5
Esercizi

Sulle funzioni inverse delle funzioni circolari

1. Tracciare il grafico di

$$y=\operatorname{arcsen} x, \quad y=-\operatorname{arcsen} x, \quad y=\operatorname{arcsen}(-x)$$

e dire se è pari o dispari la funzione

$$y=\operatorname{arcsen} x.$$

(*Confrontare il testo a p. 79*).

2. Ripetere l'esercizio 1, a partire dalla funzione

$$y=\arccos x.$$

3. Ripetere l'esercizio 1, a partire dalla funzione

$$y=\operatorname{arctg} x.$$

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 4 al n. 8, senza usare il calcolatore tascabile.

4. $\operatorname{arcsen} 1$ e $\arccos 1$

5. $\operatorname{arcsen} 0$ e $\arccos 0$

6. $\operatorname{arcsen}(-1)$ e $\arccos(-1)$

7. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

8. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ e $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

9. Dimostrare che, per qualunque $x\in[-1,1]$, risulta

$$\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 10 al n. 13 senza usare il calcolatore tascabile.

10. $\arccos 1$ e $\arccos(-1)$

11. $\arccos\frac{1}{2}$ e $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

12. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

13. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14. Dimostrare che, per qualunque $x\in[-1,1]$, risulta

$$\arccos x+\arccos(-x)=\pi.$$

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 15 al n. 19, usando il calcolatore tascabile, quando è indispensabile.

15. $\operatorname{arctg} 0$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}(-1)$

16. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ e $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

17. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

18. $\operatorname{arctg} 0{,}001$ e $\operatorname{arctg}(-0{,}001)$

19. $\operatorname{arctg} 10$ e $\operatorname{arctg}(-10)$

20. Dimostrare che, per qualunque x, risulta

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(-x)=0.$$

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 21 al n. 25, usando il calcolatore tascabile, quando è indispensabile.

21. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

22. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} 0{,}98)$; $\operatorname{sen}[\operatorname{arcsen}(-0{,}98)]$

23. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 0)$; $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\pi)$; $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\pi)$

24. $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$; $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{9}{4}\pi\right)$

25. $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi\right)$; $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi\right)$

26. Determinare per quali valori di x risultano vere le seguenti due uguaglianze

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)=x$
(b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)=x$.

27. Alcuni manuali per l'uso del calcolatore tascabile consigliano il seguente metodo per passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti: dato l'angolo α, misurato in gradi, calcolare

$\operatorname{sen}\alpha°$;

predisporre quindi il calcolatore a misurare gli angoli in radianti e premere la sequenza di tasti

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SEN}}$

Questo metodo è sempre valido?

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 28 al n. 32, usando il calcolatore tascabile, quando è indispensabile.

28. $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

29. $\cos(\arccos 1)$; $\cos[\arccos(-1)]$

30. $\cos(\arccos 0{,}02)$; $\cos[\arccos(-0{,}02)]$

31. $\arccos(\cos 0)$; $\arccos(\cos 2\pi)$; $\arccos(\cos 4\pi)$

32. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$; $\arccos\left(\cos\frac{5}{3}\pi\right)$; $\arccos\left(\cos\frac{7}{3}\pi\right)$

32. Determinare per quali valori di x risultano vere le seguenti due uguaglianze:

(a) $\cos(\arccos x)=x$
(b) $\arccos(\cos x)=x$.

Calcolare il valore delle espressioni proposte negli esercizi dal n. 33 al n. 37, usando il calcolatore tascabile, quando è indispensabile.

33. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)$; $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-1)]$

34. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$; $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})]$

35. $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} 0]$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi)$

36. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi\right)$

37. $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right)$

38. Determinare per quali valori di x risultano vere le seguenti due uguaglianze:

(a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$

(b) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$.

Spesso i calcolatori tascabili si basano sulla funzione

$$y=\operatorname{arctg} x$$

per trattare problemi trigonometrici. Si comprende il motivo della scelta se si pensa che $y=\operatorname{arctg} x$ è definita per qualunque x reale, mentre $y=\operatorname{arcsen} x$ e $y=\arccos x$ sono definite solo per $x \in[-1,1]$.
La risoluzione degli esercizi dal n. 39 al n. 44 conduce proprio ad impadronirsi di alcuni fra i procedimenti più comunemente seguiti nella programmazione.

39. Verificare che risulta

$$\pi=4 \operatorname{arctg} 1.$$

40. Nella risoluzione dei triangoli succede spesso di dover determinare l'ampiezza in radianti di un angolo α, conoscendo

$$\operatorname{sen}\alpha=x.$$

Dato che α è l'angolo interno di un triangolo, risulta certamente

$$0\leq\alpha\leq\pi,$$

e, dunque,

$$0\leq x\leq 1.$$

Per determinare l'ampiezza α, si dovrebbe calcolare

$$\alpha=\operatorname{arcsen} x,$$

ottenendo solo un valore

$$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}.$$

(Confrontare con gli esercizi del cap. 2, pp. 212-222).
Verificare che si ottiene l'angolo acuto α, anche calcolando

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Ricordare che, dalle due relazioni fondamentali ottenute a p. 37, si ha:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}=\ldots).$$

41. Sempre nella risoluzione dei triangoli, accade di dover determinare l'ampiezza di un angolo α, conoscendo

$$\cos\alpha=x.$$

Essendo α l'angolo interno di un triangolo, si ha

$$0\leq\alpha\leq\pi,$$

si determina perciò l'ampiezza α calcolando

$$\alpha=\arccos x.$$

Si ottiene in tal modo

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad 0 \le x \le 1$$

e

$$\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi \quad \text{se} \quad -1 \le x \le 0.$$

Verificare che si può determinare l'angolo α anche calcolando

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Tenere presente l'esercizio n. 9 e l'esercizio n. 40).

42. Il problema di determinare l'angolo α di un triangolo conoscendo

$$\cos \alpha = x$$

e basandosi sulla funzione

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

si può risolvere anche a partire dalla relazione fondamentale

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}.$$

Quali inconvenienti ha questo procedimento?

43. Servirsi del calcolatore tascabile per verificare la validità delle formule, trovate negli esercizi 40 e 41, per valori di x molto vicini a 1. Ecco come si può procedere: si considera il caso in cui è noto

$$\operatorname{sen} \alpha = x,$$

e si scelgono i seguenti valori di x:

$$x = 0{,}99999$$
$$x = 0{,}999999$$
$$x = 0{,}9999999.$$

Determinare α in due modi:

1) calcolando

$$\alpha = \operatorname{arcsen} x,$$

2) calcolando

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Confrontare i risultati ottenuti.

44. Ripetere l'esercizio 43, a partire dal caso in cui è noto

$$\cos \alpha = x.$$

45. Definire la funzione

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

inversa della funzione

$$y = \operatorname{ctg} x$$

e tracciare il grafico (vedere esercizi p. 256).

46. Dimostrare che risulta

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Sulle equazioni

Nelle pagine seguenti presentiamo una larga scelta di esercizi su equazioni trigonometriche, formule e problemi di geometria per permettere agli insegnanti di preparare adeguatamente gli allievi ad un esame finale, che, purtroppo, si svolge spesso su tale tipo di tecnicismo. Ma — è chiaro — i giovani non debbono uscire dalle scuole secondarie superiori convinti che capire la matematica consista nel saper risolvere problemi artificiosi o architettati.
Ci auguriamo che l'atteso rinnovamento dei programmi ridimensioni adeguatamente l'importanza di questi argomenti.

Equazioni del tipo sen $x=m$, cos $x=m$, tg $x=m$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 47 al n. 76, tenendo presenti le considerazioni esposte nel testo (pp. 138-142). Esprimere gli angoli sia in gradi, che in radianti.

