# 5
# Equazioni e disequazioni goniometriche

# 1. Equazioni e disequazioni goniometriche nella realtà

Iniziamo questo capitolo riflettendo su due situazioni che conducono a studiare equazioni e disequazioni goniometriche; si tratta di situazioni che si presentano abbastanza spesso nella realtà di oggi.

A) Per accordare una chitarra, il chitarrista pizzica due corde contemporaneamente e ascolta con attenzione (Fig. 1).

Se percepisce un suono limpido, vuol dire che la chitarra è ben accordata; lo strumento, invece, deve essere accordato quando si avverte una particolare sensazione di suono vibrato e sgradevole.

Come si spiega quest'effetto sonoro?

Ricordiamo prima di tutto che, per accordare la chitarra, si procede così: si premono due corde sulla tastiera in modo che producano la stessa nota, ad esempio si preme l'ultima corda (la più grossa) al 5° tasto e si lascia libera la penultima corda. Queste corde danno la stessa nota solo se lo strumento è ben accordato; se non lo è, le due corde danno suoni di frequenza un po' diversa, che creano un effetto di vibrato, di "miagolio".

Vediamo meglio di che si tratta esaminando un caso numerico: i due suoni hanno frequenza di 440 e 442 cicli al secondo.

In prima approssimazione, possiamo descrivere i due suoni con leggi del tipo

$$d=r \operatorname{sen} \omega t,$$

dove si ha

$$\omega=2\pi f,$$

con $f$ che rappresenta la frequenza del suono (p. 84).

Esaminando il caso semplice in cui risulta

$$r=1,$$

si arriva a descrivere i due suoni con le due funzioni seguenti:

$$d_1=\operatorname{sen} \omega_1 t, \quad \text{con} \quad \omega_1=2\pi 440$$

e

$$d_2=\operatorname{sen} \omega_2 t, \quad \text{con} \quad \omega_2=2\pi 442.$$

Fig. 1

Nel nostro orecchio i due suoni si sovrappongono, dando luogo ad un suono descritto dalla legge

$$d = \text{sen}\,\omega_1 t + \text{sen}\,\omega_2 t. \qquad (1)$$

Basandoci sulle formule di prostaferesi (p. 117), possiamo riscrivere la legge (1) nella forma:

$$d = 2\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t$$

in cui risulta:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{2\pi 442 - 2\pi 440}{2} = 2\pi,$$

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \frac{2\pi 442 + 2\pi 440}{2} = 2\pi 441.$$

Si ha così la legge:

$$d = 2\cos(2\pi t) \cdot \text{sen}(2\pi 441 t).$$

Ora possiamo vedere questa funzione come un caso particolare della legge

$$d = r\,\text{sen}\,\omega t,$$

purché consideriamo

$$2\cos(2\pi t) = r$$
$$2\pi 441 = \omega.$$

In questo modo riusciamo ad individuare chiaramente le caratteristiche del suono ottenuto:

— la frequenza è di 441 cicli al secondo,
— l'ampiezza massima $r$ cambia al passare del tempo e varia con una legge sinusoidale, che ha la frequenza di solo 1 ciclo al secondo (Fig. 2).

La formula e la figura spiegano le caratteristiche del suono: è una nota molto vicina al *la* (441 invece di 440 cicli al secondo), ma l'intensità varia lentamente dal massimo al minimo e di nuovo al massimo in 1 secondo. Questa variazione produce l'effetto di "miagolio"; lo strumento è ben accordato quando il "miagolio" scompare.

Ma, ci si chiede, in quali istanti l'intensità $r$ del suono si annulla? E in quali istanti il suono ha un'intensità $r$ uguale a quella dei suoni componenti?

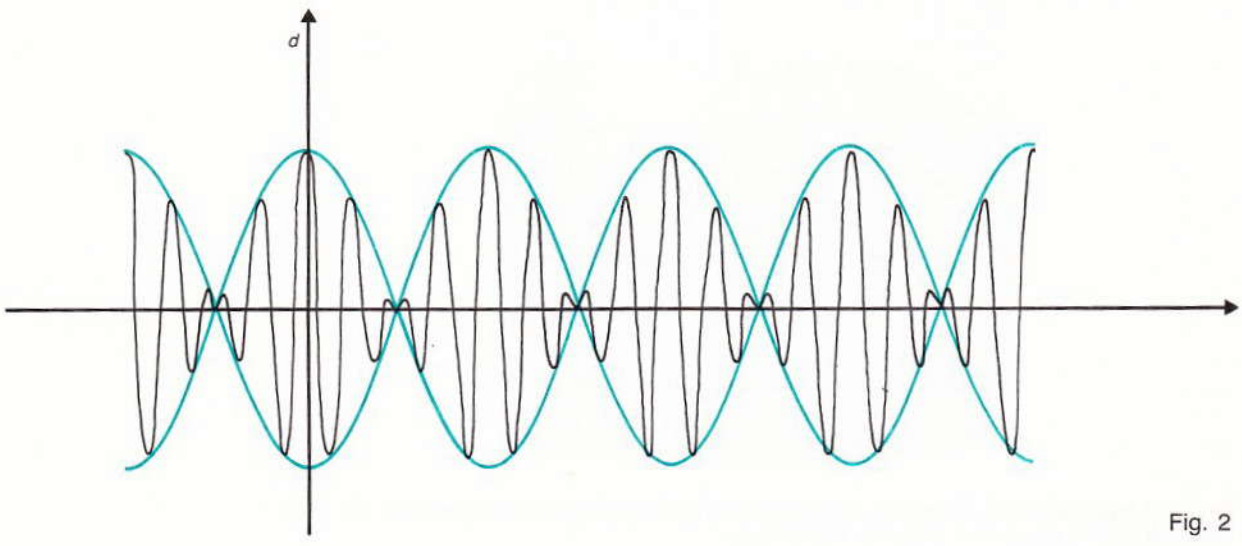



Fig. 2

Siamo così condotti ad esaminare la legge

$$r=2\cos 2\pi t,$$

per scoprire per quali valori di $t$ risulta

$$2\cdot\cos 2\pi t=0$$

oppure

$$2\cdot\cos 2\pi t=1,$$

cioè dobbiamo risolvere delle *equazioni goniometriche*, in cui l'incognita è $t$.

B) L'argomento di cui ora ci occuperemo è la cosiddetta teoria dei *bioritmi*. Si tratta di una teoria discutibile, che cerca di descrivere in una forma matematica semplice una realtà complessa e sfuggente come l'umore di una persona.

La Fig. 3 mostra i bioritmi di una persona disegnati dal calcolatore. Che cosa indicano queste curve e come sono disegnate?

I bioritmi esprimono in termini matematici un'osservazione abbastanza comune: una stessa persona durante alcuni giorni è euforica ed attiva e durante altri giorni è depressa e pigra. Qualche volta si conoscono i motivi di un malessere o di un malumore, ma spesso i "giorni negativi" sembrano senza spiegazione.

La teoria dei bioritmi spiega queste situazioni sostenendo che ogni persona ha dei cicli che iniziano al momento della nascita ed influenzano lo stato fisico, emotivo ed intellettuale. Il ciclo fisico è lungo 23 giorni, il ciclo emotivo è lungo 28 giorni e il ciclo intellettuale dura 33 giorni.

Alcuni esperti di bioritmi visualizzano questi cicli con tre sinusoidi che hanno tre periodi $T$ differenti (23 giorni, 28 giorni e 33 giorni) e la stessa ampiezza massima $r$. Così, misurando il tempo $t$ in giorni, il ciclo fisico sarà descritto dalla funzione

$$y=r\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{23}t, \qquad \text{rappresentata in Fig. 4,}$$

il ciclo emotivo sarà descritto dalla funzione

$$y=r\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{28}t, \qquad \text{rappresentata in Fig. 5,}$$

e il ciclo intellettuale sarà descritto dalla funzione

$$y=r\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{33}t, \qquad \text{rappresentata in Fig. 6.}$$

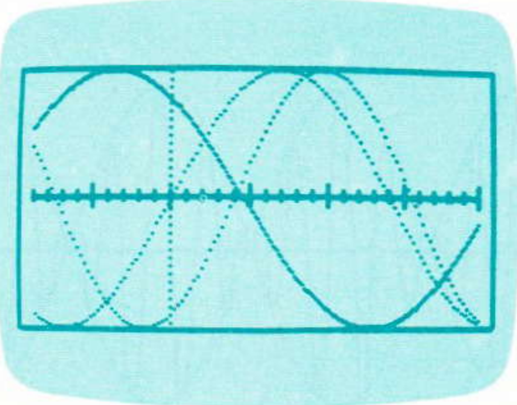


Fig. 3. Il calcolatore ha disegnato tre sinusoidi che rappresentano l'andamento del ciclo fisico, di quello emotivo e di quello intellettuale.

Le sinusoidi delle Figg. 4, 5, 6 descrivono dunque i cicli di una persona a partire dal giorno in cui è nata... e dovrebbero permettere di conoscerne lo stato fisico, emotivo o intellettuale in qualunque mese o giorno.

In questi casi ha particolare interesse determinare, per esempio, in quali giorni l'attività fisica è "positiva", in quali è "negativa" e quali sono i giorni in cui l'attività è nulla.

Questo porta a studiare come varia il segno della funzione

$$y = r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{23} t,$$

determinando per quali valori di $t$ risulta

$$r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{23} t > 0,$$

o

$$r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{23} t < 0.$$

Siamo dunque condotti a risolvere delle *disequazioni goniometriche*.

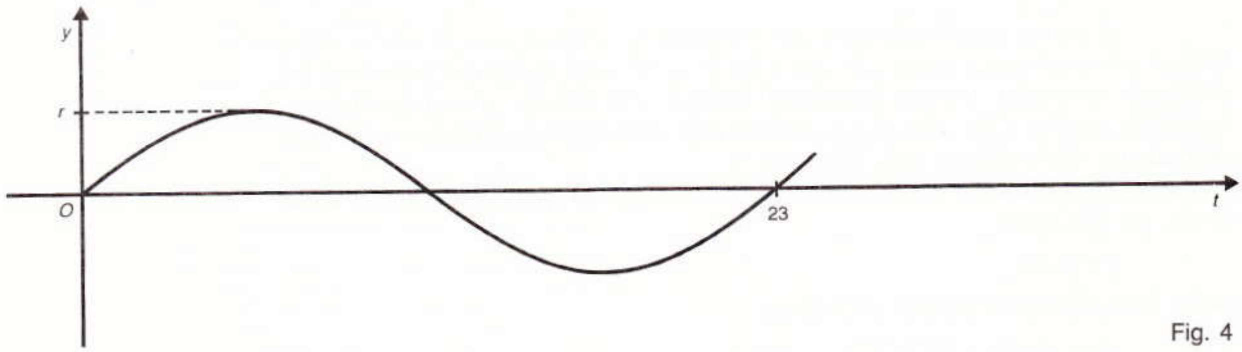



Fig. 4

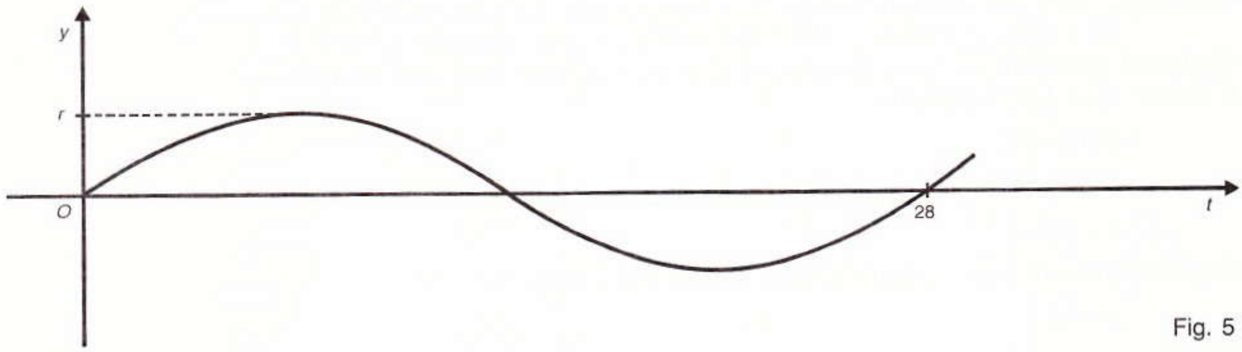



Fig. 5

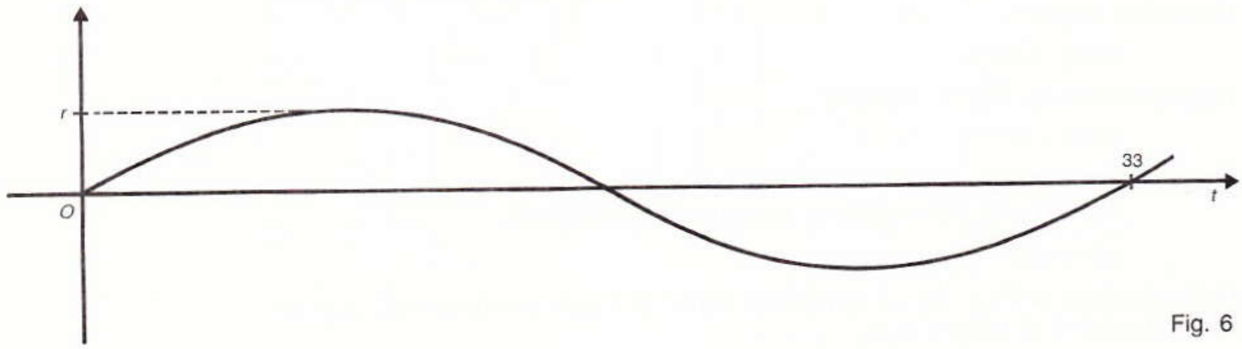



Fig. 6

Per determinare, poi, i giorni in cui l'attività y è nulla, siamo condotti a risolvere un'equazione goniometrica del tipo

$$r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{23} t = 0.$$

Abbiamo così esaminato delle situazioni che ci possono condurre a risolvere equazioni e disequazioni goniometriche, nelle pagine seguenti vedremo come risolvere problemi di questo tipo.

