7
I fondamenti della matematica

Parte prima
I numeri e l'infinito

Parte seconda
Il metodo assiomatico

Paradossi e dubbi nel mondo dell'infinito e in quello della logica

Due numeri particolari sono comparsi in alcuni capitoli di questo volume: il numero π, *a proposito della lunghezza e dell'area del cerchio, e il numero* **e**, *a proposito della legge esponenziale come base dei logaritmi naturali.*

Si è detto, dei numeri π *ed* **e**, *che sono irrazionali, che, cioè, non possono essere espressi nella forma* $\frac{p}{q}$, *dove p e q sono interi; si è detto che, però, sono di un tipo diverso da irrazionali come* $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt[3]{5}$.

Nelle pagine che seguono vogliamo indagare sulla loro natura; scopriremo che "la particolarità" dei numeri π *ed* **e** *rappresenta, invece, una "generalità":* π *ed* **e** *sono due esemplari della "razza più comune" dei numeri.*

Cominciamo da un po' di storia: il numero π, *di cui alcune approssimazioni furono date da Egiziani e Babilonesi fin dal 1800 a.C., fu calcolato da Archimede confrontando la lunghezza della circonferenza con i perimetri di poligoni iscritti e circoscritti, fino a trovare queste limitazioni*

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}.$$

Del numero **e**, *nato molto più tardi con l'introduzione dei logaritmi naturali (Nepero, 1614), le prime dodici cifre decimali furono determinate dal matematico inglese R. Cotes nel 1714; si ha:*

$$e=2,718281828459\ldots$$

Ma la natura di questi due numeri comincia ad essere chiarita solo alcuni anni dopo: nel 1737 Eulero dimostra che **e** *è un numero irrazionale, e nel 1761 Lambert dimostra l'irrazionalità di* π.

Fin qua, una scoperta importante ma... niente di sconvolgente! Lo sconvolgente si verifica quando, più di un secolo dopo, e cioè alla fine dell'Ottocento, si scopre che i numeri irrazionali π *ed* **e** *hanno, però, una natura diversa da altri numeri irrazionali ben noti, come, per esempio,* $\sqrt{2}$ *o* $\sqrt[3]{2}$ *o* $\sqrt{4+\sqrt{5}}$. *Ecco in cosa "diversificano": i numeri prima indicati sono soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi; per esempio:*

$\sqrt{2}$	*può provenire dall'equazione*				$x^2-2=0$
$\sqrt[3]{2}$	»	»	»	»	$x^3-2=0$
$\sqrt{4+\sqrt{5}}$	»	»	»	»	$x^4-8x^2+11=0$

Per i numeri π *ed* **e**, *invece, non esistono delle equazioni algebriche che li "generano". Ai numeri che hanno questa strana natura, una natura già intuita da Eulero, fu dato il nome di* ***numeri trascendenti***, *perché – come diceva appunto Eulero – «trascendono la possibilità dei metodi algebrici»; furono chiamati, invece,* ***algebrici*** *i numeri soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti interi.*

È sempre alla fine dell'Ottocento che si arriva ad una chiarificazione dei vari insiemi di numeri via via introdotti, e cioè dei ***naturali***, *degli* ***interi relativi***, *dei* ***razionali*** *e degli* ***irrazionali***, *che costituiscono, tutti, l'insieme dei* ***numeri reali***. *Per confrontare questi vari insiemi, ovviamente infiniti, ci si rifà alle proprietà degli insiemi di un numero finito di elementi, e si comincia col sottolineare una proprietà "elementare" che caratterizza tali insiemi; questa: due insiemi A e B di oggetti corrispondono allo stesso numero, cioè definiscono lo stesso numero, indipendentemente dalla qualità degli oggetti, se è possibile porli in* ***corrispondenza biunivoca***, *in una corrispondenza, cioè, che ad ogni elemento di A faccia corrispondere un elemento di B, e viceversa. Per esempio, gli insiemi A e B, rappresentati* *nello schema possono porsi in corrispondenza biunivoca e, da questo fatto,*

$$\begin{array}{lllllllll} A: \{x & x & x & x\} & \qquad & C: \{x & x & x & x\} \\ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & & & \\ B: \{0 & 0 & 0 & 0\} & \qquad & D: \{0 & 0 & 0\} & \end{array}$$

"nasce" il numero 4; si dice anche che C e D sono **equipotenti.** *Gli insiemi C e D non sono equipotenti. Confrontando poi B con D, si mette in luce una proprietà evidente:* ***il tutto non può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte****.*

Ora, quando si passa da insiemi con un numero finito di elementi a insiemi con un numero infinito, come sono gli insiemi numerici, se si applicano le considerazioni elementari prima enunciate, si arriva a... qualcosa che non torna, a delle contraddizioni. Lo aveva osservato Galileo, e riferiamoci a qualche esempio che si trova nei suoi scritti. Galileo considera i numeri naturali e i loro quadrati

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots \end{array}$$

È chiaro che i quadrati sono di meno, cioè costituiscono solo una parte dei naturali; però è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra i numeri e i loro quadrati. È facile rendersene conto dallo schema. E allora? come si spiega?

E un altro esempio, sempre preso da Galileo: è un esempio di geometria. Questo: le circonferenze di centro O (fig. 1) sono l'una doppia dell'altra, però i loro punti si possono mettere in corrispondenza biunivoca; basta proiettare l'una sull'altra dal centro comune, il punto O. E allora?

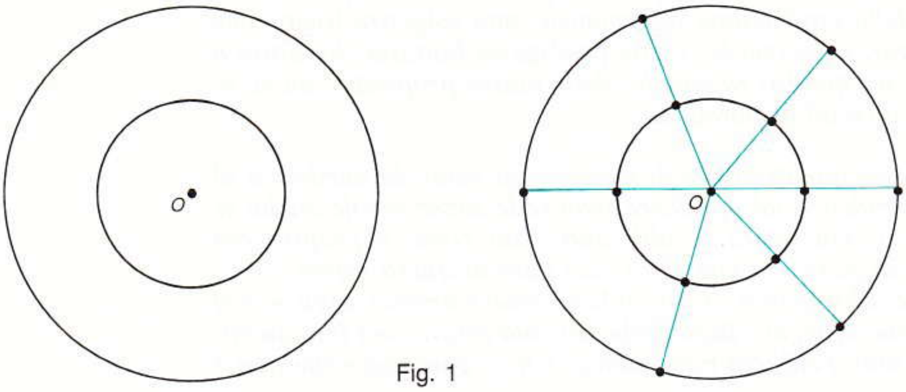


Fig. 1

Davanti a questi paradossi ***del tutto e della parte****, Galileo dà una spiegazione "negativa"; dice: «nel confrontare due infiniti si incontrano delle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate». Gli infiniti sono dunque per Galileo «incomprensibili dal nostro intelletto finito» perché «gli attributi di uguale, maggiore e minore non hanno luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate».*

Devono passare 250 anni perché, alla fine dell'Ottocento, per opera dei matematici Richard Dedekind e Georg Cantor, venga fatto un passo decisivo nello studio degli insiemi infiniti: alla conclusione negativa data da Galileo viene contrapposta una decisione ardita, un nuovo modo di pensare. Partendo "dall'evidenza delle cose", e cioè dal fatto che insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca anche se hanno un numero diverso di elementi, Dedekind pone questa definizione: «Un sistema si chiama ***infinito*** *se è* ***equipotente*** *a una sua parte propria; nel caso* *opposto si chiama **finito**».*

E così, riprendendo gli esempi di Galileo, si dirà che: l'insieme dei naturali è equipotente, o ha la stessa potenza, dell'insieme dei quadrati; e che sono equipotenti l'insieme dei punti delle due circonferenze concentriche.

L'idea geniale di Cantor è stata, in quegli stessi anni, di creare una "gerarchia" nelle potenze degli insiemi infiniti, una specie di classificazione degli insiemi "per potenza". Si vedono così estesi ad insiemi infiniti quei caratteri di "maggiore" o di "minore" che caratterizzano il confronto di insiemi finiti. Ci si trova, con l'introduzione coraggiosa di queste idee, davanti a situazioni sbalorditive, a «qualcosa al di là del credibile», come scriveva Cantor in una lettera a Dedekind; davanti a situazioni che, però, sono giustificate dalla logica.

*Perché si scopre non solo che i naturali sono tanti quanti i loro quadrati, ma anche che i razionali sono altrettanto numerosi dei naturali, e anche i numeri algebrici hanno questa proprietà: questi insiemi, così diversi, hanno tutti la stessa potenza. E, invece, i numeri reali sono «molto più numerosi», e ciò è dovuto al fatto che il loro tessuto è composto di numeri trascendenti (di numeri, cioè, come π ed **e**); e quindi gli algebrici, siano essi irrazionali o razionali (e perciò anche interi), costituiscono "un niente", una misera infiltrazione in una massa compatta di trascendenti. Ma, ... è difficile rendersene conto. Forse un'immagine può, in qualche modo, sostenere il pensiero: se un punteruolo potesse operare dei fori saltellando lungo una retta dove sono rappresentati i numeri reali, sarebbe veramente improbabile che si trovasse a bucare un numero naturale o un razionale o un irrazionale algebrico come $\sqrt{2}$; avrebbe invece una grande probabilità di bucare la retta in punti trascendenti.*

Nel leggere la Parte prima di questo capitolo sarete colpiti da due atteggiamenti tipici della costruzione matematica: una esigenza logica *che domina ogni passaggio, ogni regola, e* una prodigiosa fantasia *che porta a inventare, sempre in un quadro razionale, delle nuove proprietà, anche se queste conducono a incredibili paradossi.*

Abbiamo visto quanti errori di matematica sono da attribuirsi al fatto che l'uomo ha tendenza ad applicare sempre le stesse regole anche se cambia il materiale su cui opera; e abbiamo visto come è proprio col modificare le ipotesi di partenza che sono stati corretti questi errori.

Ci si chiede allora: non ci potrebbero essere ancora degli errori che fino ad oggi ci sono sfuggiti? Basterebbe un solo errore, ma fondamentale, per far crollare tutto l'edificio matematico! Chi ci garantisce che non è così?

L'immagine della matematica come scienza assolutamente certa e, quindi, come modello per tutte le altre discipline, quale l'aveva indicata alla fine del Settecento il filosofo Emanuele Kant, viene oscurata dall'ombra del dubbio. Esattamente dopo un secolo ci si trova nella situazione opposta. Ci si chiede: sarà vero che tutti i risultati matematici finora ottenuti sono sicuri, o non accadrà che i posteri scopriranno degli errori e sorrideranno allora della nostra ingenuità?