47. $\operatorname{sen} x=0$; $\operatorname{sen} x=1$; $\operatorname{sen} x=-1$

48. $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{2}$

49. $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{sen} x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

50. $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{sen} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

51. $\operatorname{sen} x=0{,}998$; $\operatorname{sen} x=-0{,}998$

52. $\operatorname{sen} x=0{,}002$; $\operatorname{sen} x=-0{,}002$

53. $\operatorname{sen} x=10^{-7}$; $\operatorname{sen} x=-10^{-7}$

54. $\operatorname{sen} x=0{,}9999999$; $\operatorname{sen} x=-0{,}9999999$

55. $\operatorname{sen} x=\frac{5}{7}$; $\operatorname{sen} x=-\frac{5}{7}$

56. $\operatorname{sen} x=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

57. $\cos x=0$; $\cos x=1$; $\cos x=-1$

58. $\cos x=\frac{1}{2}$; $\cos x=-\frac{1}{2}$

59. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

60. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

61. $\cos x=0{,}995$; $\cos x=-0{,}995$

62. $\cos x=0{,}005$; $\cos x=-0{,}005$

63. $\cos x=10^{-8}$; $\cos x=-10^{-8}$

64. $\cos x=0{,}9999999$; $\cos x=-0{,}9999999$

65. $\cos x=-\frac{3}{4}$; $\cos x=-\frac{3}{4}$

66. $\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

67. $\operatorname{tg} x=0$; $\operatorname{tg} x=1$; $\operatorname{tg} x=-1$

68. $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$

69. $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

70. $\operatorname{tg} x=0{,}001$; $\operatorname{tg} x=-0{,}001$

71. $\operatorname{tg} x=10^{-7}$; $\operatorname{tg} x=-10^{-7}$

72. $\operatorname{tg} x=10$; $\operatorname{tg} x=-10$

73. $\operatorname{tg} x=100$; $\operatorname{tg} x=-100$

74. $\operatorname{tg} x=10.000$; $\operatorname{tg} x=-10.000$

75. $\operatorname{tg} x=10^{6}$; $\operatorname{tg} x=-10^{6}$

76. $\operatorname{tg} x=10^{8}$; $\operatorname{tg} x=-10^{8}$

77. Risolvere le equazioni seguenti, valendosi del calcolatore tascabile:

$$\operatorname{tg} x=1{,}1\cdot 10^{8}$$
$$\operatorname{tg} x=1{,}14\cdot 10^{8}$$
$$\operatorname{tg} x=1{,}144\cdot 10^{8}$$
$$\operatorname{tg} x=1{,}145\cdot 10^{8}.$$

Che cosa si osserva?

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 78 al n. 83, tenendo presenti i risultati degli esercizi n. 45 e 46.

78. $\operatorname{ctg} x=0$; $\operatorname{ctg} x=1$; $\operatorname{ctg} x=-1$

79. $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$

80. $\operatorname{ctg} x=0{,}01$; $\operatorname{ctg} x=-0{,}01$

81. $\operatorname{ctg} x=10^{-6}$; $\operatorname{ctg} x=-10^{-6}$

82. $\operatorname{ctg} x=10$; $\operatorname{ctg} x=-10$

83. $\operatorname{ctg} x=10^{8}$; $\operatorname{ctg} x=-10^{8}$

84. Risolvere l'equazione

$$2 \operatorname{sen} x-1=0.$$

Introducendo una nuova incognita z, legata alla x dalla relazione

$$z=\operatorname{sen} x, \tag{1}$$

l'equazione data diventa

$$2z-1=0.$$

Otteniamo così un'equazione algebrica di 1° grado che ha come soluzione il valore

$$z=\frac{1}{2}.$$

Per ottenere, poi, i valori di x, consideriamo la relazione (1), e risolviamo l'equazione

$$\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$$

mediante lo stesso procedimento valido per gli esercizi dal n. 47 al n. 56.
Si può seguire questo procedimento per risolvere qualunque equazione del tipo

$$a \operatorname{sen} x+b=0;$$

da questa equazione, ponendo

$$z=\operatorname{sen} x,$$

si passa alla

$$az+b=0.$$

Si trova così la soluzione

$$z=-\frac{b}{a},$$

e quindi, per determinare gli angoli x richiesti, ci si riduce a risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x=-\frac{b}{a}.$$

In modo del tutto analogo si risolvono equazioni del tipo

$$a \cos x+b=0$$

(valendosi dell'incognita

$$z=\cos x)$$

o

$$a \operatorname{tg} x+b=0$$

(valendosi dell'incognita

$$z=\operatorname{tg} x).$$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 85 al n. 94, esprimendo gli angoli sia in gradi che in radianti.

85. $2 \operatorname{sen} x+1=0$; $2 \cos x+1=0$; $2 \operatorname{tg} x+1=0$

86. $-2 \operatorname{sen} x+1=0$; $-2 \cos x+1=0$; $-2 \operatorname{tg} x+1=0$

87. $\sqrt{2} \operatorname{sen} x-1=0$; $\sqrt{2} \cos x-1=0$; $\sqrt{2} \operatorname{tg} x-1=0$

88. $\sqrt{3} \operatorname{sen} x+1=0$; $\sqrt{3} \cos x+1=0$; $\sqrt{3} \operatorname{tg} x+1=0$

89. $\frac{2}{3}\operatorname{sen}x+\frac{3}{4}=0$; $\frac{2}{3}\cos x+\frac{3}{4}=0$; $\frac{2}{3}\operatorname{tg}x+\frac{3}{4}=0$

90. $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}x-1=0$; $-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x-1=0$; $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x-1=0$

91. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x=0$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}x=0$

92. $0{,}02\operatorname{sen}x+0{,}01=0$; $0{,}02\cos x+0{,}01=0$; $0{,}02\operatorname{tg}x+0{,}01=0$

93. $10^4\operatorname{sen}x-10^3=0$; $10^4\cos x-10^3=0$; $10^4\operatorname{tg}x-10^3=0$

94. $-10^{-3}\operatorname{sen}x+10^{-4}=0$; $-10^{-3}\cos x+10^{-4}=0$; $-10^{-3}\operatorname{tg}x+10^{-4}=0$

95. Risolvere l'equazione

$$\cos^2 x-1=0.$$

(Tenere presente che risulta:

$$\cos^2 x-1=(\cos x+1)(\cos x-1);$$

scrivere, al posto dell'equazione assegnata, la seguente equazione

$$(\cos x+1)(\cos x-1)=0.$$

Ricordando che un prodotto vale zero solo se almeno uno dei suoi fattori vale zero, siamo condotti a risolvere le due equazioni

$$\cos x+1=0$$
$$\cos x-1=0,$$

che sono del tipo esaminato negli esercizi dal n. 85 al n. 94).

96. Risolvere l'equazione

$$2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}x=0.$$

(Tenere presente che l'equazione si può scrivere nella forma

$$\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x-1)=0;$$

ci si riduce quindi a risolvere le due equazioni

$$\operatorname{sen}x=0$$
$$2\operatorname{sen}x-1=0,$$

che sono del tipo esaminato negli esercizi dal n. 85 al n. 94).

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 97 al n. 106, tenendo presenti le considerazioni svolte a proposito degli esercizi n. 95 e 96.

97. $4\cos^2 x=0$; $4\operatorname{sen}^2 x=0$; $4\operatorname{tg}^2 x=0$

98. $4\cos^2 x-1=0$; $4\operatorname{tg}^2 x-1=0$; $4\operatorname{sen}^2 x-1=0$

99. $2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x=0$; $2\cos^2 x+\cos x=0$; $2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x=0$

100. $-4\operatorname{sen}^2 x+3=0$; $-4\cos^2 x+3=0$; $-4\operatorname{tg}^2 x+3=0$

101. $-3\operatorname{sen}^2 x+1=0$; $-3\cos^2 x+1=0$; $-3\operatorname{tg}^2 x+1=0$

102. $\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x=0$; $\cos^2 x-2\cos x=0$; $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x=0$

103. $3\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x=0$; $3\cos^2 x+2\cos x=0$; $3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x=0$

104. $\cos^2 x-3=0$; $\operatorname{sen}^2 x-3=0$; $\operatorname{tg}^2 x-3=0$

105 $-2\operatorname{sen}^2 x+1=0$; $-2\cos^2 x+1=0$; $-2\operatorname{tg}^2 x+1=0$

106. $-5\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x=0$; $-5\cos^2 x+2\cos x=0$; $-5\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x=0$