## 2. La funzione $y = \operatorname{arcsen} x$

In questo capitolo dovremo spesso determinare una grandezza incognita a partire da un'altra, che, invece, è nota. Ne abbiamo già visto degli esempi nel paragrafo precedente, come, per citarne di nuovo uno, trovare il valore di $t$ per cui la funzione

$$r = \cos 2\pi t$$

assume il valore

$$r = 1.$$

In tutti questi casi non ha, ovviamente, importanza la scelta delle lettere con cui indichiamo ciò che è noto e ciò che vogliamo ricavare; ad esempio, avremmo potuto indicare il tempo $t$ incognito con $s$ (pensando ai secondi), invece che con $t$, e al posto di $r$ avremmo potuto scrivere una qualunque altra lettera dell'alfabeto.

Cominciamo ad esaminare una situazione particolarmente semplice. La funzione

$$y = \operatorname{sen} x$$

pone due differenti tipi di problemi:

1) è data la lunghezza $x$ dell'arco e vogliamo ricavare il valore $y$ del seno dell'arco; questo problema ha sempre una ben determinata soluzione, dato che ad ogni valore di $x$ corrisponde un solo valore di $y$;

2) è dato il valore $y$ del seno dell'arco, per esempio $y = 0{,}5$, e vogliamo determinare la lunghezza $x$ dell'arco, vogliamo cioè determinare il valore di $x$ per cui risulta

$$\operatorname{sen} x = 0{,}5.$$

Per risolvere il problema 2) ci si basa sul grafico di

$$y = \operatorname{sen} x,$$

rappresentato in Fig. 7. Dalla figura risulta che al valore

$$y = 0{,}5$$

corrispondono infiniti valori di $x$.

Ad analoghe considerazioni si è condotti dall'esame grafico di equazioni come

$$\operatorname{sen} x = -0{,}5,$$

rappresentata in Fig. 8, oppure

$$\operatorname{sen} x = 1,$$

rappresentata in Fig. 9.

Se, invece, proviamo ad esaminare l'equazione

$$\operatorname{sen} x = 2,$$

rappresentata in Fig. 10, ci rendiamo conto che non esistono valori di $x$ corrispondenti al valore $y = 2$.

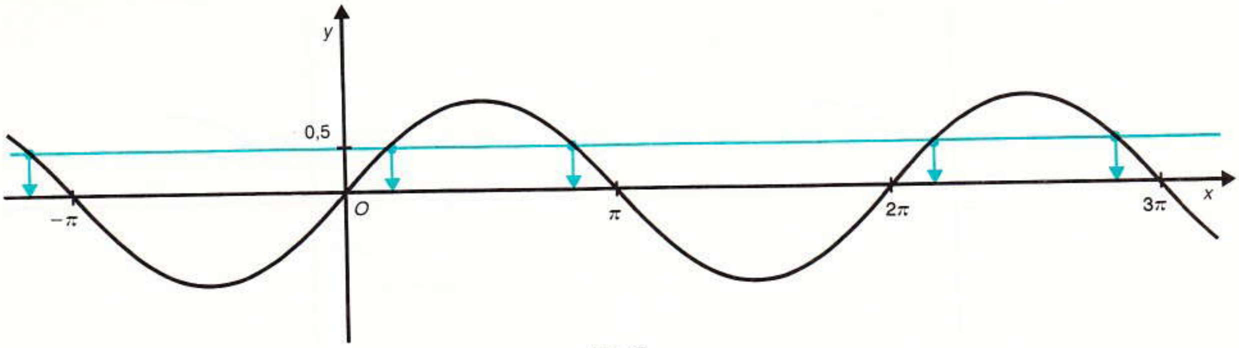



Fig. 7

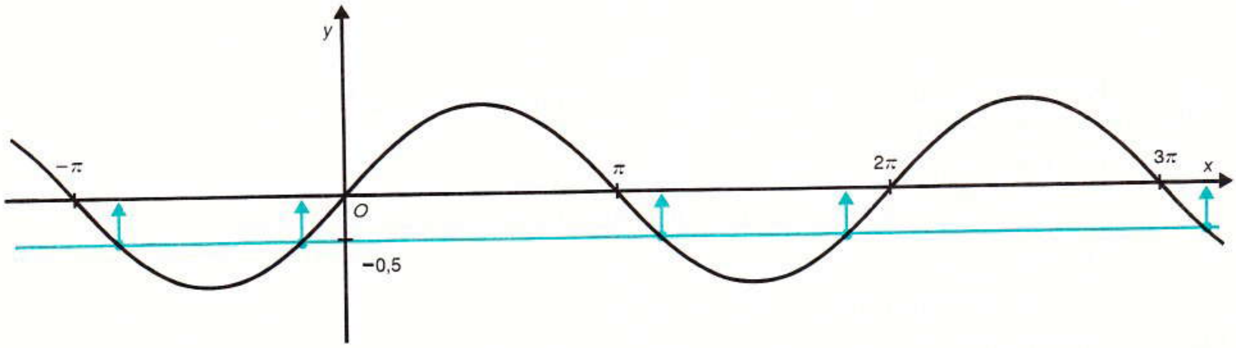



Fig. 8

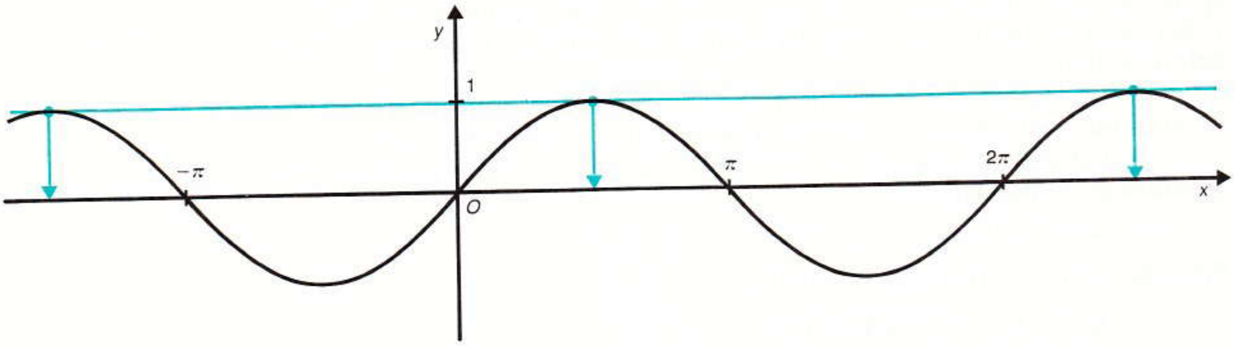



Fig. 9

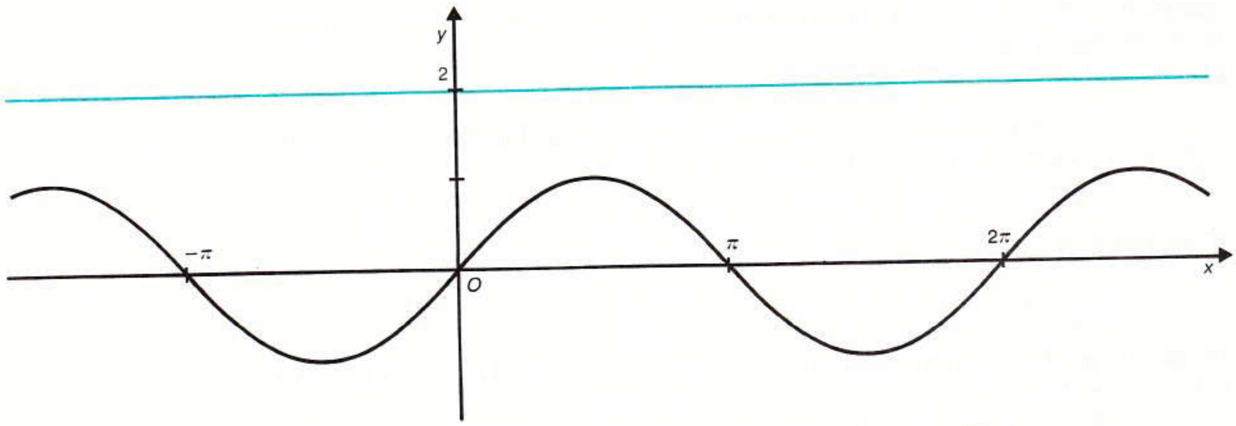



Fig. 10

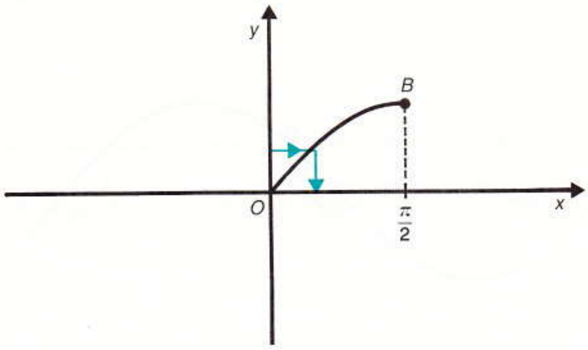



Fig. 11

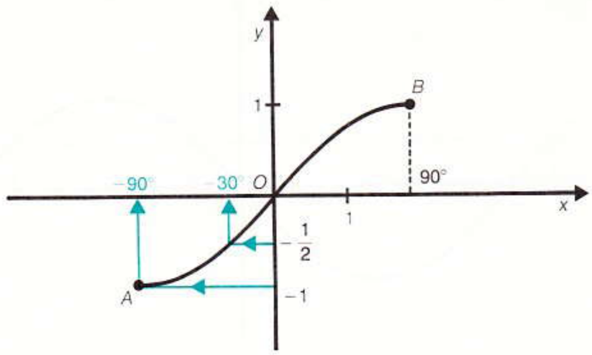



Fig. 12

Risulta ora chiaro che quando è dato un valore $y$ del seno dell'arco $x$, si possono presentare i seguenti casi:

1) $y>1$ oppure $y<-1$
   e non esistono corrispondenti valori di $x$;

2) $-1\leq y\leq 1$
   ed esistono infiniti valori di $x$.

Ma, ci si chiede, perché questa situazione si presenta solo ora?

Quando, nel Cap. 1, si considerava il seno solo per angoli acuti $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, si trovava, tramite il calcolatore, un solo angolo in corrispondenza ad un dato valore del seno. Era sufficiente impostare il valore $y$ del seno e premere i tasti $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ per ottenere il corrispondente valore dell'angolo.

La Fig. 11 suggerisce la risposta: se consideriamo solo l'arco $OB$ di sinusoide, ad un valore di $y$ corrisponde un solo valore di $x$.

Ed ora, come risponde il calcolatore se cerchiamo, per esempio, il valore di $x$, per cui

$$\operatorname{sen} x=-0{,}5\ ?$$

Proviamo a premere i tasti seguenti:

$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$;

otteniamo

$$-30°.$$

Scegliamo, poi, altri valori negativi di $y$; otterremo sempre un solo valore di $x$, purché si scelga

$$-1\leq y\leq 0.$$

Ci rendiamo così conto del fatto che il calcolatore si basa su un solo arco di sinusoide (Fig. 12), caratterizzato da

$$-90°\leq x\leq 90°,$$

o, in radianti

$$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}.$$

In questo modo, ad ogni valore di $y$ (compreso fra $-1$ e 1) corrisponde un solo valore di $x$.

Questa scelta di limitarsi a considerare l'arco $AB$ di sinusoide (in Fig. 12) non è un'invenzione dei costruttori di calcolatori. È invece un

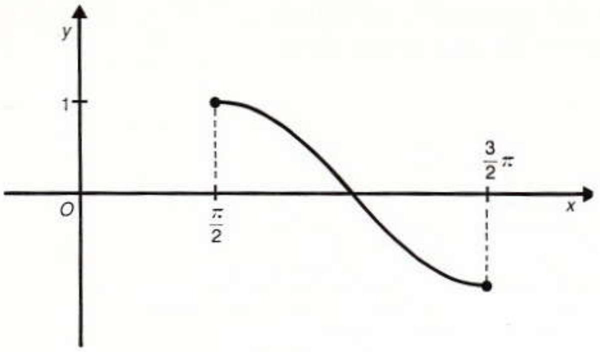



Fig. 13

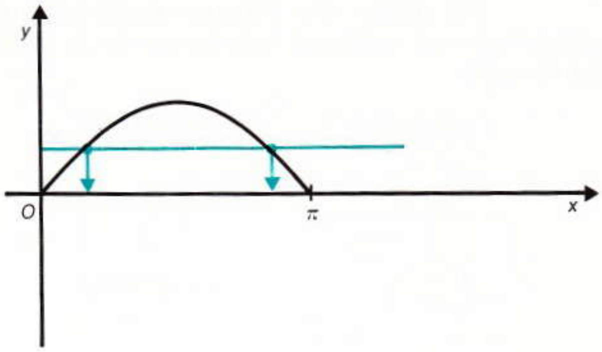



Fig. 14

accordo riconosciuto da tutti i matematici: si è convenuto di invertire la funzione

$$y = \operatorname{sen} x,$$

considerando solo $x$ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (ovvero fra $-90°$ e $90°$).

Nulla avrebbe impedito di accordarsi in modo diverso, per esempio scegliendo la $x$ nell'intervallo compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ (Fig. 13).

Sarebbe stata, invece, inaccettabile la scelta dell'intervallo compreso fra 0 e $\pi$, perché un valore di $y$ avrebbe individuato *due* valori di $x$ (Fig. 14).

Accettando la scelta iniziale, possiamo concludere nel modo seguente. Per poter invertire la funzione

$$y = \operatorname{sen} x$$

è necessario che:

1) $y$ sia compreso fra $-1$ e 1, ossia

$$-1 \leq y \leq 1$$

ovvero

$$y \in [-1, 1];$$ [1]

2) fra tutti i valori di $x$, corrispondenti ad una $y$ assegnata, si scelga quello compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, cioè

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

ossia

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

In questo modo si può ottenere una funzione che ad ogni valore $y$ del segno di $x$ fa corrispondenre un solo valore di $x$. Questa funzione prende il nome di *arcoseno*.

Questo nome, arcoseno, è un'abbreviazione della frase «l'arco il cui seno è...» e ricorda, appunto, il problema da risolvere: è dato il seno di un arco e si vuole trovare l'ampiezza di quest'arco.

[1] Il simbolo $[-1,1]$ indica l'intervallo dei numeri reali compresi fra $-1$ e 1, estremi inclusi, e il simbolo $\in$ si legge "appartiene a".