*Nell'anno 1900, il più grande matematico dell'epoca, il tedesco David Hilbert, sostenne, durante un Congresso di matematica, che era giunto il momento per affrontare un nuovo studio; questo: riflettere **sui fondamenti della matematica**, per restituirle il ruolo di scienza inoppugnabile. È in questa direzione che si sono svolte le ricerche più originali del nostro secolo; i risultati a cui si è giunti nel sottoporre al vaglio di una logica stringente i fondamenti della matematica sono davvero inaspettati!*

È di queste ricerche che viene data un'idea nella Parte seconda del capitolo.

7. Parte prima

I numeri e l'infinito

1. Insiemi equipotenti. Il concetto di numero naturale
2. Insiemi finiti e insiemi infiniti
3. L'insieme dei razionali è numerabile
4. Dall'insieme dei razionali all'insieme dei reali. La scrittura decimale
5. I numeri irrazionali come decimali illimitati. L'insieme dei numeri reali
6. I numeri reali sulla retta
7. I numeri reali costituiscono un insieme non numerabile
8. Numeri algebrici e numeri trascendenti
9. Ancora dei paradossi: un quadrato ha tanti punti quanti ne ha il suo lato!

Nel ripensare ai vari argomenti svolti in questo volume ci rendiamo conto che non c'è capitolo in cui non siano intervenuti, come protagonisti, i numeri: gli interi, i razionali, i reali.

Spesso però, trascinati dall'argomento, non ci siamo fermati sulla natura dei numeri con cui si lavorava; una natura che, se si fa uso del calcolatore, riesce ancor più difficile identificare, dato che sul visualizzatore i numeri decimali illimitati, siano essi periodici o no, si presentano in generale con 7 cifre dopo la virgola. Altre volte, invece, abbiamo sottolineato con la qualifica "speciale" di trascendente dei numeri, come π ed e, che si erano presentati in questo o quel problema, ma poco si è detto al di là del nome.

Ci proponiamo in queste pagine di mettere un po' d'ordine al concetto base di tutta la matematica, il numero, fermandoci, in particolare, sui numeri reali.

1. Insiemi equipotenti. Il concetto di numero naturale

Sono studi di carattere linguistico e antropologico che hanno portato a capire la faticosa nascita del numero. Questi studi hanno mostrato che in molte lingue primitive vengono, ancor oggi, usati dei vocaboli diversi per indicare lo stesso numero, a seconda della qualità degli oggetti a cui il numero si riferisce; questa diversità di vocabolo per indicare lo stesso numero fa capire l'attaccamento del numero al particolare oggetto.

E, del resto, anche nelle lingue evolute, come l'italiano, si nota qualche volta il riferimento del numero a questo o a quel concreto: il numero 2, per esempio, si può esprimere come paio, coppia, bis, doppio, ..., ma questi vocaboli non si usano indifferentemente! Si dice "un paio di scarpe" e non "una coppia di scarpe", e si dice "una coppia di sposi" e non "un paio di sposi"!

Il vocabolo, dunque, risente ancora dell'oggetto a cui si riferisce.

Ci si rende conto che l'acquisizione del concetto di numero, spogliato dal suo attaccamento all'oggetto, non è stata, certamente, né rapida né facile. Per arrivare a questo concetto si deve fare astrazione dalla qualità del concreto, cogliendo, nel confrontare insiemi diversi, quel "quid" che hanno in comune: così, per esempio, confrontando due insiemi A, B, composti uno di 4 tavoli e uno di 4 sedie (vedi schema), cioè ponendoli *in corrispondenza biunivoca*, si arriva al concetto di numero 4; si crea in tal modo un ente astratto e, insieme, un unico vocabolo: quattro.

A:	x	x	x	x	i due insiemi A e B
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	sono equipotenti
B:	0	0	0	0	

Il concetto di numero, creato in questo modo, astraendo dalla qualità dell'oggetto, poggia dunque sul principio di *corrispondenza biunivoca: ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B, e viceversa*. I due insiemi A e B, si dicono **equipotenti**.

2. Insiemi finiti e insiemi infiniti

Abbiamo visto nel paragrafo precedente come il concetto di numero nasca dall'equipotenza di più insiemi, e cioè dalla possibilità di porre in corrispondenza biunivoca gli elementi di più insiemi.

È chiaro che due insiemi A e B non sono equipotenti se A contiene più elementi di B; quindi: *un insieme non può essere equipotente a una sua parte*.

Ora, se estendiamo ad insiemi infiniti questo concetto elementare di equipotenza, si arriva, in modo del tutto logico, ad asserire dei fatti che... sembrano davvero illogici. Ecco qualche esempio.

a) Risulta che sono equipotenti l'insieme degli interi positivi e quello dei numeri pari, e questo perché – riflettiamo sullo schema seguente – ad ogni numero intero si può far corrispondere il suo doppio, e viceversa. Accade quindi che un insieme (quello degli interi) è equipotente ad una sua parte (l'insieme dei pari)!

1	2	3	4	5	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
2	4	6	8	10	…

b) Risulta che sono equipotenti, sempre perché si può stabilire una corrispondenza biunivoca, l'insieme degli interi positivi a partire da 1, e quello sempre degli interi, ma a partire da 2, come si vede chiaramente nello schema seguente:

1	2	3	4	5	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
2	3	4	5	6	…

Ancora una volta, dunque, sono equipotenti un insieme e una sua parte!

c) Risultano anche equipotenti l'insieme degli interi positivi e l'insieme dei quadrati di questi numeri (vedi schema), perché, ancora una volta, possono mettersi in corrispondenza biunivoca.

1	2	3	4	5	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
1	4	9	16	25	…

È chiaro, invece, che non sono equipotenti l'insieme degli interi relativi (positivi e negativi) e quello dei punti di una retta, dove sia fissata un'origine e un'unità di misura (fig. 1);

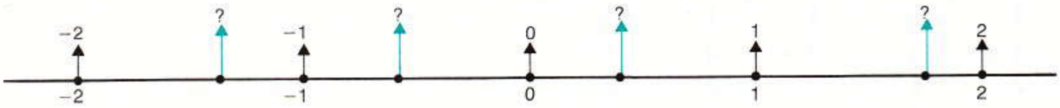


Fig. 1

e questo perché vi sono, sulla retta, tanti tratti dove si trovano punti a cui non corrisponde nessun numero intero. È chiaro che in quei tratti troveranno posto dei punti che corrispondono a numeri razionali; per esempio numeri come $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{4}$, … (fig. 2).

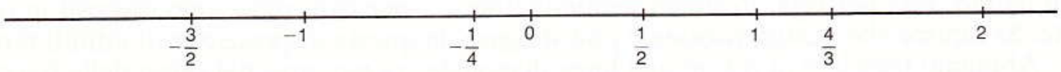


Fig. 2

Si osserva subito che fra due razionali, per esempio fra $\frac{1}{2}$ e 1 (fig. 3), cade certamente un razionale; questo:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right):2=\frac{3}{4},$$

cioè il numero ottenuto come media aritmetica dei due numeri dati.

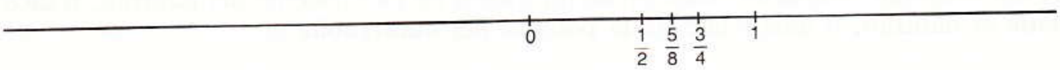


Fig. 3

Ma anche fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ ci sarà un altro razionale; sarà il numero:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right):2=\frac{5}{8},$$

che si trova a metà. E così fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{8}$ ci sarà ...

Ci si rende conto che, fra due numeri razionali, per quanto vicini, se ne può sempre inserire un altro. Si esprime questo fatto dicendo che **l'insieme dei numeri razionali, o dei punti razionali, è denso.**

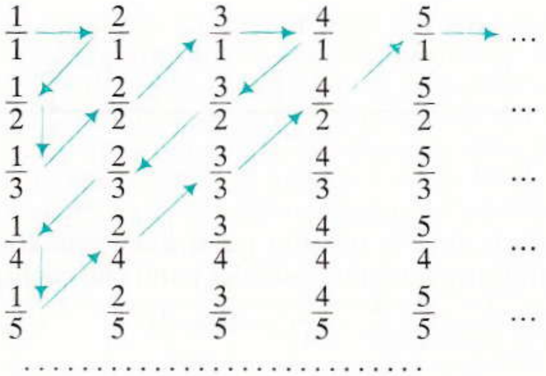
Sembra davvero che questa "densità" non lasci nessun vuoto, nessuno spazio libero, ma vedremo in seguito che la nostra percezione non è abbastanza acuta.

3. L'insieme dei razionali è numerabile

C'è un'altra proprietà che sembra contrastare con l'intuizione: si scopre che i razionali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con gli interi, cioè sono "tanti quanti gli interi"; si dice che **i razionali formano un insieme numerabile**.

Questa proprietà sembra davvero strana dato che l'insieme dei razionali è *denso*, e non si vede come si possano contare. Per scoprire la proprietà occorre appunto inventare un modo di "contare" i razionali.

Si può procedere così: si scrivono i numeri razionali come è indicato nello schema seguente:



I termini hanno, riga per riga, lo stesso denominatore, e, per ogni riga, sono disposti in ordine crescente. Si capisce che nessun razionale può sfuggire da questa disposizione di infiniti termini.

Abbiamo tracciato in colore una linea diagonale; va percorsa nel senso delle freccie: in tal modo, partendo da $\frac{1}{1}$, la linea passa sopra ogni numero. Quindi i numeri razionali positivi si possono contare disponendoli nel modo seguente.

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{3}{2} \dots$$

Va tenuto presente che la disposizione che abbiamo dato ai razionali **non è** in ordine crescente! Ottenere questo sarebbe impossibile perché risulterebbe in aperto contrasto col fatto che fra due numeri razionali si può sempre inserire un'infinità di altri numeri razionali. Siamo riusciti, tuttavia, a disporre i razionali in una successione ordinata che può essere messa in corrispondenza biunivoca con i naturali, cioè con 1,2,3,... Per esprimere la proprietà che l'insieme dei razionali "contiene" tanti elementi quanti ne ha l'insieme dei naturali, si dice che è **equipotente** ai naturali, o anche che ha la **potenza del numerabile**.