107. Risolvere l'equazione

$$2\,\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x-1=0.$$

Introducendo una nuova incognita z, legata alla x dalla relazione

$$z=\text{sen}\,x, \tag{1}$$

l'equazione assegnata diventa

$$2z^2+z-1=0.$$

Otteniamo così un'equazione algebrica di 2° grado che ha le soluzioni z_1 e z_2 date da

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\left\langle \begin{array}{l}\dfrac{-1-3}{4}=-1\\[2mm] \dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Per ottenere, poi, i valori di x, prendiamo di nuovo in considerazione la relazione (1) e risolviamo le due equazioni

$$\text{sen}\,x=-1 \quad e \quad \text{sen}\,x=\frac{1}{2}$$

con il procedimento valido per gli esercizi dal n. 47 al n. 56.
Lo stesso procedimento può essere seguito per risolvere qualunque equazione del tipo

$$a\,\text{sen}^2 x+b\,\text{sen}\,x+c=0;$$

questa, per mezzo dell'incognita

$$z=\text{sen}\,x,$$

diventa

$$az^2+bz+c=0.$$

Si trovano così le soluzioni:

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad e \quad z_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e ci si riduce a risolvere le equazioni

$$\text{sen}\,x=z_1 \quad e \quad \text{sen}\,x=z_2$$

per determinare gli angoli x richiesti.
È chiaro che tali equazioni non hanno soluzioni se z_1 e z_2 risultano complesse, oppure se risulta

$$z_1\leq-1 \quad o \quad z_1\geq1$$

o anche

$$z_2\geq1 \quad o \quad z_2\leq-1.$$

In modo del tutto analogo si risolvono equazioni del tipo

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

(valendosi dell'incognita

$$z=\cos x),$$

o

$$a\,\text{tg}^2 x+b\,\text{tg}\,x+c=0$$

(valendosi dell'incognita

$$z=\text{tg}\,x).$$

Equazioni di quest'ultimo tipo non hanno soluzioni solo se z_1 e z_2 risultano complesse.

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 108 al n. 117, basandosi sulle considerazioni svolte nell'esercizio n. 107.

108. $6\cos^2 x-13\cos x+5=0$; $\quad 6\,\text{sen}^2 x+13\,\text{sen}\,x+5=0$

109. $-3\,\text{tg}^2 x+\text{tg}\,x+2=0$; $\quad -3\cos^2 x+\cos x+2=0$

110. $6\cos^2 x+19\cos x-11=0$; $\quad 6\,\text{sen}^2 x-19\,\text{sen}\,x-11=0$

111. $3\,\text{sen}^2 x+11\,\text{sen}\,x+6=0$; $3\,\text{tg}^2 x+11\,\text{tg}\,x+6=0$

112. $-2\cos^2 x+\cos x+1=0$; $-2\,\text{tg}^2 x+\text{tg}\,x+1=0$

113. $\text{tg}^2 x+4\,\text{tg}\,x+4=0$; $\text{sen}^2 x+4\,\text{sen}\,x+4=0$

114. $4\cos^2 x-4\cos x+1=0$; $4\,\text{sen}^2 x-4\,\text{sen}\,x+1=0$

115. $\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x+1=0$; $\text{tg}^2 x+\text{tg}\,x+1=0$

116. $4\,\text{sen}^2 x+1=0$; $4\cos^2 x+1=0$

117. $-\cos^2 x+\cos x+6=0$; $-\text{tg}^2 x+\text{tg}\,x+6=0$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 118 al n.124.

118. $2\,\text{sen}^3 x+\text{sen}^2 x=0$
(L'equazione si può scrivere nella forma
$\text{sen}^2 x\,(2\,\text{sen}\,x+1)=0\ldots$).

119. $2\cos^3 x-\cos^2 x=0$

120. $\text{tg}^3 x+\text{tg}^2 x=0$

121. $16\,\text{sen}^3 x-8\,\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x=0$
(L'equazione si può scrivere nella forma
$\text{sen}\,x\,(16\,\text{sen}^2 x-8\,\text{sen}\,x+1)=0\ldots$).

122. $4\cos^3 x-\cos x=0$

123. $\text{sen}^3 x-1=0$
(L'equazione si può scrivere nella forma
$(\text{sen}\,x-1)(\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x+1)=0\ldots$).

124. $\text{tg}^3 x+1=0$

Sulle equazioni del tipo $\text{sen}\,\omega(x+\varphi)=m$, $\cos\omega(x+\varphi)=m$, $\text{tg}\,\omega(x+\varphi)=m$

Risolvere le equazioni proposte negliesercizi dal n. 125 al n. 129, tenendo presenti le considerazioni esposte nelle pp. 142-144.
Completare ogni esercizio con la visualizzazione grafica presentata nelle pp. 144-148.

125. $\text{sen}\,x=\frac{1}{2}$; $\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$; $\text{sen}\,2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

126. $\text{sen}\,x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}\,4\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}\left(4x-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

127. $\text{sen}\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

128. $\text{sen}\,x=0{,}389$; $\text{sen}\,(2x-0{,}4)=0{,}389$; $\text{sen}\,2\,(x-0{,}4)=0{,}389$

129. $\text{sen}\,x=-0{,}141$; $\text{sen}\,\frac{1}{2}\,(x+3)=-0{,}141$; $\text{sen}\left(\frac{x}{2}+3\right)=-0{,}141$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 130 al n. 133, tenendo anche presenti le considerazioni esposte a proposito degli esercizi n. 84, 95, 96.

130. $\frac{1}{4}\cos(1+x)-\frac{1}{2}=0$; $2\,\text{sen}\,(2x+1)-1=0$

131. $3\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$; $4\,\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2$

132. $\text{sen}\,2x\,\text{sen}\,3x=0$; $\cos 2x\cos 3x=0$

133. $\text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}=0$; $\cos\frac{x}{2}\,\text{sen}\,2x=0$

Sulle equazioni del tipo $a\,\text{sen}\,x+b\cos x=c$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 134 al n. 141, tenendo presenti le considerazioni esposte nel testo alle pp. 148-150.
Ogni esercizio può essere completato con la visualizzazione grafica proposta nel testo nelle pp. 144-148.

134. $\text{sen}\,x+\cos x=0$; $\text{sen}\,x+\cos x=-1$; $\text{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}$

135. $\text{sen}\,x-\cos x=0$; $\text{sen}\,x-\cos x=1$; $\text{sen}\,x-\cos x=-\sqrt{2}$

136. $\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x=0$; $\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{3}$; $\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x=2$

137. $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=0$; $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=1$; $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=-2$

138. $3\,\text{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x=0$; $3\,\text{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x=-3$; $3\,\text{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}$

139. $\text{sen}\,x-2\cos x=0$; $\text{sen}\,x-2\cos x=\sqrt{5}$; $\text{sen}\,x-2\cos x=-2$

140. $3\,\text{sen}\,x+4\cos x=0$; $3\,\text{sen}\,x+4\cos x=-2{,}5$; $3\,\text{sen}\,x+4\cos x=5$

141. $0{,}6\,\text{sen}\,x-0{,}8\cos x=0$; $0{,}6\,\text{sen}\,x-0{,}8\cos x=0{,}5$; $0{,}6\,\text{sen}\,x-0{,}8\cos x=-0{,}35$

142. Risolvere l'equazione

$$\text{sen}\,2x+\cos 2x=0$$

(In questo caso sarà opportuno scrivere il primo membro dell'equazione nella forma

$$r\,\text{sen}\,(2x+\beta);$$

si è così ricondotti a risolvere un'equazione del tipo

$$\text{sen}\,\omega(x+\varphi)=m,$$

già trattato).

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 142 al n. 146, basandosi anche sulle precedenti considerazioni svolte nell'esercizio 142.

