# 4
# Complementi

## Altre formule

Riuniamo in queste pagine una serie di formule che si possono facilmente ricavare da quelle presentate nel testo (cap. 4, n. 5, 6, 8, 9).

### 1. Formule relative alla tangente di un angolo

**A) Tangente della somma o della differenza di due angoli**

Per esprimere la tangente dell'angolo ampio $\alpha+\beta$ o $\alpha-\beta$, a partire da $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$, ci si basa sulle seguenti relazioni che conosciamo:

I) la relazione fondamentale

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

valida per qualunque angolo $\alpha$;

II) le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

Si scrive allora, per la I):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

e per le II):

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

Tenendo ancora presente la relazione I), si divide numeratore e denominatore del 2° membro per il prodotto

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}};$$

ora, ricordando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione, si può scrivere così:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

In definitiva si ottiene:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Per valersi di queste formule in modo corretto è importante ricordare che:

— non esiste la tangente in corrispondenza di angoli ampi $\frac{\pi}{2}+k\pi$;

— non è possibile effettuare la divisione per zero, cioè una frazione perde significato se il denominatore vale zero.

Così, esaminando la formula (1), si trova che l'espressione

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

perde significato in diverse situazioni, e precisamente:

a) se non esiste $\operatorname{tg}\alpha$, cioè se risulta $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$;

b) se non esiste $\operatorname{tg}\beta$, cioè se risulta $\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$;

c) se il denominatore vale zero, cioè se

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$$

ossia

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Quest'ultima relazione caratterizza gli angoli complementari, cioè gli angoli tali che

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte, è chiaro che

non esiste $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ se risulta $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

In definitiva la formula

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

**non vale** se risulta
$$\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \beta=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Analogamente si trova la formula

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

la formula

**non vale** se risulta
$$\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \beta=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

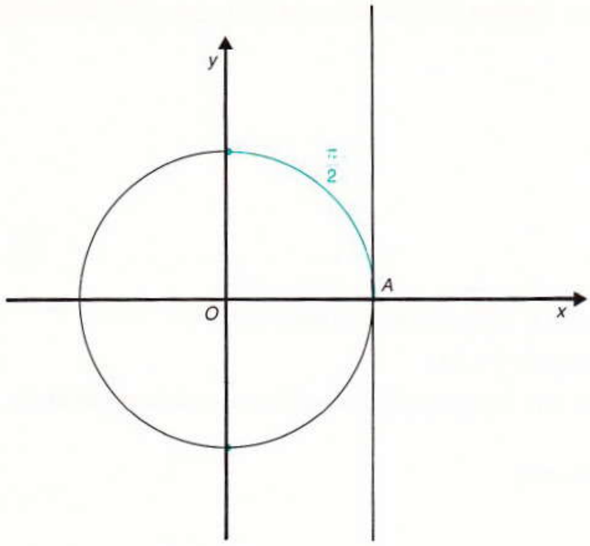

Fig. 1

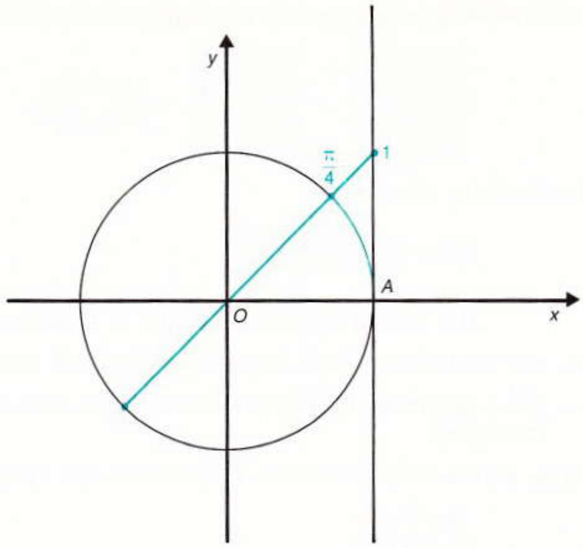

Fig. 2

**B) Formula di duplicazione per la tangente**

Per esprimere la tangente dell'angolo $2\alpha$ mediante $\operatorname{tg}\alpha$, ci si vale della formula di addizione esposta nella parte A):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Se risulta

$$\beta=\alpha$$

si ha:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}$$

ossia

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Osserviamo il 2° membro di questa formula; esso perde significato in diversi casi, questi:

— se non esiste $\operatorname{tg}\alpha$, cioè se è dato (Fig. 1)

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi;$$

— se il denominatore diventa zero, cioè se risulta

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=0,$$

ossia

$\operatorname{tg}\alpha=1,$ da cui $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (Fig. 2)

$\operatorname{tg}\alpha=-1,$ da cui $\alpha=\frac{3}{4}\pi+k\pi$ (Fig. 3).

D'altra parte, è chiaro che non esiste

$$\operatorname{tg}2\alpha,$$

se risulta

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi, \qquad \text{ossia} \qquad \alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

e si osserva subito (Fig. 4) che la formula

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

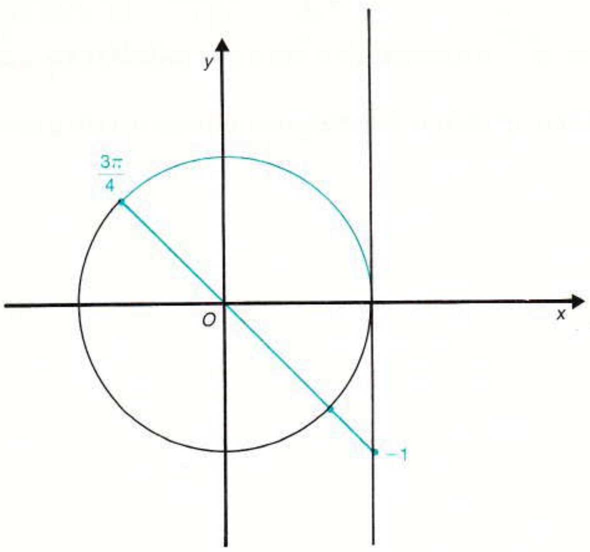


Fig. 3

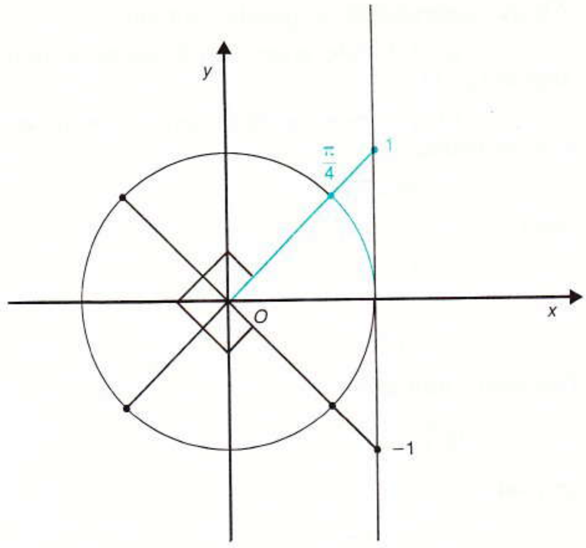


Fig. 4

riassume le due relazioni $\begin{cases} \alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ \alpha=\frac{3}{4}\pi+k\pi. \end{cases}$

Possiamo così concludere che la formula

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

**non vale** se risulta $\begin{cases} \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{cases}$

**C) Formula di bisezione per la tangente**

Per ottenere la formula che esprime la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$ a partire dalla sola conoscenza di $\cos\alpha$, ci si basa sulle seguenti relazioni che conosciamo:

I) la relazione fondamentale:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha};$$

