5
Complementi

Altri metodi per risolvere equazioni trigonometriche

Abbiamo indicato nel testo due tipi di equazioni trigonometriche che compaiono spesso in problemi applicativi:

1) $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$
2) $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d$;

abbiamo suggerito il metodo di soluzione che ci sembra più efficiente..

Il metodo esposto nel testo conduce a scrivere le due equazioni nella forma:

$\operatorname{sen} \omega(x+\varphi) = m$;

tale forma risulta semplice da trattare dal punto di vista algebrico (p. 142) e suggerisce un'intuitiva visualizzazione grafica (p. 144). Diamo ora un'idea di altri metodi che si possono seguire per risolvere questi tipi di equazioni.

1. Equazioni del tipo: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Nel cap. 5 (pp. 148-150) abbiamo indicato per queste equazioni il metodo di soluzione seguente:

— si riscrive l'equazione nella forma

$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = c$,

tenendo presente che si deve scegliere

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right);$$

— si risolve l'equazione

$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{r},$$

che è di tipo noto. È chiaro che tale equazione ha soluzioni solo se

$$-1 \leq \frac{c}{r} \leq 1$$

ossia

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1.$$

Rivediamo ora questo procedimento applicandolo ad un esempio numerico; avremo così la possibilità di confrontare vari metodi. Risolviamo l'equazione

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x-\cos x=1.$$

Scriviamo l'equazione nella forma seguente:

$$2\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1;$$

dato che risulta, in questo caso,

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$

e

$$\varphi=\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Arriviamo così a risolvere l'equazione

$$\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5,$$

e, in base alle considerazioni esposte a p. 143, troviamo che le soluzioni sono date da:

$$x_k-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$x'_k-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi.$$

In definitiva, l'equazione assegnata ha le soluzioni:

$$x_k=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$x'_k=\pi+2k\pi.$$

Esaminiamo ora altri tre metodi per risolvere la stessa equazione.

I) Metodo basato sulla geometria analitica

Si ricorda la definizione delle funzioni circolari, esposta nel cap. 3, n. 4: se x indica l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}P$ (Fig. 1), misurata dallailunghezza dell'arco $\widehat{AP}$, $\mathrm{sen}\,x$ è l'ordinata Y del punto P e $\cos x$ è l'ascissa X del punto P. Dunque, per determinare gli archi $AP=x$, soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x-\cos x=1,$$

basta determinare le coordinate X e Y dei loro estremi P sulla circonferenza goniometrica, risolvendo il sistema

$$\begin{cases}\sqrt{3}Y-X=1\\ X^2+Y^2=1.\end{cases}$$

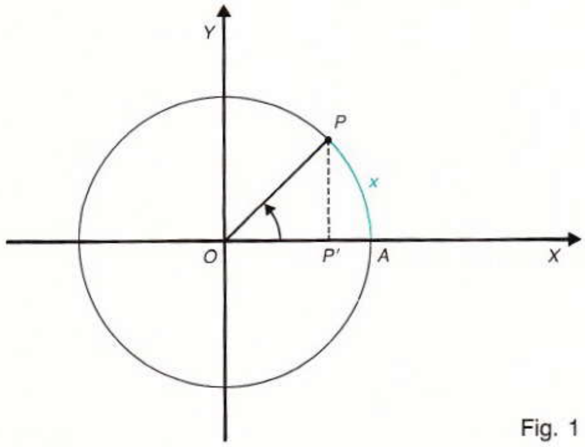

Fig. 1

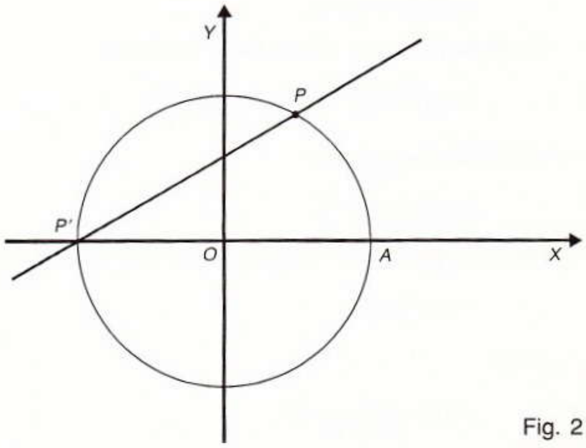

Fig. 2

È facile visualizzare questo sistema sul piano cartesiano (Fig. 2), dato che

$$\sqrt{3}Y-X=1$$

rappresenta l'equazione di una retta.
Si tratta allora di determinare le coordinate dei punti P e P' indicati in Fig. 2. Si ha:

$$\begin{cases} X=\sqrt{3}Y-1 \\ (\sqrt{3}Y-1)^2+Y^2=1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} X=\sqrt{3}Y-1 \\ 3Y^2-2\sqrt{3}Y+1+Y^2=1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} X=\sqrt{3}Y-1 \\ 4Y^2-2\sqrt{3}Y=0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} X=\sqrt{3}Y-1 \\ 2Y(2Y-\sqrt{3})=0 \end{cases} \begin{matrix} 2Y=0 & \to Y_1=0 \\ 2Y-\sqrt{3}=0 & \to Y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{matrix}$$

Si ottengono così le seguenti soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} Y_1=0 \\ X_1=\sqrt{3}\cdot 0-1=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ X_2=\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, i punti P e P' hanno le coordinate:

$$P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P'(-1,0).$$

Risulta allora:

$$x=A\hat{O}P=\frac{\pi}{3} \quad \left(\text{dato che } \cos x=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x'=A\hat{O}P'=\pi \quad (\text{dato che } \cos x'=-1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x'=0).$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata si ottengono, poi, tenendo conto della periodicità delle funzioni circolari; si ha:

$$x_k=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x'_k=\pi+2k\pi.$$

Si ritrovano così le stesse soluzioni, ottenute per altra via; si osserva che il procedimento risulta un po' più lungo ed elaborato, ma sempre valido e può essere generalizzato come segue: si determinano gli angoli x, soluzioni dell'equazione

$$a\operatorname{sen} x+b\cos x=c,$$

risolvendo il sistema

$$\begin{cases} aY+bX=c \\ X^2+Y^2=1. \end{cases}$$

Si trovano così le coordinate (X,Y) dei punti P, estremi degli archi $\widehat{AP}=x$, sulla circonferenza goniometrica (Fig. 3) e si risale agli angoli x cercati.
Anche in questo caso si può sapere se l'equazione assegnata ammette o no soluzioni, prima di svolgere i calcoli: basta calcolare la distanza $\overline{OH}$ dell'origine $O(0,0)$ dalla retta r d'equazione

$$aY+bX=c,$$

ossia

$$aY+bX-c=0;$$

si ha:

$$\overline{OH}=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

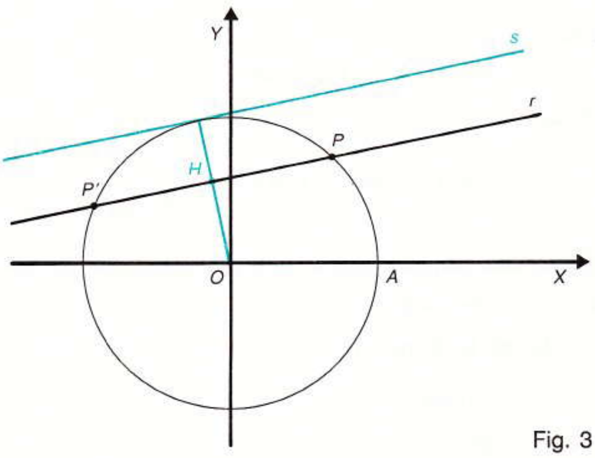

Fig. 3

Se risulta

$$\overline{OH} \leq 1,$$

come nel caso delle rette r e s di Fig. 3, siamo certi di trovare almeno un punto P sulla circonferenza goniometrica, cioè siamo certi di trovare delle soluzioni dell'equazione data.
Se, invece, risulta

$$\overline{OH} > 1,$$

l'equazione non ha soluzioni.

Troviamo così che l'equazione assegnata ha soluzioni solo se risulta

$$\overline{OH} \leq 1,$$

cioè

$$\frac{|-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1,$$

ossia

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1,$$

come avevamo visto prima.