Per quello che abbiamo detto all'inizio del paragrafo, possiamo scegliere come vogliamo le lettere con cui indichiamo l'arco e il suo seno; ad esempio:

| scegliendo | scriveremo |
|---|---|
| arco : $x$<br>seno : $y$ | $x=\text{arcsen}\, y$ |
| arco : $t$<br>seno : $d$ | $t=\text{arcsen}\, d$ |
| arco : $y$<br>seno : $x$ | $y=\text{arcsen}\, x$ |

In Fig. 15 abbiamo rappresentato il grafico di $y=\text{arcsen}\, x$.

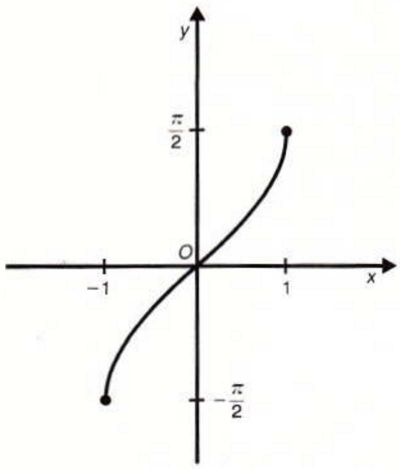



Fig. 15. Si tratta dell'arco $AB$ di sinusoide, rappresentato in Fig. 12, che ha subito una simmetria rispetto alla retta $y=x$. Questa simmetria scambia infatti la $y$ con la $x$, trasformando

$$y=\text{sen}\, x$$

in

$$x=\text{sen}\, y$$

ossia

$$y=\text{arcsen}\, x.$$

## 3. Il concetto di funzione. Funzione inversa

Scelte, convenzioni e limitazioni ci hanno permesso, nel paragrafo precedente, di definire l'inversa della funzione seno. Ma, ce ne rendiamo conto, resta una certa perplessità: non è la matematica il regno delle dimostrazioni rigorose, dove nulla è lasciato alla nostra scelta?

In questo paragrafo rifletteremo su questo problema e giungeremo a delle conclusioni inaspettate.

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione arcoseno sembra diversa dalle funzioni sin qui incontrate. Scrivendo, per esempio,

$$y=mx+n$$
$$y=x^2$$
$$y=\text{sen}\, x$$
$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

pensiamo che la $x$ possa assumere qualunque valore reale: 0, 1, $10^{32}$, $\pi$, $-\sqrt{2}$, ...

Invece, quando scriviamo

$y=\operatorname{arcsen} x$ ($x$ è il seno e $y$ è l'arco),

dobbiamo scegliere $x$ compreso fra $-1$ e 1, altrimenti non possiamo trovare il corrispondente valore di $y$.

Del resto questa limitazione nella scelta dei valori di $x$ non rappresenta un caso eccezionale, proprio dell'arcoseno; si verifica anche per altre funzioni. Ecco due esempi:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$.

Se scegliamo la $x$ maggiore di 1 o minore di $-1$, il radicando $1-x^2$ risulta negativo e la radice quadrata di un numero negativo non dà risultato reale. Perciò, se vogliamo ottenere $y$, dobbiamo scegliere (Fig. 16)

$-1 \leq x \leq 1$ ovvero $x \in [-1,1]$

proprio come per l'arcoseno.


Fig. 16

2) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

In questo caso la $y$ può assumere qualunque valore, ma dobbiamo far attenzione ad escludere i numeri che annullano il denominatore $\operatorname{sen} x$:

$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi, \ldots$

Anche ora, quindi, c'è una restrizione sui valori da assegnare alla $x$ (Fig. 17).


Fig. 17

Ecco, infine un caso singolare. La funzione

3) $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$.

Ora otteniamo la $y$ solo per $x=0$. Infatti, se $x$ è positivo, la seconda radice non dà un risultato reale, mentre, se $x$ è negativo, non dà risultato reale la prima radice.

Si capisce così che le funzioni definite per ogni valore di $x$ sono un'eccezione: in generale, una funzione ha significato solo se $x$ assume certi valori. L'insieme dei valori di $x$ per cui la funzione è definita è detto *dominio* della funzione. Così il dominio della funzione

$y=\operatorname{arcosen} x$ è l'intervallo $[-1,1]$;

il dominio della funzione

$y=\sqrt{1-x^2}$ è ancora l'intervallo $[-1, 1]$;

il dominio della funzione

$\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ è l'insieme dei numeri reali privato dei multipli di $\pi$;

infine il dominio di

$y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$ è il solo valore 0.

Consideriamo ora una funzione del tutto diversa dalle precedenti, che si presenta in biologia. È noto che la riproduzione dei batteri avviene per scissione: un batterio si divide in due, due in quattro, ... e così via. Nella tabella seguente vediamo a sinistra il numero $x$ di scissioni avvenute, a destra il corrispondente numero $y$ di batteri

| scissioni $x$ | batteri $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

È chiaro che si ha:

$$y=2^x \tag{1}$$

Anche questa è una funzione, ma ora $x$ e $y$ assumono solo valori interi. In particolare la $x$ può assumere solo i valori 0, 1, 2, ..., perciò il dominio della funzione è l'insieme dei numeri interi positivi.

Ma la stessa scrittura (1) può avere altri significati:

— può rappresentare il flusso $y$ di neutroni in un reattore nucleare al variare del tempo $x$ e, in tal caso, $x$ assume valori reali positivi;
— può descrivere l'intera curva esponenziale, quando la $x$ può assumere tutti i valori reali.

Si capisce così che la sola formula (1) non chiarisce da sola tutto ciò che vogliamo dire sulla funzione.

Analogamente, quando scriviamo

$$y=\operatorname{sen} x$$

non risulta chiaro se intendiamo determinare il seno solo di angoli acuti, solo di angoli ampi fino a 360°,...

Si esce da quest'ambiguità con un'azione chiarificatrice, che precisa il concetto di funzione.

Fino ad ora avevamo indicato con il termine funzione una legge che fa corrispondere ad un valore di $x$ il valore di $y$. Ma, lo abbiamo appena visto, dobbiamo specificare in quale insieme può essere scelto $x$; indichiamo con $A$ questo insieme, che si chiama dominio della funzione.

Per essere più chiari, sarà opportuno specificare anche l'insieme cui appartiene $y$: numeri interi, reali,... Questo insieme è detto *codominio* della funzione, e lo indicheremo con la lettera $B$.

Possiamo ora formulare in modo più preciso la frase «la funzione è una legge che fa corrispondere ad un valore di $x$ il valore di $y$». È infatti chiaro che, prima di parlare di $x$ e di $y$, dobbiamo aver scelto il dominio $A$ e il codominio $B$, cui $x$ ed $y$ appartengono.
Ecco allora la nuova definizione:

dato un insieme $A$, detto dominio,
dato un insieme $B$, detto codominio,
una funzione è una legge che associa ad *ogni* elemento di $A$ un *unico* elemento di $B$.

In questa definizione sono scritte in corsivo le parole chiave:

— la funzione deve esistere per ogni valore di $x$ nel dominio $A$;
— ad ogni valore di $x$ scelto in $A$ deve corrispondere un solo valore di $y$ in $B$, cioè, come si dice, la funzione deve essere *univoca*.

Si osserva, basandosi su questa definizione, che due funzioni sono uguali solo se:

1) hanno lo stesso dominio $A$;
2) hanno lo stesso codominio $B$;
3) ad ogni elemento $x$ di $A$ fanno corrispondere lo stesso elemento $y$ di $B$.

Alla luce di questa definizione, possiamo riesaminare il procedimento seguito per invertire la funzione seno. Iniziamo col definire in modo preciso la funzione seno. Abbiamo che:

— il dominio $A$ è l'insieme dei numeri reali,
— il codominio $B$ è l'intervallo $[-1,1]$;
— la funzione che fa corrispondere ad ogni valore $x$ dell'arco il corrispondente valore $y$ del seno, è scritta nella forma:

$$y=\operatorname{sen} x.$$

È chiaro dal grafico (Fig. 18) che questa funzione non è invertibile, perché ad un valore di $y$ in $B$ corrispondono infiniti valori di $x$ in $A$.

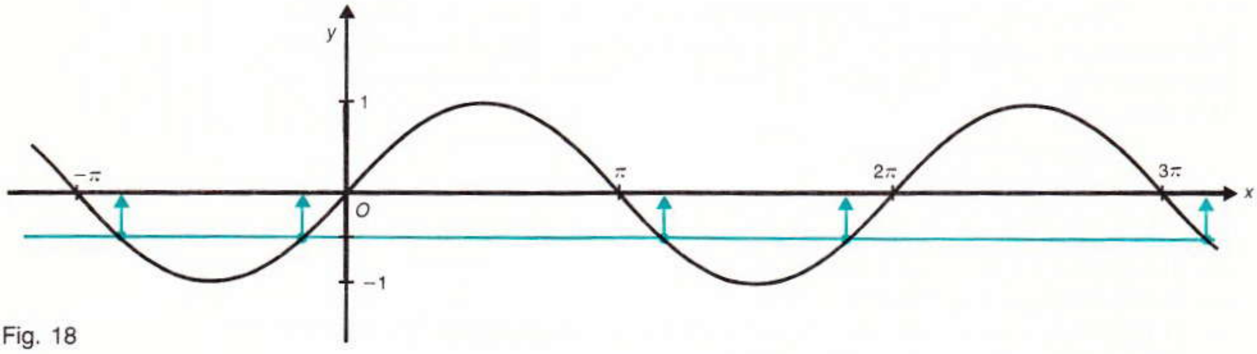


Fig. 18

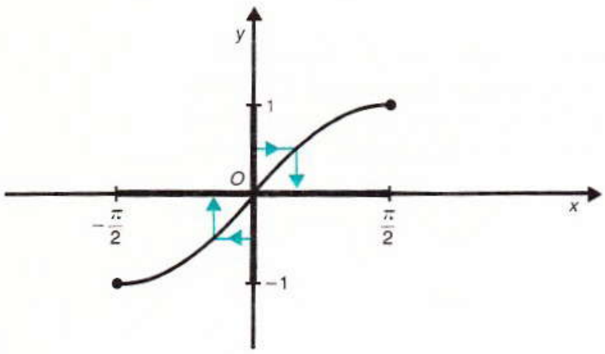


Fig. 19

Per avere una funzione invertibile, dobbiamo scegliere un dominio più ristretto. Definiamo perciò una nuova funzione, che chiameremo Seno con la S maiuscola per distinguerla dalla precedente.

Ecco la definizione:

— il dominio $A$ è l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
— il codominio $B$ è l'intervallo $[-1,1]$,
— la funzione associa ad ogni valore $x$ in $A$ il corrispondente valore del seno ed è scritta nella forma:

$$y=\operatorname{Sen} x.$$

Questa nuova funzione è invertibile, perché ad ogni $y$ corrispondente un solo valore di $x$ (Fig. 19).

Perciò è possibile definire la sua inversa nel modo seguente:

— il dominio è l'insieme $B$, cioè l'intervallo $[-1,1]$;

— il codominio è l'insieme $A$, cioè l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

— la funzione fa corrispondere, ad ogni elemento $x$ del suo dominio $B$, il valore $y$ in $A$, determinando $y$ come l'arco il cui seno vale $x$.

Questa funzione dovrebbe essere scritta nella forma:

$y = \text{arcSen}\, x$,

ma si scrive:

$y = \text{arcsen}\, x$

perché così è ormai l'uso. È però importante sottolineare che l'arcoseno non è l'inversa della funzione seno; è, invece, l'inversa di un'altra funzione, più "ristretta", che abbiamo chiamato Seno.

## 4. Le funzioni $y = \arccos x$ e $y = \text{arctg}\, x$

Ripetiamo ora le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti per esaminare un problema analogo: dato il valore $y$ del coseno dell'arco (per esempio $y = 0{,}5$), determinare l'arco $x$, determinare cioè il valore di $x$, tale che

$\cos x = 0{,}5$.

Si osserva che la funzione di cui abbiamo tracciato il grafico in Fig. 20 è definita nel modo seguente:

— il dominio è l'insieme dei numeri reali,

— il codominio è l'intervallo $[-1,1]$,

— la funzione associa ad ogni valore $x$ dell'arco, il corrispondente valore del coseno, ed è scritta nella forma:

$y = \cos x$.

Questa funzione non è invertibile, perché ad un valore di $y$ corrispondono infiniti valori di $x$. Perciò si definisce una nuova funzione che sia, invece, invertibile; il grafico di Fig. 21 suggerisce come scegliere il dominio $A$ di questa nuova funzione, che, per chiarezza, possiamo chiamare Coseno.

Così si definisce che:

— il dominio $A$ è l'intervallo $[0,\pi]$,

— il codominio $B$ è l'intervallo $[-1,1]$,

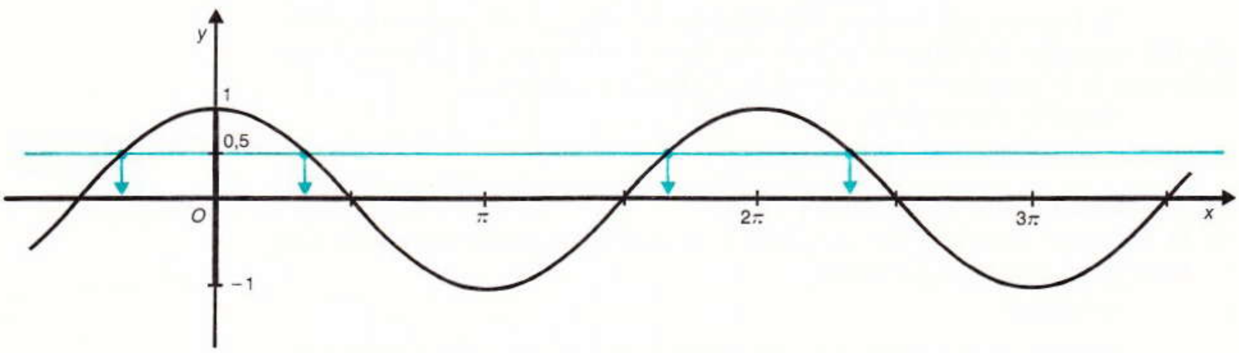



Fig. 20

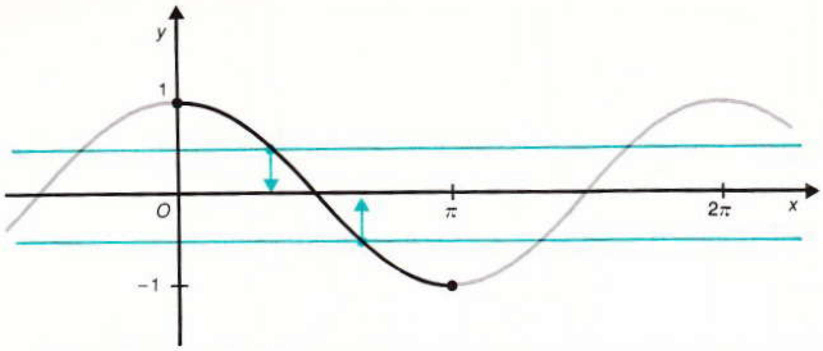



Fig. 21

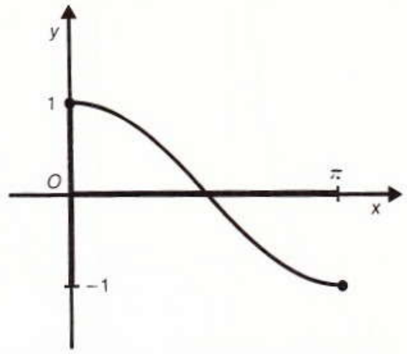



Fig. 22

— la funzione associa, ad ogni valore $x$ in $A$, il corrispondente valore $y$ del coseno ed è scritta nella forma:

$y = \text{Cos}\, x.$

Questa nuova funzione è invertibile, perché ad ogni valore di $y$ corrisponde un solo valore di $x$ (Fig. 22).