II) le formule di bisezione per seno e coseno:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

valide per qualunque angolo $\alpha$.
Si scrive, infatti:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

e, in definitiva, ricordando che risulta

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{m}{n}},$$

si può scrivere:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Alcune osservazioni su questa formula:

a) il doppio segno ($\pm$) è dovuto al fatto che la sola conoscenza di $\cos\alpha$ non individua un solo angolo (p. 115);

b) il 2° membro della formula perde significato quando il denominatore diventa uguale a zero cioè se risulta

$$1+\cos\alpha=0,$$

ossia

$$\cos\alpha=-1,$$

cioè

$$\alpha=\pi+2k\pi.$$

Del resto, non esiste

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

se risulta

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

cioè

$$\alpha=\pi+2k\pi.$$

Concludiamo che la formula

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

**non vale** se è dato $\alpha=\pi+2k\pi$;

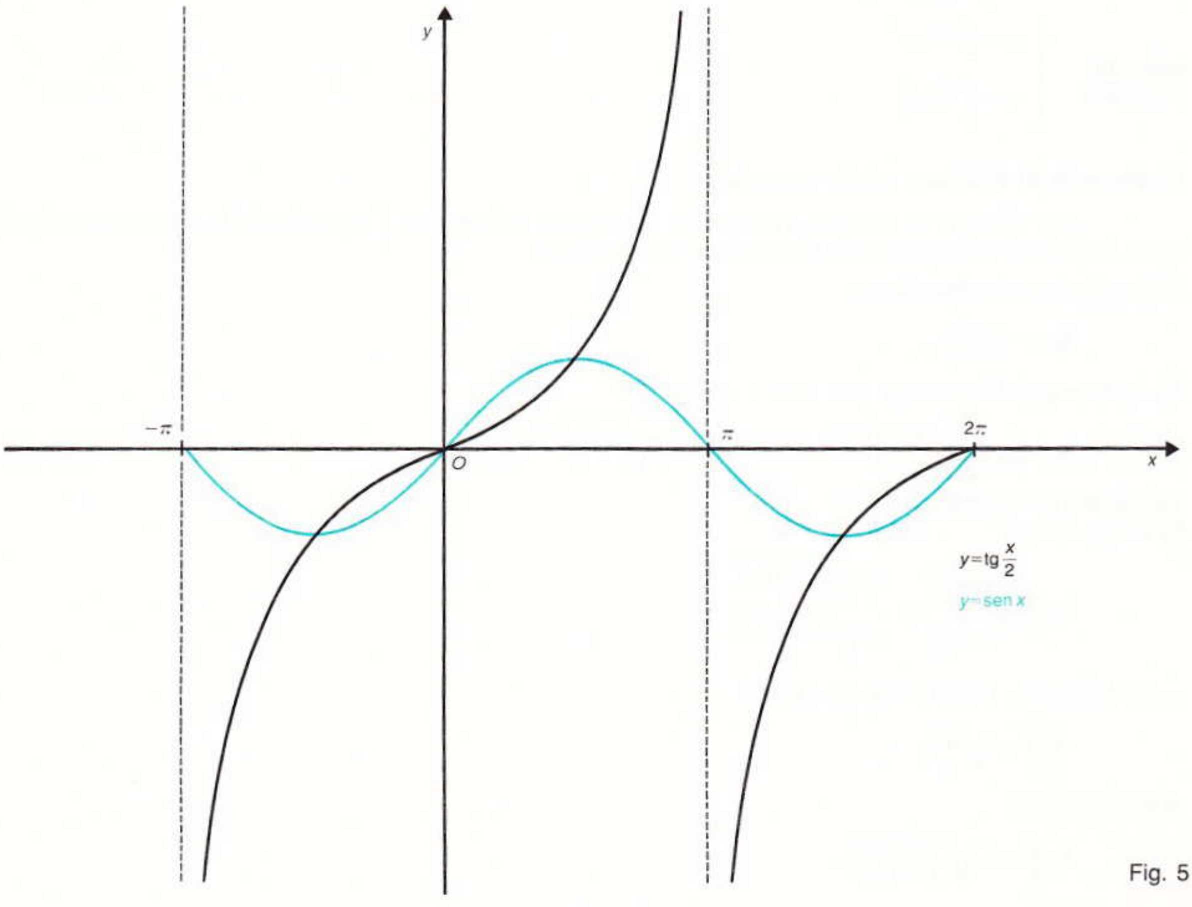


Fig. 5

c) il 2° membro della stessa formula si può scrivere in forma razionale, ossia in una forma in cui non compare l'operazione di radice quadrata: basta moltiplicare numeratore e denominatore dell'espressione frazionaria per