Abbiamo fissato l'attenzione sui *razionali positivi*, ma – è chiaro – si potrebbe, in modo analogo, dare un ordine anche ai *razionali negativi*. Poi, dei due insiemi numerabili, si può formarne uno solo prendendo, per esempio, prima i negativi, poi lo zero, e poi i positivi. Questo esempio fa capire il senso della proprietà generale: **un insieme formato da un numero finito di insiemi numerabili è, ancora, un insieme numerabile.**

4. Dall'insieme dei razionali all'insieme dei reali. La scrittura decimale

A concepire la frazione come numero è di grande aiuto la scrittura in forma decimale. Cominciamo da un esempio numerico. Per scrivere il numero $\frac{2}{7}$ sotto forma decimale eseguiamo la divisione 2:7; si ha

$$\begin{array}{l|l} 2 & 7 \\ \cline{2-2} \;20 & 0{,}285714\ldots \\ \;\;60 & \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Si ottiene un numero periodico, e questo accade sempre perché i resti della divisione devono essere minori del divisore (in questo caso 7), e quindi non appena si ripetono i resti vengono a ripetersi anche le cifre del quoziente[1].

Da un numero razionale $\frac{p}{q}$ *si ha, dunque, un decimale periodico.*

Viceversa, è facile passare dalla scrittura decimale di un numero alla frazione generatrice. Per capire come si procede, riferiamoci anche ora a un caso numerico; se si ha il numero periodico

$$0{,}(2)=0{,}22222\ldots$$

si potrà scrivere come

$$0{,}2+0{,}02+0{,}002+\ldots$$

ossia come

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots$$

Il numero periodico 0,(2) è dunque la somma di una progressione geometrica di ragione $q=\frac{1}{10}$, e cioè minore di 1, e avente come primo termine $\frac{2}{10}$.

Ci si può quindi valere della formula che dà la somma dei termini di una progressione geometrica quando la ragione è minore di 1 (cap. 3, Parte terza, paragrafo 2), e cioè

$$S=\frac{a}{1-q};$$

[1] È chiaro che un numero decimale limitato, come per esempio 1,2, può essere considerato come un periodico di periodo "zero"; si può scrivere infatti

$$1{,}2=1{,}2000000\ldots$$

si ottiene

$$\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$$

Il numero periodico 0,(2) corrisponde quindi al numero razionale $\frac{2}{9}$.

In generale: **ogni numero razionale può essere rappresentato come un numero decimale illimitato periodico, e, viceversa, ogni numero decimale periodico rappresenta un numero razionale.**

5. I numeri irrazionali come decimali illimitati. L'insieme dei numeri reali

Dalla conclusione del paragrafo precedente risulta che: **se un numero decimale illimitato non è periodico, ad esso non può corrispondere un numero razionale.**

Ora, non è difficile concepire un numero decimale senza periodo; per esempio, i numeri

0,1234567891011...
0,135791113...
0,24681012...
0,1471013...,

di cui è facile cogliere la legge di costruzione, non sono certamente periodici.

A un numero decimale illimitato non periodico si dà il nome di numero irrazionale.

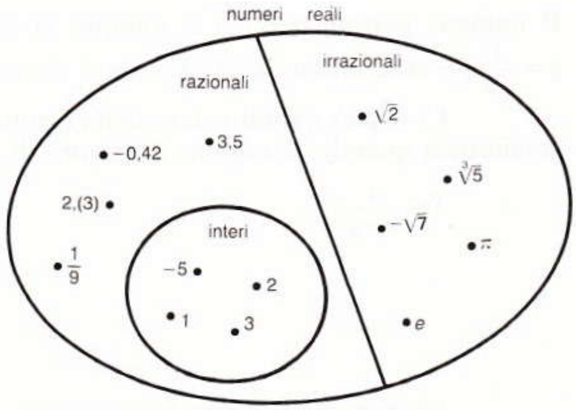
È facile rendersi conto che questa creazione di un nuovo tipo di numero non è solo frutto di fantasia, ma è legata, anche, a problemi matematici. Si dimostra, per esempio, che $\sqrt{2}$, che esprime la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 (fig. 4), non è un numero razionale, e cioè non si può scrivere nella forma $\frac{p}{q}$, con p e q numeri interi; scrivendo $\sqrt{2}$ in forma decimale si ottiene il numero decimale illimitato non periodico

1,4142136...

Sono di questa natura i numeri $\sqrt[3]{2}$ (lunghezza del lato del cubo di volume 2), π (lunghezza della circonferenza di diametro 1) ed e (base dei logaritmi naturali).

Numeri razionali e numeri irrazionali formano l'insieme dei **numeri reali**. I numeri reali si scrivono dunque, nel sistema decimale, come decimali illimitati; contengono, come caso particolare, i decimali periodici, cioè i razionali, e questi contengono, come caso particolare, gli interi. La situazione è illustrata nello schema a fianco.

Fig. 4



6. I numeri reali sulla retta

Nell'interpretazione dei numeri come punti di una retta, gli irrazionali vengono ad occupare i vuoti invisibili fra razionale e razionale, cioè fra dei numeri così "fitti" che sembrava non dovessero lasciare nessuno spazio libero.

Alcune volte l'identificazione del posto che un irrazionale deve occupare sulla retta è molto semplice: può bastare l'uso della riga e del compasso. Esempi di costruzione di segmenti di lunghezza irrazionale sono descritti nelle figg. 5, 6, 7, dove abbiamo disegnato una retta r fissando un origine 0 e una unità di misura:

1) Si disegna il quadrato di lato 1; la diagonale di questo quadrato è lunga $\sqrt{2}$. Con il compasso si riporta il segmento diagonale sulla retta. Il numero $\sqrt{2}$ cade in un punto che non corrisponde a nessun numero razionale.

2) Si disegna, con base lunga 1, un rettangolo di altezza 2; la diagonale di questo rettangolo è lunga $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Con il compasso si riporta questo segmento sulla retta r: il numero $\sqrt{5}$ va ad occupare un "vuoto" lasciato dai razionali.

3) Si disegna, su una base lunga 0,5, un rettangolo di altezza 3; la diagonale di questo rettangolo è lunga $\sqrt{3^2+0{,}5^2}=\sqrt{9{,}25}$. Con il compasso si riporta questo segmento sulla retta r, riempiendo così, ancora una volta, un "vuoto".

È chiaro che, sulla retta, oltre ai punti che corrispondono a numeri sotto il segno di radice quadrata, si troveranno numeri sotto il segno di radice cubica,...; questi corrispondono agli estremi di segmenti più difficili da costruire, per cui, cioè, non basta la riga e il compasso. E si troveranno anche punti che corrispondono ai numeri π ed e.

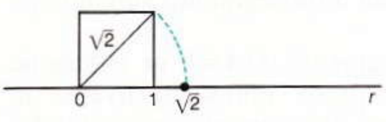


Fig. 5

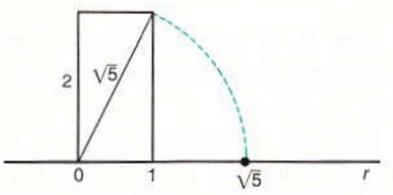


Fig. 6

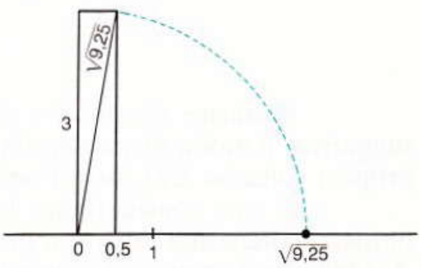


Fig. 7

Bastano i pochi esempi che abbiamo dato per capire come la retta può riempirsi di numeri irrazionali (fig. 8).

Fig. 8

Le successive estensioni degli insiemi numerici portano dunque a rappresentare sulla retta i numeri via via introdotti. È proprio per dare agli insiemi numerici quella *continuità*, tipica della retta, che, con un atto ardito ma che rispondeva sia alla logica che all'intuizione, si è stabilito come **assioma** la seguente proprietà:

Ogni punto della retta corrisponde a un solo numero reale, e, viceversa, ogni numero reale può essere rappresentato in un unico modo con un punto della retta.

Questo **assioma della continuità** porta il nome dei matematici Richard Dedekind e Georg Cantor.

7. I numeri reali costituiscono un insieme non numerabile

Abbiamo visto che i razionali, pur formando un insieme *denso*, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, e quindi *i razionali costituiscono un insieme numerabile*. Si è detto che questa proprietà, che lascia fuori dubbio perplessi, è dovuta al fatto che i due insiemi, dei razionali e dei naturali, sono formati da infiniti elementi.

Viene allora spontaneo di pensare che anche l'insieme dei reali sia numerabile, che cioè si possa mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali. Vedremo che questo fatto non si verifica; la natura dei reali è diversa, è ancora più difficile a "stringere".

Per dimostrare che l'insieme dei reali non è numerabile, non c'è bisogno di considerare tutti i numeri reali, cioè tutti i punti di una retta, ma basta limitarsi ai reali compresi in un certo intervallo, per esempio fra 0 e 1. Ecco perché: le figg. 9 e 10 fanno capire che si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra un segmento AB e un segmento CD, anche se sono di lunghezza diversa.

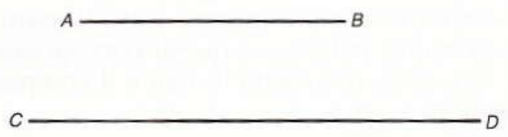


Fig. 9

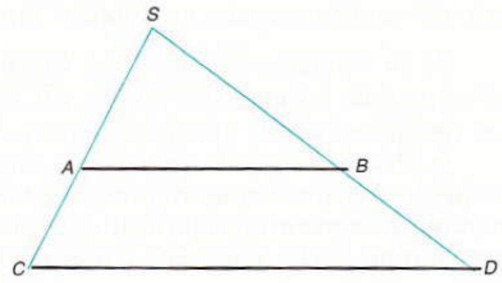


Fig. 10

Si unisce C con A e D con B. Il punto d'intersezione di queste due rette – sia S – suggerisce il modo di stabilire la corrispondenza: basta proiettare da S un segmento sull'altro; è proprio come se CD fosse l'ombra di AB.

E ora consideriamo la fig. 11: abbiamo disposto il segmento $OA=1$ in posizione perpendicolare alla retta r; il punto S, centro di proiezione, è stato preso "allo stesso livello" di A. Quando si proietta il segmento OA su r ci si accorge che ai punti del segmento corrispondono i punti della semiretta di origine O; e, viceversa, i punti della semiretta si possono vedere "concentrati" nei punti di un segmento di lunghezza uguale ad 1.