Perciò è immediato definire la sua inversa nel modo seguente:

— il dominio è l'insieme $B$, cioè l'intervallo $[-1,1]$,
— il codominio è l'insieme $A$, cioè l'intervallo $[0,\pi]$,
— la funzione fa corrispondere, ad ogni elemento $x$ del suo dominio $B$, il valore $y$ nell'insieme $A$, determinando $y$ come l'arco il cui coseno vale $x$, ossia come l'arcocoseno di $x$.

Questa funzione dovrebbe essere scritta nella forma:

$y = \text{arcCos}\, x,$

ma si scrive usualmente nella forma:

$y = \arccos x$

In Fig. 23 abbiamo tracciato il grafico di questa funzione.

Ed è proprio su questa funzione che si basa il calcolatore. Premendo, per esempio, la sequenza di tasti,

$\boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}$,

per determinare l'arco $y$ il cui coseno vale $-0{,}5$, si ottiene, in gradi (Fig. 24):

120°.

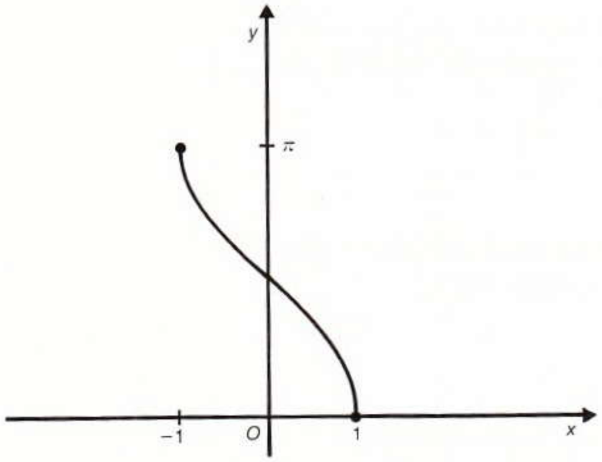



Fig. 23

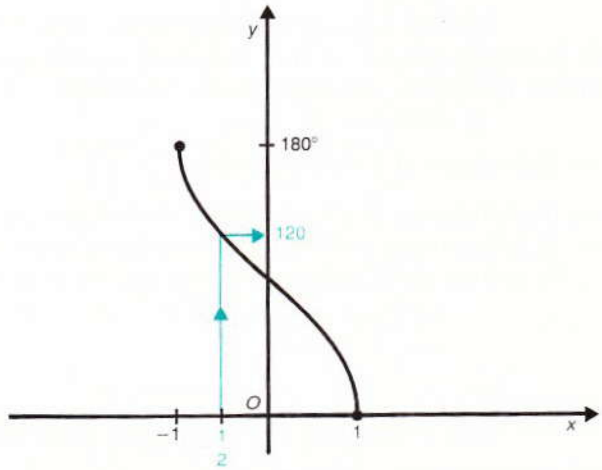



Fig. 24

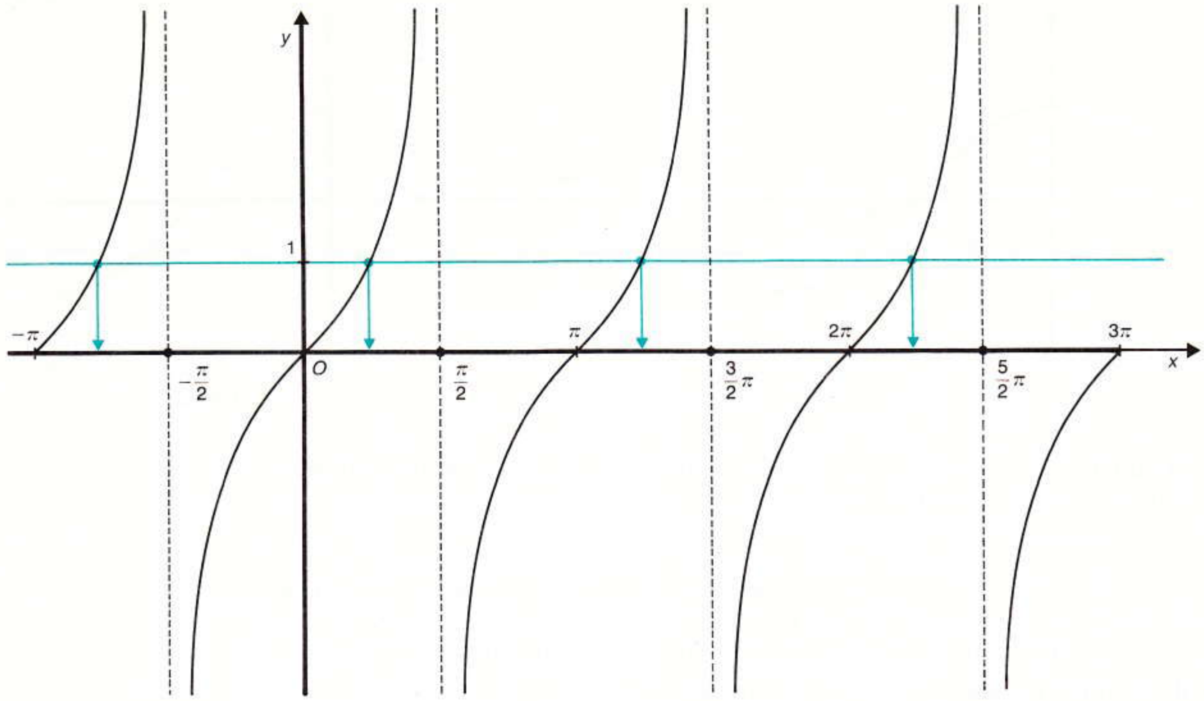



Fig. 25

Infine, esaminiamo il seguente problema: determinare l'arco $x$ tale che risulti, per esempio:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Si osserva prima di tutto che la funzione, di cui abbiamo disegnato il grafico in Fig. 25, è definita nel modo seguente:

— il dominio è l'insieme dei numeri reali, da cui, però, dobbiamo escludere i multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$, cioè:

$$\dots -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \dots$$

— il codominio è l'insieme di tutti i numeri reali,

— la funzione associa ad ogni valore $x$ dell'arco il corrispondente valore della tangente ed è scritta nella forma:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Anche questa funzione non è invertibile, perché ad ogni valore di $y$ corrispondono infiniti valori di $x$; tuttavia è immediato definire una nuova funzione, che sia, invece, invertibile (Fig. 26).

Si definisce che:

— il dominio $A$ è l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,[1]

— il codominio $B$ è l'insieme dei numeri reali,

— la funzione fa corrispondenre ad ogni elemento $x$ di $A$ il corrispondente valore della tangente e può essere espressa nella forma:

$$y = \operatorname{Tg} x.$$

[1] Con il simbolo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si indica l'intervallo dei numeri compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, estremi *esclusi*.

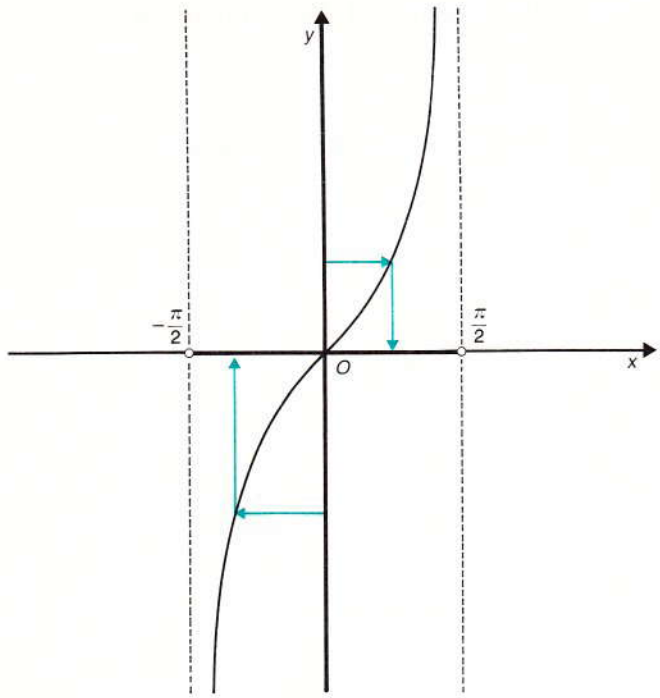



Fig. 26

Questa funzione è invertibile, perché ad ogni valore di $y$ corrisponde un solo valore di $x$ (Fig. 26); possiamo dunque definire la sua inversa nel modo seguente:

— il dominio è l'insieme $B$, cioè l'insieme dei numeri reali,
— il codominio è l'insieme $A$, cioè l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
— la funzione fa corrispondere ad ogni elemento $x$ del suo dominio $B$, il valore di $y$ nell'insieme $A$, determinando $y$ come l'arco la cui tangente vale $x$, cioè come arcotangente di $x$.

Questa funzione dovrebbe essere espressa nella forma:

$y = \mathrm{arcTg}\, x$,

ma si scrive usualmente:

$y = \mathrm{arctg}\, x$.

In Fig. 27 abbiamo tracciato il grafico di quest'ultima funzione.

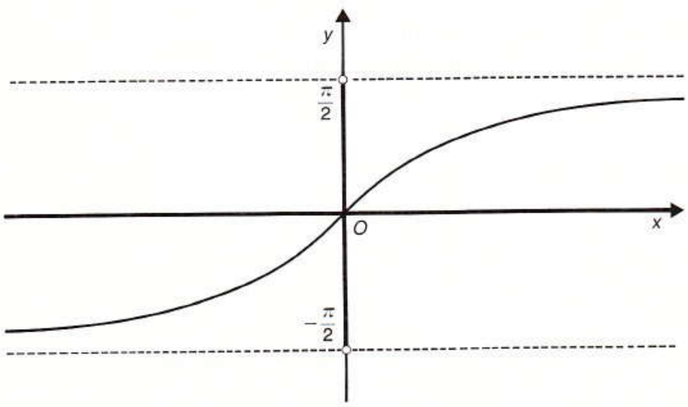



Fig. 27

È su questa funzione che si basa il calcolatore. Infatti, quando si preme la sequenza di tasti

$\boxed{1}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{TAN}}$,

per determinare l'arco $y$, la cui tangente vale $-1$, si ottiene, in gradi (Fig. 28):

$$-45°.$$

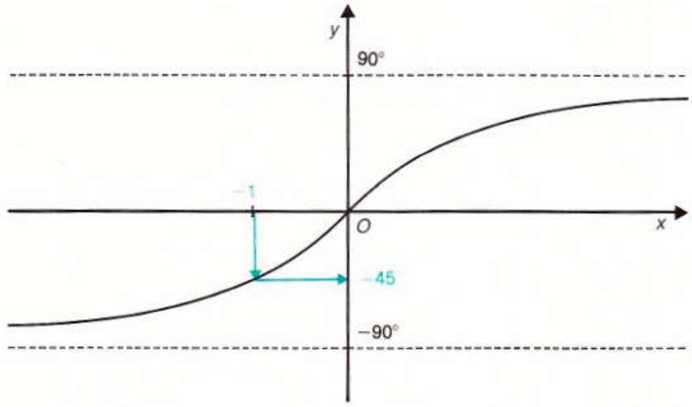



Fig. 28

È da tener presente che le funzioni

$$y=\text{arcsen}\,x, \quad y=\arccos x, \quad y=\text{arctg}\,x,$$

sono a volte indicate nel modo seguente

$$y=\text{sen}^{-1}x, \quad y=\cos^{-1}x, \quad y=\text{tg}^{-1}x.$$

Quest'ultimo modo di scrivere può offrire qualche difficoltà di lettura: siamo abituati infatti a considerare

$$\text{sen}^2 x=(\text{sen}\,x)^2;$$

così viene spontaneo leggere

$$\text{sen}^{-1}x=(\text{sen}\,x)^{-1}=\frac{1}{\text{sen}\,x}.$$

Proprio per evitare tali ambiguità in questo volume abbiamo preferito usare i simboli arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

## 5. Equazioni del tipo sen $x=m$, cos $x=m$, tg $x=m$

Abbiamo ora tutti gli elementi per risolvere le equazioni che più frequentemente si presentano nelle applicazioni. Cominciamo dai casi più semplici, per arrivare gradualmente a trattare i casi più elaborati.

### A) Equazioni sen $x=m$

Esaminiamo prima di tutto un esempio numerico: l'equazione

$$\text{sen}\,x=0,5.$$

Con questa scrittura abitualmente si esprime il problema seguente: data la funzione $y=\text{sen}\,x$ (che ha per dominio l'insieme dei reali), determinare *tutti* gli archi $x$ il cui seno vale 0,5.

Come abbiamo osservato nel paragrafo 2, sono infiniti gli archi $x$, che hanno seno uguale a 0,5; tuttavia, esaminando la Fig. 29, in cui abbiamo tracciato il grafico di $y=\text{sen}\,x$, è immediato rendersi conto che i valori di $x$ cercati sono disposti con regolarità sull'asse delle $x$.