II) Metodo basato sulla relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Consideriamo ancora l'equazione:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x-\cos x=1.$$

Si osserva che, in base alla relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1,$$

si può scrivere

(1) $$\cos x = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}.$$

Si riscrive allora l'equazione assegnata nella forma

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x-1=\cos x,$$

e ci si vale della (1), per trasformarla nella

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x-1=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}.$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione irrazionale nell'incognita $\operatorname{sen}x$; per risolvere quest'equazione, ne eleviamo i due membri al quadrato, ottenendo:

$$(\sqrt{3}\operatorname{sen}x-1)^2=1-\operatorname{sen}^2x,$$

ossia

$$3\operatorname{sen}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{sen}x+1=1-\operatorname{sen}^2x,$$

cioè

$$4\operatorname{sen}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{sen}x=0,$$

da cui

$$2\operatorname{sen}x\,(2\operatorname{sen}x-\sqrt{3})=0 \left\langle \begin{array}{l} 2\operatorname{sen}x=0 \rightarrow \operatorname{sen}x=0 \\ 2\operatorname{sen}x-\sqrt{3}=0 \rightarrow \operatorname{sen}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array} \right.$$

Siamo ora condotti a risolvere due equazioni di tipo noto:

a) $$\operatorname{sen}x=0,$$

che ha le soluzioni:

$$x_k=0+2k\pi$$
$$x'_k=\pi+2k\pi;$$

b) $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

che ha le soluzioni:

$$x_k=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\boxed{x'_k=\frac{2}{3}\pi+2k\pi} .$$

Ci si rende conto che abbiamo ottenuto delle soluzioni "estranee" (quelle riquadrate), dato che sostituendo zero al posto della x nell'equazione

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x-\cos x=1,$$

si ottiene:

1° membro) $\sqrt{3}\operatorname{sen} 0-\cos 0=\boxed{-1}$

2° membro) $\boxed{1}$.

Si conclude che $x=0$ non è soluzione dell'equazione.

Se ora si sostituisce ad x il valore $\frac{2}{3}\pi$, si ottiene:

1° membro) $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{2}$

2° membro) $\boxed{1}$.

E si conclude che anche $x=\frac{2}{3}\pi$ non è soluzione dell'equazione data.

Riflettendo sul procedimento seguito, non è difficile capire l'origine di queste soluzioni estranee: sono dovute a motivi sia algebrici che trigonometrici. Ecco perché: *dal punto di vista algebrico*, si osserva che, per risolvere un'equazione irrazionale, ne abbiamo elevato al quadrato i due membri, ed è noto che con un tale procedimento si possono introdurre delle soluzioni estranee; *dal punto di vista trigonometrico*, occorre ricordare (pp. 197-198) che quando si esprime il coseno di un angolo in funzione del seno dello stesso angolo, si introducono sempre delle ambiguità di segno.

Siamo ora in grado di generalizzare il procedimento seguito. Per risolvere l'equazione

$$a\operatorname{sen} x+b\cos x=c,$$

si tiene presente la relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,$$

da cui si ricava, per esempio,

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

L'equazione assegnata viene così sostituita dall'equazione irrazionale

$$a\operatorname{sen} x\pm b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=c$$

ossia

$$a\operatorname{sen} x-c=\pm b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Per risolvere quest'equazione se ne elevano i due membri al quadrato, in modo da ottenere un'equazione di 2° grado nell'incognita $\operatorname{sen} x$.

Si osserva che questo procedimento, piuttosto lungo e laborioso, porta ad introdurre delle soluzioni estranee e richiede, quindi, un'attenta verifica dei risultati ottenuti.

III) Metodo basato sulle formule parametriche

Nei Complementi del cap. 4 (p. 291) sono state trovate le formule che permettono di esprimere $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ come funzioni razionali del parametro

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

si ha:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Vediamo ora come si può risolvere l'equazione assegnata, valendosi di queste formule. L'equazione

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x = 1$$

diventa:

$$\sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1.$$

Moltiplicando i due membri per il denominatore comune

$$(1+t^2),$$

che risulta sempre diverso da 0, si ottiene:

$$2\sqrt{3}t - 1 + t^2 = 1 + t^2,$$

ossia

$$2\sqrt{3}t - 2 = 0,$$

cioè

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ricordando, poi, che risulta

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

siamo condotti a risolvere l'equazione

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

che è del tipo

$$\operatorname{tg}\omega(x+\varphi) = m,$$

esaminato a p. 144. Le soluzioni sono dunque date da:

$$\frac{x_k}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

In conclusione, si ottengono, per l'equazione data, le soluzioni

$$x_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Confrontando questi risultati con quelli ottenuti a p. 324, si nota che abbiamo *perduto le soluzioni*

$$x'_k = \pi + 2k\pi.$$

Riflettendo sul procedimento seguito, è facile capire perché non si hanno queste soluzioni: risulta infatti

$$\frac{x'_k}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

perciò non esiste il corrispondente valore del parametro

$$t = \operatorname{tg}\frac{x'_k}{2}.$$

Generalizzando il procedimento seguito, possiamo dire che si può risolvere l'equazione

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c,$$

trasformandola, mediante le formule parametriche, nella:

$$\frac{2at}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} = c,$$

ossia nella:

$$(c+b)t^2 - 2at + c - b = 0. \tag{1}$$

Si è così condotti a risolvere un'equazione di 2° grado nell'incognita t.