142. $\text{sen}\,2x-\cos 2x=0$; $\text{sen}\,2x-\cos 2x=-1$; $\text{sen}\,2x-\cos 2x=-\sqrt{2}$

143. $\text{sen}\,2x+\sqrt{3}\cos 2x=0$; $\text{sen}\,2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}$; $\text{sen}\,2x+\sqrt{3}\cos 2x=-2$

144. $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\cos 3x=0$; $\sqrt{3}\,\text{sen}\,3x-\cos 3x=1$; $\sqrt{3}\,\text{sen}\,3x-\cos 3x=-\sqrt{3}$

145. $3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=0$; $3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=3$; $3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=-2\sqrt{3}$

146. $2\,\text{sen}\,2x+\cos 2x=0$; $2\,\text{sen}\,2x+\cos 2x=-1$; $2\,\text{sen}\,2x+\cos x=\sqrt{5}$

Sulle equazioni del tipo $a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\,x \cos x + c\cos^2 x = d$

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 147 al n. 155, tenendo presenti le considerazioni esposte nel testo alle pp. 150-152.

147. $\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = 1$; $\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = 0$

148. $\mathrm{sen}^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = 1$; $\mathrm{sen}^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

149. $-\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \cos^2 x = -1$; $-\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \cos^2 x = 0$

150. $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}$; $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

151. $-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \sqrt{2}\cos^2 x = -\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

152. $\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \mathrm{sen}^2 x = 0$; $\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \mathrm{sen}^2 x = -1$

153. $-\mathrm{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = 0$; $-\mathrm{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = \sqrt{3}$

154. $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x = 0$; $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x = -2$

155. $\mathrm{sen}^2 x + 3\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 2\cos^2 x = 0$; $\mathrm{sen}^2 x + 3\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 2\cos^2 x = 1$

Identità ed equazioni

Lo svolgimento degli esercizi del cap. 4 (pp. 279-282) e di questo capitolo (pp. 303-309) hanno condotto a scrivere molte uguaglianze. Vogliamo ora, prima di affontare nuovi esercizi, riflettere sui procedimenti seguiti.

a) Cominciamo col confrontare alcune delle uguaglianze che abbiamo incontrato più spesso; queste:

$$\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1 \tag{1}$$
$$\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = 1. \tag{2}$$

In entrambi i casi abbiamo scritto un'espressione a sinistra (1° membro) e un'espressione a destra (2° membro), collegate fa loro dal segno «=». C'è però una notevole differenza fra le uguaglianze (1) e (2); ecco perché: mentre la (1) è sempre vera in base alla definizione stessa delle funzioni circolari, la (2) è vera solo per alcuni valori di x. Un caso viene distinto dall'altro chiamando ***identità*** *l'uguaglianza (1) ed* ***equazione*** *l'uguaglianza (2).*

b) Esaminiamo ora le seguenti uguaglianze:

$$\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = 1 \tag{2}$$
$$\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = \cos 2x \tag{3}$$
$$\cos 2x = 1. \tag{4}$$

La (2) — abbiamo detto — è un'equazione, mentre la (3) è un'identità perché le formule di duplicazione garantiscono che è vera per qualunque valore di x. Allora, invece di risolvere la (2) possiamo risolvere la (4): si otterranno sempre le stesse soluzioni.

c) Analogamente, se esaminiamo le uguaglianze seguenti

$$\mathrm{sen}\,x + \cos x = 0 \tag{5}$$
$$\mathrm{sen}\,x + \cos x = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tag{6}$$
$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{7}$$

troviamo che la (5) è un'equazione, mentre la (6) è un'identità basata sulle formule di addizione;

perciò, invece di risolvere l'equazione (5), possiamo risolvere l'equazione (7), certi di trovare le stesse soluzioni.
Gli esercizi che seguono condurranno ad impadronirsi meglio di questa tecnica algebrica: trasformare un'equazione data in un'altra facilmente risolubile, basandosi sulle formule più note.

Risolvere le equazioni proposte negli esercizi dal n. 156 al n. 174, basandosi sulle formule trovate nel testo (pp. 106-117), sui procedimenti esposti nel testo (pp. 138-152) e negli esercizi (cap. 5, n. 84, 95, 96, 107).

156. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

(Basandosi sulla relazione $tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$ *e moltiplicando i due membri per* $cos\,x$*, l'equazione diventa...).*
Accompagnare il procedimento algebrico con la visualizzazione grafica, data dai punti di intersezione delle curve

$$y = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad y = \operatorname{tg} x.$$

157. $\cos x = \operatorname{tg} x$

(Valendosi opportunamente delle due relazioni fondamentali

$$\frac{sen\,x}{cos\,x} = tg\,x \quad e \quad sen^2 x + cos^2 x = 1,$$

l'equazione diventa

$$sen^2 x + sen\,x - 1 = 0 \ldots).$$

Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con il grafico delle curve

$$y = \cos x \quad \text{e} \quad y = \operatorname{tg} x,$$

che visualizza i punti d'intersezione delle due curve.

158. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x$

(Basandosi sulla relazione $ctg\,x = \frac{1}{tg\,x}$*, l'equazione diventa...).*

159. $\cos x = \operatorname{ctg} x$ $\left[x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

160. $3\operatorname{tg} x = 2\cos x$ $\left[x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x'_k = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

161. $2\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ $\left[x_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x'_k = k\pi\right]$

162. $2\operatorname{sen}^2 x - \cos x - 2 = 0$

(Valendosi opportunamente della relazione fondamentale

$$sen^2 x + cos^2 x = 1,$$

l'equazione diventa

$$2\,cos^2 x + cos\,x = 0 \ldots).$$

163. $2\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$ $\left[x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x'_k = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi;\ x''_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

164. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $\left[x_k = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ x'_k = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

165. $\frac{1 + \cos x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{sen} x$ $\left[x_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

166. $2\operatorname{sen} x + \cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = 0$

(Valendosi della formula di addizione del coseno, si è condotti all'equazione

$$3\,sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \ldots).$$

167. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x=0$

(Valendosi della formula di sottrazione del seno, si è condotti all'equazione

$3\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x=0\ldots$*).*

168. $2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

(Valendosi delle formule di addizione e sottrazione, si è condotti all'equazione

$\cos x=\frac{1}{2}\ldots$*).*

169. $2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)$

(Si è condotti all'equazione

$\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots$*).*

170. $(1+\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(45°-x)=1$

(Valendosi delle formule di sottrazione della tangente — vedi Complementi del cap. 4, p. 286 — si è condotti all'equazione

$\operatorname{tg} x=0\ldots$*).*

171. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(60°+x)=1$

(Si è condotti all'equazione

$\operatorname{tg}^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1=0\ldots$*).*

172. $2\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

[Osservare che, scomponendo opportunamente in fattori, si arriva alle due equazioni

$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$*].*

Valutare se risultano utili, in questo caso, le formule di sottrazione.

173. $2\operatorname{sen}^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0.$

Il procedimento è più agevole scomponendo in fattori o valendosi delle formule di addizione?
[Ci si può ricondurre a risolvere le due equazioni.

$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ *e* $\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$*].*

174. $3\operatorname{sen}^2\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)+4\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ $\left[x_k=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right]$

Le equazioni proposte negli esercizi dal n. 175 al n. 179 possono essere risolte sia valendosi delle formule di addizione e sottrazione, sia valendosi delle formule di prostaferesi. Risolvere le equazioni in due modi confrontando i procedimenti.

175. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$

176. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{sen} 2x$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ x'_k=k\pi\right]$

177. $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

178. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ $\left[x_k=\frac{\pi}{12}+2k\pi;\ x'_k=-\frac{7}{12}\pi+2k\pi\right]$

179. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{3}{2}$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

Risolvere le seguenti equazioni.

180. $\operatorname{sen}4x+\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}3x$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;\quad x'_k=k\frac{\pi}{3}\right]$

(Valersi delle formule di prostaferesi).

181. $\cos 4x+\cos 2x=\cos 3x$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3};\quad x'_k=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

(Valersi delle formule di prostaferesi).

182. $\cos 5x-\cos 3x=\operatorname{sen}4x$ $\left[x_k=-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\quad x'_k=\frac{7}{6}\pi+2k\pi;\quad x''_k=k\frac{\pi}{4}\right]$

(Valersi delle formule di prostaferesi).