$$1+\cos\alpha.$$

Si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}.$$

E quindi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Ora non si ha più il doppio segno ($\pm$) e questo perché risulta

$1+\cos\alpha>0$ per qualunque $\alpha$ (essendo $\cos\alpha>-1$)

e

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ha sempre lo stesso segno di $\operatorname{sen}\alpha$ (Fig. 5).

## 2. Le funzioni sen $\alpha$ e cos $\alpha$ espresse per mezzo del parametro $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Equazioni parametriche razionali del cerchio

Negli esercizi (p. 198) abbiamo visto come il seno e il coseno di un angolo $\alpha$ si possono esprimere mediante $\operatorname{tg}\alpha$. Abbiamo trovato:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Si tratta di formule in cui compare l'operazione di radice quadrata, cioè di *formule irrazionali*.

Vedremo ora come si riesce ad esprimere $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sotto forma di *funzioni razionali* del parametro

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t.$$

Si procede così:

I) si scrivono le formule di duplicazione nella forma

$$\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2};$$

II) si ricorda la formula fondamentale

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

che è valida per qualunque angolo $\alpha$; risulta quindi:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

e dunque si può scrivere

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

III) in entrambe le formule si divide numeratore e denominatore per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Si ottiene:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

IV) si ricorda che, anche per l'angolo $\frac{\alpha}{2}$, risulta

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

e si scrive:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

In conclusione, indicando con $t$ il valore di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, cioè scegliendo

$$t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

si ottengono **le formule parametriche**:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}\\[2mm]\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}\qquad(1)$$

È chiaro che queste formule non hanno significato se non esiste il valore di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; perciò *le formule parametriche non valgono se risulta*:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

cioè se è dato

$$\alpha=\pi+2k\pi.$$

Le formule (1) permettono di scrivere *le equazioni parametriche razionali di un cerchio*[1]. Cominciamo con l'osservare che se un punto $P(x,y)$ "gira" sulla circonferenza di centro $O$ e raggio 1 le sue coordinate sono legate all'angolo al centro $\alpha$ (Fig. 6) dalle equazioni:

$$\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=\operatorname{sen}\alpha.\end{cases}\qquad(2)$$

Queste sono *le equazioni parametriche* del cerchio: il parametro è l'angolo.

[1] Per altre indicazioni sulle equazioni parametriche vedi l'appendice «La trigonometria nella tecnica».

Le formule (1) permettono di scrivere le equazioni parametriche del cerchio sotto altra forma: basta sostituire le (1) al posto di sen $\alpha$ e cos $\alpha$; si ha:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Queste equazioni parametriche esprimono le coordinate di un punto della circonferenza come *funzioni razionali del parametro t*, dove $t$ è un numero qualunque.

Bisogna osservare che queste equazioni parametriche escludono un punto della circonferenza: il punto $B(-1{,}0)$, corrispondente all'angolo $\alpha=\pi$ (Fig. 6).