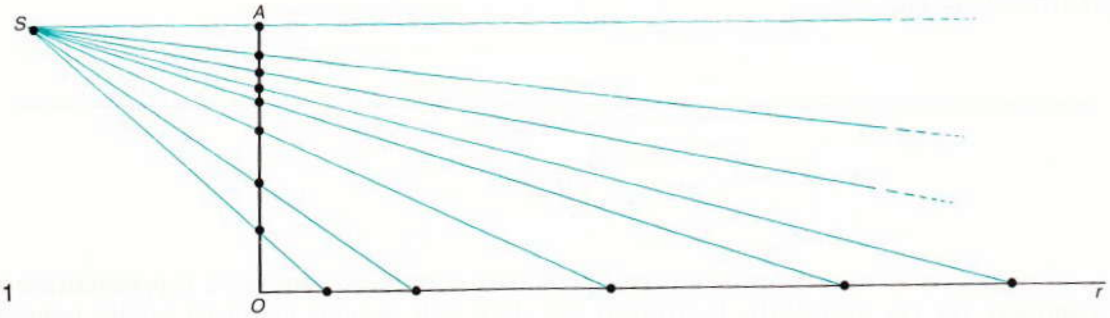


Fig. 11

Consideriamo allora i numeri dell'intervallo 0-1 e scriviamoli in forma decimale; si avrà:

$$\begin{array}{l} 0{,}a_1a_2a_3\ \ldots \\ 0{,}b_1b_2b_3\ \ldots \\ 0{,}c_1c_2c_3\ \ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \qquad (1)$$

dove $a_1a_2...$, $b_1b_2...$, $c_1c_2...$, rappresentano le cifre fra 0 e 9.

Immaginiamo di avere scritto nel quadro (1), che si estende all'infinito, *tutti i numeri reali dell'intervallo fra 0 e 1, nessuno escluso.*

Vogliamo far vedere che questo insieme non è numerabile, cioè che non si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra questo insieme e quello dei naturali. Si ragiona per assurdo: se quell'insieme fosse numerabile, i numeri (1) si potrebbero ordinare così

$$\begin{aligned} &1 \leftrightarrow 0{,}a_1a_2a_3\ ... \\ &2 \leftrightarrow 0{,}b_1b_2b_3\ ... \\ &3 \leftrightarrow 0{,}c_1c_2c_3\ ... \\ &.\ .\ .\ .\ . \end{aligned} \tag{2}$$

facendo cioè corrispondere ad ogni numero della (1) un numero naturale. Ora, nessuno ci vieta di inventare il numero decimale

$$0{,}abc\ ... \tag{3}$$

al modo seguente: si scrive al 1° posto dopo la virgola una qualunque cifra a, ma diversa da a_1; al 2° posto dopo la virgola una cifra b qualunque, ma diversa da b_2; al 3° posto dopo la virgola una cifra c diversa da c_3, e così via. Questo numero da noi inventato è certamente un decimale compreso fra 0 e 1, ma non lo ritroviamo nell'elenco (1): non può essere infatti il primo numero, dato che la prima cifra non è a_1; non può essere nemmeno il secondo numero, dato che la seconda cifra non è b_2, ...

Siamo dunque arrivati a un assurdo e questo proprio perché avevamo supposto di avere contato in quell'elenco *tutti* i numeri reali dell'intervallo fra 0 e 1, nessuno escluso. L'assurdo è dovuto al fatto che avevamo ammesso l'esistenza di una corrispondenza biunivoca con i naturali. E invece... ci siamo ritrovati fra le mani un numero che... sfugge a quella corrispondenza!

Si conclude che **l'insieme dei reali non è numerabile.** Ha dunque un'altra natura dei naturali e quindi anche dei razionali.

L'insieme dei numeri reali è *più potente*: si dice che l'insieme dei reali ha **la potenza del continuo**, volendo così sottolineare il senso della continuità che dà la retta su cui essi trovano la loro immagine.

8. Numeri algebrici e numeri trascendenti

Abbiamo scoperto nel paragrafo precedente che mentre l'insieme dei razionali è numerabile, l'insieme dei reali non lo è. Riflettiamo: questa "proprietà negativa" è evidentemente dovuta all'infiltrazione degli irrazionali; di tutti? Anche dell'innocuo $\sqrt{2}$? Vedremo in questo paragrafo che c'è un altro carattere che distingue in due parti l'insieme dei reali.

I reali si dividono in **numeri algebrici** e **in numeri trascendenti**. Si dice **algebrico un numero che è soluzione di un'equazione algebrica del tipo**:

$$a_1x^n+a_2x^{n-1}+...+a_n=0 \tag{1}$$

dove i coefficienti a_1, a_2, ... a_n sono dei numeri interi.

Ecco qualche esempio:

- le soluzioni di un'equazione algebrica possono essere dei numeri interi, come nel caso delle equazioni

$$x-4=0 \quad \text{da cui} \quad x=4$$
$$x+7=0 \quad \text{da cui} \quad x=-7;$$

- possono essere dei numeri razionali, come nel caso delle equazioni

$$8x+5=0 \quad \text{da cui} \quad x=-\frac{5}{8}$$
$$5x-3=0 \quad \text{da cui} \quad x=\frac{3}{5}.$$

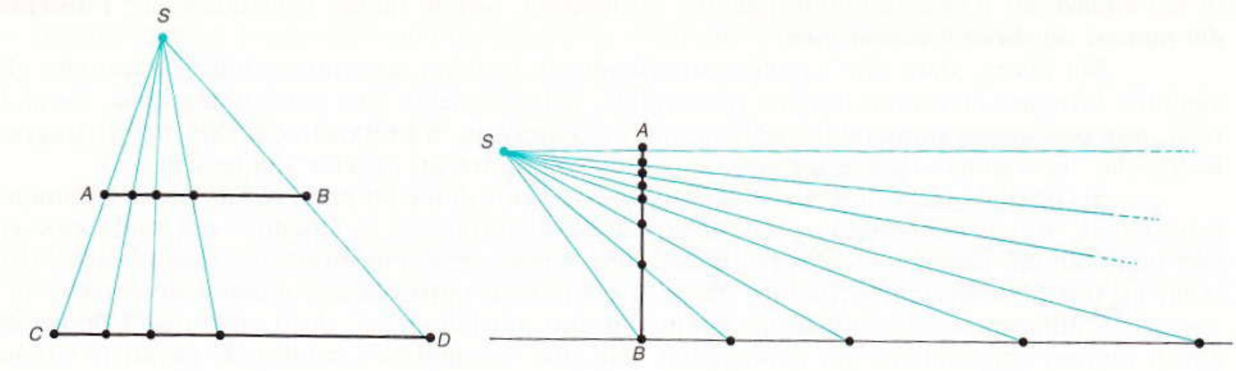


Fig. 14

Questi fatti sembrano davvero sconcertanti. Ma si rimane ancora più sbalorditi quando si scopre che *i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti del suo lato!*

Ecco come si prova: si considera un quadrato, per esempio di lato 1, e si inserisce in un quadrante di un piano cartesiano (fig. 15). Ogni punto P del quadrato ha due coordinate, x e y, date da

$$x=0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$$
$$y=0{,}b_1b_2b_3b_4 \ldots$$

A questa coppia di numeri reali compresa fra 0 e 1 facciamo corrispondere il numero reale

$$z=0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3 \ldots$$

ottenuto alternando le cifre decimali di x con quelle di y. È chiaro che questo numero appartiene al lato del quadrato.

Viceversa, a un numero dell'intervallo fra 0 e 1 dell'asse delle x, come

$$0{,}c_1c_2c_3c_4 \ldots,$$

si può far corrispondere una coppia ordinata di numeri x e y, scrivendo come cifre decimali di x le cifre c di posto dispari, e come cifre di y quelle c di posto pari; il numero dato si spezza dunque così

$$x=0{,}c_1c_3c_5 \ldots$$
$$y=0{,}c_2c_4c_6 \ldots$$

Si ottiene allora, un punto del quadrato.

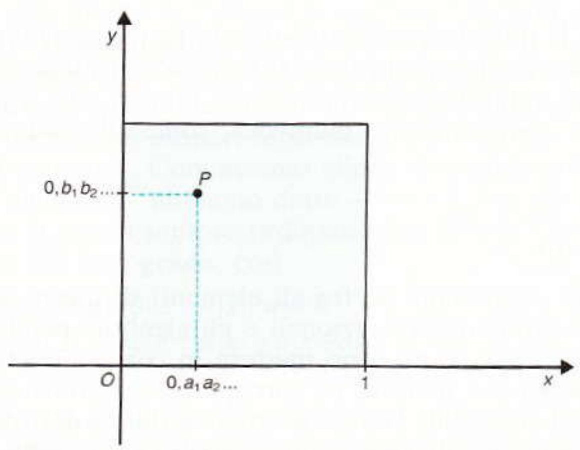


Fig. 15

di tali equazioni, e cioè i numeri algebrici e i naturali. Si può quindi concludere che **l'insieme dei numeri algebrici è numerabile**.

Ma allora, dato che i reali costituiscono un insieme non numerabile, e dato che gli algebrici formano invece un insieme numerabile, l'altro insieme che, con i numerabili, forma i reali, non può essere numerabile: abbiamo infatti osservato, a proposito dei razionali (paragrafo 6), che "la somma" di due insiemi numerabili è sempre un insieme numerabile.

Si conclude che *l'insieme dei non algebrici, e cioè di quei numeri che abbiamo chiamato trascendenti, è non numerabile*; è questo insieme a determinare la "qualità" dei reali, cioè la non numerabilità dei reali. Sono, per così dire, i trascendenti a costituire il "tessuto base" dei reali, un tessuto dove si inseriscono, qua e là come caso particolare, i numeri algebrici.

I numeri trascendenti sono dunque "molto più numerosi" degli algebrici. Eppure di questi numeri trascendenti noi conosciamo solo due "esemplari": π ed e. E gli altri? Come possiamo trovarli?

Esistono delle formule che permettono di *costruire* questi numeri; sono formule trovate solo nei primi decenni del Novecento, e questo fa capire come una tale ricerca sia difficile. Per esempio, è stato dimostrato che sono trascendenti tutti i numeri del tipo

$$a^b$$

dove a è un numero algebrico diverso da zero e da 1 e b è un algebrico irrazionale.

Sono quindi trascendenti i numeri

$$2^{\sqrt{2}} \qquad 3^{\sqrt{2}} \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{5}} \qquad (\sqrt{6})^{\sqrt{7}} \ldots$$

Sono anche trascendenti dei numeri della forma

$$0{,}100100010000 \ldots$$

di cui è facile capire la legge di costruzione

Eppure... questo grande numero di trascendenti riesce difficile vederlo, forse proprio perché non si possono ordinare, e sfuggono quindi a una classificazione. Come "dominarli"?