Se quest'equazione ammette soluzioni reali t_1 e t_2 (eventualmente coincidenti) si hanno le due equazioni di tipo noto

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_1 \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_2$$

che forniscono gli angoli x richiesti.

È bene tener presente che questo metodo non permette di determinare soluzioni del tipo

$$x_k=\pi+2k\pi.$$

Si tratta dunque di un metodo abbastanza elaborato che richiede di ricordare a memoria delle formule apposite, e che, inoltre, non risulta sempre valido.

Un'ultima osservazione: la condizione di risolubilità dell'equazione assegnata è legata alla condizione che l'equazione (1) abbia soluzioni reali; deve dunque risultare:

$$\Delta=a^2-(c-b)(c-b)\geq 0$$

cioè

$$a^2-c^2+b^2\geq 0$$

ossia

$$(a^2+b^2)-c^2\geq 0.$$

Troviamo così che l'equazione è risolubile se

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq c\leq\sqrt{a^2+b^2},$$

cioè se

$$-1\leq\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1,$$

come avevamo trovato negli altri casi.

2. Equazioni del tipo $a\operatorname{sen}^2 x+b\operatorname{sen} x\cos x+c\cos^2 x=d$

Nel cap. 5, pp. 150-152, abbiamo risolto equazioni del tipo indicato, scrivendole nella forma

$$\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=m$$

e riconducendole così ad un tipo noto di equazione.

Rivediamo ora questo procedimento su un esempio numerico, che ci permetterà di esaminare anche un altro metodo. Per risolvere l'equazione

$$5\operatorname{sen}^2 x-2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x=2$$

si procede così:

— ci si basa prima di tutto sulle formule di duplicazione, che scriviamo nella forma seguente:

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \operatorname{sen} x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

L'equazione data diventa allora:

$$5\frac{1-\cos 2x}{2}-2\sqrt{3}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}=2;$$

svolgendo i calcoli indicati e semplificando, si ottiene:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x+3\cos 2x=0;$$

— ci si basa poi sulle formule di addizione, per scrivere il primo membro dell'equazione nella forma:

$$r\operatorname{sen}(2x+\varphi),$$

tenendo presente che deve essere

$$r=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

e

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

L'equazione diventa dunque:

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

ossia

$$\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Tenendo presenti i risultati esposti nelle pp. 142-144, si trovano le soluzioni dell'equazione; sono:

$$2\left(x_k+\frac{\pi}{6}\right)=2k\pi$$

$$2\left(x'_k+\frac{\pi}{6}\right)=\pi+2k\pi.$$

Concludendo, le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_k=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$x'_k=\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Vediamo ora un altro metodo per risolvere l'equazione

$$5\,\mathrm{sen}^2 x-2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x-\cos^2 x=2.$$

Si procede così:

I) ci si basa sulla relazione fondamentale

$$\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

e si trasforma l'equazione data nella seguente:

$$5\,\mathrm{sen}^2 x-2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x-\cos^2 x=2(\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x)$$

cioè

$$3\,\mathrm{sen}^2 x-2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x-3\cos^2 x=0. \tag{1}$$

L'equazione così ottenuta ha una caratteristica particolare: il primo membro è un polinomio di 2° grado omogeneo nelle variabili $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$, dato che vi compaiono solo monomi di 2° grado; il secondo membro è uguale a zero.

Ora, ricordando la relazione fondamentale

$$\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}=\mathrm{tg}\,x,$$

si capisce che, dividendo i due membri dell'equazione per $\cos^2 x$, si otterrebbe un'equazione contenente come incognita solo $\mathrm{tg}\,x$. Ma, se vogliamo che questa divisione non conduca a risultati errati o incompleti, dobbiamo verificare che

$$\cos x=0$$

non sia soluzione dell'equazione; e perciò:

II) si verifica se sono soluzione dell'equazione gli angoli per cui risulta

$$\cos x=0,$$

ossia:

$$x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$x'_k=\frac{3}{2}\pi+2k\pi.$$

Data la periodicità della funzione coseno, basterà verificare se $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ sono soluzioni dell'equazione. Ora, sostituendo $\frac{\pi}{2}$ alla x nella (1) si ottiene:

1° membro) 3
2° membro) 0

e dunque $x=\frac{\pi}{2}$ non è soluzione dell'equazione.