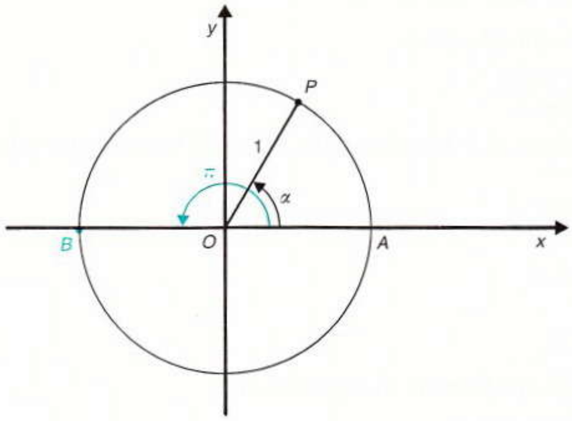


Fig. 6

## 3. Le formule di triplicazione e il problema della trisezione dell'angolo

Basandosi sulle formule di addizione e su quelle di duplicazione si trovano delle formule che esprimono seno, coseno e tangente dell'angolo ampio $3\alpha$, mediante le funzioni circolari dell'angolo $\alpha$: sono le formule di triplicazione. Ecco come si procede:

I) si considera l'uguaglianza

$$3\alpha=\alpha+2\alpha$$

e si scrive:

$$\operatorname{sen} 3\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+2\alpha)$$
$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha);$$

II) ci si vale delle formule di addizione, che qui riscriviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

sostituendo $2\alpha$ al posto di $\beta$ si ottiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+2\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen} 2\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 2\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha};$$

III) si ricordano le seguenti formule di duplicazione:

$$\operatorname{sen} 2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Si scrive dunque:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)+\cos\alpha\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos\alpha\cos 2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha=\cos\alpha(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)-\operatorname{sen}\alpha\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

IV) si svolgono i calcoli indicati, ottenendo:

$$\operatorname{sen}3\alpha=3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha \tag{1}$$

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{3}$$

V) si può, infine, esprimere il 2° membro delle (1) e (2) tramite una sola funzione circolare, ricordando la relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

nella (1) si pone

$$\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha,$$

e nella (2)

$$\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha.$$

Si ottengono così le seguenti *formule di triplicazione*:

$$\operatorname{sen}3\alpha=3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha \tag{4}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{6}$$

Si nota che il 2° membro di queste formule è un'espressione di 3° grado in $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ o $\operatorname{tg}\alpha$. Le formule trasformano dunque un'espressione di 1° grado, relativa all'angolo $3\alpha$ (come $\operatorname{sen}3\alpha$ o $\cos 3\alpha$ o $\operatorname{tg}3\alpha$), in un'espressione di 3° grado relativa all'angolo $\alpha$.

Queste formule permettono di capire la complessità di un problema che si direbbe semplice: *dato un angolo qualunque, di ampiezza $\alpha$, costruire un altro angolo la cui ampiezza sia $\frac{\alpha}{3}$*.

Si tratta del **problema della trisezione dell'angolo** (cioè divisione dell'angolo in 3 parti uguali), un problema che ha affascinato i matematici fin dal V sec. a.C.

Insieme al problema della trisezione dell'angolo, troviamo in quella stessa epoca, e sempre in Grecia, altri due problemi:

— **la duplicazione del cubo**, e cioè il problema di costruire il lato di un cubo che abbia volume doppio di un cubo dato;
— **la quadratura del cerchio**, cioè il problema di costruire il lato del quadrato avente la stessa area di un cerchio dato.

Si tratta dei tre "famosi" problemi dell'antichità, dei problemi che ebbero una particolare importanza nella storia del pensiero greco.

La difficoltà nel risolvere questi problemi veniva, essenzialmente, da una limitazione che i pensatori greci imponevano ai loro strumenti d'indagine: la risoluzione doveva essere eseguita *usando solo la riga e il compasso*.

Più che di problemi concreti, pratici, si trattava, per i Greci, di questioni teoriche in cui era soprattutto importante l'esattezza dei concetti e la scelta dei metodi di soluzione. Bisognerà aspettare fino al sec. XIX perché questioni geometriche che sembrano semplici e di poco interesse vengano del tutto chiarite: non si può risolvere il problema della trisezione dell'angolo e nemmeno quello della duplicazione del cubo con i soli strumenti riga e compasso; e questo, per un fatto algebrico: per il fatto che questi due problemi portano ad equazioni di 3° grado, e sono solo le equazioni di 2° grado che si risolvono usando esclusivamente riga e compasso.