9. Ancora dei paradossi: un quadrato ha tanti punti quanti ne ha il suo lato!

Abbiamo scoperto che la proprietà evidente «il tutto ha più elementi di una qualunque sua parte» viene a cadere quando dagli insiemi finiti si passa a considerare gli insiemi infiniti. Risulta per esempio che i numeri naturali sono tanti quanti i numeri pari, e questo perché, fra i due insiemi, si può stabilire una corrispondenza biunivoca, come illustriamo ancora una volta:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

Si è detto che due insiemi sono equipotenti se fra gli elementi di questi si può stabilire una corrispondenza biunivoca. Sono equipotenti i razionali e gli algebrici perché – come abbiamo visto – sono entrambi numerabili, cioè si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali. Mentre i reali, non potendosi mettere in corrispondenza con i naturali, hanno una potenza maggiore, la potenza del continuo. Hanno la stessa potenza dei reali, cioè la potenza del continuo, due segmenti di lunghezza diversa, o un segmento e una retta, perché si possono mettere in corrispondenza biunivoca (fig. 14); si dice anche che hanno "lo stesso numero di punti", un'affermazione che appare ancor più sibillina.

Questa corrispondenza biunivoca fra figure che hanno dimensioni diverse come un segmento e un quadrato fa veramente impressione, perché l'intuizione ci porterebbe a credere che un ente a 2 dimensioni, come il quadrato, dovrebbe essere più grande, cioè contenere più punti di un ente a 1 dimensione come il segmento. Lo stesso Cantor, davanti a questa sua scoperta, rimase strabiliato: «lo vedo ma non lo credo!», scriveva al suo amico Dedekind nel 1877.

Ma riflettiamo: la dimostrazione ora data non afferma che le due figure hanno la stessa dimensione; dice solo che i due enti geometrici possono essere posti in corrispondenza biunivoca, sono cioè equipotenti.

Allo stesso modo, poi, con cui si è dimostrato che un segmento può essere messo in corrispondenza biunivoca con una retta, si può far vedere che un quadrato ha la stessa potenza del piano; le figg. 16 e 17 suggeriscono questa corrispondenza.

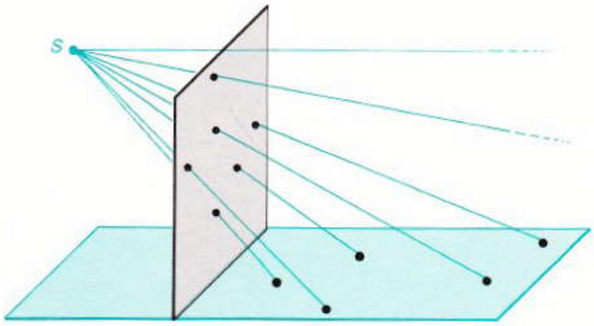


Fig. 16

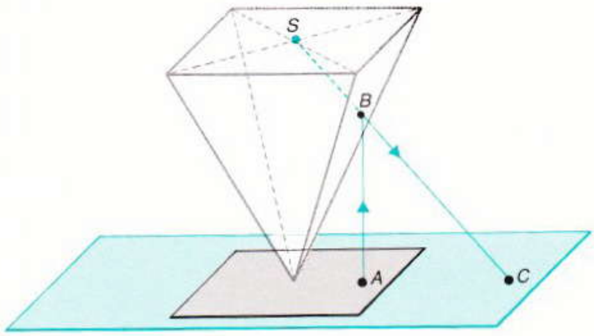


Fig. 17

1. Errori e dubbi nella dimostrazione di alcune proprietà

Abbiamo detto che il numero π è irrazionale trascendente. La dimostrazione della sua irrazionalità fu data dal matematico tedesco Lambert nel 1761, e quella della sua trascendenza fu data nel 1882 da Lindemann, un altro matematico tedesco. Bisogna dunque arrivare a un secolo fa perché sia finalmente chiarita la natura di un numero noto fin dal 2000 a.C., un numero che aveva attirato, proprio perché tanto "riposto", i più grandi matematici di tutti i tempi. Perché π è un numero che sembra di poter "stringere", ma invece sfugge e, spesso, trascina in errore.

Ecco, è proprio questo che vogliamo far vedere: come sia facile cadere in una dimostrazione che porta a un risultato sbagliato. Partiamo dall'espressione seguente:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right),$$

che fu scoperta dal grande matematico e filosofo G.W. Leibniz nel 1674. Non è facile arrivare alla scoperta di questa formula, ma il risultato è veramente semplice, e si ricorda bene: π si ottiene moltiplicando 4 per una somma (quella in parentesi) che è certamente minore di 1, perché da 1 si toglie $\frac{1}{3}$ e poi si aggiunge solo $\frac{1}{5}$, che è minore di $\frac{1}{3}$; si toglie poi $\frac{1}{7}$ e si aggiunge solo $\frac{1}{9}$, ...

È proprio valendosi di questa formula che sembra facile arrivare a dimostrare che π è un numero razionale. È chiaro che ci si deve basare su proprietà della somma di numeri razionali; e precisamente su queste:

1) la somma di due razionali è un razionale; si ha infatti

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd};$$

2) la somma di un numero qualunque n di razionali è razionale. Questo è evidente perché, valendosi della proprietà associativa, alla somma dei primi due razionali, che è, per la proprietà 1), un numero razionale, si aggiunge un altro razionale, ottenendo quindi un razionale. Così procedendo, ci si riporta sempre alla proprietà 1) e cioè alla somma di due razionali.

Applicando ora questo ragionamento alla formula di Leibniz, in cui π è espresso, come si è detto, come somma di razionali, dovrebbe risultare che π è razionale. Ma, allora, dov'è l'errore nel nostro ragionamento?

L'errore sta nell'avere esteso *all'infinito* una proprietà dimostrata solo per un numero *finito* di operazioni: noi ci siamo infatti basati sulla proprietà che *la somma di n numeri razionali è un numero razionale*, senza tenere conto che la formula di Leibniz contiene infiniti addendi, e *infinito non è un numero*. In breve, non è detto che la somma di infiniti addendi razionali sia un numero razionale.
Vediamo un esempio più semplice: consideriamo la somma di infiniti *addendi razionali*

$$0{,}1+0{,}02+0{,}003+0{,}0004+\ldots;$$

il risultato è

$$0{,}1234\ \ldots$$

che è *un numero irrazionale*.

È anche interessante un esempio che prova "il contrario": consideriamo la somma dei seguenti *due numeri irrazionali*

$$0{,}121121112\ \ldots+0{,}323323332\ \ldots;$$

si ottiene

$$0{,}44444\ \ldots$$

cioè il numero periodico 0,(4), e, dunque, un *numero razionale.*

Si capisce quindi che bisogna fare grande attenzione se, in qualche modo, interviene *l'infinito*; si può essere facilmente condotti a un errore!

7. Parte seconda

Il metodo assiomatico

1. Errori e dubbi nella dimostrazione di alcune proprietà
2. Gli assiomi dei numeri reali
3. Lo sviluppo di una teoria assiomatica. Esempi
4. I fondamenti del metodo assiomatico: la coerenza degli assiomi e la loro decidibilità
5. Un'idea su un teorema di Ğodel
6. Dimostrazione del teorema di Gödel

Abbiamo finito gli esami? Possiamo essere sicuri che A è l'insieme dei numeri reali? Certamente no, perché anche l'insieme dei numeri razionali soddisfa tutti i requisiti sopra elencati: l'addizione, la moltiplicazione, l'ordinamento. Per far sì che A rappresenti davvero l'insieme dei reali dobbiamo *inventare* un'altra prova, una prova che soddisfano i reali ma non i razionali. Basterà tradurre in termini precisi l'idea che "i reali riempiono i buchi lasciati dai razionali". Riferiamoci a un caso numerico: scegliamo un numero irrazionale, per esempio $\sqrt{2}$, e osserviamo come s'inserisce nel "buco" lasciato dai razionali. Si ha:

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots$$

Possiamo ottenere subito due successioni di numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto e per eccesso:

per difetto	per eccesso
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
⋮	⋮

Queste due successioni di razionali si avvicinano sempre più a $\sqrt{2}$ ma non lo raggiungono mai; accade dunque che $\sqrt{2}$ è *l'elemento separatore* che "colma il buco" fra le due successioni. La rappresentazione sulla retta (fig. 1) illustra la situazione.

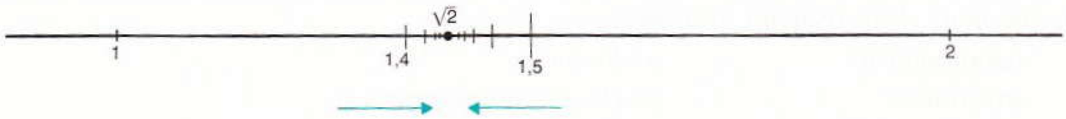


Fig. 1

È qui, nell'elemento separatore, la differenza che si cercava per distinguere i reali dai razionali: i razionali – e riferiamoci all'esempio di prima – non contengono sempre l'elemento separatore: $\sqrt{2}$ non appartiene infatti ai razionali. Perciò, per vedere se A è veramente l'insieme dei reali e non quello dei razionali, dovremo verificare che valga la seguente condizione:

4) *scelti due sottoinsiemi B e C di A, tali che ogni elemento di B sia minore o uguale ad ogni elemento di C, deve esistere in A un* **elemento separatore** *x, cioè un numero che gode di questa proprietà: è maggiore o uguale di ogni elemento b di B ed è, allo stesso tempo, minore o uguale di ogni elemento c di C:*

$$b \leq x \leq c.$$

E ora ci si rende conto che non è necessario vedere se, per gli elementi dell'insieme A, si può parlare di potenze, di radici, di logaritmi, ...: è chiaro che tutte queste operazioni sono possibili perché, per effettuarle, ci si basa sempre su operazioni già definite: per esempio, l'elevamento a potenza si basa sulla moltiplicazione.

Si decide allora che i 4 requisiti elencati, relativi all'addizione, alla moltiplicazione, all'ordinamento e all'elemento separatore, sono sufficienti per individuare i numeri reali; si decide cioè che: se un insieme soddisfa quei 4 requisiti, allora è l'insieme dei reali.

È questo un "nuovo modo di definire": non si dice che cosa sono i numeri reali, ma si descrivono attraverso le loro proprietà. Queste 4 proprietà vengono chiamate **assiomi**, parola di origine greca che significa "cose degne di essere credute"; quanto abbiamo descritto in questo paragrafo è dunque **la definizione assiomatica dei numeri reali**.