183. $\operatorname{sen}8x-\operatorname{sen}4x=2\cos 6x$ $\left[x_k=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3};\quad x'_k=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

184. $2\operatorname{sen}2x=\operatorname{tg}x$

(Valendosi delle formule di duplicazione e della relazione fondamentale $\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$*, si è condotti a risolvere le due equazioni*

$$\operatorname{sen}x=0 \quad e \quad 4\cos^2 x-1=0).$$

185. $\operatorname{sen}x+\cos x=\cos 2x$

(Valendosi delle formule di duplicazione e scomponendo opportunamente in fattori, si arriva a risolvere le due equazioni

$$\operatorname{sen}x+\cos x=0 \quad e \quad \operatorname{sen}x-\cos x=-1).$$

186. $\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x=\frac{1}{2}$

(Dopo aver scomposto opportunamente in fattori il 1° membro, ci si vale della relazione fondamentale

$$\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$$

e delle formule di duplicazione; si arriva a risolvere l'equazione

$$\left.\cos 2x=\frac{1}{2}\right).$$

187. $2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 2x=2$

(Valendosi delle formule di duplicazione, della relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

e di un'adeguata scomposizione in fattori, si arriva a risolvere le equazioni

$$\cos^2 x=0 \quad e \quad 2\operatorname{sen}^2 x-1=0).$$

188. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}2x}=1$

(Valendosi della formula di duplicazione della tangente, esposta nei Complementi al cap. 4, p. 288, si arriva a risolvere l'equazione

$$\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+1=0).$$

189. $\operatorname{sen}x+\cos x=\operatorname{sen}2x+\cos 2x$

(Si può esprimere il 1° membro nella forma $r\operatorname{sen}(x+\varphi)$*, il 2° membro nella forma* $r'\operatorname{sen}(2x+\varphi')$ *e trasformare l'equazione nella forma*

$$r\operatorname{sen}(x+\varphi)-r'\operatorname{sen}(2x+\varphi')=0;$$

valendosi poi delle formule di prostaferesi, si arriva a risolvere le due equazioni

$$\left.\cos\frac{1}{2}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2}=0\right).$$

190. $1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\cos x$

(Ci si può valere delle formule di duplicazione, scrivendo

$$\cos x=\cos 2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1;$$

così si arriva a risolvere l'equazione

$$\cos^2\frac{x}{2}=1.$$

Ma ci si può anche valere delle formule di bisezione, arrivando a risolvere l'equazione

$$\cos x=1).$$

191. $\operatorname{sen} x=2\cos^2\frac{x}{2}$ $\left[x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\quad x'_k=\pi+2k\pi\right]$

(Anche questa equazione si può risolvere in due modi; confrontare i due procedimenti che si possono seguire).

192. $\sqrt{3}\operatorname{sen} x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ $\left[x_k=2k\pi;\quad x'_k=\frac{2}{3}+2k\pi\right]$

(Valgono ancora le considerazioni relative all'esercizio 190).

193. $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\operatorname{sen} x=2$ $\left[x_k=\frac{\pi}{3}+2k\pi;\quad x'_k=\pi+2k\pi\right]$

(Valgono ancora le considerazioni relative all'esercizio 190).

194. $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos x=1$ $[x_k=2k\pi]$

(Svolgere in due modi, secondo le indicazioni dell'esercizio 190).

195. $\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ $[x_k=2k\pi;\quad x'_k=\pi+2k\pi]$

(Le formule di bisezione della tangente si trovano nei Complementi al cap. 4, p. 289).

Problemi di geometria che conducono a risolvere equazioni trigonometriche

Cominciamo col risolvere insieme un esercizio.

196. È data la quarta parte di un cerchio di centro O e raggio $\overline{OA}=\overline{OB}=r$ (Fig. 1) e si considera un punto M, variabile sull'arco AB. Si indicano con P e Q le proiezioni ortogonali di M su OA e OB e si costruisce il rettangolo $OPMQ$, che varia al variare di M (Fig. 2).
Si chiede per quale posizione di M l'area del rettangolo $OPMQ$ vale $\frac{1}{4}r^2$.

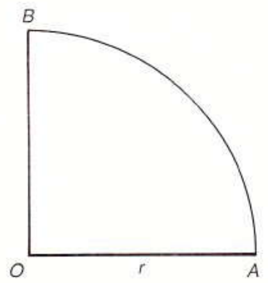

Fig. 1

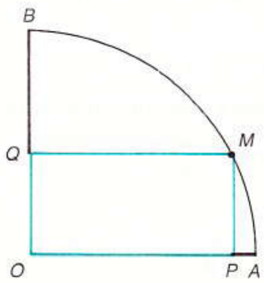

Fig. 2

Osserviamo, oltre alle Figg. 1 e 2, anche le Figg. 3, 4, 5.
Le Figg. 3 e 4 mettono in evidenza i casi limite: il punto M coincide con A o con B, e, di conseguenza, il rettangolo sparisce; la sua area è zero. Si intuisce, allora, data la simmetria del quarto di cerchio rispetto alla bisettrice OK dell'angolo $A\hat{O}B$ *(Fig. 5), che l'area massima del nostro rettangolo corrisponderà all'area del quadrato OPKQ.*

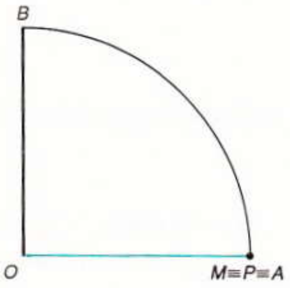

Fig. 3

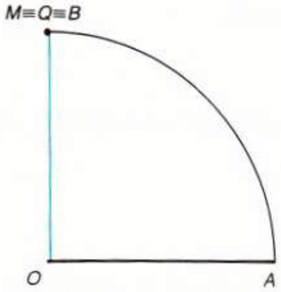

Fig. 4

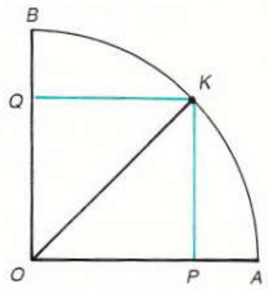

Fig. 5

Le varie figure fanno capire che la posizione di M è legata all'inclinazione che ha il raggio OM rispetto alla retta OA; si è perciò condotti a scegliere come incognita l'ampiezza di quell'angolo; si pone (Fig. 6):

$$A\hat{O}M = x.$$

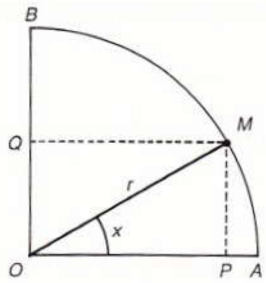

Fig. 6

Subito alcune osservazioni sull'angolo x: tale angolo non può essere maggiore di un angolo retto, e quindi risulta, misurando gli angoli in gradi,

$$0° \leq x \leq 90°$$

e, misurando gli angoli in radianti,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si ha inoltre:

$$x = 0° \quad \text{se} \quad M \equiv A$$
$$x = 90° \quad \text{se} \quad M \equiv B.$$

L'area S del rettangolo OPMQ è data da

$$S = \overline{OP} \cdot \overline{PM},$$

e siccome

$$\overline{OP} = r\cos x, \quad \overline{PM} = r\,\mathrm{sen}\,x,$$

si avrà:

$$S = r^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x.$$

Il problema si traduce dunque nell'equazione

$$r^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \frac{r^2}{4}$$

cioè

$$\mathrm{sen}\,x\cos x = \frac{1}{4}.$$

Per risolvere quest'equazione conviene valersi delle formule di duplicazione; si ha:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Si è così condotti a risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{4}$$

cioè

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}.$$

Occorre tener presente che fra le infinite soluzioni di quest'equazione si debbono scegliere quelle per cui risulta

$$0° \leq x \leq 90°$$

cioè

$$0° \leq 2x \leq 180°.$$

Si ha:

$$2x = 30° \quad \text{da cui} \quad x_1 = 15°$$

e

$$2x = 150° \quad \text{da cui} \quad x_2 = 75°.$$

Ci sono dunque due posizioni del punto M che soddisfano le condizioni imposte dal problema: si tratta dei punti L e L', simmetrici rispetto alla bisettrice OK dell'angolo $A\hat{O}B$ *(Fig. 7).*

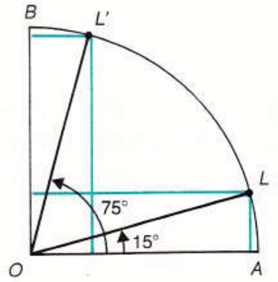

Fig. 7

I problemi n. 197-224 possono essere risolti seguendo un procedimento analogo, e cioè:

1) si disegna la figura che visualizza il problema;
2) si sceglie l'incognita in modo opportuno e si precisano le limitazioni che deve rispettare;
3) si traduce il problema in un'equazione che leghi i dati all'incognita;
4) si risolve l'equazione, valendosi, se è il caso, di formule che possono renderne più semplice la soluzione.