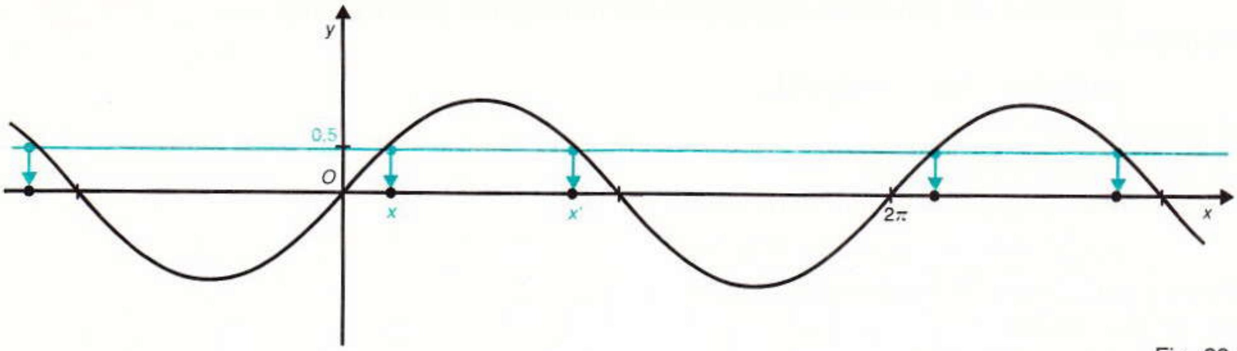



Fig. 29

Le nozioni relative agli angoli associati (vedi p. 38) permettono, poi, di capire meglio questa regolarità (Fig. 30): i due angoli $A\hat{O}P$ e $A\hat{O}Q$, che hanno seno uguale a 0,5, hanno ampiezza

$$30° \quad \text{e} \quad 180°-30°=150°.$$

Dunque, nella Fig. 29, $x$ e $x'$ sono le misure in radianti degli angoli di 30° e 180°−30° e quindi risulta:

$$x=\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x'=\pi-\frac{\pi}{6}.$$

Ma la funzione $y=\operatorname{sen} x$ è periodica con periodo $2\pi$; quindi risulterà

$$\operatorname{sen} x=0{,}5$$

anche in corrispondenza ai seguenti valori di $x$:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi \quad \text{e} \quad x_1'=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi=3\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$x_2=\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi \quad \text{e} \quad x_2'=\pi-\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=5\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

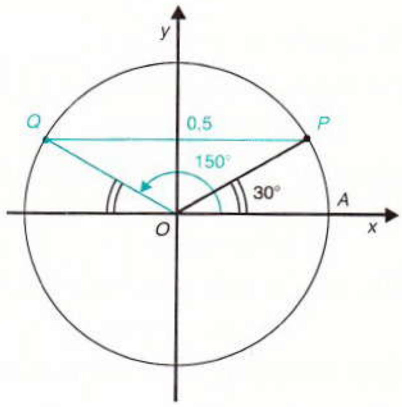



Fig. 30

In conclusione, tutti i valori di $x$ per i quali risulta

$$\operatorname{sen} x=0{,}5$$

sono espressi nella forma seguente:

$$x_k=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{e} \quad x_k'=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

ossia

$$x_k=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x_k'=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}. \tag{1}$$

Misurando gli angoli in gradi, scriveremo, invece:

$$x_k=30°+k360° \quad \text{e} \quad x_k'=180°-30°+k360°$$

ossia

$$x_k=2k180°+30° \quad \text{e} \quad x_k'=(2k+1)180°-30°. \tag{2}$$

È importante osservare che fra tutti gli angoli, indicati nelle formule (1) o (2), uno soltanto ($x=\frac{\pi}{6}$ o $x=30°$) può essere determinato con l'uso del calcolatore, dato che risulta:

$$\operatorname{arcsen} 0{,}5=\frac{\pi}{6}$$

o, anche,

$$\operatorname{arcsen} 0{,}5=30°.$$

Possiamo ora generalizzare il procedimento seguito. Per risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x = m, \quad \text{con} \quad -1 \leqq m \leqq 1,$$

si procede così:

— si determina $\alpha = \operatorname{arcsen} m$,
— si scrivono tutte le soluzioni nella forma

$$x_k = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x'_k = (2k+1)\pi - \alpha$$

(dove $k$ può assumere tutti i valori interi).
Se, invece, risulta:

$$m < -1 \quad \text{o} \quad m > 1$$

l'equazione non ha soluzioni.

### B) Equazione $\cos x = m$

Per risolvere l'equazione

$$\cos x = m, \quad \text{con} \quad -1 \leqq m \leqq 1,$$

possiamo seguire un procedimento analogo a quello appena visto (Fig. 31): si trova un valore $\alpha$ che soddisfa l'equazione calcolando

$$\alpha = \arccos m.$$

Ma, se $\alpha$ è una soluzione, anche

$$\alpha + 2\pi, \quad \alpha + 4\pi, \ \ldots$$

sono soluzioni, dato che la funzione

$$y = \cos x$$

è periodica con periodo $2\pi$. Scriveremo dunque:

$$x_k = \alpha + 2k\pi.$$

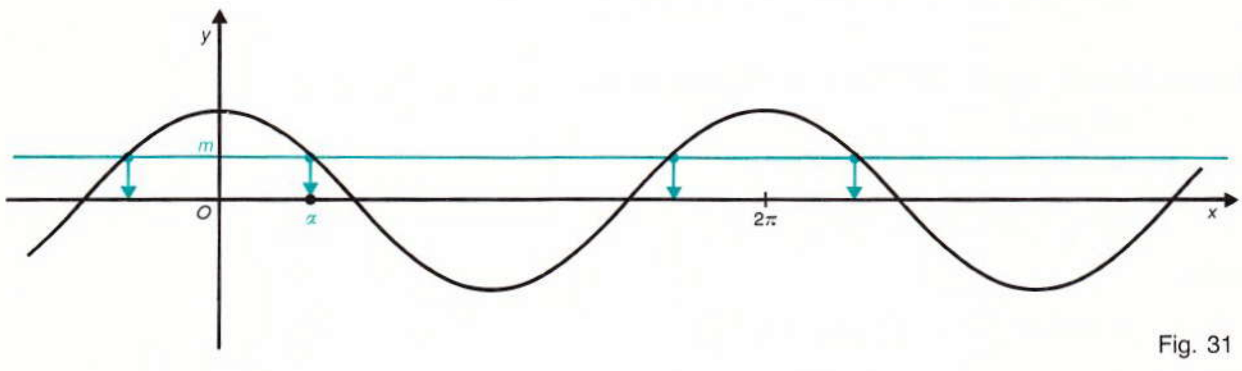
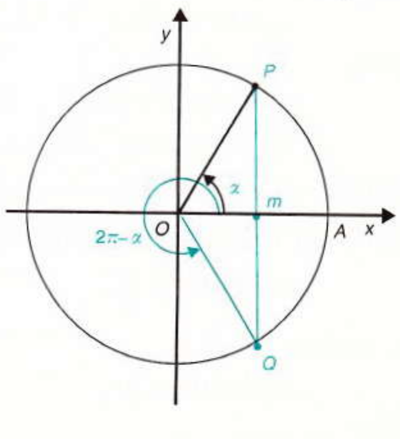



Fig. 31

Fig. 32




Sappiamo inoltre (Fig. 32) che gli angoli $\alpha$ e $2\pi - \alpha$ hanno lo stesso coseno; perciò abbiamo ancora le infinite soluzioni seguenti:

$$x'_1 = 2\pi - \alpha$$
$$x'_2 = 2\pi - \alpha + 2\pi = 4\pi - \alpha$$
$$x'_3 = 2\pi - \alpha + 4\pi = 6\pi - \alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si tratta di soluzioni che possiamo scrivere nella forma:

$$x'_k = 2k\pi - \alpha.$$

Riassumendo, l'equazione

$$\cos x = m, \quad \text{con} \quad -1 \leqq m \leqq 1,$$

ha infinite soluzioni date da:

$$x_k=2k\pi+\alpha \quad \text{e} \quad x'_k=2k\pi-\alpha,$$

dove $k$ può assumere qualunque valore intero e risulta:

$$\alpha=\arccos m.$$

Se, invece, risulta:

$$m<-1 \quad \text{o} \quad m>1,$$

l'equazione non ha soluzioni.

### C) Equazione $\operatorname{tg} x=m$

Osservando la Fig. 33 si capisce che una soluzione dell'equazione

$$\operatorname{tg} x=m$$

è data da:

$$\alpha=\operatorname{arctg} m.$$

Ma, poiché la funzione tangente è periodica di periodo $\pi$, ci sono infiniti valori $x$ la cui tangente vale $m$. Questi valori sono:

$$x=\alpha,$$
$$x_1=\alpha+\pi,$$
$$x_2=\alpha+2\pi,$$
$$x_3=\alpha+3\pi,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Possiamo dunque riunire tutte le soluzioni dell'equazione $\operatorname{tg} x=m$ nell'unica formula seguente:

$$x_k=\alpha+k\pi,$$

dove $k$ può assumere qualunque valore intero e risulta:

$$\alpha=\operatorname{arctg} m.$$

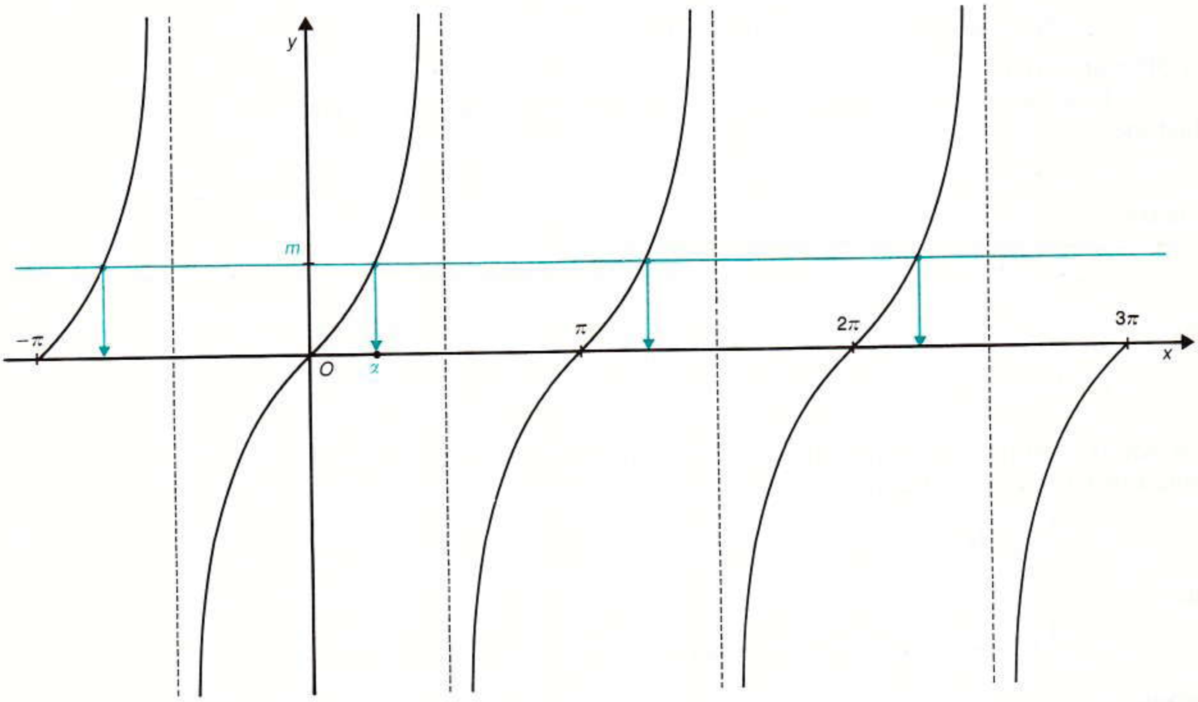



Fig. 33

Riassumendo, ecco le equazioni che sappiamo risolvere e le relative soluzioni:

| equazione | soluzioni | valore di $\alpha$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen} x=m$ con $-1\leq m\leq 1$ | $\begin{cases} x_k=2k\pi+\alpha \\ x'_k=(2k+1)\pi-\alpha \end{cases}$ | $\alpha=\operatorname{arcsen} m$ |
| $\cos x=m$ con $-1\leq m\leq 1$ | $\begin{cases} x_k=2k\pi+\alpha \\ x'_k=2k\pi-\alpha \end{cases}$ | $\alpha=\arccos m$ |
| $\operatorname{tg} x=m$ | $x_k=\alpha+k\pi$ | $\alpha=\operatorname{arctg} m$ |

## 6. Equazioni del tipo $\operatorname{sen}\omega(x+\varphi)=m$, $\cos\omega(x+\varphi)=m$, $\operatorname{tg}\omega(x+\varphi)=m$

Esaminiamo prima di tutto un caso numerico. L'equazione:

$$\operatorname{sen} 2(x+60°)=0{,}5. \qquad (1)$$

Dato che sappiamo risolvere equazioni del tipo

$$\operatorname{sen} x=m,$$

viene in mente di ricondursi al caso già studiato, introducendo una nuova incognita $z$, legata alla $x$ dalla relazione:

$$z=2(x+60°).$$

In questo modo l'equazione (1) diventa:

$$\operatorname{sen} z=0{,}5,$$

che come abbiamo visto nel paragrafo precedente, ha le soluzioni

$$z_k=30°+2k180° \quad \text{e} \quad z'_k=150°+2k180°,$$

con $30°=\operatorname{arcsen} 0{,}5$.

Calcoliamo ora i valori di $x$ a partire da quelli di $z$. Dalla relazione

$$z=2(x+60°)$$

si ricava:

$$\frac{1}{2}z=x+60°$$

ossia:

$$x=\frac{1}{2}z-60°.$$

Si trovano dunque le soluzioni $x_k$ e $x'_k$ dell'equazione (1) assegnata, svolgendo i seguenti calcoli:

a) $$x_k=\frac{1}{2}z_k-60°$$

ossia:

$$x_k=\frac{1}{2}(30°+2k180°)-60°=15°+k180°-60°$$

e infine:

$$x_k=-45°+k180°;$$

b) $x'_k = \frac{1}{2} z'_k - 60°$

ossia:

$$x'_k = \frac{1}{2}(150° + 2k180°) - 60° = 75° + k180° - 60°$$

e infine:

$$x'_k = 15° + k180°.$$

Si conclude che l'equazione

$$\operatorname{sen} 2(x + 60°) = 0{,}5$$

ha le soluzioni:

$$x_k = -45° + k180° \quad \text{e} \quad x'_k = 15° + k180°.$$

Il procedimento che abbiamo seguito ha carattere generale e può essere ripetuto sempre quando si deve risolvere un'equazione del tipo:

$$\operatorname{sen} \omega(x + \varphi) = m, \quad \text{con} \quad -1 \leqq m \leqq 1.$$

Ecco come si procede.