2. Gli assiomi dei numeri reali

I numeri reali: è importante avere delle idee chiare su questi numeri che costituiscono "il tessuto" su cui poggia gran parte dell'edificio matematico. I reali hanno però una natura sfuggente: sono infiniti ma hanno una potenza maggiore dei numeri naturali; sono quasi tutti trascendenti, ma quelli che incontriamo più di frequente non lo sono; riempiono degli spazi fra i razionali, che sembravano così fitti da non lasciare dei "buchi" sulla retta.

Davanti a una situazione così complessa si sente il bisogno di fare ordine, di ricominciare tutto da capo; cercheremo allora di andare "alla radice" in modo da poter dire, *esattamente*, che cosa sono questi numeri reali.

Per arrivare a una definizione abbiamo due possibilità: una, è quella di cercare di costruire i numeri reali a partire da altri insiemi numerici già noti, per esempio quello dei razionali; ma questo modo di procedere lascia sempre un fondo di incertezza, forse perché si parte da un tipo di numero per arrivare a un altro tipo.

Un'altra possibilità è questa: aggirare il problema, limitandosi ad elencare le proprietà che un'insieme deve avere perché vi si riconosca l'insieme R dei reali; in questo modo, *non si dice che cosa è un numero reale, ma si dice quali sono le sue proprietà caratteristiche.*

Noi seguiremo questa seconda strada. Abbiamo dunque un certo insieme A di numeri, e vogliamo indicare dei criteri per verificare se A è proprio l'insieme R dei reali. Dovremo, prima di tutto, far vedere che gli elementi di A si possono *addizionare* e *moltiplicare* e che **queste due operazioni, godono di certe proprietà.**

Cominciamo dall'**addizione**. È chiaro che, per procedere in modo sistematico, dobbiamo elencare tutte le proprietà dell'addizione, e fissare così i primi requisiti cui deve soddisfare l'insieme A.

1) *Fra gli elementi a,b,c di A deve esistere un'operazione, detta* **addizione** *(indicata con il segno $+$), che gode delle seguenti proprietà*:

commutativa:	$a+b=b+a$
associativa:	$a+(b+c)=(a+b)+c$
esistenza dello zero:	$a+0=a$
esistenza dell'opposto:	$a+(-a)=0.$

Procediamo in modo analogo per la **moltiplicazione**:

2) *fra gli elementi a,b,c di A deve esistere un'altra operazione, detta* **moltiplicazione** *(indicata con il semplice accostamento dei simboli o con un punto), che gode delle seguenti proprietà*:

commutativa:	$ab=ba$
associativa:	$a(bc)=(ab)c$
distributiva:	$a(b+c)=ab+ac$
esistenza dell'unità:	$a\cdot 1=a$
esistenza dell'inverso:	$a\cdot\frac{1}{a}=1$, ammesso che sia $a\neq 0$.

Se A "supera questi due esami" possiamo operare sui suoi elementi con le regole dell'algebra: possiamo infatti eseguire, oltre all'addizione e alla moltiplicazione, **la sottrazione** (per il fatto che esiste l'opposto) e **la divisione** (per il fatto che esiste l'inverso).

Ma questo non basta, perché ci sono ancora delle proprietà fondamentali: i numeri reali si possono **ordinare**, cioè, dati due numeri, si può sempre stabilire quale è il maggiore. Si possono quindi scrivere delle disuguaglianze, e modificarle con le regole dell'algebra. Dobbiamo dunque verificare che anche gli elementi di A si possono ordinare, e cioè:

3) *fra gli elementi a,b,c di A debbono valere le seguenti* **proprietà di ordinamento**:

riflessiva:	$a\leq a$
transitiva:	se $a\leq b$ e $b\leq c$, allora $a\leq c$
antisimmetrica:	se $a\leq b$ e $b\leq a$, allora $a=b$
	se $a\leq b$, allora $a+c\leq b+c$
	se $a\leq b$ e se $c\geq 0$, allora $ac\leq bc$.

Ora, in base ai primi tre assiomi, possiamo moltiplicare fra loro queste due disugualianze, e usare le regole dell'algebra; si ottiene:

$$x^2>x^2.$$

E questo è un risultato assurdo perché nessun numero può essere maggiore di se stesso. Si conclude che uno dei due numeri, z o $\frac{x}{z}$, è proprio il numero y che cerchiamo.

I due esempi appena visti permettono di capire come si procede con il metodo assiomatico: nulla, oltre agli assiomi, è dato per evidente o per scontato. In questo modo si vuole costruire una matematica *certa* in cui l'errore non può esistere.

3) Portiamo ora un esempio che è molto più espressivo dei precedenti; ci dà un'idea di come dimostrare che nell'insieme R sono contenuti dei numeri irrazionali. Dimostriamo in particolare che:

esiste in R un numero x tale che $x^2=2$.

Diciamo subito che la dimostrazione di questa proprietà poggia soprattutto sul 4° assioma, cioè sull'esistenza di un elemento separatore.

Dividiamo gli elementi di R in due sottoinsiemi A e B così definiti:

$A=\{$tutti i numeri positivi a tali che $a^2\leq 2\}$

$B=\{$tutti i numeri positivi b tali che $b^2\geq 2\}$.

Dalle disuguaglianze che definiscono questi due insiemi, e cioè

$$a^2\leq 2 \quad \text{e} \quad b^2\geq 2,$$

si ha, per la proprietà transitiva dell'ordinamento:

$$a^2\leq b^2,$$

e quindi, per *il teorema 1)*:

$$a\leq b,$$

e cioè tutti gli elementi di R sono divisi in due sottoinsiemi tali che gli elementi dell'uno sono minori o uguali agli elementi dell'altro. Ci troviamo dunque nel caso previsto dal 4° assioma, e perciò, fra gli elementi degli insiemi A e B, esiste un elemento separatore x.

Vogliamo ora dimostrare che $x^2=2$. Procediamo per assurdo: faremo vedere che non può essere

$$\text{né} \quad x^2<2 \quad \text{né} \quad x^2>2.$$

Se fosse

$$x^2<2,$$

applicando il 3° assioma si avrebbe

$$1<\frac{2}{x^2}.$$

Allora, per *il teorema 2)*, esisterebbe un numero y tale che

$$y>1 \quad \text{e} \quad y^2\leq\frac{2}{x^2}.$$

Ne seguirebbe

$$x^2y^2\leq 2$$

e quindi il numero xy dovrebbe appartenere all'insieme A. D'altra parte, questo stesso numero xy dovrebbe appartenere all'insieme B perché è certamente maggiore di x, dato che y è maggiore di 1.

Ma allora il numero xy apparterebbe contemporaneamente ad A e a B e, questo è assurdo. Si conclude che *non può essere*

$$x^2<2.$$

3. Lo sviluppo di una teoria assiomatica. Esempi

La definizione assiomatica dei numeri reali, data nel paragrafo precedente, lascia aperte molte questioni. Chi ci dice che quei quattro assiomi bastino veramente ad individuare i reali? E non esisteranno forse altri insiemi numerici che soddisfano gli stessi quattro assiomi? Per rispondere a queste domande, occorre vagliare accuratamente gli assiomi; si tratta di un lavoro lungo e delicato, tipico del "matematico di professione".

In questo paragrafo vedremo tre esempi di come si procede per dimostrare alcune proprietà dei reali, a partire dagli assiomi.

1) Vogliamo dimostrare il seguente **teorema**:

se x e y sono due numeri reali positivi, e se $x^2 \leq y^2$, allora risulta anche $x \leq y$.

Subito un esempio numerico: dato che risulta $3^2 < 4^2$, allora si ha anche $3<4$.

Prima di dimostrare, in generale, il teorema enunciato, occorre verificare se l'enunciato ha senso. Il simbolo di elevamento al quadrato ha senso perché è una abbreviazione della moltiplicazione di un numero per se stesso, e della moltiplicazione si parla nel 2° assioma; il simbolo $\leq$ è stato introdotto nel 3° assioma; numero positivo significa numero che non è ≤ 0, e quindi la sua definizione è ricondotta al 3° assioma.

Passiamo allora alla dimostrazione che svolgeremo *per assurdo*. Si parte dunque dall'

ipotesi: $x^2 \leq y^2$

e si suppone che risulti

$$x > y. \qquad (1)$$

Dall'assioma sull'ordinamento sappiamo che una disuguaglianza rimane valida se i due membri vengono moltiplicati per un numero reale positivo; allora, moltiplichiamo la (1) una volta per x e una per y; si ha:

$$x^2 > xy \quad \text{e} \quad xy > y^2.$$

Per la proprietà transitiva dell'ordinamento, ne segue:

$$x^2 > y^2,$$

e questo risultato contraddice l'ipotesi; ciò significa che, assieme all'ipotesi $x^2 \leq y^2$, non può risultare $x>y$. Vuol dire dunque che deve essere $x \leq y$, come si voleva dimostrare.

2) Vogliamo ora dimostrare **il teorema**:

se $x>1$, allora esiste un numero $y>1$ tale che $y^2 \leq x$.

Un esempio numerico: se $x=10$, esiste $y=3$ tale che $9<10$. Per dimostrare questo teorema, scegliamo un numero z compreso fra 1 e x, cioè:

$$1 < z < x;$$

notiamo subito che, per il 4° assioma, esiste certamente un numero che soddisfa a questa condizione.

Assieme al numero z consideriamo il numero $\frac{x}{z}$; questo numero è maggiore di 1 perché z è minore di x.

Dimostriamo ora che il numero y che cerchiamo è proprio uno di questi due numeri; dimostriamo cioè che risulta

$$\text{o} \quad z^2 \leq x \quad \text{oppure} \quad \frac{x^2}{z^2} \leq x.$$

Ragioniamo anche questa volta *per assurdo*: se nessuno di questi due numeri fosse quello cercato, dovrebbe essere

$$z^2 > x \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{z^2} > x.$$

Ora, quest'uguaglianza è falsa perché, per l'assioma introdotto, il 1° membro risulta uguale a 1, dato che

$$\frac{1}{0}(0\cdot 0)=\frac{1}{0}\cdot 0=1,$$

mentre il 2° membro risulta uguale a zero, perché

$$\left(\frac{1}{0}\cdot 0\right)\cdot 0=1\cdot 0=0.$$

Si arriva dunque a una contraddizione! Si conclude che il nuovo assioma e la proprietà associativa *non possono coesistere*, cioè non possono essere entrambi validi.

Questo esempio mette in luce che, nel fissare gli assiomi, si deve fare molta attenzione: **gli assiomi devono essere coerenti**, cioè non devono poter condurre ad una contraddizione.