Ma, prima di iniziare qualunque calcolo, si deve osservare bene la figura, e riflettere a vari casi che si possono presentare; è proprio una concezione dinamica del problema che, spesso, può condurre ad avere un'idea delle soluzioni.
È chiaro, inoltre, che, una volta risolto il problema, bisognerà controllare il risultato ottenuto algebricamente, verificando se ha significato e se è esatto.

197. Considerare i vari rettangoli $ABCD$ che si possono costruire mantenendo fissa la lunghezza a della diagonale AC e variando l'angolo $C\hat{A}B$.
Si chiede: per quale ampiezza dell'angolo $C\hat{A}B$ l'area del rettangolo avrà il valore $\frac{1}{2}a^2$?
(Osservare che, se le diagonali sono fra loro perpendicolari, si ha un quadrato; l'area del quadrato è... dunque... Se si sviluppa il problema scegliendo come incognita $x = C\hat{A}B$, *si arriva all'equazione* $\operatorname{sen} 2x = 1$*).*

198. In un quadrante AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r, si considera un punto M variabile sull'arco AB; siano P e Q le proiezioni ortogonali di M su OA e su OB.

Indicare per quale posizione di M risulta:

$$\frac{AP}{BQ}=\sqrt{3}.$$

(Si è condotti a risolvere l'equazione

$$\sqrt{3}\,sen\,x-cos\,x=\sqrt{3}-1).$$

199. Determinare l'ampiezza $2x$ dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele di lato l, sapendo che la somma della base e dell'altezza ad essa relativa vale $l\sqrt{5}$.

(Si è condotti a risolvere l'equazione $2\,sen\,x+cos\,x=\sqrt{5}$*).*

200. È dato un triangolo rettangolo isoscele ABC; l'angolo retto è $\hat{A}$ e i cateti uguali, AB e AC, sono lunghi a. Si conduce per A, esternamente al triangolo, una retta r e si indicano con B' e C' le proiezioni di B e C su r.
Indicare per quale posizione della retta r risulta:

$$\overline{BB'}+\overline{CC'}=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

(Si è condotti a risolvere l'equazione

$$sen\,x+cos\,x=\frac{\sqrt{6}}{2}\Big).$$

201. Considerare un punto M variabile su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$. Indicare per quale posizione di M risulta:

$$\overline{AM}+\sqrt{3}\,\overline{MB}=2\sqrt{2}r.$$

(Si arriva all'equazione

$$\sqrt{3}\,sen\,x+cos\,x=\sqrt{2}).$$

202. È dato un triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$, con i cateti lunghi l e $2l$. Si conduce per A, esternamente al triangolo, una retta r e si indicano con B' e C' le proiezioni di B e C su r.
Indicare per quale posizione di r l'area del trapezio $BB'CC'$ vale $\frac{13}{8}l^2$.

(Si ottiene l'equazione

$$sen\,2x=\frac{1}{2}\Big).$$

203. In una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB}=2r$ si inscrive un quadrilatero $ABCD$ di lato $\overline{CD}=r$. Determinare l'ampiezza $2x$ dell'angolo $A\hat{O}D$ in modo che risulti:

$$\overline{AD}+\overline{BC}=\frac{2}{3}(\overline{DC}+\overline{AB}).$$

(Si arriva all'equazione

$$sen\,x+sen\,(60°-x)=1,$$

che, mediante le formule di prostaferesi, diventa

$$cos\,(x-30°)=1).$$

204. Di un triangolo ABC si conosce l'angolo $\hat{A}$, ampio 60° e si considera il punto C', proiezione ortogonale di C sul lato AB. Determinare l'ampiezza x dell'angolo $A\hat{B}C$ per cui risulta:

$$\overline{AC}+\overline{C'B}=2\,\overline{BC}.$$

(Valendosi del teorema dei seni si arriva all'equazione

$$2\,sen\,x+\sqrt{3}\,cos\,x=2\sqrt{3}).$$

205. Dato un triangolo equilatero ABC, con il lato lungo l, si conduce per A, esternamente al triangolo, una retta r e si indicano con B' e C' le proiezioni di B e C su r.
Indicare per quale posizione di r l'area del traezio $BCC'B'$ vale $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(Si è condotti all'equazione

$$cos^2\,(60°-x)=\frac{3}{4},\ ossia...).$$

206. Dato un quadrante, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r, si prolunga il raggio OA di un segmento AC ad esso uguale e si considera un punto P variabile sull'arco AB.
Indicare per quale posizione di P il quadrangolo $OBPC$ ha l'area uguale a $\frac{\sqrt{5}}{2}r^2$.

(L'area del quadrangolo è somma delle aree di due triangoli, di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso è... Si arriva all'equazione

$$\cos x+2 \operatorname{sen} x=\sqrt{5}).$$

207. Dal punto medio O di un segmento AB lungo $2l$ si conduce una semiretta OC in modo che formi con OB un angolo acuto variabile, ampio x. Si proietta ortogonalmente B su questa semiretta e si ottiene il punto B'.
Indicare per quale valore di x risulta:

(a) $\overline{OB}'+\overline{BB}'=\sqrt{2}\,\overline{OB}$

(b) $\overline{AB}'^2+\overline{BB}'^2=\frac{5}{2}l^2$.

(La relazione (a) conduce a risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2};$$

la relazione (b) conduce, valendosi anche del teorema del coseno, all'equazione

$$\cos^2 x=\frac{1}{4}\Big).$$

208. Sul lato $AB=l$ del quadrato $ABCD$ si costruisce, all'interno del quadrato, un semicerchio di diametro AB. Si considera un punto P variabile sulla semicirconferenza.
Indicare per quale posizione di P, vale $\frac{3}{4}$ il rapporto fra le sue distanze dai lati CD e CB.

(Si arriva all'equazione

$$3 \operatorname{sen}^2 x+4 \operatorname{sen} x \cos x=4).$$

209. Un punto C si muove su una semicirconferenza di diametro $AB=2r$; da C si conduce la perpendicolare CD al diametro.
Indicare la posizione di C per cui risulta:

$$\overline{AC}\cdot\overline{CB}+\overline{AB}\cdot\overline{AD}=4(\sqrt{2}+1)r^2.$$

(Si è condotti a risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} 2x+\cos 2x=\sqrt{2}).$$

210. Sui due lati di un angolo retto di vertice O sono dati due punti A e B che distano 1 da O. Si costruisce per O una semiretta interna all'angolo; sia P la proiezione di A su questa semiretta.
Indicare quale deve essere l'inclinazione della semiretta sul lato OA perché l'area del quadrilatero $OAPB$ risulti uguale a $\sqrt{2}+2$.

(Si arriva all'equazione

$$2 \operatorname{sen} 2x-2 \cos 2x=\sqrt{2}).$$

211. È dato il triangolo rettangolo ABC con l'ipotenusa BC lunga $2l$ e il cateto AC più piccolo del cateto AB. Dal punto medio O dell'ipotenusa si conduce la perpendicolare a BC; questa incontra AB nel punto M.
Determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{B}A$ in modo che risulti:

$$\overline{CA}\cdot\overline{OM}=3l^2.$$

(Si è condotti all'equazione

$$2 \cos^2 x+3 \cos x-2=0).$$

212. In una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB}=2r$ è data una corda AC che forma col diametro un angolo $C\hat{A}B$ di 30°. Si traccia una corda variabile AD e si indica con E la proiezione di D su AB e con F il punto in cui DE incontra la retta AC.