Sostituendo poi $\frac{3}{2}\pi$ alla x, sempre nella (1), si ottiene:

1° membro) 3
2° membro) 0.

Concludiamo così che

$$x=\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x=\frac{3}{2}\pi$$

non sono soluzioni dell'equazione.

Passiamo ora alle due ultime fasi del procedimento:

III) si dividono i due membri dell'equazione

$$3\,\text{sen}^2 x-2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x-3\cos^2 x=0$$

per $\cos^2 x$; si ha:

$$3\,\text{tg}^2 x-2\sqrt{3}\,\text{tg}\,x-3=0;$$

IV) si introduce l'incognita

$$z=\text{tg}\,x,$$

e si è così condotti a risolvere l'equazione algebrica di 2° grado:

$$3z^2-2\sqrt{3}\,z-3=0;$$

le soluzioni sono:

$$z=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+9}}{3}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{3}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{4\cdot 3}}{3}=\frac{\sqrt{3}\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

ossia

$$z_1=\sqrt{3} \quad \text{e} \quad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

I valori di x si determinano risolvendo le equazioni:

$\text{tg}\,x=\sqrt{3}$, che ha le soluzioni $x_k=\frac{\pi}{3}+k\pi$

$\text{tg}\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, » » » » $x'_k=-\frac{\pi}{6}+k\pi$.

Abbiamo così trovato le stesse soluzioni ottenute prima. Il procedimento non risulta molto più breve o più semplice di quello esposto all'inizio e richiede qualche cautela nel 2° passo. Si tratta però di un procedimento che si estende facilmente per risolvere un altro tipo di equazioni, che ora esaminiamo.

3. Equazioni del tipo $a\cos^4 x+b\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+c\,\text{sen}^4 x=d$

Basiamoci su un caso numerico: l'equazione

$$4\cos^4 x+2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+6\,\text{sen}^4 x=3.$$

Questa si trasforma nella

$$4\cos^4 x+2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+6\,\text{sen}^4 x=3(\cos^2 x+\text{sen}^2 x)^2,$$

ossia in

$$4\cos^4 x+2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+6\,\text{sen}^4 x=3\cos^4 x+6\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+3\,\text{sen}^4 x,$$

e quindi in

$$\cos^4 x-4\,\text{sen}^2 x\cos^2 x+3\,\text{sen}^4 x=0.$$

Quest'equazione non ammette la soluzione

$$\cos x=0,$$

perciò possiamo dividere i due membri per $\cos^4 x$; si ottiene:

$$\text{tg}^4 x-4\,\text{tg}^2 x+3=0.$$

Introducendo, poi, la variabile

$$z=\text{tg}^2 x,$$

si è condotti a risolvere l'equazione algebrica

$$z^2-4z+3=0;$$

le soluzioni sono:

$$z=2\pm\sqrt{4-3},$$

cioè

$$z_1=3 \qquad \text{e} \qquad z_2=1.$$

Infine, si debbono risolvere le due equazioni:

$$\operatorname{tg}^2 x=1, \quad \text{da cui} < \begin{matrix} \operatorname{tg} x=1 & (1) \\ \operatorname{tg} x=-1 & (2) \end{matrix}$$

e

$$\operatorname{tg}^2 x=3, \quad \text{da cui} < \begin{matrix} \operatorname{tg} x=\sqrt{3} & (3) \\ \operatorname{tg} x=-\sqrt{3} & (4). \end{matrix}$$

Si ottengono così le soluzioni:

$$(1) \quad x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$(2) \quad x_k=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$(3) \quad k_k=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$(4) \quad x_k=-\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Un'ultima osservazione: se $\cos x$ è soluzione dell'equazione assegnata, possiamo dividere i due membri dell'equazione per $\operatorname{sen}^2 x$ (o per $\operatorname{sen}^4 x$); si è così ricondotti ad un procedimento analogo a quello ora esposto, ma in cui l'incognita è, ora, $\operatorname{ctg} x$. È chiaro che, in questo caso, occorre prima di tutto verificare che $\operatorname{sen} x=0$ non sia soluzione dell'equazione.

Se, poi, sia $\operatorname{sen} x=0$ che $\cos x=0$ sono soluzioni dell'equazione, vuol dire che dobbiamo risolvere equazioni del tipo

$$b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x=0$$

oppure

$$b \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x=0,$$

e, in questi casi, la soluzione è immediata.