Quanto al problema, fuori dubbio più importante, della quadratura del cerchio, la sua soluzione è intimamente legata alla natura del numero $\pi$, visto che l'area del cerchio è data da $A=\pi r^2$. È solo alla fine del 1800 che fu, anche in questo caso, dimostrato un teorema negativo; questo: il numero $\pi$ non è soluzione di nessuna equazione algebrica, e non può quindi essere costruito esattamente un segmento lungo $\pi$ facendo uso di soli strumenti elementari.

Ma torniamo al problema della trisezione di un angolo: esso è legato al problema della duplicazione del cubo per un fatto algebrico. Consideriamo dunque tutti e due i problemi dal punto di vista delle equazioni a cui danno luogo.

**Duplicazione del cubo**

Se il cubo dato ha volume uguale ad 1, il volume del cubo doppio deve essere uguale a 2. Se con $x$ si indica lo spigolo del cubo doppio dovrà essere:

$$x^3=2$$

e cioè

$$x^3-2=0.$$

Si deve quindi risolvere un'equazione di 3° grado.

**Trisezione dell'angolo**

Se è dato l'angolo $\theta$ e vogliamo costruire l'angolo $\frac{\theta}{3}$ (Fig. 7), scriviamo:

$$\theta=3\alpha \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{\theta}{3}=\alpha.$$

Avremo, in base alle formule di triplicazione (5),

$$\cos\theta=\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

e, indicando $\cos 3\alpha=k$,

$$k=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

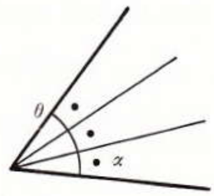


Fig. 7

Si trova dunque l'incognita $\cos\frac{\theta}{3}=z$ risolvendo l'equazione di 3° grado

$$4z^3-3z=k$$

ossia

$$4z^3-3z-k=0.$$

Si conclude che i due problemi — duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo — conducono a risolvere equazioni di 3° grado.

Ora, è stato dimostrato che un problema non si può risolvere graficamente con riga e compasso se, tradotto algebricamente, dà luogo ad equazioni di grado superiore al 2°. Per avere un'idea di questa dimostrazione "negativa", basta riflettere che, con la geometria analitica, si possono tradurre in equazioni di 1° o di 2° grado i seguenti problemi:

— retta che congiunge due punti;
— punto d'intersezione di due rette;
— cerchio di centro e raggio assegnato;
— punti d'intersezione di retta e cerchio;
— punti d'intersezione di due cerchi.

E questi sono i soli problemi che si risolvono usando esclusivamente la riga e il compasso.

## 4. Formule per risolvere triangoli valendosi delle tavole logaritmo-trigonometriche

Fino a poche decine di anni fa i calcolatori tascabili non erano diffusi, e perciò i calcoli venivano svolti valendosi delle tavole dei logaritmi: queste consentono, fra l'altro, di trasformare le moltiplicazioni e le divisioni in addizioni e sottrazioni. In particolare, per risolvere i triangoli, si usavano le tavole logaritmo-trigonometriche.

È chiaro che, per risolvere triangoli svolgendo calcoli tramite i logaritmi, è opportuno lavorare il più possibile con espressioni che contengono moltiplicazioni e divisioni. Ma, quando di un triangolo si conoscono i tre lati o due lati e l'angolo compreso, e si ricorre al teorema del coseno, si ottengono delle formule che comprendono addizioni e sottrazioni. Per trasformare queste formule in altre calcolabili con i logaritmi, ci si basa sulle *formule di Briggs*[1] e sul *teorema di Nepero*[2].

[1] Henry Briggs (1561-1639), matematico inglese, fu il primo a compilare una tavola di logaritmi decimali dei numeri da 1 a 1000, calcolati ciascuno con 14 cifre dopo la virgola.