Determinare la posizione di AD in modo che risulti:

1) $\frac{AD}{AF}=\sqrt{3}$

2) $\overline{AD}+\overline{AE}=\frac{3}{2}r$

3) $\overline{DE}+3\,\overline{EB}+3\,\overline{FE}=6r.$

(Per risolvere il quesito 1) si è condotti all'equazione

$$4\cos^2 x-2\cos x=0;$$

per il quesito 2) all'equazione

$$4\cos^2 x+4\cos x-3=0;$$

e per il 3) all'equazione

$$\mathrm{sen}\, x\cos x-2\cos^2 x=0).$$

213. In un semicerchio di diametro $\overline{AB}=2r$ si conduce una corda variabile AC e la corda AD che biseca l'angolo $B\widehat{A}C$.
Indicare per quale posizione di AC risulta:

$$\overline{AC}+\overline{AD}=\frac{7}{4}r.$$

(Si è condotti all'equazione

$$4\cos^2 x+2\cos x-\frac{15}{4}=0\Big).$$

214. Disegnare due semicirconferenze uguali, di raggio r e di diametri AB e BC, nello stesso semipiano rispetto alla retta ABC.
Condurre una retta r parallela ad ABC e indicare con D ed E i punti d'intersezione più vicini rispettivamente ad A e a C.
A quale distanza si deve trovare r dalla retta ABC perché il perimetro del trapezio $ACED$ risulti lungo $\frac{9}{8}r$?

(Se si sceglie come incognita l'ampiezza dell'angolo formato da AD e AB, si è condotti all'equazione

$$8\cos^2 x-8\cos x+1=0).$$

215. In un triangolo isoscele è inscritto un quadrato che ha un lato sulla base del triangolo.
Determinare quale deve essere l'ampiezza dell'angolo al vertice perché l'area del triangolo risulti doppia dell'area del quadrato.

(Si è condotti all'equazione

$$4\,\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\, x+1=0).$$

216. Determinare gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sapendo che vale $\sqrt{6}$ il rapporto fra un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa.

(Si è condotti all'equazione

$$\sqrt{6}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{6}=0).$$

217. Determinare l'angolo di apertura di un cono circolare retto di apotema a, sapendo che l'area della superficie totale è $\frac{3}{4}\pi a^2$.

(Indicando con x la metà dell'angolo di apertura, si arriva all'equazione

$$\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}\, x-\frac{3}{4}=0).$$

218. Determinare l'angolo di apertura di un cono circolare retto di altezza h, sapendo che l'area della superficie totale è πh^2.

(Indicando con x la metà dell'angolo di apertura, si arriva all'equazione

$$\mathrm{sen}\, x\cos x+\mathrm{sen}^2 x-2\cos^2 x=0).$$

219. Determinare l'ampiezza $2x$ dell'angolo di apertura di un cono circolare retto, sapendo che vale $\frac{9}{4}$ il rapporto fra il volume del cono e il volume della sfera di raggio r inscritta nel cono.
(Si è condotti all'equazione

$$10 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 1 = 0).$$

220. Un cilindro e un cono hanno la stessa altezza e lo stesso volume. Determinare l'ampiezza $2x$ dell'angolo di apertura del cono, sapendo che il rapporto fra la superficie laterale del cono e la superficie totale del cilindro vale $\frac{1}{4}$.
(Si è condotti all'equazione

$$\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x = 2).$$

221. Un rettangolo $ABCD$ ha la diagonale $\overline{AC} = d$; questa diagonale forma con il lato AB un angolo di ampiezza variabile x. Si fa ruotare il rettangolo attorno ad AB e si ottiene un cilindro.
Indicare per quale valore di x la superficie del cilindro così generato ha l'area doppia del cerchio di raggio d.
(Si arriva all'equazione

$$\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = 1).$$

222. Determinare gli angoli di un triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa lunga l, sapendo che la superficie del solido generato dalla rotazione del triangolo attorno all'ipotenusa vale $\sqrt{6}\pi$ volte l'area del triangolo.
(Si arriva all'equazione

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}\Big).$$

223. In un cerchio di centro O e raggio $\overline{OA} = r$, determinare un angolo al centro acuto $A\hat{O}B$, tale che la superficie del solido generato dal settore AOB in una rotazione completa attorno ad OA sia il doppio dell'area del cerchio dato.
(Si è condotti all'equazione

$$\operatorname{sen} x - 2 \cos x = 0).$$

224. In una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ è disegnata una corda MM' in modo che l'angolo $M\hat{O}M'$ sia retto. Si fa ruotare MM' attorno al diametro AB.
Si chiede quale deve essere la posizione della corda se si vuole che la superficie del solido così generato abbia area uguale a $\sqrt{3}\pi r^2$.
(Si arriva all'equazione

$$\sqrt{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) = \sqrt{3}).$$

Problemi vari

225. Considerare la sovrapposizione di due suoni che hanno frequenza 220 e 222 cicli al secondo.
Descrivere il suono composto seguendo le considerazioni esposte alle pp. 122-123.
Determinare poi in quali istanti l'intensità del suono ottenuto è uguale a quella dei suoni composti.

226. Ripetere l'esercizio precedente a partire da due suoni che hanno frequenza 880 e 882 cicli al secondo.

227. Chi s'interessa ai bioritmi, di cui si parla nel testo alle pp. 124-126, ritiene che siano importanti *i giorni critici*, cioè i giorni in cui la curva che rappresenta il bioritmo attraversa l'asse delle ascisse.
Valutare i giorni critici per il ciclo intellettuale, per il ciclo fisico e per quello emotivo.

228. Si chiede se nei bioritmi, di cui si parla nell'esercizio precedente, esistono giorni doppiamente critici, cioè giorni in cui due curve attraversano contemporaneamente l'asse delle ascisse. Esistono giorni in cui le tre curve attraversano contemporaneamente l'asse delle ascisse?

229. Le tre curve che descrivono i bioritmi partono dall'origine O, corrispondente alla data di nascita della persona. Quanto tempo deve trascorrere perché le tre curve abbiano di nuovo un punto in comune sull'asse delle ascisse?

230. Al tempo $t=0$ si invia in un oscilloscopio una tensione variabile V, misurata in millivolt (mV) e regolata dalla legge

$$V=70\cos\left(120\pi t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Si sa che il movimento orizzontale del pennello elettronico inizia quando la tensione V vale 35 mV. Dopo quanto tempo compare il segnale sullo schermo?

231. Il livello del mare in un dato punto della costa varia in modo periodico al variare del tempo t. Misurando l'altezza x dell'acqua a partire dalle ore 12 di un certo giorno, si sono raccolti parecchi dati sperimentali; si è trovato che, in prima approssimazione, l'altezza x dell'acqua è legata al tempo t, misurato in ore, dalla relazione

$$x=6+5\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(t-2).$$

Si chiede:
1) qual è l'altezza massima dell'acqua, e quale la minima?
2) a che ore avviene l'alta marea?
3) quante ore trascorrono fra due successive alte maree?

232. La Fig. 8 mostra l'elettroencefalogramma di una persona. Si tratta dell'attività elettrica del cervello, registrata mediante un apparecchio chiamato elettroencefalografo, che amplifica opportunamente questa attività. Si osserva che le curve ottenute hanno, in prima approssimazione, un andamento sinusoidale con frequenze diverse. Si distinguono vari ritmi, fra i quali i più noti sono:
— il ritmo α, con un numero di cicli al secondo che varia fra 8 e 13;
— il ritmo β, con un numero di cicli al secondo che varia fa 14 e 30;
— il ritmo θ, con un numero di cicli al secondo che varia fra 4 e 7;
— il ritmo δ, con meno di 3,5 cicli al secondo.
Scrivere le quattro leggi che legano l'attività elettrica y al tempo t nei vari casi. Scegliere, per esempio, per il ritmo α una frequenza $f_\alpha=10$ cicli al secondo e, analogamente, $f_\beta=22$ cicli al secondo, $f_\theta=5$ cicli al secondo, $f_\delta=3$ cicli al secondo. Indicare con r l'ampiezza massima dell'oscillazione.
Determinare, per ogni caso, gli istanti in cui y è massima e gli istanti in cui y è nulla.