Ma c'è un altro problema legato alla scelta degli assiomi. Per coglierne il senso portiamo un esempio "storico", proposto dal matematico greco Diofanto, uno scienziato del III secolo dopo Cristo, che può considerarsi come il primo algebrista. Il problema è questo: scoprire per quali valori dei coefficienti un'equazione ha *soluzioni intere*. La più nota equazione diofantea è

$$x^n+y^n=z^n; \tag{1}$$

si chiede per quali valori di n questa equazione ha soluzioni intere.

Per $n=2$ si ha l'equazione pitagorica

$$x^2+y^2=z^2,$$

e questa ha infinite terne di numeri interi che la soddisfano; per esempio le terne 3,4,5; 6,8,10; ... 5,12,13; 10,24,26; ...

Per $n>2$, il problema fu ripreso nel 1600 da Pierre Fermat, e va noto come "l'ultimo teorema di Fermat": la soluzione dell'equazione (1) è annotata, in forma sibillina, sul bordo della pagina di un libro. Dice Fermat che, esclusi dei casi particolari, il problema non si può risolvere, cioè non si riesce a scoprire per quali valori di n l'equazione (1) dia soluzioni intere; aggiunge che la soluzione che aveva trovato era troppo lunga e non entrava nel margine del libro!

La cosa impressionante è che nessuno era mai riuscito, fino al 1970, a dimostrare se l'asserzione di Fermat fosse vera o falsa, nonostante i tentativi fatti da grandi matematici in questi tre secoli. Parleremo di recenti risultati sulle equazioni diofantee alla fine del paragrafo 6.

Ma il problema solleva una questione ben più generale: è sempre possibile *decidere* se un teorema è vero o falso? Perché è chiaro che, volendo costruire una matematica in modo assolutamente certo, non possiamo accettare l'idea che esistano domande senza risposta: una teoria assiomatica deve essere tale che gli assiomi premessi permettano di decidere in ogni caso se una proposizione è vera o falsa.

Abbiamo così individuato due requisiti essenziali per ogni teoria assiomatica: la **coerenza** e la **decidibilità**.

5. Un'idea su un teorema di Gödel

Fra tutte le teorie assiomatiche che costituiscono le basi della matematica, quella più importante è **l'aritmetica dei numeri naturali**. È infatti da questa che, per successive estensioni, vengono introdotti i numeri interi relativi, i razionali, i reali, i complessi, e l'algebra, la geometria analitica, e via via tutte le matematiche superiori. Con la frase, diventata famosa, «Dio creò i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo», il matematico Leopold Kronecker (1823-1891) indicava la base sicura per la costruzione dell'edificio matematico.

Dobbiamo dunque verificare che la teoria assiomatica dell'aritmetica è ben fondata, ossia, che è *coerente e decidibile*; se riusciamo a dimostrare che ha questi due requisiti – diceva David Hilbert nel 1900 – avremo fatto della matematica un edificio logico che neanche l'eternità potrà demolire.

Con un ragionamento del tutto analogo si dimostra che *non può essere*

$$x^2>2.$$

Resta pertanto l'unica possibilità

$$x^2=2.$$

Abbiamo così dimostrato che l'insieme R che soddisfa i 4 assiomi del paragrafo precedente contiene il numero $\sqrt{2}$.

Le dimostrazioni che abbiamo riportato in questo paragrafo risultano senz'altro alquanto noiose, forse anche perché i risultati sono troppo semplici, troppo evidenti. Ma queste dimostrazioni vanno seguite con lo spirito critico di chi non vuole lasciare nessuno spazio all'intuizione: tutto deve essere dimostrato con rigore. La matematica sarà allora un terreno sicuro.

4. I fondamenti del metodo assiomatico: la coerenza degli assiomi e la loro decidibilità

Abbiamo visto in cosa consiste il metodo assiomatico:

- si formulano alcune proposizioni (dette assiomi, o anche postulati) che vengono assunte come vere;
- si dimostrano le altre proposizioni (teoremi) applicando con rigore le leggi della logica.

Viene subito da chiedersi: non si potrebbero dimostrare anche gli assiomi? La risposta è che non si può dimostrare "tutto"; occorrono delle proposizioni su cui basarsi e che si ammettono come vere. È proprio come nella costruzione di un dizionario: il significato di ogni parola è chiarito per mezzo di altre più semplici; ma non si riesce a spiegare il significato di tutte le parole, nessuna esclusa, per mezzo di altre. Si cadrebbe in un circolo vizioso! Ci si basa allora su alcune parole-chiave, che vengono assunte come note.

Bisogna tenere ben presente che gli assiomi ammessi possono essere cambiati, se ne potrà sostituire uno con un altro: si svilupperanno in tal modo geometrie diverse e algebre diverse[1]. Nella matematica, non c'è dunque un Dio che decide gli assiomi "giusti", quelli che tutti debbono accettare; è l'uomo che sceglie di volta in volta gli assiomi che preferisce, che ritiene più interessanti e più utili. Da questo punto di vista la matematica è umana quanto la storia o la poesia, e l'uomo ne è padrone perché è lui che la costruisce.

È chiaro che nello scegliere gli assiomi, si possono commettere degli errori. Rendiamocene conto su un esempio, sempre preso dallo studio dei numeri reali.

Immaginiamo di aggiungere *un altro assioma* relativo alla moltiplicazione dei numeri reali, di cui abbiamo parlato nel paragrafo 2; questo: *esiste un elemento inverso dello zero.* Ammettiamo cioè che esista un numero $\frac{1}{0}$ tale che

$$\frac{1}{0}\cdot 0=1. \tag{1}$$

Diciamo subito che... sarebbe molto comodo perché, così, si potrebbe dividere per zero!

Vediamo che cosa accadrebbe se fosse valida la (1). Ricordiamo che, per la moltiplicazione, vale la proprietà associativa, cioè

$$a(b\cdot c)=(ab)\cdot c;$$

nel nostro caso deve essere

$$\frac{1}{0}(0\cdot 0)=\left(\frac{1}{0}\cdot 0\right)\cdot 0.$$

[1] Nel Vol. 2, Cap. 4, si parla appunto di "Geometria non euclidea" e di "Algebra di Boole".

Gödel riesce a dimostrare che le espressioni aritmetiche hanno la potenza del numerabile, che, cioè, si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

Procede così: scrive un elenco formato dai vari *simboli* aritmetici (e cioè i segni delle operazioni e le dieci cifre 0, 1, 2, ...9), e a ciascuno di questi simboli associa un *numero*, fissando dunque una corrispondenza a piacere; per esempio così:

simbolo	numero
=	1
+	2
−	3
×	4
:	5
0	6
1	7
2	8
3	9
4	10
5	11
6	12
7	13
8	14
9	15
x	16
y	17
z	18
⋮	⋮

Noi, nell'elenco, abbiamo scritto 18 simboli, mettendo anche tre lettere dell'alfabeto. È chiaro che possiamo aggiungere ancora delle altre lettere; si arriverebbe così a circa 40 simboli. Ma, anche con qualche simbolo in più, non si potrebbe arrivare molto lontano; quello che è veramente importante è che questi simboli, *pur essendo in numero finito, permettono di scrivere infinite espressioni aritmetiche*.

Vediamo ora con un esempio come queste espressioni aritmetiche si possono associare ai numeri. Scriviamo una semplice espressione aritmetica; questa:

$$1=1.$$

Scorriamo il nostro elenco, e ad ogni simbolo (1, =, 1) sostituiamo il "suo" numero; la nostra espressione si traduce così:

$$7 \quad 1 \quad 7.$$

Facciamo ora un passo avanti. Introduciamo la sequenza dei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., e assegnamo come esponenti ai primi tre numeri primi, moltiplicati fra loro, i numeri 7, 1, 7; si ottiene il numero:

$$n=2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^7.$$

Eseguendo i calcoli si ha

$$2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^7=30 \text{ milioni}.$$

Dunque, all'espressione aritmetica

$$1=1$$

possiamo far corrispondere il numero 30 milioni.

Viceversa, se ci viene dato il numero 30 milioni, senza nessun'altra informazione, saremmo in grado di "risalire" all'espressione 1=1. Ecco come si procede: si scompone il numero 30 milioni in fattori primi, e si ottiene, *scrivendo i numeri primi in ordine crescente*

$$30 \text{ milioni}=2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^7,$$

Ora, questo problema – far vedere che l'aritmetica è coerente e decidibile – si rivelò più difficile del previsto; si dovette attendere fino al 1931 per avere una risposta definitiva.

La risposta fu trovata da un ingegnere austriaco che, nel 1900, non era ancor nato; il suo nome è Kurt Gödel (1903-1978). Il suo modo di pensare è talmente originale che vale la pena di conoscerlo, sia pure in forma semplificata.

Per riuscire a cogliere le idee di Gödel, poggiamo l'attenzione su un esempio. Avrete l'impressione che ci stiamo allontanando dalla matematica, ma troverete in questo esempio tutta la forza della logica e vedrete poi che, anche se non sembra, le proposizioni su cui si ragiona si possono tradurre in termini matematici.
Consideriamo dunque la seguente frase:

«*La proposizione P che sto leggendo è falsa*». (1)

Ora, ragioniamo sulla (1): se P fosse vera, vorrebbe dire che è vero ciò che P afferma, e cioè che P è falsa. Si ha dunque:

dall'ipotesi «P è vera» discende «P è falsa»,

cioè, usando il simbolo d'implicazione ($\Rightarrow$),

P è vera $\Rightarrow$ P è falsa.

Ora, questo risultato è assurdo! Supponiamo allora che la (1) sia falsa, cioè ammettiamo come ipotesi:

«È falso che P sia falsa»,

ma questo significa che *P è vera*, cioè:

P è falsa $\Rightarrow$ P è vera.

La conclusione è la seguente: *non si può decidere se la proposizione P è vera o falsa; quella proposizione è dunque* **indecidibile**.

Si è detto all'inizio che ci stavamo allontanando dalla matematica; è vero, perché la proposizione P fa parte del linguaggio comune. Ma – e questa è l'idea geniale – Gödel dimostra che frasi del tipo di quelle ora considerate si possono esprimere in modo matematico, e più precisamente aritmetico; ne parleremo nel prossimo paragrafo. E, dunque, l'aritmetica contiene proposizioni indecidibili.

6. Dimostrazione del teorema di Gödel

Vogliamo ora precisare quanto si è detto alla fine del paragrafo precedente. Condurremo il ragionamento in due tempi, dimostrando che:

I) le espressioni aritmetiche formano un'infinità numerabile;
II) è possibile scrivere in forma aritmetica la proposizione P del paragrafo precedente.