I) Si introduce una nuova incognita $z$ legata alla $x$ dalla relazione:

$$z = \omega(x + \varphi);$$

si riduce così l'equazione assegnata alla forma:

$$\operatorname{sen} z = m.$$

II) Si risolve l'equazione

$$\operatorname{sen} z = m,$$

ottenendo le soluzioni:

$$z_k = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad z'_k = (2k + 1)\pi - \alpha,$$

con

$$\alpha = \operatorname{arcsen} m.$$

III) Dalla relazione

$$z = \omega(x + \varphi)$$

si ricava:

$$x = \frac{1}{\omega} z - \varphi$$

e quindi:

$$x_k = \frac{1}{\omega} z_k - \varphi \quad \text{e} \quad x'_k = \frac{1}{\omega} z'_k - \varphi.$$

Sostituendo i valori di $z$, che sono stati calcolati nel punto II, si trovano le soluzioni:

$$x_k = \frac{1}{\omega}(2k\pi + \alpha) - \varphi \quad \text{e} \quad x'_k = \frac{1}{\omega}[(2k + 1)\pi - \alpha] - \varphi.$$

Se, invece, è dato:

$$m > 1 \quad \text{o} \quad m < -1,$$

l'equazione non ha soluzione.

Possiamo ripetere questi ragionamenti per le equazioni

$$\cos \omega(x + \varphi) = m, \quad \text{con} \quad -1 \leqq m \leqq 1,$$

o anche

$$\operatorname{tg} \omega(x + \varphi) = m.$$

Si trovano così le soluzioni che riportiamo nella tabella seguente, insieme a quelle viste prima.

| equazione | soluzioni | valore di $\alpha$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\omega(x+\varphi)=m$ con $-1\leqq m\leqq 1$ | $\begin{cases} x_k=\frac{1}{\omega}(2k\pi+\alpha)-\varphi \\ x'_k=\frac{1}{\omega}[(2k+1)\pi-\alpha]-\varphi \end{cases}$ | $\alpha=\operatorname{arcsen} m$ |
| $\cos\omega(x+\varphi)=m$ con $-1\leqq m\leqq 1$ | $\begin{cases} x_k=\frac{1}{\omega}(2k\pi+\alpha)-\varphi \\ x'_k=\frac{1}{\omega}(2k\pi-\alpha)-\varphi \end{cases}$ | $\alpha=\arccos m$ |
| $\operatorname{tg}\omega(x+\varphi)=m$ | $x_k=\frac{1}{\omega}(k\pi+\alpha)-\varphi$ | $\alpha=\operatorname{arctg} m$ |

## 7. Un'interpretazione grafica delle equazioni del tipo $\operatorname{sen}\omega(x+\varphi)=m$

La risoluzione delle equazioni studiate nel paragrafo precedente può essere visualizzata, basandosi sul grafico della sinusoide e sulle trasformazioni del piano. Vediamo, in particolare, qualche esempio numerico.

1) Consideriamo da un punto di vista grafico l'equazione

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5;$$

risolvere quest'equazione significa determinare le ascisse dei punti di intersezione della curva

$$y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \tag{1}$$

con la retta d'equazione

$$y=0{,}5.$$

Per tracciare il grafico della curva (1), basta traslare la sinusoide

$$y=\operatorname{sen} x$$

lungo l'asse delle $x$ di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra (Fig. 34).

La Fig. 35 suggerisce ora un'immediata considerazione grafica: si osserva che la retta

$$y=0{,}5$$

incontra la sinusoide

$$y=\operatorname{sen} x$$

nei punti $A$, $B$, $C$, ..., di cui possiamo trovare le coordinate, risolvendo l'equazione

$$\operatorname{sen} x=0{,}5;$$

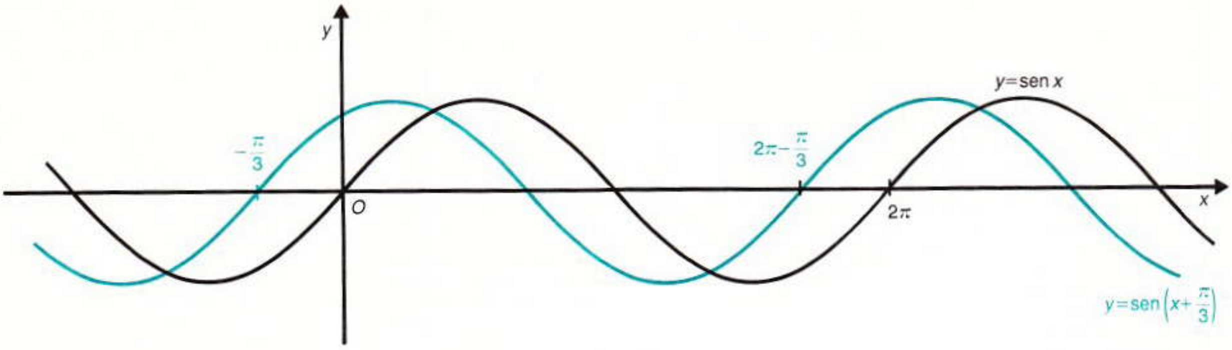



Fig. 34

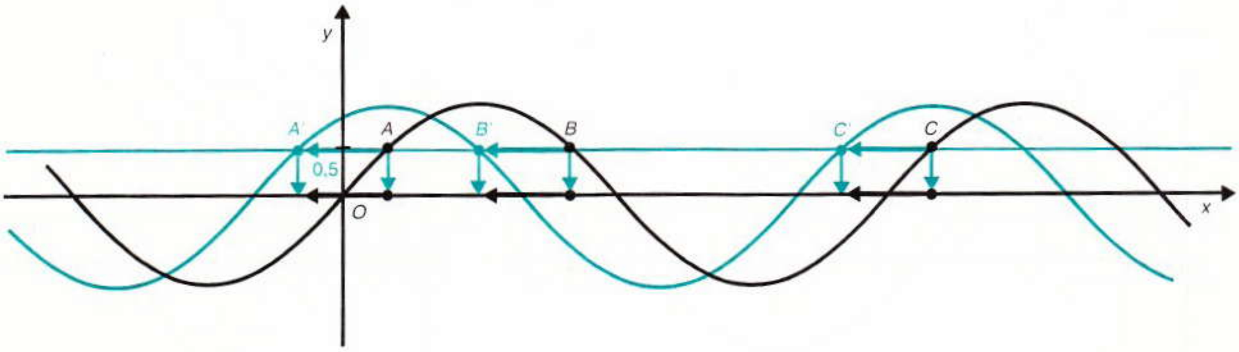



Fig. 35

quando si trasla la sinusoide di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra, anche i punti di intersezione vengono traslati, e, così, troviamo $A'$, $B'$, $C'$, invece di $A$, $B$, $C$. Perciò le soluzioni dell'equazione

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5 \tag{2}$$

sono le soluzioni della

$$\text{sen}\, x=0{,}5$$

traslate di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra e, cioè, diminuite di $\frac{\pi}{3}$.

È chiaro dunque che le soluzioni della (2) sono:

$$x_k=\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)-\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x_k'=\left(\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)-\frac{\pi}{3}.$$

2) Interpretiamo ora dal punto di vista grafico l'equazione

$$\text{sen}\, 2x=0{,}5,$$

tracciando il grafico della curva

$$y=\text{sen}\, 2x \tag{3}$$

e della retta d'equazione

$$y=0{,}5.$$

Per tracciare il grafico della curva (3), basta operare sulla sinusoide

$$y=\text{sen}\, x$$

una contrazione lungo l'asse delle $x$ in modo da dimezzare le ascisse (vedi p. 90). Si ottiene la Fig. 36.

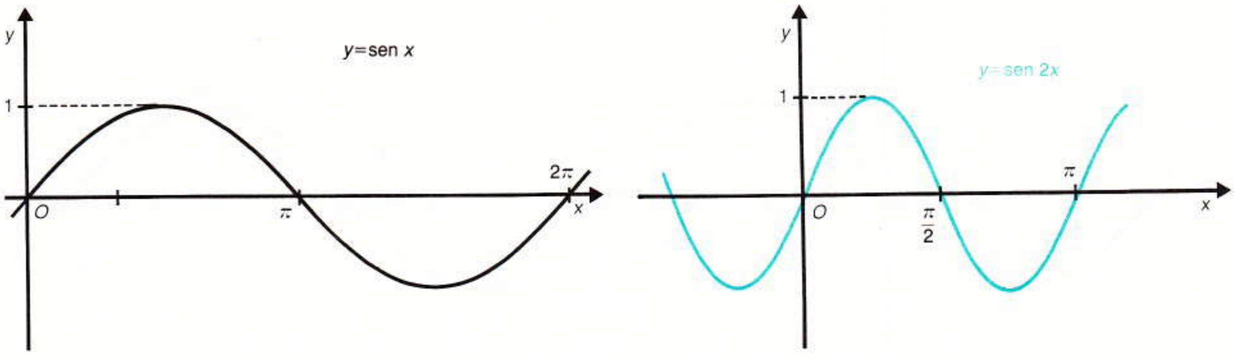



Fig. 36

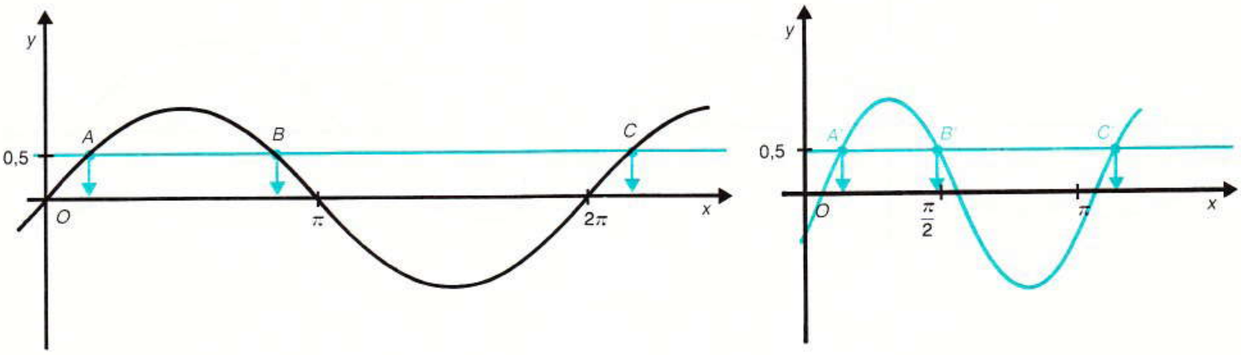



Fig. 37

Anche questa volta è una figura — la Fig. 37 — a suggerire un'osservazione: la retta d'equazione

$$y=0{,}5$$

incontra la sinusoide nei punti $A$, $B$, $C$, ...; quando operiamo la contrazione lungo l'asse delle $x$, dimezzano anche le ascisse dei punti di intersezione. Perciò le soluzioni dell'equazione

$$\operatorname{sen} 2x=0{,}5 \tag{4}$$

sono le soluzioni dell'equazione

$$\operatorname{sen} x=0{,}5$$

divise per 2.

Le soluzioni dell'equazione (4) sono perciò le seguenti:

$$x_k=\frac{\pi}{12}+k\pi \quad \text{e} \quad x_k'=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}+k\pi.$$

3) Interpretiamo infine dal punto di vista grafico l'equazione

$$\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5$$

che abbiamo risolto nel paragrafo precedente.

Bisognerà tracciare il grafico della curva

$$y=\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \tag{5}$$

e della retta

$$y=0{,}5.$$

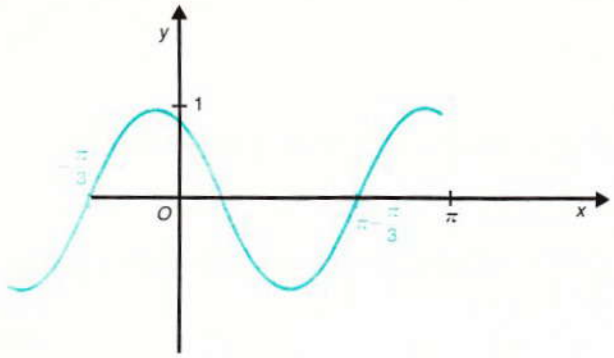



Fig. 38

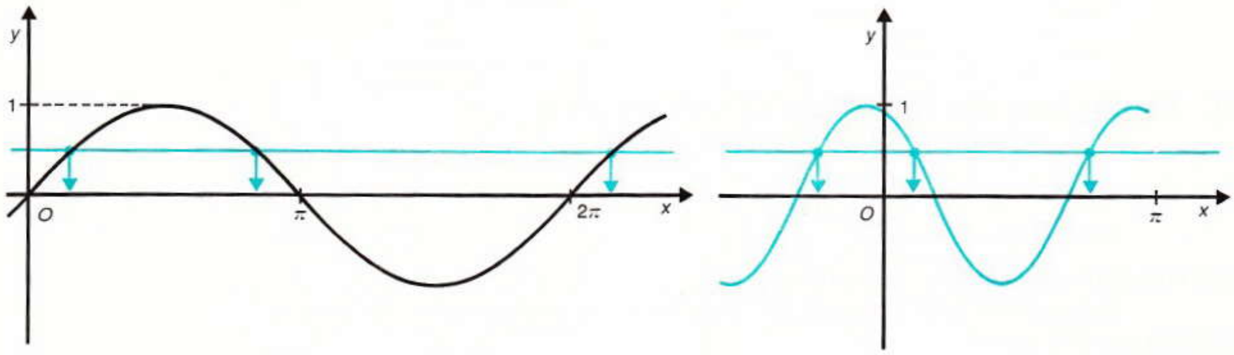



Fig. 39

Per tracciare il grafico della curva (5), si operano sulla sinusoide

$$y=\operatorname{sen} x$$

le seguenti trasformazioni:

— una contrazione lungo l'asse delle $x$, che dimezza le ascisse,

— una traslazione lungo lo stesso asse di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra.

Si ottiene il grafico di Fig. 38.