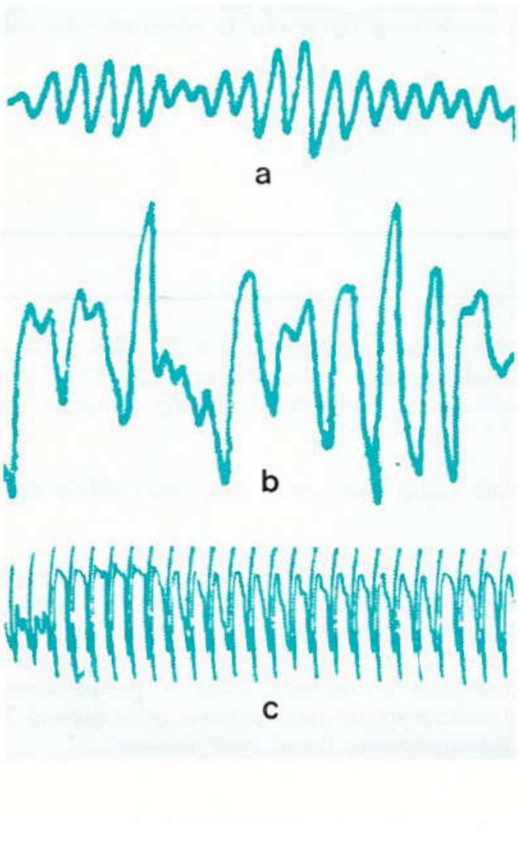

Fig. 8. Elettroencefalogramma: *a*, di uomo normale; *b*, *c*, di epilettico (*b*, nel grande male; *c*, nel piccolo male).

Sulle disequazioni

Studiare il segno delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 233 al n. 241.

233. $y=2\,\text{sen}\,x-1$; $y=-2\,\text{sen}\,x+1$; $y=\text{sen}\,x-\frac{1}{2}$

234. $y=\cos x+\frac{1}{2}$ $y=2\cos x+1$; $y=-2\cos x-1$

235. $y=\text{tg}\,x-1$; $y=-\text{tg}\,x+1$; $y=\frac{1}{2}\text{tg}\,x-\frac{1}{2}$

236. $y=\text{sen}\,x+1$; $y=-\text{sen}\,x-1$; $y=4\,\text{sen}\,x+4$

237. $y=3\cos x-1$; $y=-3\cos x+1$; $y=\cos x-\frac{1}{3}$

238. $y=3\,\text{tg}\,x+\sqrt{3}$; $y=-3\,\text{tg}\,x+\sqrt{3}$; $y=\text{tg}\,x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

239. $y=4\cos x$; $y=-2\cos x$; $y=\cos x$

240. $y=\text{sen}\,x-2$; $y=-\text{sen}\,x+2$; $y=4\,\text{sen}\,x-8$

241. $y=\text{tg}\,x-2$; $y=-\text{tg}\,x+2$; $y=4\,\text{tg}\,x-8$

242. Studiare il segno della funzione

$$y=2\,\text{sen}^2 x-\text{sen}\,x.$$

(Tenere presente che si può scrivere

$$y=\text{sen}\,x\,(2\,\text{sen}\,x-1).$$

Si può quindi studiare, separatamente, il segno dei due fattori

$$f_1=\text{sen}\,x, \qquad f_2=2\,\text{sen}\,x-1$$

e determinare il segno della funzione assegnata, ricordando che un prodotto è positivo se i due fattori hanno segno concorde, e negativo se i due fattori hanno segno discorde).

Basandosi sulle considerazioni esposte nell'esercizio precedente, studiare il segno delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 243 al n. 252.

243. $y=2\,\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x$; $y=-2\,\text{sen}^2 x-\text{sen}\,x$

244. $y=2\cos^2 x-\cos x$; $y=-2\cos^2 x+\cos x$

245. $y=\sqrt{3}\,\text{tg}^2 x-\text{tg}\,x$; $y=-\sqrt{3}\,\text{tg}^2 x+\text{tg}\,x$

246. $y=4\cos^2 x-1$; $y=-4\cos^2 x+1$

247. $y=4\,\text{sen}^2 x-1$; $y=-4\,\text{sen}^2 x+1$

248. $y=4\,\text{sen}^2 x-3$; $y=-4\,\text{sen}^2 x+3$

249. $y=4\cos^2 x-3$; $y=-4\cos^2 x+3$

250. $y=2\,\text{sen}^2 x-1$; $y=-2\,\text{sen}^2 x+1$

251. $y=2\cos^2 x-1$; $y=-2\cos^2 x+1$

252. $y=\text{tg}^2 x-1$; $y=1-\text{tg}^2 x$

253. Studiare il segno della funzione

$$y=2\,\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x-1.$$

(Ricordando l'esercizio 107, p. 306, si può introdurre la variabile z, legata alla x dalla relazione

$$z=\text{sen}\,x.$$

Così si arriva al trinomio

$$2z^2+z-1.$$

Ora risulta $2z^2+z-1=0$ se si ha

$$z_1=-1 \quad e \quad z_2=\frac{1}{2};$$

perciò il trinomio si può scomporre in fattori nel modo seguente:

$$2z^2+z-1=2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1).$$

Dunque la funzione data si può scrivere nella forma:

$$y=2\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\right)(\operatorname{sen}x+1);$$

si è così ricondotti al procedimento indicato nell'esercizio 242).

Basandosi sulle considerazioni esposte nell'esercizio n. 253 studiare il segno delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 254 al n. 259.

254. $y=6\cos^2 x-13\cos x+5$; $y=-6\cos^2 x+13\cos x-5$

255. $y=6\operatorname{sen}^2 x+13\operatorname{sen}x+5$; $y=-6\operatorname{sen}^2 x-13\operatorname{sen}x-5$

256. $y=-3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+2$; $y=3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-2$

257. $y=4\cos^2 x-4\cos x+1$; $y=-4\cos^2 x+4\cos x-1$

258. $y=4\operatorname{sen}^2 x-4\sqrt{3}\operatorname{sen}x+3$; $y=-4\operatorname{sen}^2 x+4\sqrt{3}\operatorname{sen}x-3$

259. $y=\operatorname{tg}^2 x+1$; $y=-\operatorname{tg}^2 x-1$

Basandosi ancora sulla scomposizione in fattori, studiare il segno delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 260 al n. 264.

260. $y=2\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^2 x$; $y=2\cos^3 x+\cos^2 x$

261. $y=\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x$; $y=\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x$

262. $y=16\operatorname{sen}^3 x-8\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x$; $y=-16\cos^3 x+8\cos^2 x-\cos x$

263. $y=\operatorname{sen}^3 x-1$; $y=1-\cos^3 x$

264. $y=\operatorname{tg}^3 x+1$; $y=1-\operatorname{tg}^3 x$

Studiare il segno delle funzioni proposte negli esercizi dal n. 265 al n. 275, riconducendole alla forma $y=r\operatorname{sen}\omega(t+\varphi)+k$.

265. $y=\operatorname{sen}x+\cos x$; $y=\operatorname{sen}x+\cos x-1$

266. $y=\operatorname{sen}x-\cos x$; $y=\operatorname{sen}x-\cos x+\sqrt{2}$

267. $y=\operatorname{sen}x-\sqrt{3}\cos x$; $y=\operatorname{sen}x-\sqrt{3}\cos x-2$

268. $y=3\operatorname{sen}x-\sqrt{3}\cos x$; $y=3\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\sqrt{3}$

269. $y=\operatorname{sen}x-2\cos x$; $y=\operatorname{sen}x-2\cos x-\sqrt{5}$

270. $y=3\operatorname{sen}x+4\cos x$; $y=3\operatorname{sen}x+4\cos x+1$

271. $y=\operatorname{sen}2x+\cos 2x$; $y=\cos^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}^2 x$

272. $y=\operatorname{sen}2x$; $y=\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x-1$

273. $y=2\operatorname{sen}2x-1$; $y=-\operatorname{sen}^2 x+4\operatorname{sen}x\cos x-\cos^2 x$

274. $y=\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{sen}2x-1$; $y=2\sqrt{3}\operatorname{sen}x\cos x-2\operatorname{sen}^2 x$

275. $y=\sqrt{3}\cos 2x+\operatorname{sen}2x+2$; $y=\sqrt{3}\cos^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x+2$