I) Per prima cosa, Gödel si pone la domanda: quante sono le espressioni aritmetiche che si possono scrivere? È chiaro che sono infinite. Basta qualche esempio per rendersene conto; sono espressioni aritmetiche queste:

$2+3=5$
$8-2=6$
$7=7$
$3 \cdot 8=24$
$10:5=2$
$3x=2$
$x^n+y^n=z^n$;

e poi se ne possono scrivere quante se ne vogliono, di semplici e di complicate, collegando i numeri con i segni delle varie operazioni.

Sono infinite, sì, ma – come sappiamo – c'è una gerarchia fra gli infiniti: quale potenza avranno le espressioni aritmetiche? quella del numerabile? o quella del continuo?...

significa affermare che la proposizione n. 360 è falsa. Ma la proposizione n. 360 è proprio "$360 \in A$"; dunque abbiamo scritto, con simboli aritmetici: «la proposizione P che sto leggendo è falsa».

Abbiamo dunque dimostrato che *una proposizione*, che è quella P discussa al paragrafo 5, *si può esprimere in termini matematici*, valendosi solamente di numeri. Ma allora, come ci sono delle proposizioni indecidibili (e l'abbiamo visto al paragrafo 5 a proposito della proposizione P), così *ci saranno delle proposizioni matematiche indecidibili*.

Questo risultato è sconvolgente: **una matematica coerente può contenere delle proposizioni indecidibili**!

E di questo risultato ne abbiamo una prova: nel 1970 il matematico russo Matijasevic è riuscito a dimostrare che non vi è nessun mezzo per stabilire se esistano soluzioni intere delle equazioni diofantine.

E allora? Che cosa pensare di tutta la matematica studiata? È davvero costellata di dubbi? Dobbiamo lasciarci andare al pessimismo e constatare che il nostro studio è stato inutile?

Riflettiamo su tante questioni sviluppate in questo volume: alcune volte gli argomenti erano motivati dall'uso che si fa sempre più spesso di rappresentazioni grafiche, altre volte da applicazioni in fisica o in tecnologia, altre ancora da problemi di biologia o da questioni finanziarie, o dal desiderio di conoscere meglio lo spazio in cui viviamo, o...

Possiamo avere dei dubbi su tutto questo? possiamo dire che la matematica che abbiamo scoperto e che abbiamo applicato non è *coerente*? o che non è *decidibile*?

Ci si domanda quale sia la matematica "vera": è la matematica pura? O è quella che si può applicare?

Riflettiamo sulla storia: i grandi matematici del passato – ci si chiede – sono stati motivati unicamente da interessi fuori della realtà? La matematica che ci viene tramandata come "pura", era veramente pura? Le coniche, per esempio, sono venute in mente ai Greci solo per soddisfare un interesse intellettuale? Non saranno stati, invece, dei problemi di ottica, verso cui erano particolarmente sensibili, a suscitare la prima motivazione allo studio delle coniche?

E non è forse – facciamo un salto di secoli – la necessità di semplificare i calcoli che ha portato nel Cinquecento alla scoperta di uno strumento così potente come il logaritmo? Una scoperta che, chiarita su base teorica, ha condotto ad una scoperta ancora più importante, quella della legge esponenziale; una funzione, questa, che ha poi indirizzato la sua luce sul mondo della realtà, trovando nei campi più disparati, dalla biologia alla fisica, dalla matematica finanziaria alle scienze sociali, la sua immagine concreta.

E non è forse questo ritrovare lo stesso "motivo" in situazioni tanto diverse che ha condotto successivamente ad un'analisi teorica della legge esponenziale, e, quindi, all'analisi di altre leggi, obbligando i matematici a precisare in termini esatti il concetto di funzione?

Bastano pochi esempi per rendersi conto che è proprio questo continuo rimbalzare da intuizioni motivate da problemi concreti a ripensamenti critici sulle scoperte fatte, a far avanzare, ogni volta, la matematica. Non è dunque possibile scinderla in due reparti separati: la matematica pura e quella applicata. Se allontaniamo dai nostri interessi la realtà, se, presi dal gioco affascinante ma freddo della logica, ci dedichiamo unicamente a *uno studio assiomatico*, noi togliamo alla matematica la sua linfa vitale, per ragionare sui nostri ragionamenti, per ripiegarci su noi stessi, insensibili al mondo che ci circonda. No, non è questa la scienza che vogliamo!

dove, come esponenti, compaiono i numeri

7 1 7;

ora, valendosi dell'elenco, letto in senso opposto, questo numero si traduce proprio nell'espressione:

$1=1$.

Numeri come, $2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^7$, che risolvono in modo geniale il problema della corrispondenza fra espressioni aritmetiche e numeri naturali, si chiamano **numeri di Gödel**: le basi dei numeri di Gödel sono i numeri primi, scritti in ordine crescente, e gli esponenti sono i numeri che corrispondono ai simboli dell'espressione aritmetica che si considera.

Si conclude che *ad ogni espressione aritmetica si può associare un numero naturale*, e viceversa: da *ogni naturale si può ricavare un'espressione*; fra questi due insiemi si può quindi stabilire una corrispondenza biunivoca. Dunque, le espressioni aritmetiche formano *un'infinità numerabile*.

II) Abbiamo già osservato che è del tutto arbitrario il modo in cui ad ogni simbolo viene associato un numero; quel "dizionario", insomma, può essere fissato a piacere. Nell'elenco seguente sono scritti alcuni simboli di un altro "dizionario" (tenere presente che il simbolo $\in$, che si trova al 2° posto significa "appartiene"):

simbolo	*numero*
A	1
$\in$	2
360	3
2	4
$<$	5
0	6
$=$	7
⋮	⋮

Scriviamo ora delle espressioni aritmetiche; alcune sono vere e alcune sono false:

$360<2$ è falsa perché 360 supera 2
$2x=0$ è vera solo se $x=0$
$5\in\{3;\ 17;\ 159\}$ è falsa perché 5 non appartiene all'insieme dei numeri scritti
$x+x=2x$ è vera.

È proprio indagando sul *valore di verità* (o di falsità) che saremo condotti a passare dalla considerazione di espressioni aritmetiche alla considerazione di **proposizioni**.

Per ciascuna delle espressioni aritmetiche che abbiamo scritto si può calcolare il corrispondente *numero di Gödel*; alcuni numeri di Gödel corrisponderanno a espressioni false, altri a espressioni vere. Bene, *poniamo in uno stesso insieme tutti i numeri di Gödel che corrispondono a espressioni false, e indichiamo con A questo insieme*. Consideriamo ora questa espressione aritmetica:

$360\in A$.

Con il solito procedimento calcoliamo il suo numero di Gödel, valendoci del nostro "dizionario", si ha:

$$\begin{array}{ccc} 360 & \in & A \\ | & | & | \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Quindi il numero di Gödel di "$360\in A$" è:

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$.

E ora riflettiamo. Poiché l'insieme A contiene i numeri di Gödel delle proposizioni false, scrivere

$360\in A$

significa affermare che la proposizione n. 360 è falsa. Ma la proposizione n. 360 è proprio "$360 \in A$"; dunque abbiamo scritto, con simboli aritmetici: «la proposizione P che sto leggendo è falsa».

Abbiamo dunque dimostrato che *una proposizione*, che è quella P discussa al paragrafo 5, *si può esprimere in termini matematici*, valendosi solamente di numeri. Ma allora, come ci sono delle proposizioni indecidibili (e l'abbiamo visto al paragrafo 5 a proposito della proposizione P), così *ci saranno delle proposizioni matematiche indecidibili*.

Questo risultato è sconvolgente: **una matematica coerente può contenere delle proposizioni indecidibili**!

E di questo risultato ne abbiamo una prova: nel 1970 il matematico russo Matijasevic è riuscito a dimostrare che non vi è nessun mezzo per stabilire se esistano soluzioni intere delle equazioni diofantine.

E allora? Che cosa pensare di tutta la matematica studiata? È davvero costellata di dubbi? Dobbiamo lasciarci andare al pessimismo e constatare che il nostro studio è stato inutile?

Riflettiamo su tante questioni sviluppate in questo volume: alcune volte gli argomenti erano motivati dall'uso che si fa sempre più spesso di rappresentazioni grafiche, altre volte da applicazioni in fisica o in tecnologia, altre ancora da problemi di biologia o da questioni finanziarie, o dal desiderio di conoscere meglio lo spazio in cui viviamo, o...

Possiamo avere dei dubbi su tutto questo? possiamo dire che la matematica che abbiamo scoperto e che abbiamo applicato non è *coerente*? o che non è *decidibile*?

Ci si domanda quale sia la matematica "vera": è la matematica pura? O è quella che si può applicare?

Riflettiamo sulla storia: i grandi matematici del passato – ci si chiede – sono stati motivati unicamente da interessi fuori della realtà? La matematica che ci viene tramandata come "pura", era veramente pura? Le coniche, per esempio, sono venute in mente ai Greci solo per soddisfare un interesse intellettuale? Non saranno stati, invece, dei problemi di ottica, verso cui erano particolarmente sensibili, a suscitare la prima motivazione allo studio delle coniche?

E non è forse – facciamo un salto di secoli – la necessità di semplificare i calcoli che ha portato nel Cinquecento alla scoperta di uno strumento così potente come il logaritmo? Una scoperta che, chiarita su base teorica, ha condotto ad una scoperta ancora più importante, quella della legge esponenziale; una funzione, questa, che ha poi indirizzato la sua luce sul mondo della realtà, trovando nei campi più disparati, dalla biologia alla fisica, dalla matematica finanziaria alle scienze sociali, la sua immagine concreta.

E non è forse questo ritrovare lo stesso "motivo" in situazioni tanto diverse che ha condotto successivamente ad un'analisi teorica della legge esponenziale, e, quindi, all'analisi di altre leggi, obbligando i matematici a precisare in termini esatti il concetto di funzione?

Bastano pochi esempi per rendersi conto che è proprio questo continuo rimbalzare da intuizioni motivate da problemi concreti a ripensamenti critici sulle scoperte fatte, a far avanzare, ogni volta, la matematica. Non è dunque possibile scinderla in due reparti separati: la matematica pura e quella applicata. Se allontaniamo dai nostri interessi la realtà, se, presi dal gioco affascinante ma freddo della logica, ci dedichiamo unicamente a *uno studio assiomatico*, noi togliamo alla matematica la sua linfa vitale, per ragionare sui nostri ragionamenti, per ripiegarci su noi stessi, insensibili al mondo che ci circonda. No, non è questa la scienza che vogliamo!