima volta, fatto un largo uso di vari sistemi di coordinate allo scopo di studiare alcune curve di data equazione; fra i vari sistemi di coordinate Newton si vale anche di coordinate polari.

Ma è soprattutto Jacob Hermann, un fisico-matematico svizzero, certamente meno noto, che in un lavoro degli anni 1729-33, utilizza largamente le coordinate polari, dichiarando che erano particolarmente utili per lo studio grafico delle funzioni seno e coseno. Ed è proprio dal significato di queste funzioni trigonometriche che Hermann ebbe l'idea di indicare le coordinate di un punto con $\cos\alpha$, $\text{sen}\,\alpha$, *e* p, *dove* p *rappresenta la distanza del punto dal polo. Con queste coordinate si poteva "raggiungere" qualunque punto A del piano (Fig. 8). Se poi si fissava uguale ad 1 il valore di* p, *veniva spontaneo di far corrispondere alle coordinate* $\cos\alpha$ *e* $\text{sen}\,\alpha$ *le antiche coordinate cartesiane, e veniva anche l'idea di rappresentare sul piano cartesiano le funzioni*

$$y=\text{sen}\,x \quad e \quad y=\cos x.$$

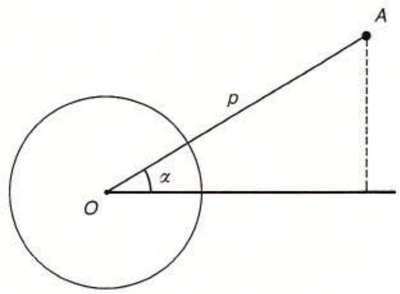

Fig. 8

Ecco, la sinusoide era nata come curva autonoma, da sola, senza la cicloide.

La sinusoide aveva ormai diritto ad una sua carta di riconoscimento: era una curva a onde, che si riproduceva dolcemente; una curva, quindi, che sembrava nata per tradurre fenomeni periodici. Ed è proprio la fisica dei fenomeni ondulatori, come quelli prodotti dalle corde vibranti, che ha condotto Eulero, negli anni immediatamente successivi, ad un acuto studio matematico delle funzioni trigonometriche e, più in generale, del concetto di funzione. Ecco le sue argomentazioni: una curva, come la sinusoide, si doveva considerare come una unica funzione anche se era composta di infiniti archi, e questo perché, dal punto di vista analitico, poteva essere rappresentata con una sola equazione.

È da questa epoca che le funzioni cominciano ad entrare nei più vari rami applicativi: dalle corde vibranti agli analizzatori dei suoni, alle onde elettromagnetiche, alla radio, alla televisione, agli strumenti musicali elettronici,... Il concetto di funzione si allarga proprio per via delle sue tante applicazioni, ma, allargandosi, diviene talvolta vago e ambiguo. Successivi ripensamenti hanno condotto in quest'ultimo secolo, nel quadro di una sistemazione delle varie teorie matematiche, a precisarlo con una definizione formale.