La Fig. 39 fa capire che le ascisse dei punti di intersezione della retta con la sinusoide vengono dimezzate e diminuite di $\frac{\pi}{3}$, quando la sinusoide viene contratta e traslata. Dunque le soluzioni di

$$\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5$$

sono:

$$x_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)-\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x_k'=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)-\frac{\pi}{3}.$$

Ritroviamo così, con un procedimento di tipo geometrico, le stesse soluzioni che avevamo trovato per via algebrica.

Le considerazioni ora svolte si possono ripetere per tutte le equazioni del tipo

$$\operatorname{sen} \omega(x+\varphi)=m,$$

tenendo presente che, a partire dalla sinusoide

$$y=\operatorname{sen} x,$$

si disegna:

— la curva d'equazione

$$y = \operatorname{sen}(x+\varphi),$$

operando lungo l'asse delle $x$ una traslazione di $\varphi$ verso sinistra;

— la curva d'equazione

$$y = \operatorname{sen} \omega x,$$

operando lungo l'asse delle $x$ un'affinità, che divide le ascisse per $\omega$;

— la curva d'equazione

$$y = \operatorname{sen} \omega(x+\varphi), \tag{6}$$

operando un'affinità seguita da una traslazione.

Le soluzioni dell'equazione (6) sono le intersezioni della curva disegnata con la retta

$$y = m.$$

## 8. Equazioni del tipo $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Per risolvere le equazioni del tipo

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c \tag{1}$$

riprendiamo un risultato esposto a p. 110.

Basandosi sulle formule di addizione, si era trovato che un'espressione del tipo

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x,$$

cioè un polinomio di 1° grado, omogeneo nelle variabili $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, si poteva esprimere nella forma:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi).$$

Questa osservazione permette di trasformare l'equazione (1) nell'equazione:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = c,$$

ossia

$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{r};$$

così ci si riduce ad un tipo di equazione che sappiamo risolvere.

Resta tuttavia un problema insoluto: come determinare $r$ e $\varphi$ in modo che risulti

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = r \operatorname{sen}(x+\varphi)\,?$$

Esaminiamo prima di tutto un caso numerico: l'equazione

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 1.$$

Cerchiamo di esprimere il binomio

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$$

nella forma:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi).$$

In base alle formule di addizione si ha:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = r \cos\varphi \operatorname{sen} x + r \operatorname{sen}\varphi \cos x;$$

dobbiamo perciò, determinare $r$ e $\varphi$ in modo che risulti:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = r \cos\varphi \operatorname{sen} x + r \operatorname{sen}\varphi \cos x.$$

È chiaro che l'uguaglianza richiesta si verifica solo se risulta:

$$\begin{cases} r\cos\varphi=\sqrt{3} & (2) \\ r\,\text{sen}\,\varphi=1. & (3) \end{cases}$$

Queste due condizioni permettono di determinare $r$ e $\varphi$, purché si ricordino anche le due relazioni fondamentali:

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}=\text{tg}\,\varphi \tag{4}$$

$$\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \tag{5}$$

La relazione (4) suggerisce di dividere membro a membro le due relazioni (2) e (3); si ha:

$$\frac{r\,\text{sen}\,\varphi}{r\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

cioè:

$$\text{tg}\,\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La relazione (5) suggerisce di elevare al quadrato e poi sommare membro a membro le (2) e (3). Si ottiene:

$$(r\,\text{sen}\,\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2=1^2+(\sqrt{3})^2$$

da cui

$$r^2\,\text{sen}^2\varphi+r^2\cos^2\varphi=1+3$$

ossia

$$r^2(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi)=4$$

e infine

$$r^2=4.$$

Abbiamo così scritto le due condizioni in forma più semplice:

$$\begin{cases} \text{tg}\,\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ r^2=4. \end{cases}$$

È facile ora determinare $r$ e $\varphi$, ma bisogna tener presente che le operazioni svolte sulle condizioni (2) e (3) possono aver introdotto delle soluzioni estranee. Tuttavia è immediato verificare che i valori

$$r=\sqrt{4}=2, \qquad \varphi=\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

soddisfano le condizioni iniziali.

Possiamo concludere che risulta:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=2\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Così l'equazione assegnata

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=1$$

si trasforma nella:

$$2\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

ossia

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5,$$

che sappiamo risolvere.

Il procedimento ora esposto si può seguire in tutti i casi in cui sia assegnata un'equazione del tipo

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

Per risolvere quest'equazione la scriviamo nella forma:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = c.$$

Dobbiamo dunque cercare $r$ e $\varphi$ in modo che risulti:

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$$

ossia

$$r \cos\varphi \operatorname{sen} x + r \operatorname{sen}\varphi \cos x = a \operatorname{sen} x + b \cos x.$$

Osserviamo che l'uguaglianza si verifica se risulta:

$$\begin{cases} r\cos\varphi = a \\ r\operatorname{sen}\varphi = b; \end{cases}$$

tenendo presenti le due relazioni fondamentali (4) e (5), queste due condizioni si possono riscrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi} = \dfrac{b}{a} \\ (r\operatorname{sen}\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2 = a^2+b^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \\ r^2 = a^2+b^2. \end{cases}$$

Si ottengono così le due condizioni:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \\ r^2 = a^2+b^2 \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare:

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \\ r = \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Si conclude che l'equazione

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

si trasforma nella

$$r \operatorname{sen}(x+\varphi) = c,$$

purché si scelga

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

In questo modo siamo ricondotti a risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{r}$$

che è del tipo già noto.

## 9. Equazioni del tipo $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d$

Ci occuperemo ora di equazioni che hanno come primo membro un polinomio di 2° grado omogeneo nelle variabili $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Per risolvere queste equazioni, ricordiamo un'osservazione esposta a p. 114: le formule di duplicazione permettono di trasformare espressioni di 2° grado in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ in espressioni di 1° grado in $\operatorname{sen} 2x$ e $\cos 2x$.

Ci baseremo perciò sulle formule di duplicazione, che ora riscriviamo nella forma seguente:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Cominciamo ancora una volta studiando un esempio numerico: l'equazione

$$\cos^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Le formule di duplicazione conducono a riscrivere quest'equazione nella forma seguente:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = 1$$

ossia

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 1.$$

Ci si rende conto che il primo membro è diventato un'espressione del tipo:

$$a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x,$$

che possiamo scrivere (vedi p. 150) nella forma:

$$r \operatorname{sen}(2x+\varphi),$$

dove

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

e

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Risulta dunque:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 2\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

In definitiva, abbiamo trasformato l'equazione

$$\cos^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 1$$

nella

$$2\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

ossia

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5.$$

Scrivendo quest'ultima equazione nella forma

$$\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5,$$

riconosciamo che si tratta di un'equazione del tipo

$$\operatorname{sen}\omega(x+\varphi) = m,$$

che sappiamo risolvere (vedi paragrafo 6).

È immediato ora seguire lo stesso procedimento per risolvere qualunque equazione del tipo:

$$a\,\mathrm{sen}^2 x+b\,\mathrm{sen}\,x\cos x+c\cos^2 x=d.$$

Si procede così:

I) si trasforma il primo membro dell'equazione, basandosi sulle formule di duplicazione;

II) si trasforma ancora l'espressione ottenuta valendosi delle formule di addizione.

Si arriva così a scrivere l'equazione nella forma:

$$\mathrm{sen}\,(2x+\varphi)=m$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=m,$$

che è del tipo già risolto a p. 144.

## 10. Disequazioni goniometriche

Studieremo ora come varia il segno di alcune funzioni goniometriche, che più comunemente si incontrano nelle applicazioni. Consideriamo tre tipi di funzioni che abbiamo già incontrato nello studio delle equazioni. Ci baseremo perciò sulle nozioni introdotte nei paragrafi precedenti e, in particolare, sulle considerazioni grafiche svolte nel paragrafo 7 (p. 144).

### A) Segno di funzioni del tipo $y=a\,\mathrm{sen}\,x+b$

Cominciamo con un esempio numerico: studiare il segno della funzione

$$y=2\,\mathrm{sen}\,x-1.$$

Tracciamo prima di tutto il grafico della funzione assegnata, basandoci sul grafico di

$$y=\mathrm{sen}\,x,$$

rappresentato in Fig. 40 e operando le seguenti trasformazioni:

— uno stiramento lungo l'asse delle $y$, che raddoppia le ordinate (vedi p. 88); si ottiene la curva:

$$y=2\,\mathrm{sen}\,x,$$

rappresentata in Fig. 41;

— una traslazione lungo l'asse delle $y$ di 1 verso il basso, che sottrae 1 a tutte le ordinate (vedi p. 118); otteniamo in Fig. 42 il grafico della funzione assegnata.

Osservando la Fig. 43, si individuano subito gli archi (in nero) sopra l'asse delle $x$, gli archi (in colore) sotto l'asse delle $x$ e i punti di intersezione con l'asse delle $x$.

È chiaro che i punti di intersezione con l'asse delle $x$ hanno l'ordinata $y=0$, hanno, invece, ordinata $y>0$ i punti della curva che si trovano sopra l'asse delle $x$ e hanno ordinata $y<0$ i punti della curva che si trovano sotto l'asse delle $x$.

Si capisce così come il grafico disegnato in Fig. 43 permetta di studiare facilmente il segno della funzione

$$y=2\,\mathrm{sen}\,x-1.$$

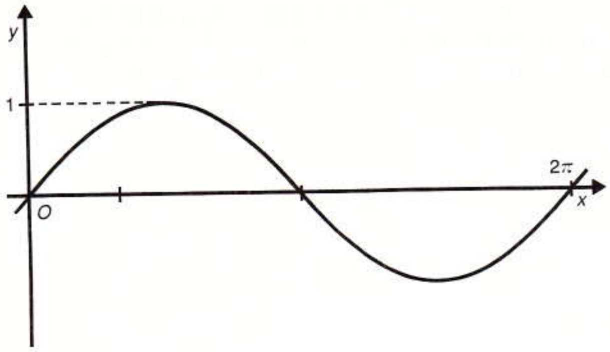



Fig. 40

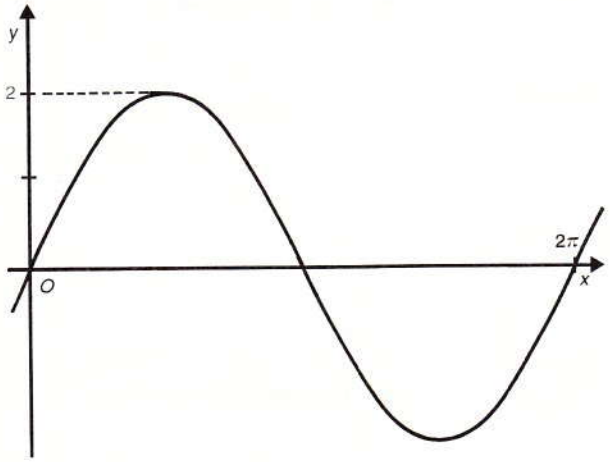



Fig. 41

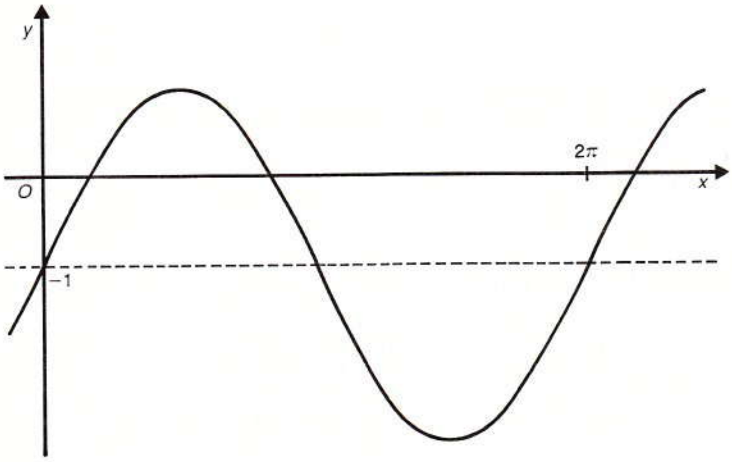



Fig. 42

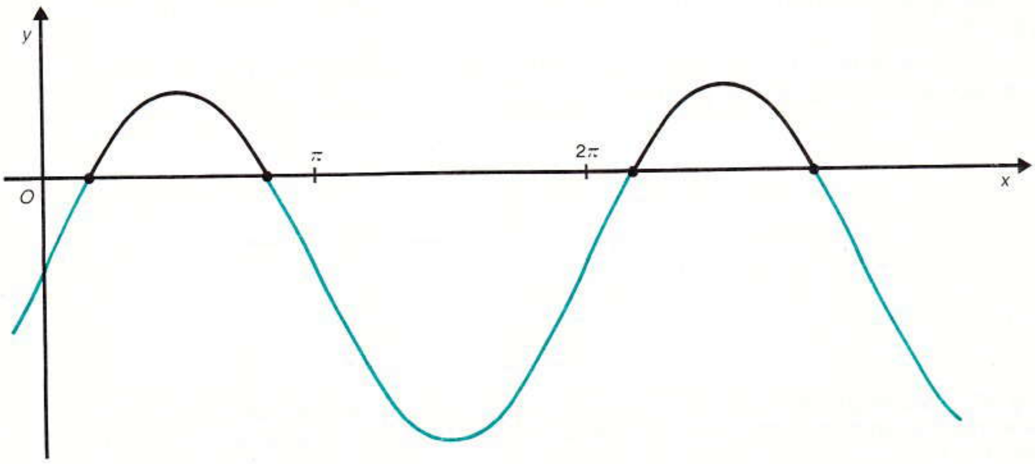



Fig. 43

Un'ultima osservazione: siccome la funzione è periodica di periodo $2\pi$, basterà studiarne il segno in un periodo, per esempio nell'intervallo $[0,2\pi]$. In Fig. 44 abbiamo riportato il grafico della funzione limitato a questo intervallo.