[2] John Napier (1550-1617), ricco proprietario terriero scozzese, fu il primo a pubblicare un'opera sui logaritmi.

**Formule di Briggs**

Le formule di Briggs possono sostituire il teorema del coseno quando, di un triangolo, sono noti i lati $a$, $b$, $c$. Per determinare, per esempio, l'angolo $\alpha$, si procede come segue.

I) Si tiene presente il teorema del coseno (p. 49), scrivendo

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

II) Si tengono presenti le seguenti formule di bisezione

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dove risulta

$$0<\alpha<180^\circ \quad \text{ossia} \quad 0<\frac{\alpha}{2}<90^\circ,$$

dato che $\alpha$ è angolo di un triangolo. Sarà quindi:

$$\cos\frac{\alpha}{2}>0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}>0.$$

III) Si confrontano le espressioni ottenute al punto II con quella scritta al punto I e si scrive:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}.$$

IV) Si tengono presenti i seguenti prodotti notevoli

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

e si scrive:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}.$$

V) Si indica con $2p$ il perimetro del triangolo; si ha così:

$$a+b+c=2p$$
$$b+c-a=2(p-a)$$
$$a-b+c=2(p-b)$$
$$a+b-c=2(p-c)$$

e si può scrivere:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

VI) Ricordando infine che risulta

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

avremo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

e semplificando:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Analoghe formule si trovano, relativamente agli angoli $\frac{\beta}{2}$ e $\frac{\gamma}{2}$. Si ottengono così le *formule di Briggs*, che qui riscriviamo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}} \\ \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{cases}$$

**Teorema delle tangenti o di Nepero**

Ci si vale di questo teorema, che deriva dal teorema dei seni, quando si deve risolvere un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso. Ecco come si procede.

I) Si ricorda il teorema dei seni

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma},$$

e si fissa l'attenzione su una delle uguaglianze, per esempio

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

II) Si ricorda che in una proporzione la differenza dei due primi termini sta alla loro somma come la differenza degli altri due termini sta alla loro somma; e cioè:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}.$$

III) Si riscrive il 2° membro di quest'ultima uguaglianza valendosi delle formule di prostaferesi (vedi p. 117), e cioè:

$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\cos\frac{p-q}{2}\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.$$

Si ha allora, ponendo

$$p=\alpha \qquad \text{e} \qquad q=\beta,$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

IV) Si tiene presente che, per qualunque angolo $\alpha$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

e si scrive:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Si osserva che le formule potrebbero perdere significato nei seguenti casi:

— non esiste $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, cioè

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90° \qquad \text{ossia} \qquad \alpha+\beta=180°;$$

— non esiste $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, cioè

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=90°, \qquad \text{ossia} \qquad \alpha-\beta=180° \rightarrow \alpha=180°+\beta;$$

— la frazione perde significato perché il denominatore vale zero, cioè

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

ossia

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \rightarrow \alpha+\beta=0.$$

Ma tutte queste situazioni non si verificano certamente se $\alpha$ e $\beta$ sono le ampiezze di due angoli di un triangolo, cioè se risulta:

$$\begin{array}{lcl} 0°<\alpha<180° & & 0°<\alpha+\beta<180° \\ 0°<\beta<180° & \text{e} & 0°<\alpha+\gamma<180° \\ 0°<\gamma<180° & & 0°<\beta+\gamma<180°. \end{array}$$

Si conclude che per un triangolo qualunque sono sempre valide le formule ora trovate.

V) Si ricorda che per gli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ di un triangolo risulta:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

ossia

$$\alpha+\beta=180°-\gamma$$

da cui

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}.$$

Si può allora scrivere:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right).$$

VI) Si ricorda infine la proprietà seguente relativa agli angoli complementari:

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$$

e si scrive:

$$\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Si ottiene così la relazione:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

e infine

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

In modo del tutto analogo si trovano le relazioni per le altre coppie di lati.

Ecco dunque le tre relazioni che costituiscono *il teorema delle tangenti o di Nepero*:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$