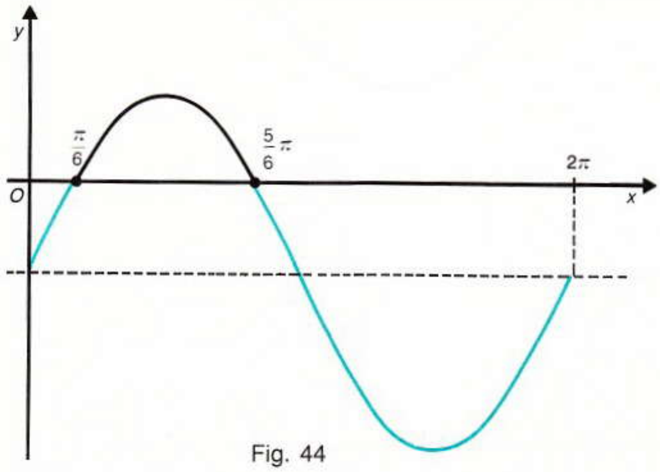



Fig. 44

Rimangono ora da calcolare le ascisse dei punti di intersezione della curva con l'asse delle $x$. Queste ascisse si trovano risolvendo l'equazione

$$2\,\text{sen}\,x-1=0$$

ossia

$$\text{sen}\,x=0{,}5$$

che, nell'intervallo $[0,2\pi]$, ha le soluzioni (vedi p. 139):

$$x=\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x'=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi.$$

Si ha dunque:

$y=0$, cioè $2\,\text{sen}\,x-1=0$ per $x=\frac{\pi}{6}$, $x'=\frac{5}{6}\pi$,

$y>0$, cioè $2\,\text{sen}\,x-1>0$ nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$

$y<0$, cioè $2\,\text{sen}\,x-1<0$ negli intervalli $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right)$.

Si usa spesso visualizzare questi risultati con uno schema come quello di Fig. 45.

Si conclude così che, per studiare il segno di una funzione, basta conoscerne il grafico e i punti di intersezione con l'asse delle $x$.

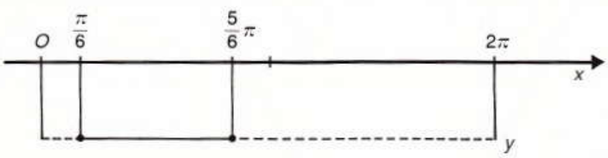



Fig. 45. Si disegna una linea continua sotto i valori di $x$ a cui corrispondono valori $y>0$, una linea tratteggiata sotto i valori di $x$ per cui risulta $y<0$, e si indicano con un pallino i valori di $x$ per cui $y=0$.

Il procedimento che abbiamo seguito è dunque valido per tutte le funzioni del tipo

$$y=a\operatorname{sen}x+b. \qquad (1)$$

In generale si procede nel modo seguente:

I) si traccia il grafico della funzione (1), a partire dalla sinusoide d'equazione

$$y=\operatorname{sen}x,$$

operando un'affinità ed una traslazione lungo l'asse delle $y$;

II) si risolve l'equazione

$$a\operatorname{sen}x+b=0,$$

cioè

$$\operatorname{sen}x=-\frac{b}{a};$$

III) si risolvono le disequazioni

$$a\operatorname{sen}x+b>0$$

e

$$a\operatorname{sen}x+b<0,$$

osservando gli archi di curva che si trovano sopra o sotto l'asse delle $x$.

È chiaro che un procedimento analogo può essere seguito per studiare il segno di funzioni del tipo

$$y=a\cos x+b$$

oppure

$$y=a\operatorname{tg}x+b.$$

### B) Segno di funzioni del tipo $y=a\operatorname{sen}x+b\cos x+c$

Esaminiamo prima di tutto un esempio numerico: la funzione

$$y=\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x-1.$$

Abbiamo già incontrato a p. 148 l'espressione

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x$$

ed abbiamo visto che risulta:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Si potrà quindi scrivere la funzione data nella forma

$$y=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1.$$

Per tracciarne il grafico, ci basiamo sempre sul grafico della sinusoide

$$y=\operatorname{sen}x$$

rappresentato in Fig. 46 ed operiamo le seguenti trasformazioni:

— lungo l'asse delle $y$ uno stiramento che raddoppia le ordinate ed una traslazione di $-1$; così si ottiene la curva d'equazione

$$y=2\operatorname{sen}x-1,$$

rappresentata in Fig. 47;

— lungo l'asse delle $x$ una traslazione di $\frac{\pi}{6}$ verso sinistra; così si ottiene proprio la curva d'equazione

$$y=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1,$$

rappresentata in Fig. 48.

Si tratta anche in questo caso di una sinusoide con periodo $2\pi$; basta quindi studiare il segno della funzione in un periodo, per esempio nell'intervallo $[0,2\pi]$.

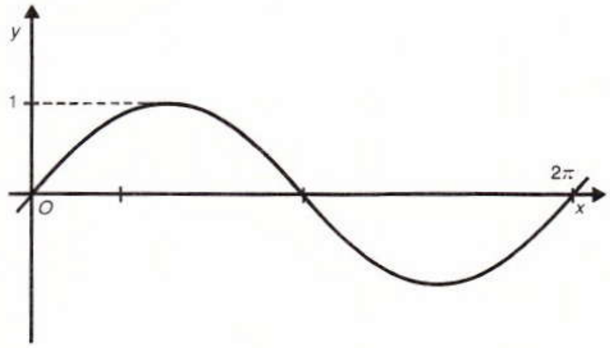



Fig. 46

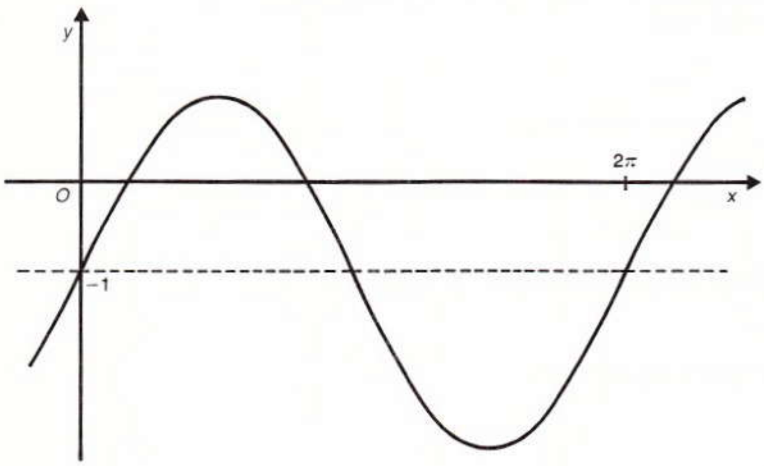



Fig. 47

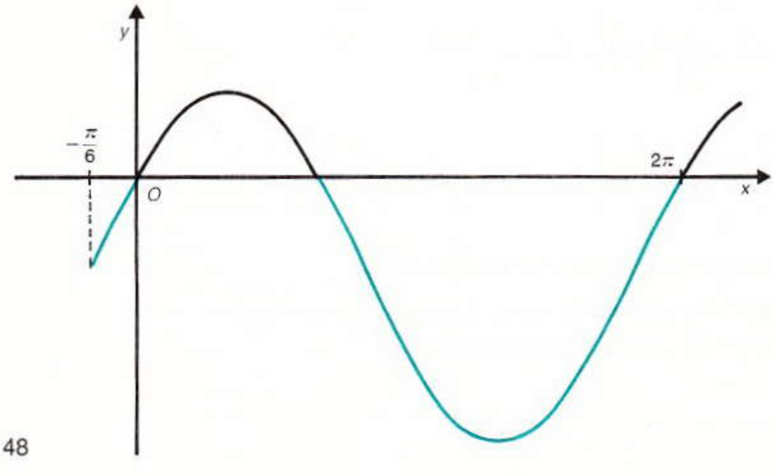



Fig. 48

Determiniamo ora i punti di intersezione della curva con l'asse delle $x$, risolvendo l'equazione

$$2\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0,$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5.$$

Nell'intervallo $[0,2\pi]$ si hanno le soluzioni seguenti (vedi p. 144):

$$x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

$$x'=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi-\frac{\pi}{6}=2\pi.$$

Concludendo, risulta:

$y=0$, cioè $2\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$ per $x=0$, $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=2\pi$

$y>0$, cioè $2\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1>0$ nell'intervallo $\left(0,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

$y<0$, cioè $2\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1<0$ nell'intervallo $\left(\frac{2}{3}\pi,\ 2\pi\right)$.

Questi risultati sono visualizzati nello schema di Fig. 49.

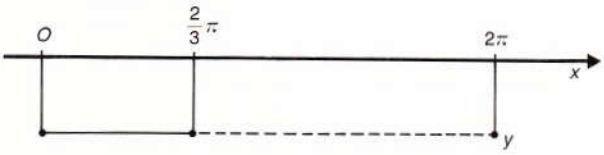



Fig. 49

I procedimenti seguiti hanno carattere generale e valgono per qualunque funzione del tipo:

$$y=a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x+c. \tag{2}$$

Lo studio del segno di queste funzioni si baserà dunque sui seguenti passi:

I) scrivere la funzione nella forma

$$y=r\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi)+c, \tag{3}$$

con $r=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\varphi=\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$;

II) disegnare il grafico della funzione (3);

III) risolvere l'equazione

$$r\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi)+c=0,$$

cioè

$$\mathrm{sen}\,(x+\varphi)=-\frac{c}{r};$$

IV) risolvere le disequazioni

$$r\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi)+c>0$$

e

$$r\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi)+c<0,$$

osservando gli archi di grafico che si trovano sopra o sotto l'asse delle $x$.

### C) Segno di funzioni del tipo $y=a\operatorname{sen}^2 x+b\operatorname{sen} x\cos x+c\cos^2 x+d$

Cominciamo ancora una volta con un esempio numerico: studiamo il segno della funzione

$$y=\cos^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen}^2 x-1.$$

Abbiamo già incontrato a p. 151 l'espressione

$$\cos^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen}^2 x$$

ed abbiamo visto che, valendosi delle formule di duplicazione, si ha:

$$\cos^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen}^2 x=2\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right).$$

Potremo così esprimere la funzione assegnata nella forma

$$y=2\operatorname{sen} 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1.$$

Tracciamo il grafico di questa funzione a partire dal grafico della sinusoide

$$y=\operatorname{sen} x,$$

disegnata in Fig. 50, operando le seguenti trasformazioni:

— lungo l'asse delle $y$, uno stiramento che raddoppia le ordinate ed una traslazione di $-1$;
— lungo l'asse delle $x$ una contrazione che dimezza le ascisse ed una traslazione di $-\frac{\pi}{12}$.

Si ottiene così il grafico di Fig. 51. Si tratta di una sinusoide di periodo $\pi$; basta quindi studiare il segno della funzione in un periodo, per esempio nell'intervallo $[0,\pi]$.

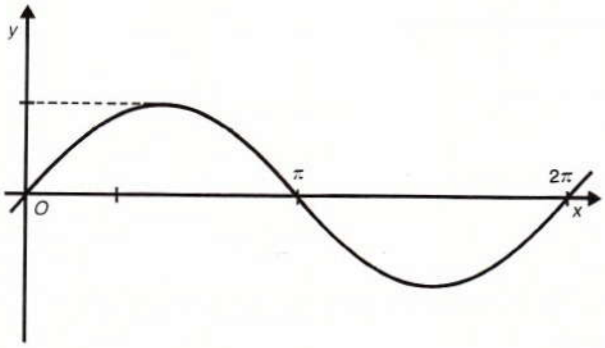


Fig. 50

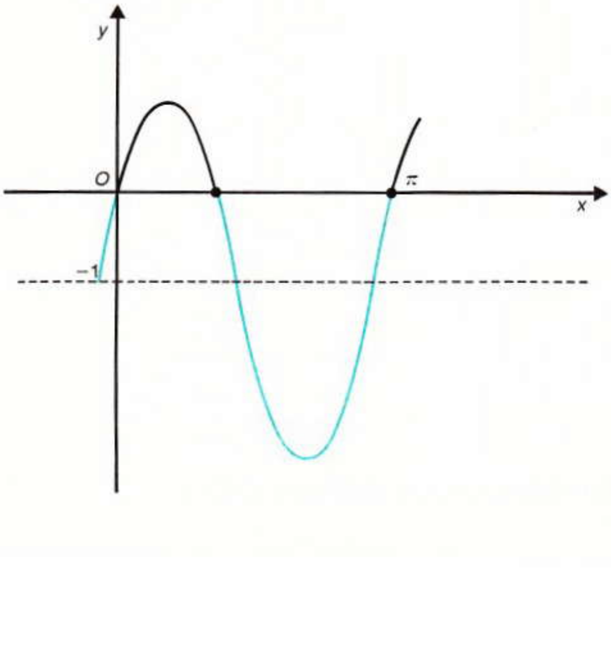


Fig. 51

Determiniamo infine i punti di intersezione della curva con l'asse delle $x$, risolvendo l'equazione:

$$2\,\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1=0,$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0{,}5,$$

che ha, nell'intervallo $[0,\pi]$, le soluzioni seguenti (vedi p. 144):

$$x=0,\quad x'=\frac{\pi}{3},\quad x_1=\pi.$$

Possiamo dunque concludere che risulta:

$$y=0,\quad \text{cioè}\quad 2\,\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1=0 \qquad \text{per } x=0,\ x=\frac{\pi}{3},\ x=\pi$$

$$y>0,\quad \text{cioè}\quad 2\,\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1>0 \qquad \text{nell'intervallo } \left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y<0,\quad \text{cioè}\quad 2\,\mathrm{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1<0 \qquad \text{nell'intervallo } \left(\frac{\pi}{3},\ \pi\right).$$

Questi risultati sono anche visualizzati nello schema di Fig. 52.

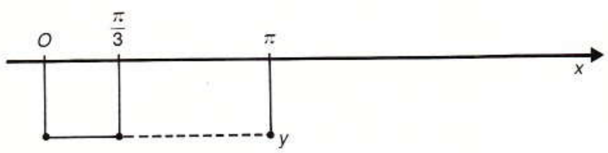



Fig. 52

Il procedimento ora illustrato può essere seguito per studiare il segno di qualunque funzione del tipo:

$$y=a\,\mathrm{sen}^2 x+b\,\mathrm{sen}\,x\cos x+c\cos^2 x+d. \tag{4}$$

In questi casi si procede nel modo seguente:

I) si scrive la funzione nella forma:

$$y=r\,\mathrm{sen}\,2(x+\varphi)+d; \tag{5}$$

II) si traccia il grafico della funzione (5);

III) si risolve l'equazione:

$$r\,\mathrm{sen}\,2(x+\varphi)+d=0,$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\,2(x+\varphi)=-\frac{d}{r};$$

IV) si risolvono le disequazioni:

$$r\,\mathrm{sen}\,2(x+\varphi)+d>0$$

e

$$r\,\mathrm{sen}\,2(x+\varphi)<0,$$

osservando gli archi di curva che si trovano sopra o sotto l'asse delle $x$.